17. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); František Zítek (editor): 17. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1967-1968. 10. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. pp. 93–119.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404576

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1. Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqq 2$). Najděte všechna reálná řešení soustavy

$$x_1x_2 = a_1,\ x_2x_3 = a_2,\ \ldots,\ x_{n-1}x_n = a_{n-1},\ x_nx_1 = a_n. \qquad (1)$$

ŘEŠENÍ. Je-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ řešení soustavy (1), jsou všecka čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ různá od nuly. Rozřešme soustavu (1) pro $n = 2$ a $n = 3$.

Pro $n = 2$ dostaneme soustavu $x_1x_2 = a_1$, $x_2x_1 = a_2$. Tato soustava je řešitelná právě tehdy, když je

$$a_1 = a_2; \qquad (2)$$

pak má soustava (1) nekonečně mnoho řešení.

Pro $n = 3$ dostaneme soustavu $x_1x_2 = a_1$, $x_2x_3 = a_2$, $x_3x_1 = a_3$. Z ní vyjde $x_1^2 = \dfrac{a_1a_3}{a_2}$. Protože je $\dfrac{a_1a_3}{a_2} > 0$, dostaneme dvě navzájem různá čísla x_1 jako řešení rovnice $x_1^2 = \dfrac{a_1a_3}{a_2}$. Ke každému x_1 vypočteme $x_2 = \dfrac{a_1}{x_1}$, $x_3 = \dfrac{a_3}{x_1}$. Dále $x_2x_3 = \dfrac{a_1a_3}{x_1^2} = a_2$. Soustava (1) má tedy pro $n = 3$ právě dvě řešení.

Předchozí pokus ukazuje, že bude vhodné rozlišit n sudé a n liché.

a) Je-li n číslo sudé větší než 2, platí

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1}x_n) = (x_2x_3)(x_4x_5) \cdot \ldots \cdot (x_nx_1);$$

po dosazení z (1) dostaneme

$$a_1a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = a_2a_4 \cdot \ldots \cdot a_n. \qquad (3)$$

Není-li splněna podmínka (3), je soustava (1) neřešitelná. Platí-li (3), zvolíme $x_1 \neq 0$ a z první až $(n-1)$. rovnice (1) vypočteme postupně $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Tím je zaručeno, že těchto n čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňuje prvních $n - 1$ rovnic (1); ověříme, že splňují i poslední rovnici (1). Platí totiž

$$x_n x_1 = \frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\,.\,\ldots\,.\,(x_{n-1}x_n)}{(x_2x_3)\,.\,\ldots\,.\,(x_{n-2}x_{n-1})} = \frac{a_1a_3\ldots a_{n-1}}{a_2a_4\ldots a_{n-2}}. \qquad (4)$$

Podle (3) je pravá strana (4) rovna a_n. Tím je dokázáno: platí-li (3), má soustava (1) nekonečně mnoho řešení. To platí i pro $n = 2$, kdy se podmínka (3) redukuje na podmínku (2).

b) Je-li n liché číslo, vypočteme

$$\frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\,.\,\ldots\,.\,(x_nx_1)}{(x_2x_3)\,.\,(x_4x_5)\,.\,\ldots\,.\,(x_{n-1}x_n)} = \frac{a_1a_3\,.\,\ldots\,.\,a_n}{a_2a_4\,.\,\ldots\,.\,a_{n-1}}. \qquad (5)$$

Levá strana (5) je zřejmě rovna x_1^2; pravá strana je číslo kladné. Z rovnice

$$x_1^2 = \frac{a_1a_3\,.\,\ldots\,.\,a_n}{a_2a_4\,.\,\ldots\,.\,a_{n-1}} \qquad (6)$$

vypočteme dvě různé hodnoty x_1; z první až $(n - 1)$. rovnice (1) pak vypočteme k určitému kořenu x_1 rovnice (6) postupně $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Tím je zaručeno, že těchto n čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňuje prvních $n - 1$ rovnic (1); ověříme, že splňují i poslední rovnici (1).

Vypočteme $\dfrac{x_1}{x_n}$. Platí

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\,.\,\ldots\,.\,(x_{n-2}x_{n-1})}{(x_2x_3)(x_4x_5)\,.\,\ldots\,.\,(x_{n-1}x_n)}. \qquad (7)$$

Pravá strana (7) je rovna $\dfrac{a_1a_3\,.\,\ldots\,.\,a_{n-2}}{a_2\,.\,a_4\,.\,\ldots\,.\,a_{n-1}}$, což je podle rovnice (6) rovno $\dfrac{x_1^2}{a_n}$. Rovnice (7) má tedy tvar

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1^2}{a_n};$$

a po dělení číslem x_1 ($x_1 \neq 0$) dostaneme $x_n x_1 = a_n$, což je poslední rovnice (1).

Shrnutí. Pro n sudé je soustava (1) neřešitelná, neplatí-li podmínka (3); platí-li (3), má nekonečně mnoho řešení. Pro n liché má soustava (1) právě dvě řešení.

2. Pre každé tri nezáporné čísla x, y, z platí nerovnosť

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0;$$

dokážte. V ktorých prípadoch nastane rovnosť?

RIEŠENIE. Pre každé dve nezáporné čísla x, y zrejme platí: $0 \leqq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, pričom rovnosť nastane len pre $x = y$. Z tejto nerovnosti priamo vyplýva tzv. *Cauchyho nerovnosť*: $\sqrt{xy} \leqq \dfrac{x + y}{2}$, t. j. geometrický priemer nezáporných čísel je menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru. S použitím Cauchyho nerovnosti dostaneme

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq$$

$$\geqq x\left(x - \frac{y + z}{2}\right) + y\left(y - \frac{x + z}{2}\right) + z\left(z - \frac{x + y}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 - xy - xz + 2y^2 - xy - yz + 2z^2 - xz - yz) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geqq 0,$$

čím je daná nerovnosť dokázaná.

Rovnosť v poslednej nerovnosti môže zrejme nastať len pre $x = y = z$, kedy nastane rovnosť aj v dokazovanej nerovnosti.

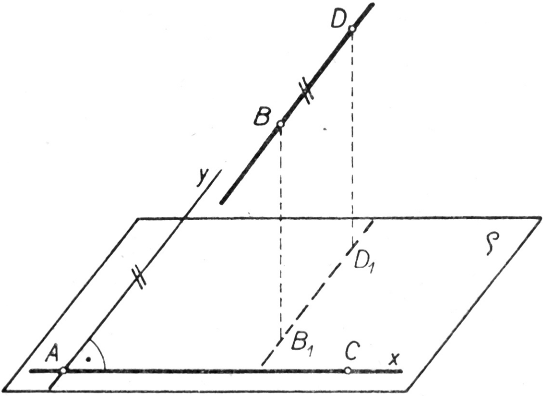
Tým je úloha vyriešená.

3. V prostoru jsou dány čtyři různé body A, B, C, D.
a) Jestliže $AC \perp BD$, pak je $AB^2 + CD^2 = BC^2 +$

$+ AD^2$ a obráceně: je-li $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, pak je $AC \perp BD$.

b) Jestliže $AC \perp BD$ a zároveň $AD \perp BC$, pak je také $AB \perp CD$.

Dokažte.



Obr. 33

ŘEŠENÍ. a) (Obr. 33.) Přímkou AC vedeme rovinu ϱ rovnoběžnou s přímkou BD a označíme B_1, D_1 průměty bodů B, D do roviny ϱ; zřejmě $BD \parallel B_1D_1$. Označíme $BB_1 = DD_1 = v$ a v rovině ϱ zaveďme soustavu kartézských souřadnic tak, aby polopřímka AC byla kladnou poloosou x; pak jsou souřadnice bodů

$A \equiv [0; 0]$, $B_1 \equiv [x_1; y_1]$, $C \equiv [x_2; 0]$, $D_1 \equiv [x_3; y_3]$.

Jestliže $AC \perp BD$, pak

$$x_1 = x_3. \tag{1}$$

Dále podle Pythagorovy věty (vzorce pro vzdálenost dvou bodů)

$$AB^2 + CD^2 = x_1^2 + y_1^2 + v^2 + (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 + v^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2v^2 - 2x_2x_3; \qquad (2)$$
$$BC^2 + AD^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + v^2 + x_3^2 + y_3^2 + v^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2v^2 - 2x_1x_2. \qquad (3)$$

Obě rovnosti (2), (3) platí i v tom případě, splyne-li některý z bodů B_1, D_1 s některým z bodů A, C nebo v případě, že $v = 0$.

Jestliže $BD \parallel B_1D_1 \perp AC$, pak $x_1 = x_3$; z (2), (3) pak plyne

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2. \qquad (4)$$

Obráceně, platí-li (4), pak podle (2), (3) $x_2(x_1 - x_3) = 0$. Protože $x_2 \neq 0$ (platí totiž $A \not\equiv C$), pak $x_1 = x_3$, tj. $BD \parallel B_1D_1 \perp AC$.

b) Z předpokladů plyne podle odst. a) jednak (4), jednak (výměnou C, D) vztah

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2. \qquad (5)$$

Spojením (4),(5) dostaneme $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$ a opět podle odst. a) vztah $AB \perp CD$.

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Platí-li o čtyřech různých bodech A, B, C, D, že $AC \perp BD$, veďme přímkou BD rovinu ϱ kolmou k přímce AC. Označme P průsečík přímky AC s rovinou ϱ. Zřejmě platí

$$AB^2 = AP^2 + BP^2,$$
$$CD^2 = CP^2 + DP^2$$

a obdobně

$$BC^2 = BP^2 + CP^2,$$
$$AD^2 = AP^2 + DP^2.$$

Sečtením dostáváme ihned

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2. \qquad (1)$$

Předpokládejme nyní, že o různých bodech A, B, C, D platí (1). Označme P patu kolmice z bodu B na přímku

AC, Q patu kolmice z bodu D na přímku AC. Dokážeme, že $P \equiv Q$.

Protože $BC^2 = BP^2 + CP^2$, $AB^2 = AP^2 + BP^2$, je

$$BC^2 - AB^2 = CP^2 - AP^2. \tag{2}$$

Obdobně ze vztahů $CD^2 = CQ^2 + DQ^2$, $AD^2 = AQ^2 + DQ^2$ dostáváme

$$CD^2 - AD^2 = CQ^2 - AQ^2. \tag{3}$$

Podle (1)

$$BC^2 - AB^2 = CD^2 - AD^2,$$

takže z (2) a (3)

$$CP^2 - AP^2 = CQ^2 - AQ^2. \tag{4}$$

Na přímce AC zaveďme jednu souřadnici takto: bod A bude počátek se souřadnicí nula, bod C bude bod o souřadnici 1. Označme p souřadnici bodu P, q souřadnici bodu Q. Platí tedy $AP^2 = p^2$, $AQ^2 = q^2$, $CP^2 = (1 - p)^2$, $CQ^2 = (1 - q)^2$. Ze (4) vyplývá, že

$$(1 - p)^2 - p^2 = (1 - q)^2 - q^2$$

neboli po úpravě

$$p = q.$$

Platí tedy $P \equiv Q$. To však znamená, že přímka BD leží v rovině ϱ vedené bodem P kolmo k přímce AC. Proto $BD \perp AC$.

b) Nechť $AC \perp BD$ a zároveň $AD \perp BC$. Podle části a)

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

a zároveň

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Proto také

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2,$$

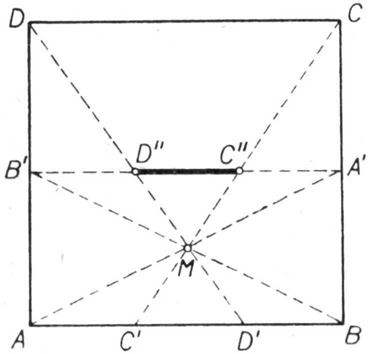
odkud podle a) vyplývá, že

$$AB \perp CD.$$

Tím je úloha rozřešena.

4. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 8 cm. V jeho vnútri je daný bod M, ktorého vzdialenosti od strán AB, AD sú v uvedenom poradí 2 cm a 4 cm. Vyšetrite množinu stredov všetkých úsečiek, ktoré obsahujú bod M a ktorých koncové body ležia na obvode štvorca $ABCD$. (Použite metódu súradníc.)

RIEŠENIE. Bod M spojíme so všetkými vrcholmi štvorca $ABCD$ a určíme priesečníky A', B', C', D' týchto priamok s obvodom štvorca (obr. 34). Teraz budeme



Obr. 34

skúmať úsečky XY obsahujúce bod M, ktorých koncové body X, Y sú bodmi obvodu štvorca $ABCD$, a ktoré ležia vo dvojiciach vrcholových uhlov:

a) $\sphericalangle CMD$ a $\sphericalangle C'MD'$;

b) $\sphericalangle DMB'$ a $\sphericalangle D'MB$;

c) $\sphericalangle B'MA$ a $\sphericalangle BMA'$;

d) $\sphericalangle AMC'$ a $\sphericalangle A'MC$.

V prípade a) je časťou hľadanej množiny **M** stredov úsečiek XY úsečka $C''D''$, ktorá je prienikom strednej priečky $A'B'$ s uhlom $\sphericalangle CMD$ (obr. 34). V prípade c) dostaneme jediný bod M ako časť množiny **M**.

Zostáva vyšetriť případy b) a d). Ak vyšetríme časť množiny **M** v prípade b), budeme poznať aj jej časť v prípade d), pretože obe časti sú zrejme súmerne združené podľa osi úsečky AB.

Časť množiny **M** v prípade b) vyšetríme metódou súradníc. Za kladné polosi kartézskej súradnicovej sústavy zvolíme polpriamky AB (x) a AD (y). Potom je $M \equiv [4; 2]$. Budeme vyšetrovať analyticky množinu **P** stredov všetkých úsečiek XY, ktoré obsahujú bod M, a ktorých koncové body ležia na priamkach AB, AD. Do úvahy pritom zrejme neprichádzajú úsečky rovnobežné s osami AB, AD, preto môžeme skúmať len úsečky ležiace v priamkach

$$y - 2 = t(x - 4), \tag{1}$$

kde t je parametr. Rovnica (1) vyjadruje potom ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom M a rôznobežnú s osou y ($\equiv AD$). Priesečníky priamky (1) so súradnicovými osami sú

$$X \equiv \left[4 - \frac{2}{t}; 0\right], \quad Y \equiv [0; 2 - 4t]. \tag{2}$$

Je totiž $t \neq 0$, pretože podľa predchádzajúceho je priamka (1) rôznobežná tiež s osou x($\equiv AB$). Súradnice stredu Z úsečky XY sú podľa (2)

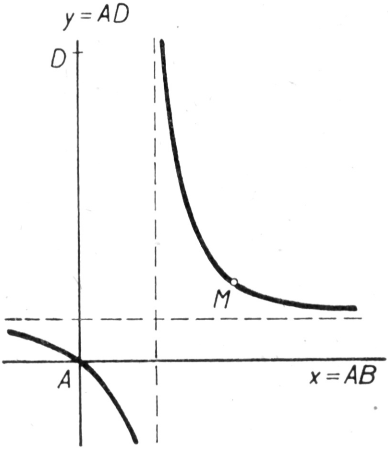
$$x = 2 - \frac{1}{t}, \qquad y = 1 - 2t. \tag{3}$$

Vylúčením parametra t z rovníc (3) dostaneme

$$(x - 2)(y - 1) = 2, \tag{4}$$

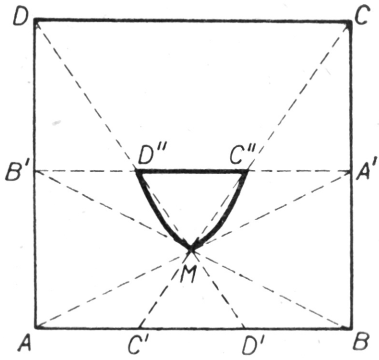
čo je rovnica rovnoosej hyperboly s asymptotami $x = 2$,

$y = 1$, ktorá obsahuje body $[0; 0]$ i $[4; 2]$ (obr. 35). Obrátením postupu zistíme, že každý bod hyperboly (4) patrí do množiny **P**. Časť množiny **M** v prípade b) je prienik hyperboly (4), (resp. jej vetvy ležiacej v prvom kvadrante) s vrcholovými uhlami $\sphericalangle DMB'$ a $\sphericalangle D'MB$.



Obr. 35

Ľahko zistíme, že hyperbola (4) sa dotýka v bode M priamky BB'. Táto priamka má totiž rovnicu $x + 2y = 8$. Ak dosadíme stadiaľ za x do (4), po úprave vyjde $y^2 - 4y + 4 = 0$ čiže $(y - 2)^2 = 0$. Priamka BB' má teda s hyperbolou (4) jediný spoločný bod $M \equiv [4; 2]$ a nie je rovnobežná s asymptotou. Je to teda skutočne dotýčnica hyperboly. Pretože vďaka vyššie uvedenej symetrii je tým vyšetrená aj časť množiny **M**, ktorá leží vo vrcholových uhloch $\sphericalangle AMC'$ a $\sphericalangle A'MC$ (prípad d), môžeme doplniť obr. 34 na „*erb*“, ktorého obvod je hľadaná množina **M** (obr. 36).



Obr. 36

2. *KATEGORIE B*

1. Na kruhové dráze vyjeli z téhož místa A v témž okamžiku v opačných smyslech dva cyklisté. Pomalejší, který jel rychlostí 6 m/s, potkal druhého cyklistu v prvním svém okruhu dvakrát, v druhém okruhu třikrát, v třetím okruhu zase dvakrát, přitom vždycky mimo místo A. Najděte co nejužší meze pro rychlost druhého cyklisty.

ŘEŠENÍ. Je-li t_k doba (měřená v sekundách od počátku jízdy), v které se oba cyklisté potkali po k-té, je

$$6t_k + vt_k = k \cdot s, \tag{1}$$

kde s je délka kruhové dráhy v metrech a v rychlost druhého cyklisty v m/s. Z (1) plyne

$$t_k = \frac{ks}{6 + v}. \tag{2}$$

Protože $\frac{s}{6}$ je doba, za kterou projel pomalejší cyklista jednou kruhovou dráhu, pak podle textu úlohy

$$t_2 < \frac{s}{6} < t_3, \quad t_5 < \frac{2s}{6} < t_6, \quad t_7 < \frac{3s}{6} < t_8, \tag{3}$$

tj. vzhledem ke (2)

$$\frac{2s}{6+v} < \frac{s}{6} < \frac{3s}{6+v}, \quad \frac{5s}{6+v} < \frac{2s}{6} < \frac{6s}{6+v},$$

$$\frac{7s}{6+v} < \frac{3s}{6} < \frac{8s}{6+v}. \tag{4}$$

Z (4) dostaneme po úpravě

$6 < v < 12$, $9 < v < 12$, $8 < v < 10$, tj. $9 < v < 10$. Rychlost druhého cyklisty je mezi 9 a 10 m/s.

2. Na kružnici k je daných n bodov, z ktorých žiadne dva neležia na tom istom priemere. Potom možno viesť stredom kružnice k takú priamku p, že každá z opačných polrovín s hranicou p obsahuje z daných bodov rovnaký počet. Dokážte.

RIEŠENIE. Označme $\boldsymbol{M}$ množinu daných bodov, S stred kružnice k. Ku každému bodu X kružnice k priradíme celé číslo $p(X) = m - m'$, kde m je počet bodov množiny $\boldsymbol{M}$, ktoré ležia v tej polrovine $\nu^+(X)$ s hraničnou priamkou SX, ktorá vznikne otočením polpriamky SX o uhly 0° až 180° v kladnom zmysle, m' je počet bodov množiny $\boldsymbol{M}$, ktoré ležia v polrovine $\nu^-(X)$ opačnej k polrovine $\nu^+(X)$.

Číslo $p(X)$ môžeme zrejme vyjadriť tiež iným spôsobom: Označme $\boldsymbol{M}'$ množinu súmernú k množine $\boldsymbol{M}$ podľa stredu S. Množina $\boldsymbol{M}'$ sa skladá taktiež z n bodov ležiacich na kružnici k. Pretože žiadne dva body z množiny $\boldsymbol{M}$ neležia na tom istom priemere, nemajú množiny $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{M}'$ žiadny spoločný bod. Číslo $p(X)$ je preto tiež rozdielom medzi počtom bodov z $\mathbf{M}$ a počtom bodov z $\mathbf{M}'$ (v uvedenom poradí), ktoré ležia v polrovine $\nu^+(X)$.

Zvoľme teraz na kružnici k ľubovoľný bod O, ktorý neleží ani v $\mathbf{M}$, ani v $\mathbf{M}'$. Označme O' druhý priesečník priamky SO s kružnicou k. Ak je $p(O) = 0$, má priamka SO hľadanú vlastnosť. Ak je $p(O) > 0$, potom

$$p(O') = -p(O) < 0. \tag{1}$$

Nech teraz premenný bod X prebieha polkružnicu OO' kružnice k v polrovine $\nu^+(O)$ z bodu O do bodu O'. Vyšetrime, ako sa mení číslo $p(X)$. Číslo $p(X)$ je celé a nemení sa vo vnútri takého oblúka polkružnice, ktorý neobsahuje žiadny bod z $\mathbf{M}$ ani z $\mathbf{M}'$. Ak príde bod X do bodu A z množiny $\mathbf{M}$, číslo $p(X)$ sa v bode A zväčší o jednu, po prejdení bodom A sa opäť zväčší o jednu. Ak príde bod X do bodu A' z množiny $\mathbf{M}'$, číslo $p(X)$ sa v bode A' zmenší o jednu, po prejdení bodom A' sa zmenší opäť o jednu.

Pretože začiatočná hodnota $p(X)$ v bode O je $p(O) > 0$ a koncová hodnota je podľa (1) $-p(O) < 0$, nadobúda funkcia $p(X)$ na polkružnici OO' všetky celé hodnoty medzi číslami $p(O)$ a $-p(O)$, teda tiež hodnotu 0 (resp. i niekoľkokrát). Ak je $p(X_0) = 0$, je SX_0 hľadaná priamka, pretože v polrovine $\nu^+(X_0)$ aj v polrovine $\nu^-(X_0)$ je ten istý počet bodov z $\mathbf{M}$.

Ak je $p(O) < 0$, postupujeme analogicky alebo začneme z bodu O' súmerne združeného s O podľa S.

Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Podrobnejším rozborom možno zistiť, že pre n párne je nekonečne mnoho riešení (priamka p môže prechádzať ľubovoľným bodom X na niektorom oblúku medzi dvoma bodmi z $\mathbf{M}$ alebo $\mathbf{M}'$), pre n nepárne má úloha len konečne mnoho riešení (priamka p vždy prechádza niektorým bodom z množiny $\mathbf{M}$).

3. Jestliže kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nabývá v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ pouze hodnot $-1 \leqq f(x) \leqq 1$, potom $|a| \leqq 2$; dokažte. Může být $|a| = 2$?

ŘEŠENÍ. Pro $x = 0$ plyne

$$|c| \leqq 1. \tag{2}$$

Pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme

$$|a + b + c| \leqq 1, \quad |a - b + c| \leqq 1. \tag{3}$$

Z (3) odvodíme podle známého vzorce $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$ tento výsledek

$$|2a + 2c| \leqq |(a + b + c) + (a - b + c)| \leqq$$
$$\leqq |a + b + c| + |a - b + c| \leqq 2,$$

neboli

$$|a + c| \leqq 1. \tag{4}$$

Podle vzorce $|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha + \beta|$ plyne z (4)

$$|a| - |c| \leqq |a + c| \leqq 1,$$

neboli podle (2)

$$|a| \leqq 1 + |c| \leqq 2.$$

Hledaný odhad je tedy skutečně $|a| \leqq 2$.

Funkce $y = 2x^2 - 1$ (kde $a = 2$) splňuje v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$ podmínku $-1 \leqq f(x) \leqq 1$. Neboť pro $x = 0$ nabývá hodnoty -1, pro $x = 1$ hodnoty 1 a v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ je rostoucí. Jestliže totiž $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$, platí

$$(2x_2^2 - 1) - (2x_1^2 - 1) = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

V intervalu $-1 \leqq x \leqq 0$ nabývá tato funkce týchž hodnot jako v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$.

4. Jsou dány dva body A, B a bod S ležící uvnitř úsečky AB. Sestrojte $\triangle ABC$, pro který platí $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$ a jehož těžnice t_b má danou délku d. Proveďte diskusi vzhledem k délkám d, AB a AS.

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 37). Podle věty *uu* platí

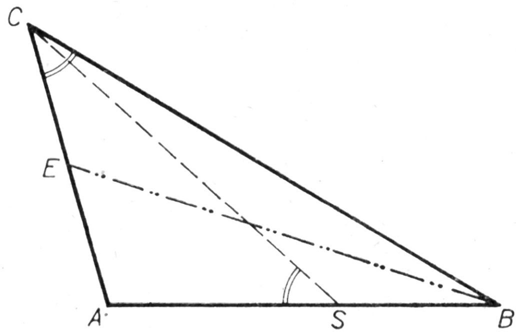
$$\triangle ACB \sim \triangle ASC,$$

neboť $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$ a $\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAC$. Tudíž

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AC},$$

tj.

$$AC^2 = AB \,.\, AS. \tag{1}$$



Obr. 37

Z posledního vztahu už plyne *konstrukce*. Nejdříve sestrojíme podle Euklidovy věty o výšce nebo o odvěsně úsečku velikosti $b = AC$ tak, aby platil vztah (1). Nyní se už jedná o známou úlohu sestrojit trojúhelník, je-li dáno $AB = c$, $AC = b$, délka d těžnice t_b. Užije se pomocného $\triangle$ ABE, kde E je střed strany AC. Tento trojúhelník se sestrojí podle věty *sss*. Bod C sestrojíme na prodloužení úsečky AE za bod E tak, aby bylo $EC = AE = \dfrac{b}{2}$.

Zkouška. Zřejmě má sestrojený $\triangle$ ABC vrcholy A, B a těžnici t_b o délce d. Je ovšem nutno dokázat, že platí

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC. \tag{2}$$

Pro trojúhelníky $\triangle ACB$ a $\triangle ASC$ platí

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAC,$$

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AC},$$

což plyne z (1). Tudíž $\triangle ACB \sim \triangle ASC$, takže platí (2).

Diskuse. Úloha bude mít řešení, právě když půjde sestrojit pomocný $\triangle ABE$, tj. právě když bude platit

$$|AB - AE| < BE < AB + AE. \qquad (3)$$

Avšak $AE = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2}\sqrt{AB \,.\, AS}$ (plyne z (1)), $0 < AS < < AB$, takže $|AB - AE| = AB - AE$. Dosadíme-li do (3) $BE = d$ a $AE = \frac{1}{2}\sqrt{AB \,.\, AS}$, dostáváme podmínku řešitelnosti úlohy

$$AB - \frac{1}{2}\sqrt{AB \,.\, AS} < d < AB + \frac{1}{2}\sqrt{AB \,.\, AS}\,. \qquad (4)$$

Je-li splněno (4), má úloha jediné řešení. Neplatí-li (4), nemá úloha řešení.

3. *KATEGORIE C*

1. V dekadickém zápisu čísla $23A5B6$ nahraďte písmena A, B ciframi tak, aby vzniklo číslo dělitelné devatenácti. Kolik má úloha řešení?

ŘEŠENÍ. Číslo je napsáno v desítkové soustavě, a proto platí $23A5B6 = 230506 + A \,.\, 10^3 + B \,.\, 10$, $0 \leqq A \leqq 9$, $0 \leqq B \leqq 9$. Protože číslo 230506 dává při dělení 19 zbytek 17, je číslo $23A5B6$ dělitelné 19, právě když $A \,.\, 10^3 + B \,.\, 10$ dává při dělení 19 zbytek 2. Avšak 10^3 dává při dělení 19 zbytek 12, a tedy $A \,.\, 10^3 + B \,.\, 10$ dává při dělení 19 týž zbytek jako číslo $12A + 10B = 2(6A + 5B)$. Poněvadž číslo 19 je prvočíslo, dává $12A + 10B$ zbytek 2, právě když $6A + 5B$ dává zbytek 1.

Máme tedy najít všechny dvojice čísel A, B, $0 \leqq A \leqq 9$, $0 \leqq B \leqq 9$, tak, aby číslo $6A + 5B$ dávalo při dělení 19 zbytek 1, tj. číslo $5B$ musí dávat při dělení 19 týž zbytek jako číslo $1-6A$. Sestavme si tabulku zbytků těchto čísel při dělení 19:

A	$1 - 6A$	B	$5B$
0	1	0	0
1	14	1	5
2	8	2	10
3	2	3	15
4	15	4	1
5	9	5	6
6	3	6	11
7	16	7	16
8	10	8	2
9	4	9	7

Z těchto tabulek vidíme, že jediné dvojice, které dávají týž zbytek, jsou

A	B
0	4
3	8
4	3
7	7
8	2

Úloze tedy vyhovují tato čísla:

230 546, 233 586, 234 536, 237 576, 238 526.

Dělením 19 se o tom snadno přesvědčíme.

2. Určete všecky trojice prvočísel a, b, c, pro které platí $abc < ab + bc + ca$.

ŘEŠENÍ. Zvolme označení tak, aby platilo

$$a \leqq b \leqq c. \tag{1}$$

Jestliže $a \geqq 3$, je pak

$$ab + bc + ca \leqq 3bc \leqq abc.$$

Pro každé řešení nerovnosti

$$abc < ab + bc + ca \tag{2}$$

platí tedy $a = 2$. Z (2) pak plyne $2bc < 2b + bc + 2c$ neboli po úpravě

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Jestliže $5 \leqq b \leqq c$, je $\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{5}, \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{5}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, tj. neplatí (3). Pro každé řešení nerovnosti (2) platí tedy $b = 2$ nebo $b = 3$. Trojice $a = b = 2$, c libovolné, je zřejmě řešením nerovnosti (2). Jestliže $b = 3$, $c \geqq 7$, je $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{7}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} < \frac{1}{2}$. Pro $a = 2$, $b = 3$ máme tedy jen dvě možnosti pro c, a to $c = 3$ nebo $c = 5$.

Shrnutí. Nerovnost (2) má tato prvočíselná řešení: 2, 2, c (c libovolné prvočíslo); 2, 3, 3; 2, 3, 5.

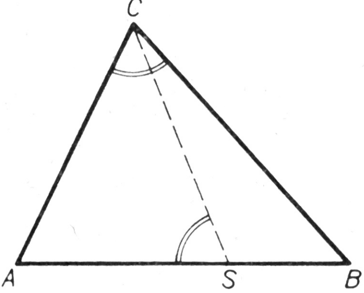
3. Je daná úsečka AB a bod S jej vnútra. Aký útvar je množinou vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC, pre ktoré platí $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASC$?

RIEŠENIE (obr. 38). Nech je C jeden z bodov hľadaného útvaru $\boldsymbol{U}$. Potom podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov platí vzťah

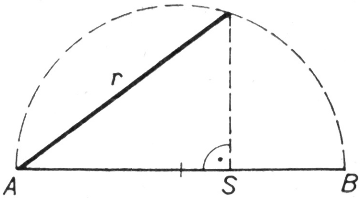
$$\triangle ASC \sim \triangle ACB. \tag{1}$$

Z (1) vyplýva $AC : AS = AB : AC$ čiže

$$AC^2 = AB \,.\, AS. \tag{2}$$



Obr. 38



Obr. 39

Podľa (2) je teda vzdialenosť AC konštantná a bod C leží na kružnici k so stredom A a s polomerom $r = \sqrt{AB \,.\, AS}$.

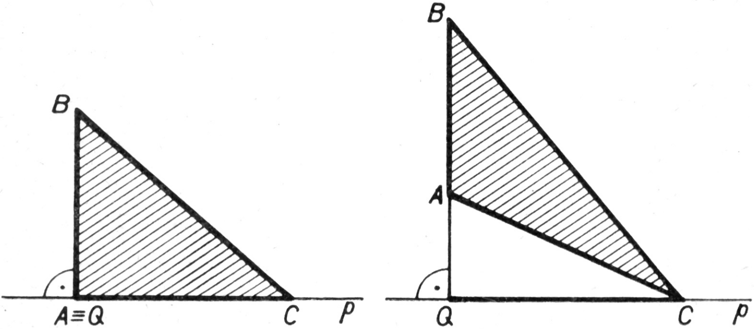
Zvoľme *obrátene* ľubovoľný bod C kružnice k tak, aby neležal na priamke AB. Potom vzniknú trojuholníky $\triangle ASC$, $\triangle ACB$ a pre dĺžky ich strán platí rovnosť (2). Z rovnosti (2) vyplýva vzťah $AC : AS = AB : AC$. Okrem toho majú oba trojuholníky spoločný uhol $\sphericalangle CAS = \sphericalangle CAB$. Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov platí teda vzťah (1). Z (1) potom vyplýva zhodnosť uhlov $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ACB$, t. j. bod C patrí do útvaru **U**.

Záver. Útvar **U** je kružnica k so stredom A a polomerom $r = \sqrt{AB \,.\, AS}$ s vylúčením jej priesečníkov s priamkou AB. Polomer r kružnice k zostrojíme napr. pomocou Euklídovej vety o pravouhlom trojuholníku (obr. 39).

4. Je dána úsečka AB a přímka p kolmá k AB; oba body A, B leží v téže polorovině s hranicí p. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrchol C ležel na přímce p a aby platilo $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle BAC$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

ŘEŠENÍ. Označme Q průsečík přímek p, AB; dále označme $a = AQ$, $b = BQ$. Názor nám napovídá, že úloha je neřešitelná, je-li

$$a < b. \tag{1}$$



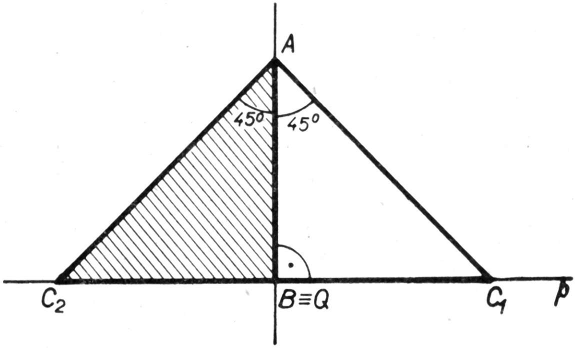
Obr. 40a, b

Skutečně, je-li $a = 0$, tj. $A \equiv Q$ (obr. 40a), je $\sphericalangle BAC = 90°$, $\sphericalangle ABC < 90°$, proto neplatí

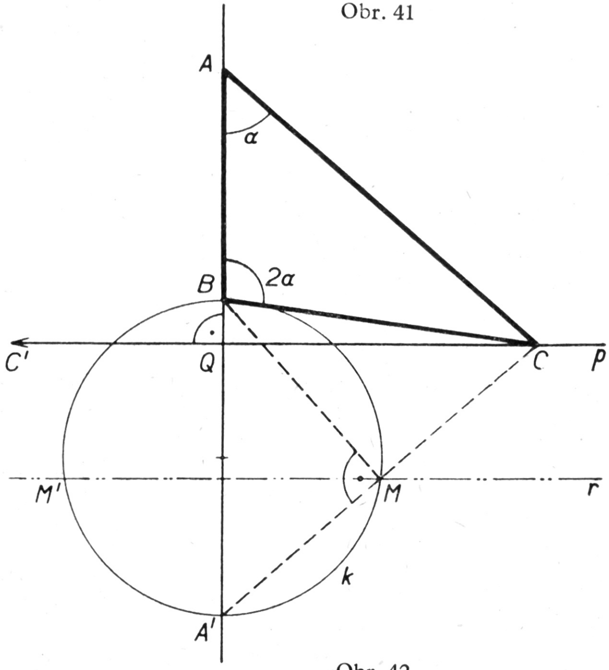
$$\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle BAC. \tag{2}$$

Je-li $0 < a < b$ (obr. 40b), je $\sphericalangle QAC < 90°$, $\sphericalangle BAC > 90°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QBC < 90°$, proto také neplatí (2).

Je-li $B \equiv Q$ (obr. 41), jsou řešením úlohy zřejmě dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ABC_1, ABC_2. Zbývá případ $0 < b < a$ (obr. 42). Označíme-li $\sphericalangle BAC = \alpha$, je $\sphericalangle ABC = 2\alpha$, $\sphericalangle QBC = 180° - 2\alpha$. Označme A' bod souměrně sdružený s bodem A podle



Obr. 41



Obr. 42

přímky p; pak je $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle QA'C = \sphericalangle QAC = \sphericalangle BAC = \alpha$. Osa úhlu $\sphericalangle QBC = \sphericalangle A'BC$ protne úsečku $A'C$ v bodě M a je $\sphericalangle A'BM = \frac{1}{2} \sphericalangle QBC = 90° - \alpha$, tj. $BM \perp A'M$. Bod M leží tedy na kružnici k sestrojené nad průměrem $A'B$. Protože je $\sphericalangle A'BM = \sphericalangle CBM$, $\sphericalangle A'MB = \sphericalangle CMB = 90°$, je $\triangle A'MB \cong \triangle CMB$, a tedy $A'M = CM$. Bod M leží tedy také na přímce $r \parallel p$, která prochází středem úsečky $A'Q$, neboli na ose r úsečky $A'Q$.

Bod M sestrojíme jako průsečík kružnice k s přímkou r (jsou dvě řešení) a bod C (jsou opět dvě řešení) sestrojíme jako průsečík přímek p, A', M.

Obrácení předchozího postupu ukáže, že takto sestrojené body C jsou skutečně řešením úlohy.

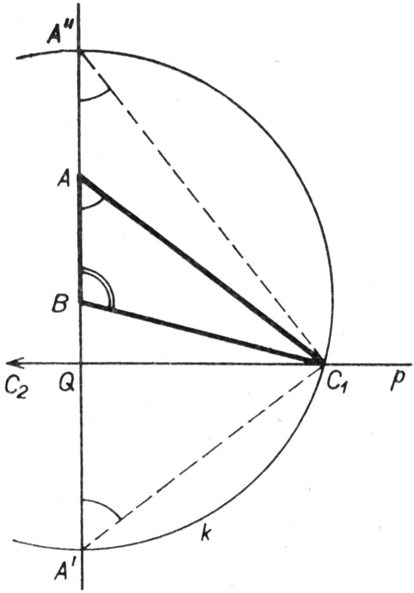
Závěr. Úloha je řešitelná, právě když platí $a > b$; pak má dvě řešení. Tento výsledek dostaneme spojením uvedeného řešení s podmínkou neřešitelnosti (1).

JINÉ ŘEŠENÍ. Proti delším stranám trojúhelníka leží větší úhly a naopak. Je tedy vidět, že úloha nemůže mít řešení, je-li bod A blíže k přímce p nežli bod B.

Předpokládejme tedy, že $BQ < AQ$, kde Q je průsečík (viz obr. 43) přímek p a AB. Použijeme opět vlastnosti obvodového a středového úhlu. Sestrojíme kružnici k se středem B tak, aby *dvojnásobek* úhlu $\sphericalangle ABC$ byl úhlem středovým (je to úhel nevypuklý, neboť $\sphericalangle ABC$ je tupý) a aby *dvojnásobek* úhlu $\sphericalangle BAC$ byl úhlem obvodovým. Za tím účelem sestrojíme opět bod A' souměrně sdružený s bodem A podle přímky p; kružnici k povedeme bodem A'. Poněvadž B a A' leží v různých polorovinách s hranicí p, protne kružnice k přímku p ve dvou bodech C_1, C_2. Trojúhelníky ABC_1, ABC_2 jsou řešením úlohy, jak snadno dokážeme.

Důkaz. Budiž $A'A''$ průměr v k.
$\sphericalangle A''A'C_i$ je obvodový úhel příslušný k tětivě $A''C_i$. $\sphericalangle A''BC_i$ je středový úhel příslušný k tětivě $A''C_i$. Avšak $\sphericalangle A''BC_i = \sphericalangle ABC_i$, a na drnhé straně $\sphericalangle A''A'C_i = \sphericalangle QA'C_i = \sphericalangle QAC_i = \sphericalangle BAC_i$. Tedy z věty o obvodovém a středovém úhlu plyne

$$2 \sphericalangle BAC_i = \sphericalangle ABC_i \; (i = 1, 2).$$



Obr. 43

4. *KATEGORIE D*

1. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

je kladný pro každá dvě čísla a, b.

ŘEŠENÍ. Daný výraz V znásobme dvěma a pokusme se upravit výraz $2V$ tak, aby byl součtem druhých mocnin. Z prvních tří členů výrazu $2V$ sestavíme druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Platí tedy

$$2V - (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2. \qquad (1)$$

Z prvního, třetího a pátého členu na pravé straně (1) sestavíme druhou mocninu $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$. Platí tedy dále

$$2V - (a - b)^2 - (a - 1)^2 = b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

a odtud

$$2V = (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2. \qquad (2)$$

Z rovnosti (2) vyplývá, že $V \geqq 0$. Jestliže $V = 0$, plyne z (2) $a - b = 0$, $a - 1 = 0$, $b + 1 = 0$, tj. $a = b$, $a = 1$, $b = -1$, což je nemožné. Proto nemůže být $V = 0$ a pro každé a, b platí $V > 0$.

2. Prirodzené čísla $1, 2, 3, \ldots, n$ napísaná v nejakom poradí označme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Ak je n číslo nepárne, je súčin

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$$

deliteľný dvoma. Dokážte.

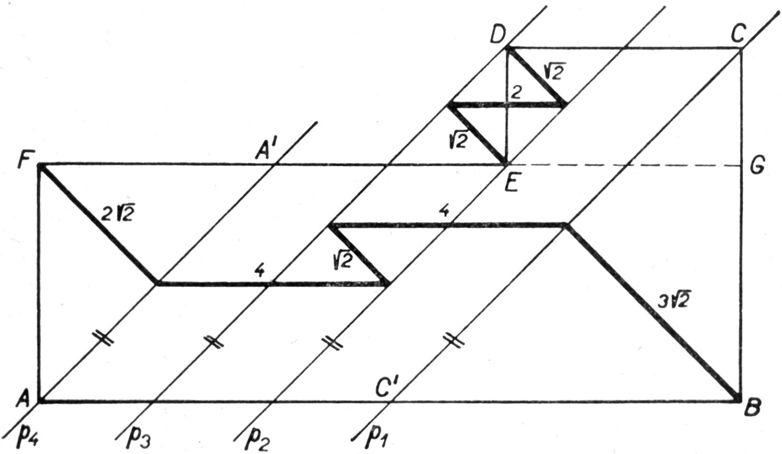
RIEŠENIE. Medzi číslami $1, 2, \ldots, n$ je pri nepárnom n nepárnych čísel o jedno viac ako párnych. Preto v usporiadaní $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ stojí aspoň jedno nepárne číslo a_k na „*nepárnom*“ mieste k. Párnych miest je totiž o jedno menej. Rozdiel $a_k - k$ je potom deliteľný dvoma a preto aj súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_n - n)$ je deliteľný dvoma.

3. Je daný šesťuholník $ABCDEF$ zložený z obdĺžnika $ABGF$ s rozmermi $AB = 12$ cm, $AF = 4$ cm a z obdĺžnika $CDEG$ s rozmermi $CD = 4$ cm, $CG = 2$ cm (pozri obr. 44). Narysujte tento šesťuholník a zakreslite geometrické miesto stredov všetkých úsečiek kolmých k priamke BE, ktorých koncové body ležia na obvode šesťuholníka. Geometrické miesto sa skladá z ôsmich úsečiek. Vypočítajte súčet ich dĺžok.

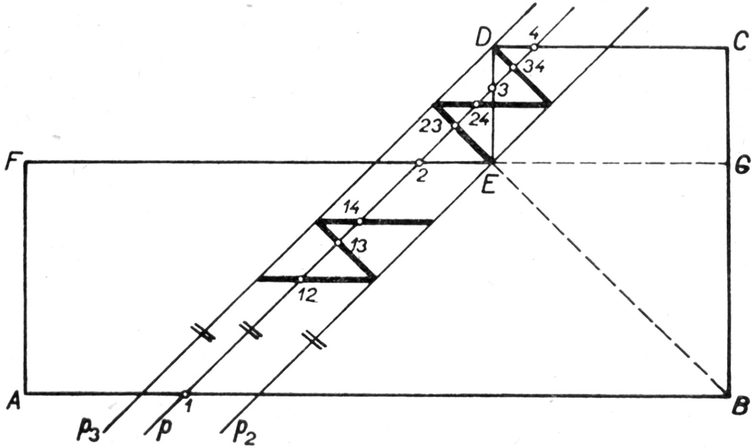
RIEŠENIE. Na obr. 44 je narysovaný daný šesťuholník. Vrcholmi C, E, D, A vedieme v uvedenom poradí priamky p_1, p_2, p_3, p_4 kolmé k BE. Časť hľadaného geometrického miesta (množiny) M, ktorá leží v polrovine p_1B, je výška rovnoramenného pravouhlého trojuholníka BCC' (C' je priesečník priamky p_1 a úsečky AB). Podobne je tomu v polrovine p_4F, kde príslušnou časťou množiny M je výška rovnoramenného pravouhlého trojuholníka AFA' (A' je priesečník priamky p_4 s úsečkou FG). V pásoch (p_1p_2) a (p_3p_4) sú príslušnými časťami množiny M úsečky. Ležia v osiach súmernosti dvojice rovnobežiek AB, CD a AB, EF. Najzložitejšia je situácia v páse (p_2p_3). Na obr. 45 je zakreslená priamka p tohto pásu kolmá k priamke BE. Číslami 1, 2, 3, 4 sú označené jej priesečníky s obvodom šesťuholníka $ABCDEF$. Dvojicami 12, 13, 14, 23, 24, 34 je označených šesť stredov dvojíc vybraných zo štyroch bodov 1, 2, 3, 4. Ak priamka p prebieha pás p_2p_3, dostaneme ako časti množiny M hrubo vytiahnuté úsečky na obr. 45. Na obr. 44 sú k jednotlivým úsečkám, ktoré tvoria množinu M, pripísané ich dĺžky.

Súčet týchto dĺžok je $10 + 8\sqrt{2} \doteq 21{,}3$.

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, je-li dána délka jeho těžnice t_c a velikost úhlu ω, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle\ ACB$. Pro která ω má úloha řešení?


D
C
√2
2
√2
A'
F
G
E
2√2
4
√2
4
3√2
C'
A
B
p4
p3
p2
p1

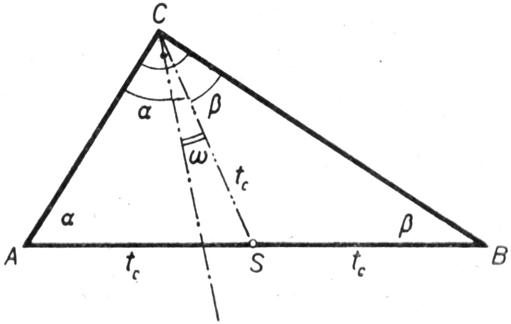
Obr. 44


D
4
C
34
3
24
23
F
2
G
E
14
13
12
A
1
B
p3
p
p2

Obr. 45

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 46). Označme S střed přepony AB. Podle Thaletovy věty $SA = SC = SB = t_c$. Trojúhelníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$ jsou tedy rovnoramenné, a proto

$$\sphericalangle ACS = \sphericalangle CAS = \alpha,$$
$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle SBC = \beta.$$



Obr. 46

Je-li ω úhel, jenž svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB = 90°$, potom

$$\alpha = 45° + \omega, \quad \beta = 45° - \omega \qquad (1)$$

nebo

$$\alpha = 45° - \omega, \quad \beta = 45° + \omega. \qquad (2)$$

Z posledních vztahů již plyne *konstrukce*. Jde o konstrukci trojúhelníku podle věty *usu*: $AB = 2 \,.\, t_c$ a úhly α, β jsou určeny vztahy (1), resp. (2).

Zkouška. Ze vztahů (1), resp. (2), je zřejmé, že sestrojený $\triangle ABC$ je pravoúhlý. Protože je jeho přepona rovna $2t_c$, má těžnice na přeponu předepsanou délku.

Diskuse. Ovšem, aby úloha měla řešení, musí být úhly

α, β dané vztahy (1), resp. (2), ostré, tj.

$$0^\circ \leqq \omega < 45^\circ.$$

Jestliže $\omega = 0^\circ$, má úloha jedno řešení — sestrojený $\triangle\ ABC$ je rovnoramenný. Jestliže $0^\circ < \omega < 45^\circ$, má úloha dvě řešení.

Pro $\omega \geqq 45^\circ$ nemá úloha řešení.