II. Přípravné úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Je dána funkce proměnné x

$$y = 2\frac{x^3 + 1}{1 + |x + 1| + x} + 2\frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a + |x - a| - x}. \tag{1}$$

Určete parametr a tak, aby graf dané funkce ležel v jednotkovém kruhu se středem v počátku souřadnic.

ŘEŠENÍ. Je-li $x + 1 \leqq 0$ neboli $x \leqq -1$, je $|x + 1| = -x - 1$, jmenovatel prvního zlomku je roven nule a funkce (1) není pro tato x definována. Obdobně je-li $x - a \geqq 0$ neboli $x \geqq a$, je $|x - a| = x - a$, jmenovatel druhého zlomku je roven nule a funkce (1) není pro tato x definována. Definiční obor funkce (1) je tedy otevřený interval

$$-1 < x < a, \tag{2}$$

přičemž ovšem musí být $a > -1$.

Pro všechna x z intervalu (2) platí $x + 1 > 0$, tj. $|x + 1| = x + 1$ a zároveň $x - a < 0$, tj. $|x - a| = a - x$. Funkci (1) lze vyjádřit rovnicí (po úpravě)

$$y = \frac{x^3 + 1}{x + 1} + \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a - x},$$

neboli

$$y = x^2 - x + 1 + \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a - x}. \tag{3}$$

Polynom $x^2 - x + 1$ je v intervalu (2) omezený; proto musí být omezený v intervalu (2) i zlomek ve funkci (3). Z toho plyne, že rovnice

$$2x^3 - 3x^2 + x = 0 \tag{4}$$

musí mít kořen $x = a$, neboť jinak by nabýval tento zlomek pro $x < a$ libovolně velkých hodnot a graf funkce by nebyl omezený. Za parametr a můžeme tedy zvolit jedině některý z kořenů rovnice (4). Tuto rovnici upravíme na tvar

$$x(2x^2 - 3x + 1) = 0,$$

jež má kořeny $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$.

První kořen dává funkci

$$y = 2x - x^2 \tag{4'}$$

definovanou v intervalu $-1 < x < 0$. Zběžný náčrtek ukáže, že graf funkce (4′) neleží v jednotkovém kruhu; skutečně tomuto grafu náleží např. bod $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right]$, který neleží v jednotkovém kruhu. Je totiž

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{29}{16} > 1\,.$$

Kořen $a_2 = 1$ dává funkci

$$y = x^2 - x + 1 + x\,\frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x} = x^2 - x + 1 +$$

$$+ x\,\frac{(1 - x)(1 - 2x)}{1 - x},$$

neboli

$$y = 1 - x^2. \tag{4''}$$

Grafem této funkce je oblouk paraboly, který náleží jednotkovému kruhu. Platí totiž pro $-1 < x < 1$ stále $y > 0$ a $y < 1$, tj. $y^2 < y$.
Protože podle (4″) $x^2 + y = 1$, platí $x^2 + y^2 < x^2 + y = 1$, čímž je tvrzení dokázáno.

Třetí kořen $a_2 = \frac{1}{2}$ dává funkci

$$y = x^2 - x + 1 + \frac{2x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - x}$$

neboli

$$y = -x^2 + x + 1.$$

Tato funkce je nyní definována v intervalu $-1 < x < \frac{1}{2}$. Ihned je však vidět, že graf této funkce neleží v jednotkovém kruhu, neboť např. pro $x = \frac{1}{4}$ je $y = \frac{19}{16} > 1$.

Graf funkce (1) tedy leží v jednotkovém kruhu jedině pro $a = 1$.

2. Množina $\boldsymbol{M}$ sa skladá z n prvkov $1, 2, \ldots, n$. Utvorte kombinácie k-tej triedy z prvkov množiny $\boldsymbol{M}$. Sčítajte čísla, ktoré vytvárajú kombinácie k-tej triedy. Utvorte súčet všetkých takto získaných súčtov a označte ho S_k. Určite vzorec

a) pre S_k;

b) pre súčet $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

RIEŠENIE. a) Úvodom je vhodné si uvedomiť, že súčet S_k môžeme dostať aj sčítaním všetkých čísel 1 vyskytujúcich sa v kombináciách k-tej triedy z prvkov množiny $\boldsymbol{M}$, všetkých čísel 2, atď., až všetkých čísel n vyskytujúcich sa v kombináciách k-tej triedy z prvkov množiny $\boldsymbol{M}$.

Najskôr zistime, koľkokrát sa v kombináciách k-tej triedy prvkov z množiny **M** vyskytuje lubovoľný prvok m z množiny **M** ($1 \leqq m \leqq n$, m celé). To urobíme takto: Predpokladajme, že máme tvoriť kombinácie k-tej triedy z prvkov množiny **M** (teda z n prvkov), ktoré obsahujú prvok m. Dostaneme ich tak, že ku každej kombinácii $(k-1)$-tej triedy z množiny prvkov $1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n$ (čiže z $n-1$ prvkov) priradíme prvok m. Kombinácií k-tej triedy z prvkov množiny **M**, ktoré obsahujú prvok m, je teda $C_{k-1}(n-1)$. Z toho vyplýva, že súčet všetkých prvkov m vyskytujúcich sa v kombináciách k-tej triedy prvkov z množiny **M** je $m \,.\, C_{k-1}(n-1)$. Teraz už súčet S_k ľahko zistíme.

$$S_k = 1 \,.\, C_{k-1}(n-1) + 2 \,.\, C_{k-1}(n-1) + \ldots +$$
$$+ (n-1) \,.\, C_{k-1}(n-1) + n \,.\, C_{k-1}(n-1) =$$
$$= (1 + 2 + \ldots + n) \,.\, C_{k-1}(n-1),$$

skadiaľ podľa známych vzorcov

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2} \,.\, \binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

b) Je

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} + S_n$$

a podľa (1) preto platí

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{n(n+1)}{2}\binom{n-1}{0} + \frac{n(n+1)}{2}\binom{n-1}{1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n+1)}{2}\binom{n-1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\binom{n-1}{0} + \right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right].$$

Ak si uvedomíme, že platí rovnosť

$$2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots +$$

$$+ \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1},$$

dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = 2^{n-2} \, . \, n(n + 1).$$

3. V rovině je dáno pět bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků jimi určených má vnitřní úhel $\alpha \geqq 108°$.

ŘEŠENÍ. V dané rovině zvolme libovolnou přímku p a veďme s ní rovnoběžky danými body. Lze nalézt pás roviny obsahující pět daných bodů, jehož hranice mají směr (p) a každá z nich obsahuje aspoň jeden z daných bodů. Budiž h jedna z obou hranic, A ten z daných bodů, který na ní leží (obr. 1). Bod A spojíme polopřímkami AX se všemi danými body; všecky tyto polopřímky leží v jedné polorovině s hranicí h. Mezi všemi čtyřmi polopřímkami AX lze vybrat dvě tak, že dutý úhel jimi určený obsahuje obě zbývající (žádné tři z daných bodů totiž neleží v přímce). Tyto polopřímky jsou na obr. 1 označeny AB, AE (B, E jsou dva z daných pěti bodů); zbývající dané body C, D leží uvnitř úhlu $\sphericalangle BAE$.

Nyní rozlišíme dvě možnosti:

1. aspoň jeden z bodů C, D leží v polorovině BEA;
2. oba body C, D leží v polorovině opačné k BEA.

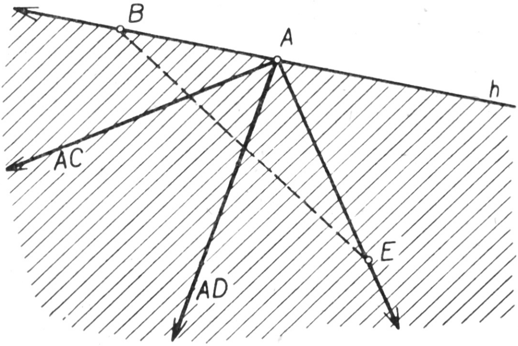
Případ 1 (obr. 2). Protože žádné tři z bodů A, B, C, D, E nejsou kolineární, leží např. bod C uvnitř $\triangle ABE$. Protože

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCE + \sphericalangle ECA = 360°,$$

má aspoň jeden z těchto tří úhlů velikost větší nebo rovnou 120°; platí tedy např.

$$\sphericalangle ACB \geqq 120° > 108°$$

a věta je v případě 1 dokázána.

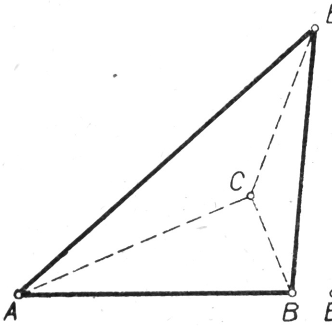


Obr. 1

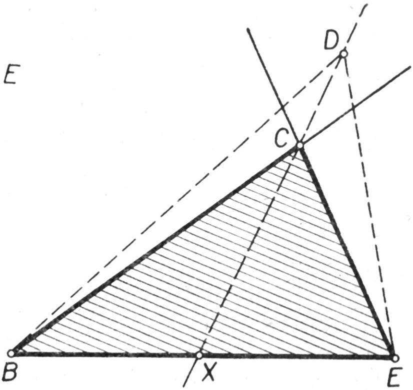
Případ 2. Obsahuje-li $\triangle BEC$ bod D nebo $\triangle BED$ bod C, užijeme téhož postupu jako v případě 1 a dostaneme tvrzení věty.

Zbývá tedy případ, kdy ani bod D nenáleží trojúhelníku BEC, ani bod C trojúhelníku BED. Dokážeme, že pak bod D nenáleží úhlu vrcholovému k $\sphericalangle BCE$. Připustíme, že by tato situace nastala (obr. 3); pak by přímka CD procházela úhlem $\sphericalangle BCE$ a protľala by úsečku BE v jejím vnitřním bodě X. Pak by bod C náležel úsečce DX, tj. trojúhelníku BED, což je spor.

Protože bod D náleží polorovině BEC, náleží buď úhlu $\sphericalangle CBE$, nebo $\sphericalangle CEB$; nechť náleží D např. úhlu $\sphericalangle CBE$

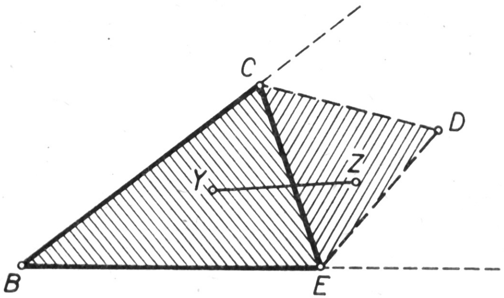


Obr. 2



Obr. 3

(ovšem nikoli trojúhelníku BEC); viz obr. 4. Pak sjednocení trojúhelníků BEC, CED je konvexní čtyřúhelník, jak se snadno dokáže pomocí úsečky YZ (viz obr. 4). Stejně se dokáže, že sjednocení trojúhelníku ABE a čtyřúhelníku $BEDC$ je konvexní pětiúhelník; čtyřúhelník $BEDC$ leží totiž v úhlu $\sphericalangle BAF$.



Obr. 4

Protože součet velikostí vnitřních úhlů konvexního pětiúhelníka je $3 \cdot 180° = 540°$, má aspoň jeden z těchto úhlů velikost $\alpha \geqq 108°$.

4. Výšky štvorstena $ABCD$ se pretínajú v tom istom bode (čiže štvorsten $ABCD$ je ortocentrický) práve vtedy, keď pre dĺžky jeho hrán platia rovnosti

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \qquad (1)$$

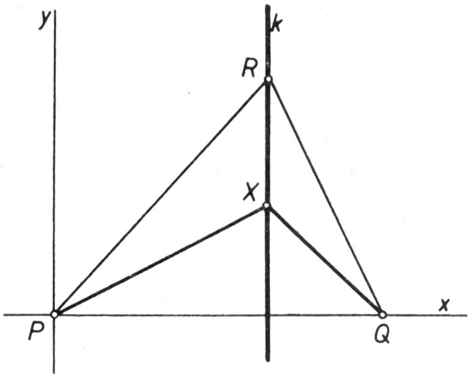
Dokážte.

RIEŠENIE. a) Najskôr odvodíme *pomocnú vetu* P: Nech je daný trojuholník PQR. Potom množina $\boldsymbol{M}$ všetkých bodov X roviny PQR, pre ktoré platí

$$PX^2 + QR^2 = QX^2 + PR^2 \qquad (2)$$

je priamka predchádzajúca vrcholom R a kolmá na priamku PQ.

Pri *dôkaze* pomocnej vety P použijeme metódu súradníc. Súradnicovú sústavu zvolíme tak, ako ukazuje obr. 5. Súradnice bodov zapíšeme takto: $P \equiv [0; 0]$, $Q \equiv [t; 0]$ $(t > 0)$, $R \equiv [r; s]$, $X \equiv [x; y]$. Rovnosť (2) je



Obr. 5

vyjadrená pomocou súradníc v tvare

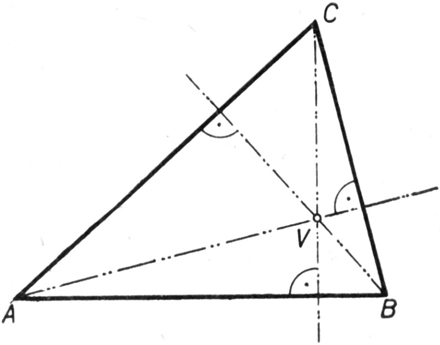
$$x^2 + y^2 + (r - t)^2 + s^2 = (x - t)^2 + y^2 + r^2 + s^2. \quad (3)$$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$x = r. \quad (4)$$

Z toho vyplýva: Každý bod X množiny **M** leží na priamke určenej rovnicou (4). Je to priamka k kolmá na priamku PQ a prechádzajúca bodom R. Obrátene: súradnice každého bodu X priamky k vyhovujú rovnici (4), teda aj rovnici (3). Pre bod X platí teda rovnosť (2) a bod X patrí preto do množiny **M**.

Tým je veta P dokázaná.



Obr. 6

b) Nech je $ABCD$ ortocentrický štvorsten. Výšky v_A, v_B, v_C tohto štvorstena sa premietajú pri pravouhlom premietaní do roviny ABC ako výšky trojuholníka ABC, výška v_D sa premieta ako ortocentrum V (priesečník výšok) trojuholníka ABC. Podľa pomocnej vety P je (pozri obr. 6):

$$AV^2 + BC^2 = BV^2 + AC^2,$$

skadiaľ

$$(AV^2 + VD^2) + BC^2 = (BV^2 + VD^2) + AC^2$$

čiže

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2. \tag{5}$$

Podobne dostaneme aj ostatné rovnosti vzťahu (1).

Nech obrátene platia pre štvorsten $ABCD$ rovnosti (1). Potom platí tiež rovnosť (5). Označme M pätu výšky v_D. Potom je

$$AD^2 = AM^2 + MD^2, \qquad BD^2 = BM^2 + MD^2. \tag{6}$$

Ak dosadíme do rovnosti (5) zo vzťahu (6), po úprave dostaneme

$$AM^2 + BC^2 = BM^2 + AC^2.$$

Podľa pomocnej vety P je bod M bodom výšky trojuholníka ABC vedenej bodom C. Použitím ostatných rovností vzťahu (1) podobne dokážeme, že bod M je tiež bodom ostatných dvoch výšok trojuholníka ABC. Je teda $M \equiv V$ a výšky v_A, v_B, v_C pretínajú výšku v_D. Zámenou písmen, vzhľadom na to, že označenie vrcholov štvorstena nie je podstatné, dostaneme, že každé tri výšky štvorstena $ABCD$ pretínajú jeho zostávajúcu výšku.

Štvorsten $ABCD$ je teda ortocentrický.

2. KATEGORIE B

1. Jsou-li koeficienty kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

lichá čísla, nemá tato rovnice racionální kořeny; dokažte.

ŘEŠENÍ. Připustíme, že rovnice (1) má racionální kořen $\frac{p}{q}$ (p, q celá nesoudělná, $q \neq 0$). Dosadíme-li $x = \frac{p}{q}$ do (1) a vynásobíme číslem q^2, dostaneme

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0. \tag{2}$$

První dva členy (2) jsou dělitelné číslem p; protože p, q (i p, q^2) jsou čísla nesoudělná, je p dělitel čísla c. Protože je c liché, je i p liché. Obdobně dokážeme z (2), že q je dělitel čísla a, a že q tudíž je liché číslo.

Ježto a, b, c, p, q jsou čísla lichá, jsou všecky tři členy na levé straně (2) čísla lichá a jejich součet nemůže být roven nule. Tím je spor nalezen.

2. Vyšetrite a načrtnite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice x, y vyhovujú nerovnostiam

$$1 \leqq ||x+y| - |x-y|| \leqq 2.$$

RIEŠENIE. Použijeme vzťah $|a| = |-a|$, ktorý platí pre každé reálne číslo a. Vypočítame hodnotu výrazu medzi znakmi nerovností pri dosadení:

a) $-y$ miesto y,
b) $-x$ miesto x,
c) y miesto x a x miesto y,
d) $-y$ miesto x a $-x$ miesto y.

Dostaneme

a) $||x+(-y)| - |x-(-y)|| = ||x-y| - |x+y|| = ||x+y| - |x-y||$,

b) $||-x+y| - |-x-y|| = ||x-y| - |x+y|| = ||x+y| - |x-y||$,

c) $||y+x| - |y-x|| = ||x+y| - |x-y||$,

d) $||-y+(-x)| - |-y-(-x)|| = ||-(x+y)| - |x-y|| = ||x+y| - |x-y||$.

Dané nerovnosti sa teda nezmenia, ak namiesto bodu $[x, y]$ vezmeme ľubovoľný z bodov $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[y, x]$, $[-y, -x]$ čiže grafické znázornenie hľadanej množiny bude súmerné podľa súradnicových osí a podľa priamok $y = x$, $y = -x$ (súmernosť podľa priamky $y = -x$ sme však dokazovať ani nemuseli, pretože vyplýva z predchádzajúcich troch súmerností). Stačí preto nájsť tú časť hľadanej množiny, ktorá leží v uhle velikosti 45° vyjadrenom nerovnosťami

$$0 \leqq y \leqq x. \tag{1}$$

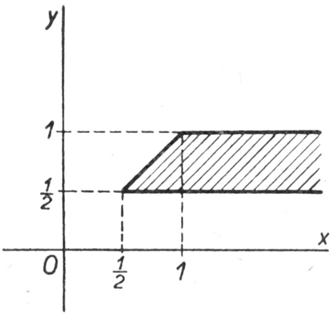
Pri tejto podmienke dostanú dané nerovnosti tvar

$$1 \leqq |x + y - (x - y)| \leqq 2,$$

$$1 \leqq |2y| \leqq 2,$$

$$\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1. \tag{2}$$

Množina bodov, ktoré súčasne vyhovujú nerovnostiam (1) a (2) je znázornená na obr. 7. Zo spomínanej súmernosti vyplýva, že grafickým znázornením celej hľadanej množiny je vyšrafovaná časť roviny na obr. 8.



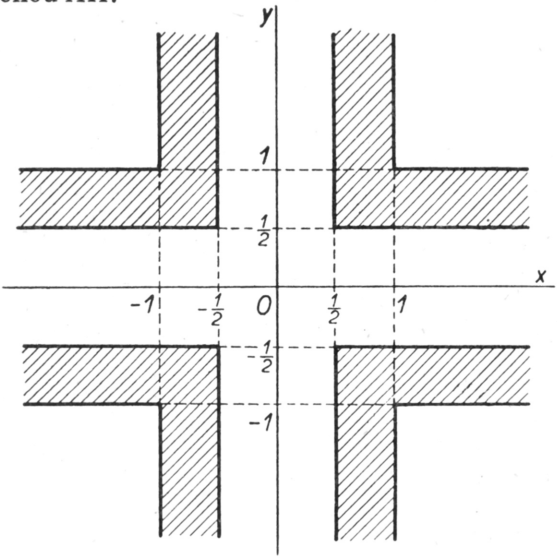
Obr. 7

3. Jsou dána dvě kladná čísla m, s a pravý úhel $\sphericalangle ABC$ tak, že platí $AB = 2m$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník AXY se základnou AY tak, aby měl obvod $2s$, aby vrchol X ležel na polopřímce AB a vrchol Y na polopřímce BC.

ŘEŠENÍ. Je-li $\triangle AXY$ řešením úlohy, vznikne situace znázorněná na obr. 9. Označíme Z střed strany AY, T patu kolmice spuštěné z bodu Z na přímku AB; dále označíme $AZ = YZ = x$, $AX = z$. Protože ZT je střední příčka trojúhelníka ABY, platí

$$AT = BT = \frac{1}{2} AB = m. \tag{1}$$

Úsečka XZ je výška rovnoramenného trojúhelníku AXY; proto je $\sphericalangle AZX$ pravý a trojúhelník AXZ pravoúhlý s přeponou AX.



Obr. 8

Sestrojíme $\triangle\ AXZ$ na základě výpočtu: vypočteme délky jeho stran x, z. Podle textu úlohy platí

$$x + z = s. \tag{2}$$

Podle Eukleidovy věty o odvěsně je vzhledem k (1)

$$x^2 = mz. \tag{3}$$

Z rovnic (2), (3) vyloučíme z; dostaneme

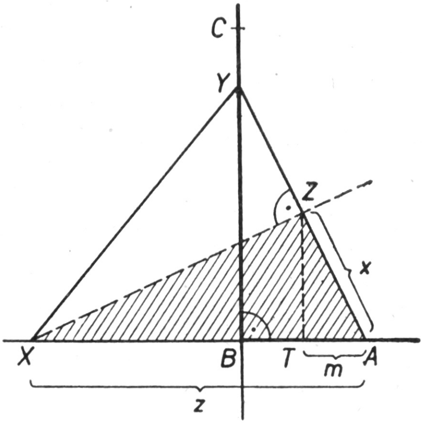
$$x^2 + mx = ms,$$

neboli

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 = m\left(\frac{m}{4} + s\right),$$

neboli $\left(\text{protože } x > 0, x + \frac{m}{2} > 0, \sqrt{m\left(\frac{m}{4} + s\right)} > \frac{m}{2}\right)$

$$x + \frac{m}{2} = \sqrt{m\left(\frac{m}{4} + s\right)}. \tag{4}$$



Obr. 9

Podle vzorců (4), (2) určíme délky x, z.

Z pravoúhlých trojúhelníků AXZ, AZT plynou nerovnosti:

$$x < z, \qquad m < x. \tag{5}$$

Vzhledem k (2) dostaneme z první nerovnosti (5)

$$x < \frac{s}{2} \tag{6}$$

a spojením (6) s druhou nerovností (5) vyjde

$$m < \frac{s}{2}. \tag{7}$$

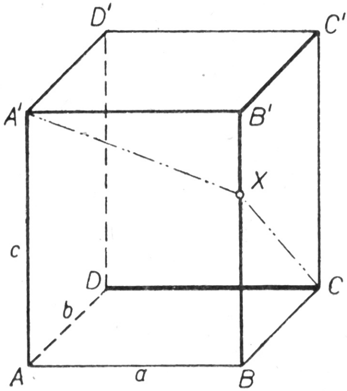
Dokážeme: platí-li (7), splňují délky x, z vypočtené podle vzorců (4), (2) všecky nerovnosti (5), (6).

Nepřímý důkaz: Kdyby platilo $m \geqq x$, bylo by $\frac{3}{2} m \geqq \geqq x + \frac{m}{2}$. Po dosazení z (4) a po umocnění bychom dostali $\frac{9}{4} m^2 \geqq \frac{1}{4} m^2 + ms$, tj. $2m \geqq s$, což odporuje nerovnosti (7). Kdyby platilo $x \geqq \frac{s}{2}$, bylo by $x + \frac{m}{2} \geqq \geqq \frac{s + m}{2}$. Po dosazení z (4) a po umocnění bychom dostali $\frac{m^2}{4} + ms \geqq \frac{m^2}{4} + \frac{ms}{2} + \frac{s^2}{4}$, tj. $m \geqq \frac{s}{2}$, což opět odporuje nerovnosti (7). Dokázali jsme tedy, že platí (6) i druhá nerovnost (5); z (2) pak plyne $x < z$, což je první nerovnost (5).

Z vypočtených délek x, z sestrojíme pravoúhlý trojúhelník AXZ tak, aby vrchol X ležel na polopřímce AB a vrchol Z v polorovině ABC; to je možné, neboť platí $x < z$. Obrácením postupu odvodíme z rovnosti (4) rovnost (3); odtud vyplývá, že $AT = m$. Doplníme-li trojúhelník AXZ na rovnoramenný trojúhelník AXY, leží vzhledem k (1) bod Y na polopřímce BC.

Podmínkou řešitelnosti úlohy je tedy nerovnost (7); je-li úloha řešitelná, má jediné řešení.

4. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o hranách délek $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Na hraně BB' určete bod, jehož vzdálenosti od hran $A'D'$, CD mají součet a) co nejmenší, b) co největší. Oba tyto extrémní součty vyjádřete pomocí délek a, b, c.



Obr. 10

ŘEŠENÍ. Situaci znázorňuje obr. 10., vzdálenosti bodu X hrany BB' od hran $A'D'$, CD jsou délky úseček $A'X$, CX. Rozvineme-li část pláště (stěny $ABB'A'$, $BCC'B'$) do roviny podle obr. 11, plyne z trojúhelníkové nerovnosti, že pro všecky body X hrany BB' platí

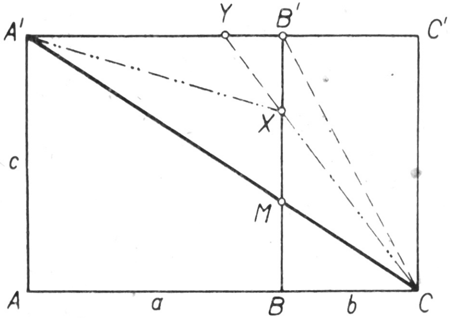
$$A'X + CX \geqq A'M + CM, \tag{1}$$

kde M je průsečík úseček BB', $A'C$. Podle (1) je tedy M bod s nejmenším součtem vzdáleností $A'X$, CX. Dále platí při označení z obr. 12 podle trojúhelníkové nerovnosti:

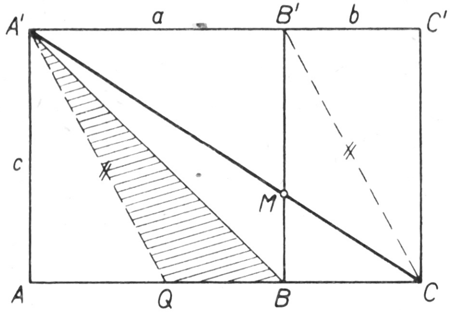
$$A'Y + YX > A'X, \; YB' + B'C > YC = YX + XC. \tag{2}$$

Po sečtení nerovností (2) a po úpravě dostaneme

$$A'B' + B'C = A'Y + YB' + B'C > A'X + XC. \quad (3)$$



Obr. 11



Obr. 12

Podle (3) má tedy bod B' největší součet vzdáleností $A'X$, CX ze všech bodů úsečky $B'M$. Obdobně má bod B největší součet vzdáleností $A'X$, CX ze všech bodů úsečky BM.

Zbývá tedy porovnat $A'B' + B'C$ a $A'B + BC$. V situaci na obr. 11 a 12. je $a > b$; sestrojíme-li rovnoběžník $CB'A'Q$, leží bod Q uvnitř úsečky AB (platí totiž

$\triangle B'BC \cong \triangle A'AQ$). Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle A'QB$ vyjde $A'Q + QB > A'B$ a odtud $A'Q + QB + BC > A'B + BC$, neboli $A'Q + QC > A'B + BC$ neboli z rovnoběžníku $CB'A'Q$

$$B'C + A'B' > A'B + BC.$$

Bod B' má tedy větší součet vzdáleností $A'X$, CX než bod B. Tento extrémní součet vzdáleností je

$$A'B' + B'C = a + \sqrt{b^2 + c^2}. \qquad (4)$$

Součet $A'M + MC = A'C$ je zřejmě

$$A'C = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}. \qquad (5)$$

Jestliže $a = b$, je patrně $A'B' + B'C = A'B + BC = a + \sqrt{a^2 + c^2}$.

Odpověď: Bod M má minimální součet vzdáleností daný vzorcem (5). Maximální součet vzdáleností má bod $B'(B)$, jestliže $a \geqq b$ ($b \geqq a$). Tento součet je dán formulí (4) nebo formulí, kterou z ní dostaneme výměnou písmen a, b.

3. *KATEGORIE C*

1. Písmenem N označíme přirozené číslo, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje tři jedničky, z nich jednu na počátku, druhou na konci. Ostatní cifry zápisu jsou jen nuly.

Určete všecka tisíciciferná čísla N, která jsou dělitelná sedmi.

ŘEŠENÍ. Každé z čísel N lze napsat ve tvaru

$$10^n + (10^k + 1), \qquad (1)$$

kde n, k jsou přirozená čísla, $n > k$. Např. číslo $N = 10\,010\,001$ lze napsat ve tvaru $N = 10^7 + (10^4 + 1)$.

Počítejme zbytky z po dělení sedmi u čísel 10^n a $10^k + 1$ a zapišme je do tabulek:

Tabulka (I)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
10^n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	...
z	3	2	6	4	5	1	3	2	...

Tabulka (II)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	...
10^k+1	11	101	1 001	10 001	100 001	1 000 001	10 000 001	100 000 001	...
z	4	3	0	5	6	2	4	3	...

Z tabulek a ze způsobu jejich sestrojení je zřejmé, že se zbytky po šesti místech opakují. Tato opakování jsou dána pořadím zbytků

$$3, 2, 6, 4, 5, 1 \text{ pro } 10^n$$

a

$$4, 3, 0, 5, 6, 2 \text{ pro } 10^k + 1.$$

Má-li být číslo N tisíciciferné, musí být $n = 999$, $k < 999$. V tabulce (I) je pro $n = 999$ zbytek $z = 6$, neboť $999 = 166 . 6 + 3$, tj. z pro $n = 999$ je totéž jako pro $n = 3$. Má-li být číslo $10^{999} + 10^k + 1$ dělitelné sedmi, musí zbytek po dělení čísla $10^k + 1$ sedmi být roven $7 - 6 = 1$. Protože se však v tabulce (II) zbytek 1 vůbec nevyskytuje, je úloha neřešitelná.

Řešitelná varianta

Pro šestisetciferná čísla N dostaneme $n = 599$, v tabulce (I) $z = 5$. V tabulce (II) musí být $z = 2$, tj. číslo $k + 1$ je násobkem šesti neboli $k = 6 - 1$. Za k můžeme volit postupně všecka čísla

$$5, 11, 17, 23, \ldots, 593.$$

Např. největší z těchto čísel $N = 10^{599} + 10^{593} + 1$.

2. Riešte sústavu rovníc s neznámymi x, y

$$ax + |y| = 1, \qquad (1)$$
$$x + y = a,$$

kde a je parameter. Preveďte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na parameter a.

RIEŠENIE. Rozoznávajme dva prípady: a) $y \geqq 0$, b) $y \leqq 0$. V prípade a) má sústava (1) tvar

$$ax + y = 1, \qquad (2)$$
$$x + y = a.$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (2) od prvej rovnice dostaneme

$$(a - 1)x = 1 - a. \tag{3}$$

Ak je $a \neq 1$, má rovnica (3) jediné riešenie $x = -1$. Z druhej rovnice sústavy (2) potom dostaneme $y = a + 1$. Dvojica $(-1, a + 1)$ je riešením sústavy (1) práve vtedy, keď je $a + 1 \geqq 0$ čiže $a \geqq -1$.

Ak je $a = 1$, má sústava (2) nekonečne mnoho riešení, a to všetky dvojice $(x, 1 - x)$. Sústave (1) z nich však vyhovujú len tie, pre ktoré $x \leqq 1$.

V prípade b) má sústava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax - y &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned} \tag{4}$$

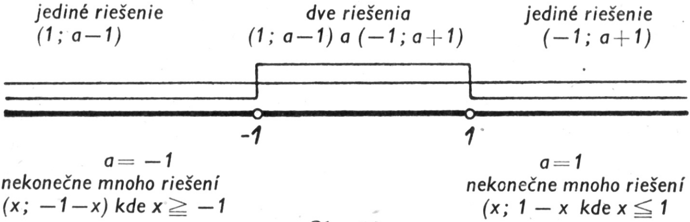
Sčítaním rovníc sústavy (4) dostaneme

$$(a + 1)x = a + 1. \tag{5}$$

Ak je $a \neq -1$, má rovnica (5) jediné riešenie $x = 1$. Z druhej rovnice sústavy (4) vypočítame $y = a - 1$. Dvojica $(1, a - 1)$ je však riešením sústavy (1) práve vtedy, keď je $a - 1 \leqq 0$ čiže $a \leqq 1$.

Ak je $a = -1$, má sústava (4) za riešenia všetky dvojice $(x, -1 - x)$, ktoré však vyhovujú sústave (1) len pre $-1 - x \leqq 0$ čiže $x \geqq -1$.

Zhrnutie znázorníme na číselnej osi (obr. 13).

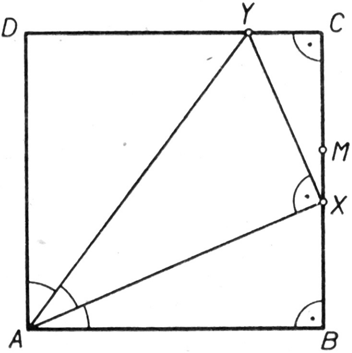


Obr. 13

3. Je dán čtverec $ABCD$, bod X probíhá vnitřek úsečky BC, bod Y náleží úsečce CD a je $XY \perp AX$.

Určete všecky body X, pro které platí

$$\sphericalangle BAX < \sphericalangle XAY < \sphericalangle YAD.$$



Obr. 14

ŘEŠENÍ (obr. 14). Stranu čtverce $ABCD$ zvolíme za jednotku délky. Všecky tři vyšetřované úhly jsou ostré, můžeme je porovnat pomocí tangent. Označíme-li $BX = x$, platí $CX = 1 - x$; protože

$$\triangle ABX \sim \triangle XCY \quad (uu)$$

(platí totiž $\sphericalangle BAX = 90° - \sphericalangle AXB = \sphericalangle CXY$), platí

$$CY = x(1 - x). \tag{1}$$

Z trojúhelníku XCY dostaneme podle Pythagorovy věty

$$XY = (1 - x)\sqrt{1 + x^2} \tag{2}$$

a dále

$$DY = 1 - x(1 - x) = x^2 - x + 1. \tag{3}$$

Mimoto platí podle Pythagorovy věty pro $\triangle ABX$

$$AX = \sqrt{1 + x^2}. \tag{4}$$

Platí tedy podle (2), (3), (4):

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAX = x, \ \operatorname{tg} \sphericalangle XAY = \frac{(1-x)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - x,$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle YAD = x^2 - x + 1. \qquad (5)$$

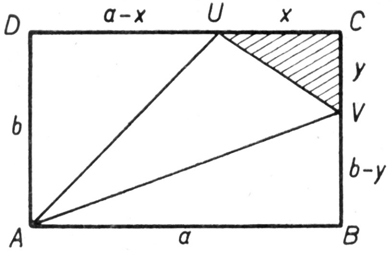
Jestliže $\operatorname{tg} \sphericalangle BAX < \operatorname{tg} \sphericalangle XAY$, pak $x < 1 - x$ čili $x < \frac{1}{2}$ a obráceně. Jestliže $\operatorname{tg} \sphericalangle XAY < \operatorname{tg} \sphericalangle YAD$, pak $1 - x < x^2 - x + 1$ neboli $x^2 > 0$ a obráceně.

Dokazovaný vztah platí tedy právě pro všecky body X, které leží mezi vrcholem B a středem M strany BC.

4. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Určete bod U ležící mezi body C, D a bod V mezi body B, C tak, aby trojúhelníky ABV, AUV, ADU měly obsahy sobě rovné.

a) Vypočtěte délky CU, CV pomocí a, b.

b) Sestrojte body , VU.



Obr. 15

ŘEŠENÍ (obr. 15).

a) Označme $CU = x$, $CV = y$. Pak pro obsahy $\triangle$ trojúhelníků platí

$$\triangle ABV = \frac{1}{2} a(b - y), \quad \triangle ADU = \frac{1}{2} b(a - x). \qquad (1)$$

Pětiúhelník $ABVUD$ má obsah

$$P = ab - \frac{1}{2}xy. \tag{2}$$

Podle podmínek úlohy je vzhledem k (1), (2)

$$\frac{1}{2}a(b - y) = \frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}xy, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}b(a - x) = \frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}xy. \tag{4}$$

Odečtením rovnic (3), (4) dostaneme

$$ay = bx. \tag{5}$$

Rovnici (3) znásobíme číslem $6a$ a dosadíme za ay z (5):

$$3a^2b - 3abx = 2a^2b - bx^2,$$

neboli (po krácení číslem b)

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0. \tag{6}$$

Rovnici (6) řešíme doplněním na dvojmoc dvojčlenu

$$\left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2\,;$$

odtud

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}a.$$

Protože musí být $x < a$, vyhovuje jediný kořen

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \,.\, a \doteq 0{,}382a < a. \tag{7}$$

Z (5) dostáváme

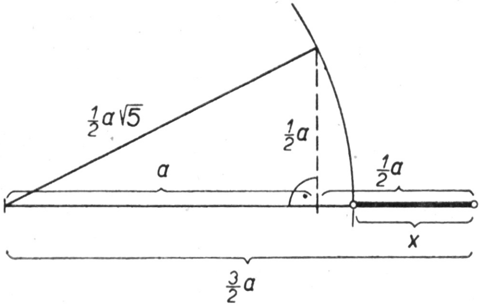
$$y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}b \doteq 0{,}382b < b. \tag{8}$$

Obrácení postupu ukazuje, že body U, V, pro něž platí

$CU = x$, $CV = y$, kde x, y jsou dány vzorci (7), (8) splňující skutečně podmínky úlohy.

b) Konstrukci úsečky délky x ukazuje obr. 16.

Úloha má pro každé a, b jediné řešení.



Obr. 16

4. *KATEGÓRIA D*

1. Dokážte, že platí

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2$$

pre všetky prirodzené $n > 1$.

RIEŠENIE. Premenný činiteľ vyšetrovaného súčinu s je

$$1+\frac{1}{k^2-1}=\frac{k^2}{k^2-1}=\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\,.$$

Súčin s možno teda napísať v tvare

$$s=\frac{2^2}{1\,.\,3}\cdot\frac{3^2}{2\,.\,4}\cdot\frac{4^2}{3\,.\,5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n^2}{(n-1)\,(n+1)}$$

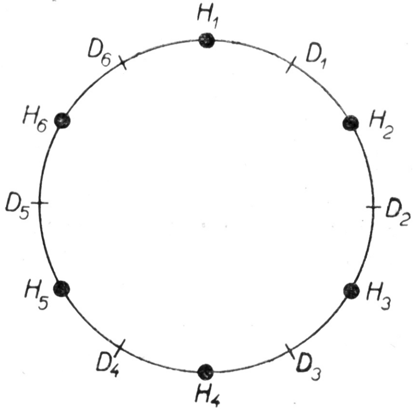
čiže

$$s = \frac{2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^2 \,.\, \dots \,.\, n^2}{2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^2 \,.\, 5^2 \,.\, \dots \,.\, (n-1)^2 \,.\, n(n+1)} \,.$$

Stadiaľ po skrátení dostaneme

$$s = 2n \,.\, \frac{1}{n+1} = 2 \,.\, \frac{n}{n+1} < 2 \,.$$

2. Při slavnosti sedí u kulatého stolu 6 hochů $H_1, H_2, \dots$ $\dots, H_6$ a 6 dívek $D_1, D_2, \dots, D_6$, rozmístěných tak, že vedle sebe sedí střídavě vždy chlapec a dívka (obr. 17).



Obr. 17

Před koncem slavnosti odešli 2 chlapci a 2 dívky. Přitom obě místa, která uvolnili chlapci, oddělují obě místa uvolněná děvčaty. (Např. mohli odejít H_1, H_3, D_2, D_5, ale nemohli odejít H_1, H_3, D_4, D_6.)

Zjistěte, kolika způsoby lze vybrat takovou dvojici chlapců a dvojici děvčat.

ŘEŠENÍ. Prozkoumáme systematicky všechny možné případy:

a) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_2 nebo H_2, H_3 nebo H_3, H_4 nebo H_4, H_5 nebo H_5, H_6 nebo H_6, H_1. Pro každou tuto dvojici chlapců lze vybrat $5 = 5 . 1$ vhodných dvojic děvčat, tj. celkem $6 . 5 = 30$ možností.

b) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_3 nebo H_2, H_4 nebo H_3, H_5 nebo H_4, H_6 nebo H_5, H_1 nebo H_6, H_2. Pro každou tuto dvojici chlapců lze vybrat $8 = 4 . 2$ vhodných dvojic děvčat, tj. celkem $6 . 8 = 48$ možností.

c) Místa uvolněná chlapci jsou H_1, H_4 nebo H_2, H_5 nebo H_3, H_6. Pro každou tuto dvojici hochů lze vybrat $9 = 3 . 3$ vhodných dvojic děvčat, tj. $3 . 9 = 27$ možností.

Všech možných případů je tedy $105 = 30 + 48 + 27$.

3. Trojuholník ABC má veľkosti vnútorných uhlov $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
a) Vyjadrite dĺžky strán b, c pomocou dĺžky strany a.
b) Vyjadrite pomer dĺžok všetkých troch výšok trojuholníka ABC.

RIEŠENIE. a) Pre tretí vnútorný uhol γ platí $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 105° = 75°$. Pre dĺžky strán teda platí

$$a < b < c. \tag{1}$$

Označme D pätu výšky na stranu c, E bod strany AB, pre ktorý platí $BE = BC = a$ (obr. 18). Trojuholník BCE je potom rovnostranný. Je teda

$$CD = \frac{1}{2} a \sqrt{3}. \tag{2}$$

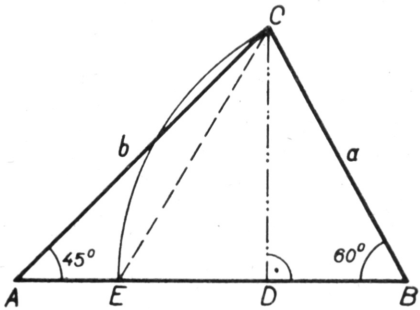
Trojuholník ACD je rovnoramenný so základňou $AC =$

$= b$. Je preto

$$b = CD \,.\, \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Dosadením zo vzťahu (2) do (3) dostaneme

$$b = \frac{1}{2} a\sqrt{6}. \qquad (4)$$



Obr. 18

Okrem toho je $AB = AD + BD = CD + BD$ čiže podľa vzťahu (2)

$$c = \frac{1}{2} a\sqrt{3} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}). \qquad (5)$$

Vzťahy (3) a (5) dávajú riešenie úlohy a).

b) Pre výšku v_c platí podľa (2)

$$v_c = \frac{1}{2} a\sqrt{3}\,. \qquad (2')$$

Obsah P trojuholníka ABC je daný podľa vzťahov (2'), (5) vzorcom

$$P = \frac{1}{2} cv_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}) \,.\, \frac{1}{2} a\sqrt{3} \quad \text{čiže}$$

$$P = \frac{a^2}{8}(3 + \sqrt{3}). \tag{6}$$

Zo vzťahu (6) vypočítame v_a a s použitím vzťahu (4) aj v_b:

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{3}), \tag{7}$$

$$v_b = \frac{2P}{b} = \frac{a}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}). \tag{8}$$

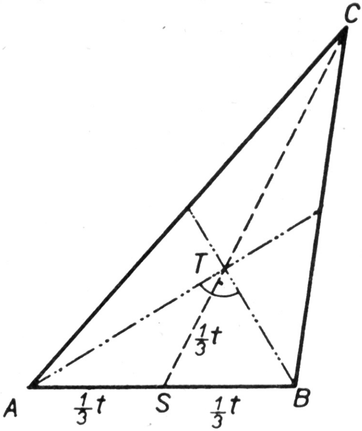
Zo vzťahov (2'), (7), (8) vyplýva

$$v_a : v_b : v_c = (3 + \sqrt{3}) : (\sqrt{2} + \sqrt{6}) : 2\sqrt{3}.$$

Numericky je približne: $v_a : v_b : v_c = 4{,}73 : 3{,}86 : 3{,}46$.

4. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b navzájem kolmé. Dále je dána délka těžnice t_c a poloměr r opsané kružnice.

Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.



Obr. 19

ŘEŠENÍ. *Rozbor* (obr. 19). Víme, že $CS = t$, $\sphericalangle ATB = 90°$. Kružnice opsaná $\triangle ABC$ má střed O a poloměr r. Z pravoúhlého $\triangle ABT$ plyne $ST = SA = SB$ (S je střed úsečky AB), tedy $AB = 2\,ST = 2 \cdot \frac{1}{3}\,CS = \frac{2}{3}\,t$. Odtud *konstrukce*:

1. Zvolíme polohu úsečky $AB = \frac{2}{3}\, t$ a sestrojíme její střed S.

2. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB sestrojíme bod O tak, aby bylo $OA = OB = r$.

3. Sestrojíme kružnice $c \equiv (S, t)$ a $k \equiv (O, r)$.

4. Společný bod kružnic c, k označme C.

5. Sestrojíme $\triangle\, ABC$.

Zkouška správnosti konstrukce. Je jasné, že kružnice opsaná sestrojenému trojúhelníku má poloměr r. Označme T těžiště $\triangle\, ABC$, pak $ST = \frac{1}{3}\, t$. Protože podle konstrukce $AB = \frac{2}{3}\, t$, platí $SA = SB = ST$. Bod T leží proto na Thaletově kružnici nad průměrem AB, tedy je $\sphericalangle\, ATB = 90°$. Těžnice AT, BT jsou tedy navzájem kolmé.

Diskuse. Bod 2 z konstrukce je možno provést, právě když

$$r \geqq \frac{1}{3}\, t. \tag{1}$$

Bod 4: společný bod C kružnic $c \equiv (S, t)$, $k \equiv (O, r)$ existuje tehdy a jen tehdy, platí-li

$$|r - t| \leqq SO \leqq r + t.$$

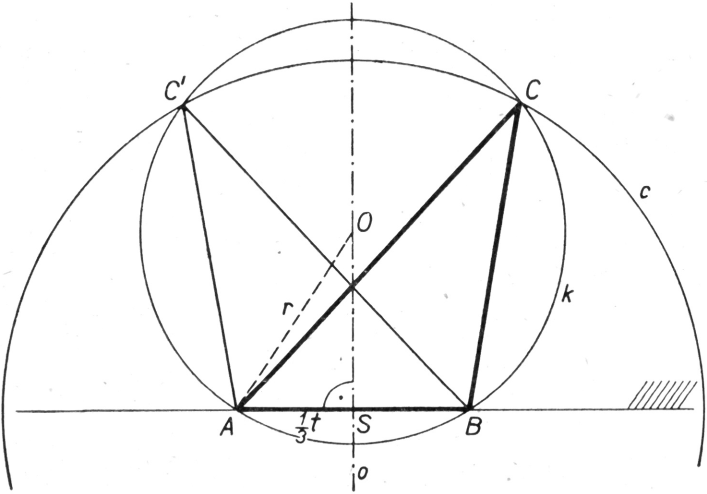
Dosadíme sem $SO = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\, t\right)^2}$ (viz obr. 20); po úpravě dostaneme

$$r \geqq \frac{5}{9}\, t. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) platí současně právě tehdy, jestliže

$$r \geqq \frac{5}{9} t.$$

Protože společný bod C kružnic c, k nikdy nepadne na přímku AB, možno provést bod 5.



Obr. 20

Podmínka řešitelnosti tedy je

$$\frac{r}{t} \geqq \frac{5}{9}.$$

Snadno vyšetříme, že řešení jsou dvě (symetrická podle přímky o), pouze v případě $r = \frac{5}{9} t$ je řešení jen jedno (rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C).