16. ročník matematické olympiády

VI. Devátá mezinárodní matematická olympiáda

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 16. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1966-1967. 9. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968. pp. 115–148.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404566

VI. Devátá mezinárodní matematická olympiáda

1. *NĚKOLIK VŠEOBECNÝCH POZNÁMEK, ZEJMÉNA ORGANIZAČNÍCH*

Devátá olympiáda, která se konala ve dnech 3. až 12. července 1967 v Jugoslávii, v černohorském městě Cetinji a na pobřeží Jaderského moře, byla pozoruhodná v několika směrech. Kromě tradičních účastníků — devíti zemí socialistického tábora (*Bulharska*, *Československa*, *Jugoslávie*, *Maďarska*, *Mongolska*, *Německé demokratické republiky*, *Polska*, *Rumunska a Sovětského svazu*) se jí zúčastnily letos poprvé i čtyři západní státy (*Anglie*, *Francie*, *Itálie a Švédsko*)*). Při oficiálním jednání i při soukromých rozhovorech se ukázalo, že zástupci západních zemí mají dosti odlišné názory na koncepci matematických soutěží a na matematickou náplň olympiád. Zdá se, že rostoucí počet účastnických zemí a různost názorů povede k opatření, o kterém se mluvilo již na moskevském kongresu r. 1966: že totiž pořádání soutěže se bude musit ujmout některá mezinárodní organizace, pravděpodobně Mezinárodní matematická unie.

Při IX. MMO učinila pořadatelská země pokus zorganizovat *malé symposium o vyučování matematice*, jak navrhl r. 1966 v Sofii bulharský ministr školství Gončev. I když symposium nemohlo být pro krátkost času dobře připraveno a musilo se ve značné míře improvizovat, byl to počin dobrý; došlo k výměně řady informací, zejména o matematických soutěžích v jednotlivých zemích; velmi otevřeně se tu vyslovily i názory na pojetí těchto soutěží. Bylo slíbeno, že sdělení účastníků symposia budou jugo-

*) Jména vedoucích delegátů i jejich zástupců jsou v **tabulce 1**.

slávským přípravným výborem rozmnožena a rozeslána všem účastnickým zemím.

Jugoslávský svazový sekretariát pro vzdělání a kulturu svěřil pořádání olympiády matematické společnosti (Savez društava matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije); jejím předsedou je *akademik Danilo Blanuša* ze Zagreba, generálním sekretářem dr. *Vojin Dajović*, profesor bělehradské university. Předsedou Jury (mezinárodní komise) byla *dr. Milica Ilić-Dajović*, také profesorka bělehradské university. Koordinování klasifikace žákovských prací prováděla osmičlenná skupina jugoslávských koordinátorů, vesměs vysokoškolských učitelů, v jejímž čele stál *Milorad Bertolino*, docent bělehradské university.

Přípravný výbor umístil soutěž vhodně do klidného města *Cetinje*, obklopeného svéráznou černohorskou krajinou, která byla většině účastníků zcela neznáma; část prací jury se však konala v *Budvě*, na nejjižnějším cípu jugoslávské riviéry, na okouzlujícím pobřeží Jadranu, které však v plné sezóně neposkytovalo právě nejlepší pracovní podmínky.

Devátá mezinárodní matematická olympiáda se konala pod protektorátem *presidenta J. B. Tita* a za aktivního zájmu *ministra školství Černohorské republiky*; o tom bude ještě zmínka při popisu průběhu soutěže.

Hned na tomto místě je vhodné zmínit se o budoucí olympiádě. Při zasedání Jury a při jednání symposia byla přednesena *dvě pozvání na desátou olympiádu*: *doc. Morozova* pozvala účastníky jménem vlády své země do Moskvy; obdobné pozvání přednesl i rumunský delegát *prof. Ionescu*. Oba delegáti se později dohodli, že X. MMO bude uspořádána v Moskvě. Jury tuto dohodu přijala a doporučila, aby na X. MMO byly přizvány další západní státy, zejména Norsko, Dánsko, Belgie, Holandsko, popříp. i USA. Dále doporučila Jury, aby se XI. MMO konala v Bukurešti.

Letošní olympiáda probíhala v podstatě ještě podle statutu, navrženého v r. 1962 Československem; zdá se však, že Sovětský svaz navrhne v příštím roce některé organizační změny (možná i snížení počtu účastníků z jednotlivých zemí) a že předem prokoresponduje připravované změny s pozvanými zeměmi.

2. *O MATEMATICKÉ NÁPLNI SOUTĚŽE*

Jugoslávci rozeslali pozvání na IX. MMO poměrně pozdě; tím se asi stalo, že některé země poslaly návrhy soutěžních úloh opožděně, nebo je nezaslaly vůbec. Přípravný výbor pak nemohl podle slov předsedkyně jury v krátké době připravit několik promyšlených variant šestic soutěžních úloh, a zejména nemohl zpracovat autorská řešení v světových jazycích (za oficiální jazyky byly prohlášeny angličtina, francouzština, italština, němčina, ruština). Za této situace měli členové jury při volbě úloh práci velmi svízelnou; tak se stalo, že úlohy nebyly vybrány nejvhodněji a také jejich texty a ohodnocení maximálním počtem bodů nebyly bez nedostatků.

Uvádíme *české znění textů úloh*, které bylo pořízeno překladem z francouzštiny a němčiny; některé neobratnosti v textu vznikly tím, že byl text schválený mezinárodní komisí přeložen pokud možno doslovně. V závorkách je uvedena země, která úlohu navrhla, a nejvyšší počet bodů, kterým mohla být úloha oceněna.

1. den (5. července 1967)

1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB, AD mají po řadě délky a, 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α.

Trojúhelník ABD nechť je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A, B, C, D pokrývají*) rovnoběžník $ABCD$ právě tehdy, když platí

$$a \leqq \cos \alpha + \sqrt{3} \,.\, \sin \alpha \,.$$

Dokažte.

(*Polsko*, 6 b.)

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

(*Československo*, 7 b.)

3. Buďte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1c_2 \ldots c_n$. Dokažte.

(*Anglie*, 8 b.)

2. den (6. července 1967)

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0B_0C_0$ a $A_1B_1C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC, podobných trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (tak, že vrcholům A_1, B_1, C_1 odpovídají po řadě vrcholy A, B, C) a opsaných trojúhelníku $A_0B_0C_0$ tak, že strany AB, BC, CA procházejí po řadě body C_0, A_0, B_0. Ze všech takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

(*Itálie*, 6 b.)

---

*) To znamená, že každý bod rovnoběžníku náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

5. Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8 , \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Nechť dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je $c_n = 0$.

(*Sovětský svaz*, 7 b.)

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno posledních n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

(*Maďarsko*, 8 b.)

Několik poznámek k úlohám. Úloha **1** byla pěkná a vhodná; k textu však bylo třeba připojit vysvětlení slova „*pokrývání*". Úloha připouštěla řadu různých způsobů řešení (metoda souřadnic nebyla právě nejvhodnější); zdá se, že byla obodována příliš nízko, což se ostatně ukázalo i při jejím korigování. Úloha **2** byla pro stručnost textu i pro jasnost logické struktury řešení uznávána většinou delegátů za velmi vhodnou. Úloha **3** spojuje prvky kombinatoriky a nauky o dělitelnosti; její řešení se opírá o zcela jednoduchý výpočet a o jedinou pomocnou větu, že totiž součin v po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný číslem v!

Zcela nevhodná byla úloha **4**, hlavně v té formulaci, v které byla dána. Sváděla žáky k tomu, aby ji řešili primitivně, aby si nevšímali geometrických míst vrcholů A, B, C, a zejména aby zanedbávali otázku existence v první i druhé části úlohy. Bez existenčních důkazů je řešení velmi jednoduché, ale neúplné. Úplné řešení je dosti složité.

Úloha **5** byla beze sporu nejobtížnější; už proto, že k jejímu řešení je třeba úsudků obvyklých v matematické analýze, na něž nejsou žáci středních škol zvyklí. I formulace úlohy mohla být jiná (dokažte, že pro všechna *lichá* n platí $c_n = 0$). Toto znění by bylo lépe odpovídalo i hodnocení úlohy sedmi body.

Text úlohy **6** vznikl přeformulováním textu úlohy o rozdělení dědictví mezi n synů. Reálná situace uvedená v textu je poněkud násilná a neživotná. Výsledek je neúměrně jednoduchý a nezajímavý vzhledem k složitosti řešení. Řešení $n = 6$, $m = 36$ lze uhodnout; úkolem pak je jedině dokázat, že úloha nemá jiné řešení.

Celek soutěžních úloh obsahuje tři úlohy geometrické (1, 2, 4), což delegáti západních států nepřijali právě sympaticky. Dále je tu opravdový nedostatek „řádné algebry“ i trigonometrie, lépe řečeno goniometrie; v úloze 1 se vyskytuje trigonometrie jen okrajově.

Úlohy byly vybrány v duchu dosavadní koncepce z různých úseků středoškolské matematiky. Francouzský delegát *prof. Adler* (který se neúčastnil vybírání úloh, neboť francouzská delegace přijela později) kritizoval soutěžní úlohy asi takto: tematicky jsou zastaralé, netvoří logicky a tematicky souvislý celek, ale jakousi tříšť a neumožňují účastníku soutěže zvolit si úlohy z těch úseků středoškolské matematiky, na které se při svém individuálním studiu zaměřil. Z těchto námitek je asi zhruba patrný odchylný názor některých západních zemí na koncepci olympiády; jsou to hlavně země románské sféry, ovlivňované silně bourbakismem.

3. *ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH*

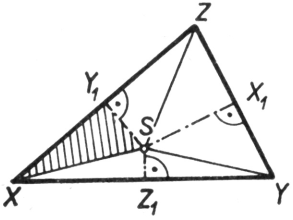
1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB, AD mají po řadě délky a, 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α. Trojúhelník ABD nechť je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A, B, C, D pokrývají rovnoběžník*) $ABCD$ právě tehdy, když platí

$$a \leqq \cos \alpha + \sqrt{3} \,.\, \sin \alpha \,.$$

Dokažte.

Řešení. a) Nejprve dokážeme pomocnou větu **P**: Budiž XYZ ostroúhlý trojúhelník, r poloměr kružnice jemu opsané. Pak tři kruhy se středy X, Y, Z o poloměru ϱ pokrývají trojúhelník XYZ právě tehdy, když platí $\varrho \geqq r$.

D ů k a z. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku XYZ (obr. 35); protože je trojúhelník XYZ ostro-



Obr. 35.

*) To znamená, že každý bod rovnoběžníku náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

úhlý, náleží bod S jeho vnitřku. Označme dále X_1, Y_1, Z_1 paty kolmic spuštěných z bodu S po řadě na přímky YZ, ZX, XY. Protože je trojúhelník XYZ ostroúhlý, padnou body X_1, Y_1, Z_1 do vnitřku příslušných stran. Je-li $\varrho < r$, pak bod S nenáleží žádnému z kruhů $K_X = (X; \varrho)$, $K_Y = (Y; \varrho)$, $K_Z = (Z; \varrho)$. Je-li $\varrho \geqq r$, pak bod S náleží každému z kruhů K_X, K_Y, K_Z. Protože je $XY_1 < XS$, náleží také bod Y_1 kruhu K_X, a tedy všechny body (vyšrafovaného) trojúhelníku XY_1S náleží kruhu K_X. Obdobně se dokáže, že každý z ostatních trojúhelníků XZ_1S, YZ_1S, YX_1S, ZX_1S, ZY_1S náleží některému z kruhů K_X, K_Y, K_Z.

Tím je pomocná věta **P** dokázána.

b) Nechť jednotkové kruhy K_A, K_B, K_C, K_D se středy A, B, C, D pokrývají rovnoběžník $ABCD$. Pak kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD. Kdyby tomu totiž tak nebylo, platila by podle pomocné věty **P** nerovnost $1 < r$, kde r značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABD. Pro střed S této kružnice by tedy platilo

$$r = AS > 1, \qquad CS \leqq 1, \tag{1}$$

neboť bod S by podle předpokladu náležel kruhu K_C. Z obr. 36, v němž je BDC' trojúhelník souměrně sdružený s trojúhelníkem BDC podle přímky BD, plyne

$$AS = C'S < CS\,, \tag{2}$$

neboť bod S leží uvnitř poloroviny BDA opačné k BDC. Z (1) dostaneme $CS < AS$, což je ve sporu s (2).

c) Protože kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD, platí podle pomocné věty **P** nerovnost $r \leqq 1$. Vypočteme r; podle kosinové věty a podle známého vzorce je

$$BD^2 = a^2 + 1 - 2\,a \cos \alpha\,, \tag{3}$$
$$BD = 2\,r \sin \alpha\,.$$

Vyloučíme-li z rovnic (3) BD a použijeme-li vztahu $r \leqq 1$, vyjde

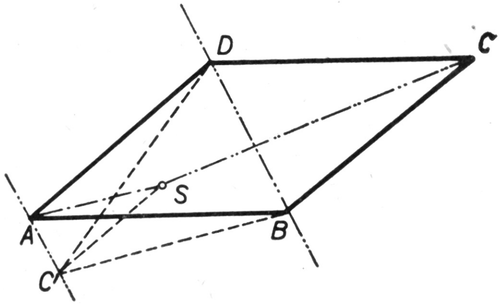
$$a^2 + 1 - 2a \cos \alpha \leqq 4 \sin^2 \alpha ,$$

neboli

$$a^2 - 2a \cos \alpha + 1 - 4 \sin^2 \alpha \leqq 0 ,$$

neboli

$$(a - \cos \alpha)^2 \leqq 3 \sin^2 \alpha . \qquad (4)$$



Obr. 36.

Protože trojúhelník ABD je ostroúhlý, padne pata jeho výšky spuštěné z vrcholu D mezi body A, B; proto je $a > \cos \alpha$ a z nerovnosti (4) dostaneme

$$a - \cos \alpha \leqq \sqrt{3} \sin \alpha ,$$

neboli

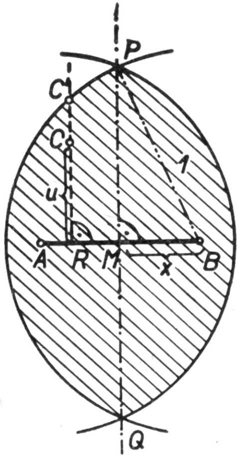
$$a \leqq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha . \qquad (5)$$

d) Obráceně, platí-li (5), platí i (4); odtud dostaneme obrácením postupu $4r^2 \sin^2 \alpha = BD^2 \leqq 4 \sin^2 \alpha$, tj. $r \leqq 1$. Z toho vyplývá podle pomocné věty **P**, že kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD. Užijeme-li souměrnosti podle průsečíku úhlopříček AC, BD, zjistíme, že kruhy K_A, K_B, K_C, K_D pokrývají rovnoběžník $ABCD$.

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

Řešení. Budiž $ABCD$ tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = 2x \leqq 1$, $AC \leqq 1$, $AD \leqq 1$, $BC \leqq 1$, $BD \leqq 1$, $CD > 1$. Označme u, v délky výšek trojúhelníků ABC, ABD, spuštěných na stranu AB.

Budiž ϱ rovina stěny ABC. Pak vrchol C náleží vyšrafované části roviny ϱ, která je průnikem jednotkových kruhů se středy A, B (obr. 37).



Obr. 37.

Označíme-li body P, Q, M, C', R podle obr. 37, je zřejmě

$$u = CR \leqq C'R \leqq PM = \sqrt{1 - x^2}$$

neboli

$$u \leqq \sqrt{1 - x^2}\,. \tag{6}$$

Obdobně dostaneme z trojúhelníku ABD

$$v \leqq \sqrt{1 - x^2}\,. \tag{7}$$

Protože výška čtyřstěnu $ABCD$ spuštěná z vrcholu D má nejvýše velikost v (jsou-li stěny ABC, ABD navzájem kolmé), platí pro objem y čtyřstěnu $ABCD$ tento odhad

$$y = \frac{1}{3}\,xuv\,,$$

neboli podle (6), (7)

$$y \leqq \frac{1}{3}(x - x^3)\,. \tag{8}$$

Naším úkolem je najít maximum funkce $\frac{1}{3}(x - x^3)$ v intervalu $0 < x \leqq \frac{1}{2}$. Dokážeme, že tato funkce je v uvedeném intervalu rostoucí. Skutečně, je-li $x_1 < x_2 \leqq \leqq \frac{1}{2}$, platí

$$\frac{1}{3}(x_2 - x_2^3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_1^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(x_2 - x_1)\,(1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{3}(x_2 - x_1)\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}(x_2 - x_1) > 0\,,$$

tj.

$$\frac{1}{3}(x_2 - x_2^3) > \frac{1}{3}(x_1 - x_1^3)\,.$$

Ze vztahu (8) pak dostaneme pro $x = \frac{1}{2}$

$$y \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

Tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = AC = AD = BC = BD = 1$ a jehož stěny ABC, ABD jsou navzájem kolmé, má objem $\frac{1}{8}$ a jeho hrana CD má délku $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$.

Tím je dokázána věta z úlohy 2 a zároveň je ověřeno, že existuje tetraedr maximálního objemu $\frac{1}{8}$.

3. Buďte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \ldots c_n$. Dokažte.

Řešení. a) Nejprve zjistíme rozepsáním součinu $c_1 c_2 \ldots c_n$, že platí

$$c_1 \,.\, c_2 \,.\, \ldots \,.\, c_n = n!\ (n + 1)\,! \qquad (9)$$

Dále vypočteme

$$c_{m+\lambda} - c_k = m + \lambda - k + (m + \lambda)^2 - k^2,$$

tj.

$$c_{m+\lambda} - c_k = m + \lambda - k + (m + \lambda - k)(m + \lambda + k) =$$
$$= (m + \lambda - k)(m + \lambda + k + 1); \qquad (10)$$

přitom λ je libovolné přirozené číslo. Pomocí rovnosti (10) upravíme daný součin takto:

$$P = (c_{m+1} - c_k) \,.\, (c_{m+2} - c_k) \,.\, \ldots \,.\, (c_{m+n} - c_k) = P_1 P_2,$$

kde

$$P_1 = (m + 1 - k) \,.\, (m + 2 - k) \,.\,.\,.\,.\,.\, (m + n - k)\,,$$
$$P_2 = (m + k + 2) \,.\, (m + k + 3) \,.\,.\,.\,.\,.\, (m + k + n + 1). \tag{11}$$

Součin P_1 obsahuje n za sebou jdoucích celých čísel. Je-li některé z těchto čísel nula, je $\frac{P_1}{n!} = 0$, tj. číslo celé.

Není-li žádný z činitelů P_1 roven nule, je P_1 až na znamení rovno součinu n po sobě jdoucích přirozených čísel a pak je také $\frac{P_1}{n!}$ číslo celé. Platí totiž pro libovolná přirozená čísla α, β, že

$$\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \,.\,.\,.\,.\,.\, (\alpha + \beta)}{\beta!} = \binom{\alpha + \beta}{\beta}$$

je číslo celé.

Tím je dokázáno, že součin P_1 je vždy dělitelný číslem $n!$

b) Nyní budeme vyšetřovat součin $(m + k + 1)P_2$. Je to součin $n + 1$ po sobě jdoucích přirozených čísel, proto je podle předchozího dělitelný číslem $(n + 1)!$ Platí tedy

$$(m + k + 1)P_2 = q \,.\, n! \,(n + 1)\,, \tag{12}$$

kde q je přirozené číslo. Pravá strana (12) je dělitelná prvočíslem $m + k + 1$. Protože je $m + k + 1$ větší než každé z čísel $1, 2, \ldots, n + 1$, je $m + k + 1$ dělitel čísla q, tj.

$$q = r(m + k + 1)\,, \tag{13}$$

kde r je přirozené číslo. Dosadíme-li z (13) do (12) a krátíme-li číslem $m + k + 1$, vyjde

$$P_2 = r \,.\, (n + 1)\,!\,,$$

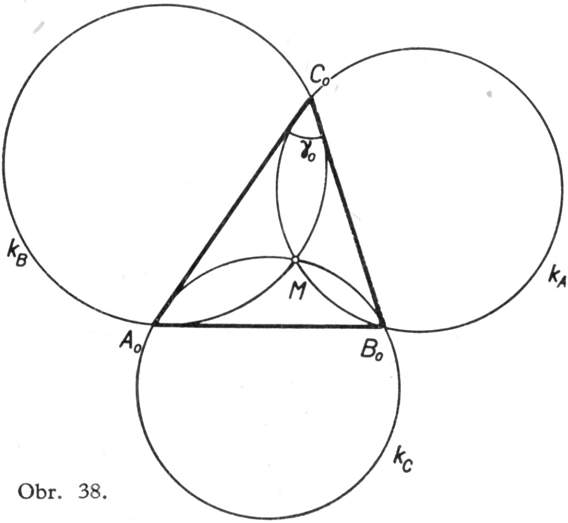
tj. součin P_2 je dělitelný číslem $(n + 1)!\,.$

Podle (11) je tedy součin $P = P_1P_2$ dělitelný číslem $n!(n+1)!$, tj. podle (9) je součin P dělitelný součinem $c_1c_2 \ldots c_n$, jak jsme měli dokázat.

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0B_0C_0$ a $A_1B_1C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC, podobných trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (tak, že vrcholům A_1, B_1, C_1 odpovídají po řadě vrcholy A, B, C) a opsaných trojúhelníku $A_0B_0C_0$ tak, že strany AB, BC, CA procházejí po řadě body C_0, A_0, B_0. Ze všech takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

Řešení. a) Dokážeme nejprve pomocnou větu **P**:

Je-li $A_0B_0C_0$ ostroúhlý trojúhelník a jsou-li α_1, β_1, γ_1 tři ostré úhly, pro něž platí $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, pak



Obr. 38.

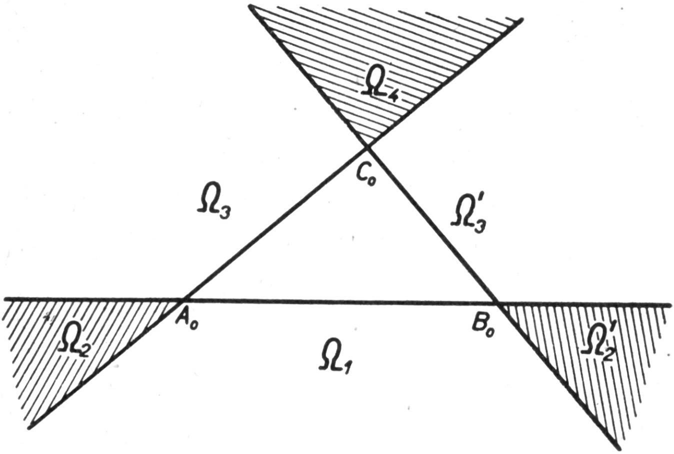
existuje uvnitř trojúhelníku $A_0B_0C_0$ jediný bod M, z něhož je vidět úsečky A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 po řadě pod úhly $\pi - \gamma_1$, $\pi - \alpha_1$, $\pi - \beta_1$.

Sestrojme kružnice k_A, k_B, k_C takto: k_A prochází body B_0, C_0 a z každého jejího bodu ležícího v polorovině $B_0C_0A_0$ je vidět úsečku B_0C_0 pod úhlem $\pi - \alpha_1$. Cyklickou záměnou dostaneme kružnice k_B, k_C (obr. 38).

Kružnice k_A, k_B se nedotýkají v bodě C_0. Jinak by totiž platilo podle vlastností úsekových úhlů $\pi - \alpha_1 + \gamma_0 + \pi - \beta_1 = 2\pi$ neboli $\gamma_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1$, což je nemožné, neboť

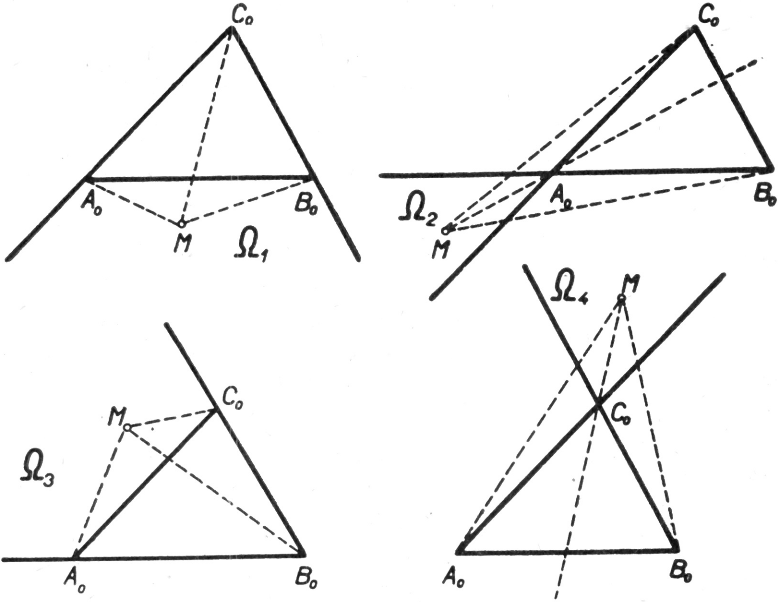
$\gamma_0 = \sphericalangle A_0C_0B_0$ je ostrý, $\pi - \gamma_1$ tupý.

Kružnice k_A, k_B se tedy protnou mimo bod C_0 ještě v dalším bodě M. Dokážeme, že bod M leží uvnitř trojúhelníku $A_0B_0C_0$; vyvrátíme totiž, že by bod M náležel některé z šesti (uzavřených) oblastí označených na obr. 39 písmeny Ω_1, Ω_2, Ω_2', Ω_3, Ω_3' a Ω_4.



Obr. 39.

Nechť bod M náleží oblasti Ω_1 (obr. 40a); pak je $\sphericalangle A_0MB_0 = \sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \pi - \beta_1 + \pi - {} - \alpha_1 = \pi + \gamma_1$; avšak $\sphericalangle A_0MB_0 \leqq \pi$, což je spor.



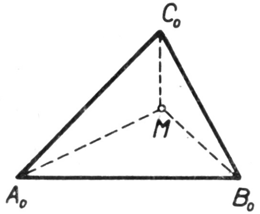
Obr. 40 abcd.

Nechť bod M náleží oblasti Ω_2; pak je (obr. 40b) $\sphericalangle C_0MB_0 < \sphericalangle C_0A_0B_0 = \alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$; avšak $\sphericalangle C_0MB_0 = {} = \pi - \alpha_1 > \dfrac{\pi}{2}$, což je opět spor. Obdobně se vyloučí oblast Ω_2'.

Leží-li bod M v oblasti Ω_3 (obr. 40c), je $\sphericalangle A_0MC_0 > {} > \sphericalangle B_0MC_0$, tj. $\beta_1 > \pi - \alpha_1$, což je nemožné, neboť

$\beta_1 < \frac{\pi}{2}$, $\pi - \alpha_1 > \frac{\pi}{2}$. Obdobně se vyloučí oblast Ω_3'.

Leží-li konečně bod M v oblasti Ω_4 (obr. 40d), je $\sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \sphericalangle A_0MB_0 < \sphericalangle A_0C_0B_0$, tj. $\beta_1 + \alpha_1 < \gamma_0$, což je opět spor, neboť $\alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1 > \frac{\pi}{2}$, $\gamma_0 < \frac{\pi}{2}$.



Obr. 41.

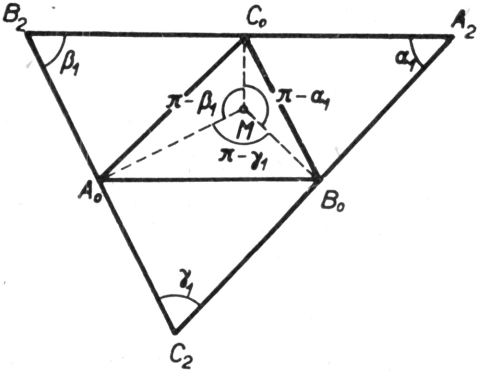
Protože bod M leží uvnitř $\triangle A_0B_0C_0$ (obr. 41), platí $\sphericalangle A_0MC_0 = \pi - \beta_1$, $\sphericalangle B_0MC_0 = \pi - \alpha_1$, $\sphericalangle A_0MB_0 = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1$, tj. bod M je společným bodem kružnic k_A, k_B, k_C.

b) Sestrojme v bodech A_0, B_0, C_0 po řadě kolmice k přímkám MA_0, MB_0, MC_0. Tyto přímky se protnou po dvou v bodech A_2, B_2, C_2 (obr. 42). Vznikne tak trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vnitřní úhly jsou α_1, β_1, γ_1. Body A_2, B_2, C_2 leží po řadě na kružnicích k_A, k_B, k_C. Snadno dokážeme, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah ze všech možných trojúhelníků ABC. Trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah, má-li maximální jednu stranu, např. A_2B_2. Na obr. 43 jsou kružnice k_A, k_B, jejich průsečíky C_0, M, úsečka A_2B_2 a strana AB libovolného trojúhelníku ABC, procházející bodem C_0. Na témž obrázku je sestrojena úsečka $A'B'$ souměrně sdružená s AB

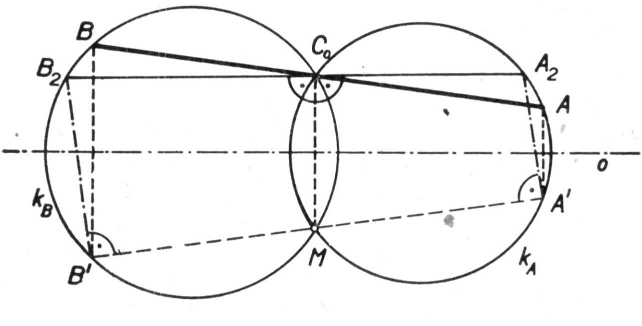
podle středné kružnic k_A, k_B. Z tětivových čtyřúhelníků MC_0A_2A', MC_0B_2B' plyne, že je $A_2A' \perp A'B'$, $B_2B' \perp A'B'$; proto je $A_2B_2 \geqq A'B' = AB$.

Tím je důkaz proveden.

Maximální trojúhelník $A_2B_2C_2$ zajišťuje existenci aspoň jednoho trojúhelníku žádaných vlastností. Intuitivně lze

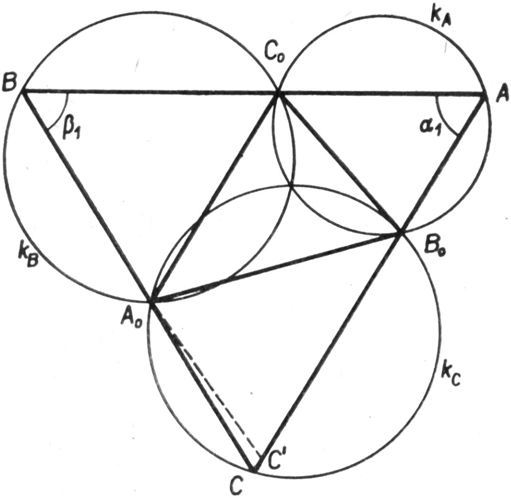


Obr. 42.



Obr. 43.

ovšem sestrojit další. Zvolíme libovolný bod A na kružnici k_A vně trojúhelníku $A_0B_0C_0$; sestrojíme přímky AB_0, AC_0. Protnou-li tyto přímky kružnice k_C, k_B po řadě v bodech C, B ležících vně $\triangle A_0B_0C_0$, pak trojúhelník ABC je trojúhelník žádaných vlastností.



Obr. 44.

Body B, A_0, C leží totiž v přímce; pak plyne z následujícího důkazu (obr. 44): přímka BA_0 protne polopřímku AB_0 v bodě C' (tento průsečík vznikne, neboť $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$). Z trojúhelníku ABC' dostaneme, že $\sphericalangle BC'A = \pi - \alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1$. Protože bod C' leží podle své konstrukce v polorovině opačné k $A_0B_0C_0$, je $\sphericalangle A_0C'B_0 = \sphericalangle BC'A = \gamma_1$, tj. bod C' náleží kružnici k_C i přímce AB_0, a splyne tedy s bodem C.

5. Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Nechť dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je $c_n = 0$.

Řešení. a) Nejprve odvodíme tuto pomocnou větu **P**: Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta$ $(\nu \geqq 1)$ taková kladná čísla, že $\alpha_1 < \beta, \alpha_2 < \beta, \ldots, \alpha_\nu < \beta$. Pak pro všechna přirozená čísla n od určitého počínaje platí

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_\nu^n < \beta^n. \tag{14}$$

Skutečně, podle předpokladu jsou všechna čísla $\frac{\alpha_1}{\beta}$, $\frac{\alpha_2}{\beta}, \ldots, \frac{\alpha_\nu}{\beta}$ kladná a menší než 1. Podle známé vlastnosti exponenciální funkce existují tedy přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, takže platí pro všechna $n \geqq n_1$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu}, \tag{15a}$$

pro všechna $n \geqq n_2$

$$\left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu} \tag{15b}$$

atd.; pro všechna $n \geqq n_\nu$ platí tedy

$$\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu}. \tag{15c}$$

Sečtením nerovností (15) dostaneme nerovnost

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n + \ldots + \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right)^n < \frac{\nu}{\nu} = 1,$$

neboli po znásobení číslem β^n nerovnost (14). Ta platí pro všechna $n \geqq n_0$, kde n_0 je největší z čísel $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$.

b) Z předpokladu úlohy 5 ($a_1, a_2, \ldots, a_8$ nejsou vesměs rovna nule) vyplývá, že $c_n > 0$ pro všechna *sudá* n. Dokážeme, že $c_n = 0$ pro všechna *lichá* n.

Nejprve vynecháme z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ta, která jsou rovna nule. Zbývající rozdělíme do dvou skupin: kladná označíme $p_1, p_2, \ldots, p_r$, záporná $-q_1, -q_2, \ldots, -q_s$. Podle podmínky úlohy platí

$$p_1^n + p_2^n + \ldots + p_r^n - q_1^n - q_2^n - \ldots - q_s^n = 0,$$

neboli

$$p_1^n + p_2^n + \ldots + p_r^n = q_1^n + q_2^n + \ldots + q_s^n \qquad (16)$$

pro nekonečně mnoho lichých exponentů n.

Čísla $p_1, p_2, \ldots, p_r$ i $q_1, q_2, \ldots, q_s$ jsou kladná a můžeme předpokládat, že jsou uspořádána sestupně, tj. že platí

$$p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_r; \quad q_1 \geqq q_2 \geqq \ldots \geqq q_s. \qquad (17)$$

Kdyby bylo $p_1 > q_1$, bylo by podle (17) $p_1 > q_2, \ldots, p_1 > q_s$; podle pomocné věty **P** by pak platilo od určitého exponentu n

$$p_1^n > q_1^n + q_2^n + \ldots + q_s^n,$$

a tím spíše

$$p_1^n + p_2^n + \ldots + p_r^n > q_1^n + q_2^n + \ldots + q_s^n.$$

To znamená, že rovnost (16) by nemohla být splněna pro nekonečně mnoho lichých exponentů n.

Stejně jako jsme vyvrátili nerovnost $p_1 > q_1$, vyvrátíme i nerovnost $q_1 > p_1$; je tedy $p_1 = q_1$. Obdobně dokážeme dále, že je $p_2 = q_2, \ldots, p_r = q_s$ $(r = s)$. Rovnost (16) pak platí pro všechny liché exponenty n, tj. $c_n = 0$ pro všechna lichá n.

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

Řešení. Označme z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) počet medailí, které zbyly k-tého dne po udělení k medailí. Pak je

$$z_{k+1} = z_k - \frac{1}{7} z_k - k - 1\,,$$

neboli po úpravě

$$\frac{6}{7} z_k = z_{k+1} + k + 1\,. \tag{18}$$

Označme a_k počet medailí vydaných k-tého dne; pak je

$$a_k = k + \frac{1}{7} z_k\,. \tag{19}$$

Ze vzorců (18), (19) dostaneme snadno rekurentní vzorec pro a_k; stačí napsat (19) pro $k + 1$

$$a_{k+1} = k + 1 + \frac{1}{7} z_{k+1} \tag{20}$$

a ze vzorců (19), (20), (18) vyloučit z_k, z_{k+1}; po snadné úpravě vyjde

$$a_k = \frac{7}{6} a_{k+1} - 1\,. \tag{21}$$

Rozepíšeme-li rovnost (21) pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{6} a_2 - 1, \\ a_2 &= \frac{7}{6} a_3 - 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= \frac{7}{6} a_n - 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Znásobíme-li rovnosti (22) po řadě čísly $1, \frac{7}{6}, \left(\frac{7}{6}\right)^2, \dots$
$\dots, \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}$ a sečteme, dostaneme vzorec

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} a_n - \left[1 + \frac{7}{6} + \dots + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}\right],$$

který po úpravě a po dosazení $a_n = n$ dostane tvar

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} (n - 6) + 6. \tag{23}$$

Vzorec (23) lze dokázat matematickou indukcí z rekurentní formule (21).

Protože je $n > 1$, plyne z (23), že číslo n je násobek šesti. Jedno řešení je $n = 6$, $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 6$, $m = 36$ (vypočteme z (22)).

Je-li $n > 6$, položíme $n = 6k$, kde k je přirozené číslo větší než 1. Pak koeficient $n - 6 = 6(k - 1)$ v (23) je dělitelný mocninou $6^{n-1} = 6^{6k-1}$. Protože pro každé $k > 1$ platí

$$6k - 1 > k - 1,$$

není koeficient $6(k - 1)$ dělitelný mocninou 6^{6k-1}.

Úloha má tedy jediné řešení $n = 6$, $m = 36$.

4. *VÝSLEDKY SOUTĚŽE*

Přehled bodů, které získali jednotliví žáci, ukazuje **tabulka 2.** Z tabulky je patrno, že francouzské družstvo mělo jen pět žáků, italské jen šest. Přitom Italové se zúčastnili obou soutěžních prací, Francouzi jen druhého dne; mimoto přijeli v noci před 6. červencem, žáci tedy byli unaveni a nevyspalí. Proto jsou výsledky Francouzů iregulární. Naproti tomu u Italů lze dosažený výsledek přepočíst znásobením koeficientem $\frac{8}{6}$; tak dostaneme pravděpodobný počet bodů 147.

I když se stále zdůrazňuje, že mezinárodní olympiáda je soutěží jednotlivců, vyskytuje se vždy při hodnocení poslední sloupec tabulky 2, který udává celkové počty bodů jednotlivých účastnických zemí a který dovoluje sestavit neoficiální „pořadí“. Je otázkou prestiže (snad nezdravé) každého státu, aby byl v tomto pořadí na předním místě.

Tabulka 2 ukazuje, že k tradičním favoritům mezinárodních olympiád přibyl letos další: Anglie. Vznikla tak „*silná pětka*“ (SSSR, NDR, Maďarsko, Anglie a Rumunsko) celkem vyrovnaných družstev. Od ní se dosti výrazně odlišuje (viz počty bodů) skupina slabších, kterou vede ČSSR s Bulharskem; velmi špatné umístění má letos Polsko, které získalo jen jednu třetí cenu. Do slabší kategorie patří i noví účastníci Itálie a Švédsko, o jejichž perspektivách je však těžko něco prorokovat; stačí uvědomit si neobyčejný vzestup NDR v posledních čtyřech letech.

Nyní ještě něco o cenách: nejvyšší dosažitelný počet bodů pro jednoho žáka byl 42 (žáci, kteří ho dosáhli, jsou v tabulce 2 v rámečcích). Meze pro udělení cen byly v závěrečném zasedání jury stanoveny takto:

I. cena: 38 až 42 bodů;
II. cena: 30 až 37 bodů;
III. cena: 22 až 29 bodů.

Podle tohoto klíče získali účastníci z jednotlivých zemí ceny uvedené přehledně v **tabulce 3.**

Mimo tyto ceny byly uděleny několika žákům zvláštní odměny za originální a elegantní řešení nebo za zobecnění úloh.

Jury chtěla udělit také zvláštní ceny některým francouzským žákům. Prof. Adler však takovéto ceny „pro útěchu" odmítl s tím, že Francouzi se nepovažují za daných okolností za řádné účastníky soutěže, ale jen za pozorovatele.

5. *PRŮBĚH SOUTĚŽE*

Ačkoli pozvání na IX. MMO došlo z Jugoslávie počátkem dubna, bylo oznámeno místo konání soutěže se stručným časovým programem teprve kolem 10. června. Tu byla už velmi krátká lhůta pro zajištění dopravy delegací, zejména když Cetinje nemá ani letecké, ani vlakové spojení a doprava autobusem z nejbližších stanic nebo letišť (Dubrovník, Titograd) je odkázána na úzké silnice v hornatém terénu — a to vždy na vzdálenost 40 i více kilometrů.

Delegáti se sjížděli v *Cetinji* 30. června a 1. července. Již dne 1. 7. se konala v moderním hotelu Park, kde byli ubytováni všichni vedoucí delegací, první schůze neúplné jury, na níž byl vyhlášen podrobnější program. Po prohlídce města Cetinje (zejména sídla Nikolova) odjeli odpoledne delegáti na mořské pobřeží do ozdravovny v lázeňském místě *Budva*. Zde začla zasedat jury ráno dne 2. července v improvizované místnosti; teprve během zasedání se dostavili reprezentanti Itálie, Švédska a Anglie. S anglickou delegací přijel také pracovník ústavu pro řízení vědy *Maurice Goldsmith*, který se zúčastnil jako pozorovatel některých schůzí jury i symposia. Oba dny 2. a 3. července byly věnovány vybírání úloh, jejich ohodnocení body a precizování textů ve světových jazycích. Dne 3. července večer přijeli i zástupci vedoucích (pedagogičtí průvodci), neboť mezitím se sjela v Cetinji žákovská družstva. Také pedagogičtí průvodci zůstali pak ubytováni v Budvě, a tak byli žáci dokonale izolováni v Cetinji, kde bydlili ve dvou hotelích.

Přes noc na 4. července se pořídily překlady textů do národních jazyků, během dopoledne je pedagogičtí průvodci rozmnožili. Od 10 h do 13 h se konala v Budvě první část symposia, večer byla v restauraci na pláži recepce delegátů, kterou pořádal ministr školství černohorské republiky *Mišičić*.

Dne 5. července odjeli časně ráno všichni delegáti i jejich zástupci autobusy do Cetinje; zde v budově místního národního výboru zahájila prof. Dajović soutěž. Promluvil ministr Mišičić a akademik Blanuša. Žáci začali pracovat asi v 9,30 a měli na první tři úlohy 4 hodiny čistého času.

Delegáti a jejich zástupci pak podnikli výlet dopoledne na horu *Lovčen*; odpoledne se vrátili do Budvy, kde vzhledem k pracovním podmínkám nebylo možné začít s korigováním žákovských úloh. Dne 6. 7. ráno odjeli delegáti se svými zástupci do Cetinje k zahájení druhé části soutěže. Sem už zatím dorazila také francouzská delegace vedená prof. Adlerem; francouzští žáci se pak zúčastnili druhé části soutěže. Tato část obsahovala opět tři úlohy, na které měli žáci čtyři hodiny čistého času. Dny 6. až 8. července byly věnovány opravování a koordinování úloh. Úlohy jugoslávského družstva koordinovali delegáti těch zemí, které navrhly příslušnou úlohu.

Dne 8. července večer v 18.00 hod. začalo závěrečné zasedání jury; proběhlo velmi rychle a hladce. Zde bylo rozhodnuto o udělení cen; sporné případy nebyly. Na této schůzi přednesli doc. Morozova a prof. Ionescu pozvání na příští olympiádu. Ve dnech 7. a 8. července jezdili žáci autobusy do Budvy, kde strávili u moře příjemné dny rekreace.

Neděle 9. července byla věnována celodenní exkurzi všech účastníků do monastýru *Morača* a k *Biogradskému jezeru* (asi 260 km cesty autobusy). Dne 10. července v 10 h pokračovalo symposium, večer byla schůzka s representanty národního výboru města Cetinje. Pondělí 11. července bylo věnováno výletu do *Dubrovníka*, 12. dopoledne bylo volno, pak následoval slavnostní oběd. Odpoledne se konalo za přítomnosti ministra slavnostní rozdílení cen a diplomů, večer byl ples mládeže. Dne 13. července se delegace rozjížděly do svých domovů

Snad i z tohoto stručného vylíčení průběhu IX. MMO je patrné, že vyžadovala velké vypětí sil jak od delegátů a jejich zástupců, tak i od jugoslávských organizátorů. Pracovalo se často intenzívně za parných dní od rána do večera, absolvovalo se (i s exkurzemi) na 700 km cest autobusy po obtížných horských serpentinách, které vyžadovaly pevné nervy nejen u řidičů, ale i u cestujících.

Snad na tomto místě je třeba se zmínit o práci aspoň dvou jugoslávských pracovníků: prvním z nich je předsedkyně jury, *prof. Milica Illić-Dajović*, která díky svým jazykovým znalostem řídila všechna jednání obratně, taktně a pohotově; za její výkon jí právem náleží obdiv a uznání. Vskutku obětavým a neúnavným organizačním pracovníkem byl také *prof.* cetinjského gymnasia *Michal Begović*, jehož rychlé a operativní zásahy rozřešily mnohou svízelnou situaci. Celkem je třeba konstatovat, že pohostinnost jugoslávských soudruhů byla opravdu slovanská.

6. *ČESKOSLOVENSKÁ DELEGACE*

Naše delegace se skládala z vedoucího, jeho zástupce a osmi žáků; jejich jména i výsledky, kterých dosáhli, jsou uvedeny v **tabulce 4.**

S výsledky nemůžeme být ani letos spokojeni. Nejméně lze žákům vyčítat malý úspěch v úloze 5 (celkem 18 bodů), neboť s úlohami tohoto druhu se nesetkali ani v školské praxi, ani ve speciální přípravě. Více zaráží slabý výsledek v úloze 3, nejvíce pak nevalný výsledek v úloze 4, kde často nepodali ani intuitivní řešení. Také obě nuly v sloupci 2 jsou velmi zarmucující a skutečnost, že nikdo z našich žáků nerozřešil zcela správně úlohu 1, nás udivuje. Prohlédněme tabulku 4 ještě jednou po řádcích: náš nejlepší žák Bohuš Sivák rozřešil jen jedinou úlohu bez chyby, žádný žák nemá víc než dvě bezvadně rozřešené úlohy. A to je skutečně málo, uvážíme-li, že jsme v loňském školním roce věnovali speciální přípravě olympioniků zvláštní pozornost. Přestože slabý výsledek 3. kola domácí olympiády nám nedával příliš růžové perspektivy, přece jen jsme pokládali naše družstvo za silnější. Dva z účastníků, kteří byli na předních místech 3. kola domácí olympiády, selhali úplně a ani ostatní nepodali očekávaný výkon. Podle skutečné kvality našeho družstva jsme jistě mohli získat 5 až 6 cen, z toho možná i jednu první.

Nezbývá nám než opět pátrat po příčinách našeho poměrně malého úspěchu. A tu musíme zase konstatovat, že naše střední škola, a to i speciální matematické třídy, neposkytují našim žákům tak dokonalou přípravu jako obdobné školy v zahraničí. Máme v učebním plánu poměrně málo hodin matematického praktika a tedy méně zkušeností a rutiny. Naše osnovy, učebnice, a zejména příkladový materiál je pro nadané žáky málo náročný. Často to platí i o učitelích. Zdá se, že speciální matematické třídy by se měly zřizovat tak jako v zahraničí jen v místech, kde jsou pro to podmínky, a že by v nich měli učit převážně vysokoškolští profesoři. Žádná speciální příprava mimoškolní (např. dvě hodiny semináře týdně) nemůže nahradit systematické, náročné a dobře vedené vyučování. Zkusíme sice v školním roce 1967—68 jiný způsob přípravy vybraných talentů, ale zázraky nelze očekávat. Nechceme zde propagovat výchovu matematických žákovských primadon, ale na druhé straně výjimečné nadání mladých lidí pro matematiku je hodnota, jejíž ztrátu si naše společnost nemůže dovolit. Čím dříve se talentovaný žák podchytí (ovšem nikoli předčasnou specializací), tím lépe pro jeho budoucí rozvoj. V tomto směru však mají mnoho dluhů naše devítiletky, které se stále starají více o to, jak doučovat děti zaostávající, než jak podporovat žáky nadané, kteří jsou nadějí národa.

Jako druhá příčina našeho poměrně malého úspěchu se nám jeví opět nedobrý nervový stav našich žáků, jejich malá jistota, sebedůvěra, houževnatost a vytrvalost v překonávání překážek. Tyto záporné vlastnosti jsou způsobovány nebo aspoň posilovány nedostatky ve výchově.

Snad bychom se měli na konci ještě zmínit o některých dosti dramatických okolnostech, které doprovázely naši účast na letošní olympiádě. Přestože informace o místě konání soutěže došly až v polovině června, snažilo se MŠ zajistit čs. delegaci co nejlepší podmínky pro cestu do Cetinje a zpět. Zajistilo obě cesty letadlem, ovšem vzhledem k nedostatku volných míst byla cesta do Jugoslávie stanovena na 29. června, cesta zpět na 12. července. To znamenalo předčasný příjezd a předčasný odjezd. Ačkoli čs. delegace byla odhodlána absolvovat dvoudenní zpáteční cestu vlakem z Titogradu přes Sarajevo, Bělehrad a Budapešť, aby se mohla zúčastnit závěrečných slavností dne 12. července, nepodařilo se tento úmysl provést. Letenky na 12. července nebyly členkou organizačního výboru v Jugoslávii včas vráceny, a tak se musela naše delegace rozloučit dne 11. července v Dubrovníku s ostatními účastníky IX. MMO; nevrátila se už do Cetinje, ale po přenocování odcestovala přes Split do Prahy. Naši žáci byli tak připraveni o dojmy ze slavnostního zakončení i o dárky; jakousi náhradou za to snad jim byla pěkná plavba parníkem z Dubrovníku přes Korčulu a Hvar do Splitu a pohodlný návrat letadlem do Prahy.

Tabulka 1

Vedoucí delegací a jejich zástupci

Země	Vedoucí	Zástupce
Anglie	Robert Lyness, inspektor	dr. Norman Routledge
Bulharsko	prof. Spas Monolov	Stojan D. Budurov, inspektor
ČSSR	doc. Jan Vyšín	dr. František Zítek, CSc.
Francie	prof. André Adler	—
Itálie	prof. Tullio Viola	prof. Angelo Pescarini
Jugoslávie	doc. Dušan Adnadević	Vladimír Mićić, magister
Maďarsko	Endre Hódi, věd. pracov.	prof. István Reiman
Mongolsko	doc. Uržin Sanžmjatav	Aivan Duger, bagš
NDR	prof. Hans-Joachim Weinert	dr. Helmut Bausch
Polsko	prof. Mieczyslaw Czyzykowski	Andrzej Makowski, magister
Rumunsko	prof. Constantin Ionescu	prof. Zlate Bogdanov
Sovětský svaz	doc. Elena Morozova	Ivan Petrakov, metodik
Švédsko	doc. Lars Inge Hedberg	Lars Brandell, kand. fil.

Tabulka 2

Počty získaných bodů

Země	Počet bodů žáka č. 1	2	3	4	5	6	7	8	Celkový počet bodů země
Anglie	24	28	18	36	34	28	41	22	231
Bulharsko	7	14	24	20	20	11	21	$\boxed{42}$	159
Československo	16	27	30	24	9	13	11	29	159
Francie	4	10	9	6	12	—	—	—	41
Itálie	20	35	19	7	26	3	—	—	110
Jugoslávie	13	18	11	18	26	22	6	22	136
Maďarsko	34	31	38	33	23	26	38	28	251
Mongolsko	10	11	26	5	6	9	7	13	87
Něm. dem. rep.	$\boxed{42}$	30	23	$\boxed{42}$	39	35	13	33	257
Polsko	22	8	12	7	18	5	9	20	101
Rumunsko	34	$\boxed{42}$	22	17	29	19	28	23	214
Sovětský svaz	37	35	32	$\boxed{42}$	27	38	39	25	275
Švédsko	16	10	15	28	9	20	14	23	135

Tabulka 3

Přehled udělených cen

Země	Cena			Celkem
	I.	II.	III.	
Anglie	1	2	4	7
Bulharsko	1	—	1	2
Československo	—	1	3	4
Itálie	—	1	1	2
Jugoslávie	—	—	3	3
Maďarsko	2	3	3	8
Mongolsko	—	—	1	1
Německá demokratická republika	3	3	1	7
Polsko	—	—	1	1
Rumunsko	1	1	4	6
Sovětský svaz	3	3	2	8
Švédsko	—	—	2	2
Celkem	11	14	26	51

Tabulka 4

Přehled výsledků československého družstva

Poř. čís.	Jméno žáka	Škola a třída	Počet bodů v úloze č. 1	2	3	4	5	6	Celkový počet bodů	Cena
1.	Petr Kůrka	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	3	0	0	5	0	8	16	—
2.	Pavel Polcar	SVVŠ Velké Meziříčí, 2. r.	5	0	8	3	7	4	27	III
3.	Bohuš Sivák	SVVŠ Zvolen, 1. r.	5	5	8	4	5	3	30	II
4.	Tomáš Mašek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 1. r.	5	7	0	3	1	8	24	III
5.	Erich Wiszt	SVVŠ Banská Bystrica, 3. r.	1	2	0	5	1	0	9	—
6.	Martin Macháček	SVŠ Bratislava, Novohradská, 3. r.	1	4	0	5	1	2	13	—
7.	Jan Kastl	SVVŠ Plzeň, 3. r.	1	7	0	0	1	2	11	—
8.	Radovan Gregor	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	3	7	8	3	2	6	29	III
	Celkem		24	32	24	28	18	33	159	