16. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 16. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1966-1967. 9. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968. pp. 104–114.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404565

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechny takové trojice komplexních čísel a, b, c, aby rovnice

$$x^4 - ax^3 - bx + c = 0 \tag{1}$$

měla kořeny a, b, c.

Řešení. Rozložme čtyřčlen na levé straně (1) v součin kořenových činitelů:

$$x^4 - ax^3 - bx + c = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d), \tag{2}$$

kde d je čtvrtý kořen rovnice (1). Po vynásobení na pravé straně (2) a po porovnání koeficientů při mocninách x dostaneme soustavu rovnic pro a, b, c, d:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= a\,, \\ a(b + c + d) + bc + bd + cd &= 0\,, \\ a(bc + bd + cd) + bcd &= b\,, \\ abcd &= c\,. \end{aligned}$$

Po jednoduché úpravě vyjde

$$\begin{aligned} b + c + d &= 0\,, \\ bc + bd + cd &= 0\,, \\ b(cd - 1) &= 0\,, \\ c(abd - 1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Rozlišíme případy $b = 0$ a $b \neq 0$.

I. Je-li $b = 0$, dostaneme z čtvrté rovnice (3) $c = 0$ a z první rovnice $d = 0$. Číslo a může být libovolné. Máme jedno řešení:

$$a \text{ libovolné}, \quad b = c = d = 0\,. \tag{4}$$

II. Je-li $b \neq 0$, plyne z třetí rovnice (3) $cd = 1$, tj. $c \neq 0$, $d \neq 0$. Z čtvrté rovnice (3) dostaneme $abd = 1$. Máme tedy soustavu

$$\begin{aligned} &abd = 1\,, \\ &d = -(b + c)\,, \\ &cd = 1\,, \\ &bc + (b + c)d = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Vyloučením d z druhé až čtvrté rovnice (5) vyjde po úpravě

$$\begin{aligned} &c^2 + bc + 1 = 0\,, \\ &b^2 + bc + c^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Vyloučením c z obou rovnic (6) dostaneme

$$b^2 = 1\,,$$

tj. $b = \pm 1$. Pro c pak dostaneme z první rovnice (6)

$$c^2 \pm c + 1 = 0\,. \tag{7}$$

Označíme-li $\varepsilon_1 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$,

má první rovnice (7), tj. rovnice $c^2 + c + 1 = 0$, kořeny ε_1, $\dfrac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_2$, druhá rovnice (7), tj. rovnice $c^2 - c + 1 = 0$, kořeny ε_2, $\dfrac{1}{\varepsilon_2} = -\varepsilon_1$. Hodnoty d vypočteme z třetí rovnice (5), a z první rovnice (5). Celkem vyjde pět řešení, která jsou zachycena v tabulce:

a	b	c	d
libovolné	0	0	0
ε_1	1	ε_1	$-\varepsilon_2$
$-\varepsilon_2$	1	$-\varepsilon_2$	ε_1
$-\varepsilon_2$	-1	ε_2	$-\varepsilon_1$
ε_1	-1	$-\varepsilon_1$	ε_2

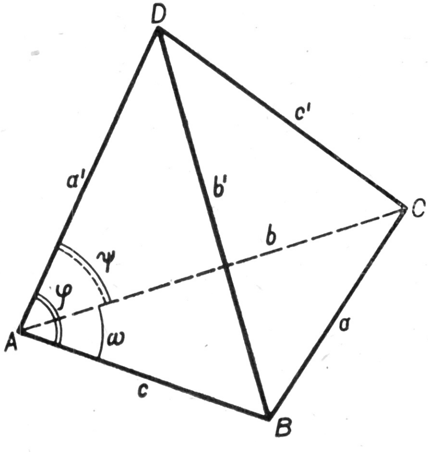
2. Ak platia pre dĺžky hrán štvorstena $ABCD$ vzťahy

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2, \tag{1}$$

potom je aspoň jedna jeho stena ostrouhlý trojuholník. Dokážte.

Riešenie (obr. 30). Označme $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$. Potom vzťahy (1) možno zapísať v tvare

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 . \tag{1'}$$



Obr. 30.

Vyšetrujme veľkosti uhlov $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$ a $\sphericalangle BAC$ pri vrchole A. Označme ich podľa obrázku: $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle BAC = \omega$. Podľa kosínusovej vety je

$$2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2 , \tag{2a}$$
$$2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2 , \tag{2b}$$
$$2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2 . \tag{2c}$$

Z (1') však vyplýva

$$a'^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2\,, \tag{3a}$$
$$a'^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2\,. \tag{3b}$$

Ak spojíme vzťahy (2abc) a (3ab), zistíme, že čísla $\cos \varphi$, $\cos \psi$ a $\cos \omega$ sú súčasne všetky tri buď kladné alebo záporné alebo rovné nule. Je teda buď

$$\varphi = \psi = \omega = 90°$$

alebo

$$\varphi < 90°, \quad \psi < 90°, \quad \omega < 90°$$

alebo

$$\varphi > 90°, \quad \psi > 90°, \quad \omega > 90°\,.$$

Rovnaký výsledok platí aj pre uhly pri vrcholoch B, C, D štvorstena $ABCD$.

Ak je teraz $\triangle ABC$ ostrouhlý, nemáme čo dokazovať. Ak je $\triangle ABC$ pravouhlý alebo tupouhlý, a to tak, že $\omega \geqq 90°$, potom je aj $\varphi \geqq 90°$, $\psi \geqq 90°$. Potom však pri každom z vrcholov B, C, D je aspoň jeden uhol ostrý. Podľa predchádzajúceho sú potom všetky uhly pri vrcholoch B, C, D ostré, tj. trojuholník BCD je ostrouhlý.

3. V tabulce cyklických permutací

$$\begin{array}{l} 1, 2, \ldots, n-1, n \\ 2, 3, \ldots, n, 1 \\ \text{— — — — — —} \\ n, 1, \ldots, n-2, n-1 \end{array}$$

($n \geqq 2$) znásobíme každé číslo prvního řádku tím číslem k-tého řádku, které je ve stejném sloupci. Všechny tyto součiny sečteme a výsledek označíme s_k (např. $s_2 = 1\,.\,2 + 2\,.\,3 + \ldots + (n-1)\,.\,n + n\,.\,1$).

a) Odvoďte vztah mezi s_{k-1}, s_k a z něho vzorec pro s_k.

b) Zjistěte, pro které k je při daném n součet s_k nejmenší, a vypočtěte tento součet.

Řešení. a) Vypišme např. pátý a šestý řádek tabulky (1) pro $n = 8$; dostaneme

$$\begin{matrix} 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4 \\ 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5. \end{matrix} \tag{2}$$

Každé číslo druhého řádku (2) je o 1 *větší* než nad ním stojící číslo prvního řádku (2) s výjimkou čísla 1, které je o 7 *menší* než nad ním stojící číslo 8. *Zvětšíme-li* součet s_5 o $1 . 1 + 2 . 1 + 3 . 1 + \ldots + 8 . 1$ a *zmenšíme-li* jej o $4 . 8$ (číslo 8 stojí totiž ve čtvrtém sloupci), dostaneme s_6; je tedy

$$s_6 = s_5 + (1 + 2 + \ldots + n) - 4 . 8 . \tag{3}$$

Rekurentní formule (3) se dá snadno zobecnit. Přejdeme-li v schématu (1) od řádku $k - 1$ k řádku k, zvětší se každé číslo o 1 kromě čísla n, které přejde v číslo 1. Lze tedy říci, že se číslo n zvětší také o 1, ale současně se zmenší o n.

Čísla n vyplňují v schématu (1) vedlejší diagonálu; v řádku $k - 1$ stojí na místě ν a zřejmě platí $k - 1 + \nu = n + 1$, neboli

$$\nu = n - k + 2 . \tag{4}$$

Odtud vyplývá: Ze součtu s_{k-1} dostaneme součet s_k, přičteme-li $1 + 2 + \ldots + n = \sigma$ a zároveň odečteme (podle (4)) číslo $n . (n - k + 2)$; je tedy

$$s_k = s_{k-1} + \sigma - n(n - k + 2) . \tag{5}$$

Rozepíšeme vzorec (5) pro $k = 2, 3, \ldots, k$; dostaneme

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + \sigma - n^2 + 2n - 2n , \\ s_3 &= s_2 + \sigma - n^2 + 3n - 2n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k &= s_{k-1} + \sigma - n^2 + k . n - 2n . \end{aligned} \tag{6}$$

Sečteme $k - 1$ rovností (6) a dostaneme

$$s_k = s_1 + (k-1)\sigma - (k-1)n^2 + n\left[\frac{k(k+1)}{2} - 1\right] - \\ - 2(k-1)\,.\,n\,.$$

Dosadíme-li sem $\sigma = \frac{1}{2}\,n(n+1)$ a vytkneme-li ze všech členů na pravé straně (vyjma s_1) číslo $\frac{1}{2}\,n$, vyjde po jednoduché úpravě

$$s_k = s_1 + \frac{n}{2}\,[k^2 - (n+2)k + n + 1]\,, \qquad (7)$$

což je výsledný vzorec. Přitom s_1 stále značí součet

$$s_1 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\,.$$

Vzorec (7) se pak dokáže indukcí pomocí rekurentní formule (5).

b) Součet s_k je při pevném n kvadratickou funkcí proměnné k. Minimum funkce s_k dostaneme, vyšetříme-li minimum funkce

$$f(k) = k^2 - (n+2)k + n + 1\,.$$

Protože platí

$$f(k) = \left(k - \frac{n+2}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\,, \qquad (8)$$

má s_k minimum pro $\frac{n+2}{2} = k$.

Je třeba rozlišit dva případy:

I. Je-li n sudé, je $\nu = \frac{n+2}{2}$ celé, a proto hledané minimum je podle (7) a (8)

$$s_\nu = s_1 - \frac{n^3}{8}\,.$$

II. Je-li n liché, není $\dfrac{n+2}{2}$ celé číslo. Minimum s_k nastane pro nejbližší celočíselné hodnoty k; je to $k = \dfrac{n+1}{2}$ nebo $h = \dfrac{n+3}{2}$, což jsou skutečně celá čísla. Minimum pak je

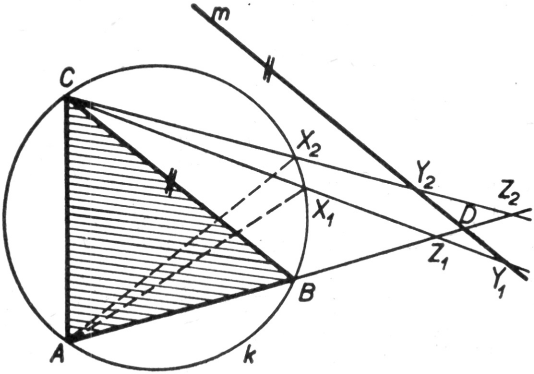
$$s_k = s_1 - \frac{n^3 - n}{8}.$$

4. Do kružnice k je vepsán ostroúhlý trojúhelník ABC. Přímka m je vnější přímkou kružnice k, je rovnoběžná s BC a protíná polopřímku AB v bodě D.

a) Je-li X bod kružnice k ležící uvnitř toho oblouku BC, který neobsahuje bod A, a je-li Y průsečík přímek CX, m, pak body A, D, X, Y leží na jisté kružnici $\varkappa$. Dokažte.

b) Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice $\varkappa$ a přímky m v případě, že body C, D, X leží v přímce.

Řešení (obr. 31).



Obr. 31.

a) Dokážeme větu předně pro situaci, že body X, Y jsou odděleny přímkou AB (na obr. 31 body X_1, Y_1). Pak trojúhelníky Z_1BC, Z_1DY_1 jsou homotetické podle středu Z_1 (tj. průsečíku CX, AB). Proto platí

$$\sphericalangle DY_1Z_1 = \sphericalangle DY_1X_1 = \sphericalangle BCX_1 \,. \qquad (1)$$

Protože body A, C náležejí témuž oblouku $\widehat{BX_1}$, je (podle věty o obvodových úhlech)

$$\sphericalangle BCX_1 = \sphericalangle BAX_1 = \sphericalangle DAX_1 \,. \qquad (2)$$

Spojením (1), (2) plyne, že

$$\sphericalangle DY_1X_1 = \sphericalangle DAX_1 \,,$$

tj. body A, X_1, D, Y_1 leží na kružnici, kterou nazveme $\varkappa$.

Jestliže přímka AB neodděluje body X, Y (na obr. 31 body X_2, Y_2), ale existuje průsečík Z_2 přímek CX_2, AB, pak postupujeme jako v předchozím případě. Homotetické podle středu Z_2 jsou trojúhelníky Z_2DY_2, Z_2BC; odtud odvodíme

$$\sphericalangle X_2AB = \sphericalangle X_2AD = \sphericalangle Z_2Y_2D \,,$$

tj.

$$\sphericalangle X_2AD + \sphericalangle X_2Y_2D = 180^\circ \,. \qquad (3)$$

Protože čtyřúhelník ADY_2X_2 je konvexní, je tětivový, tj. body A, D, Y_2, X_2 leží na kružnici $\varkappa$.

Je-li $CX \parallel AB$ (X_3 na obr. 32), nevznikne bod Z. V tomto případě však je opět $\sphericalangle X_3CB = \sphericalangle X_3AB = \sphericalangle X_3AD$ (obvodové úhly) a mimoto $\sphericalangle X_3CB = \sphericalangle Y_3CB = \sphericalangle Y_3DB = \sphericalangle Y_3DA$ (protější úhly rovnoběžníku BDY_3C); proto platí

$$\sphericalangle X_3AD = \sphericalangle Y_3DA \,,$$

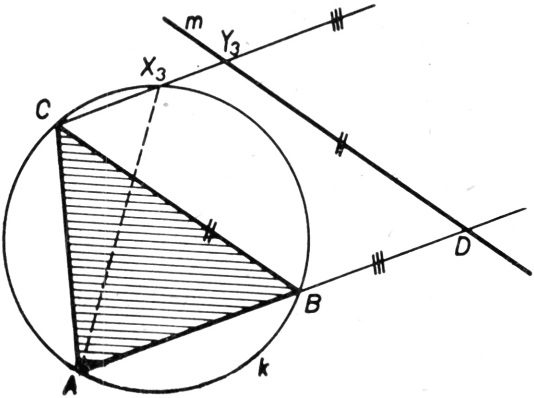
lichoběžník ADY_3X_3 je rovnoramenný, a tedy tětivový.

b) Zbývá vyšetřit situaci, kdy body C, X, D leží v přímce (X_4, na obr. 33). Zvolíme bod Q přímky m tak, aby ležel v polorovině ABC; pak platí

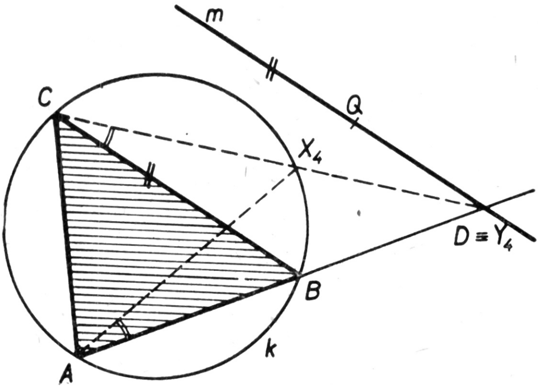
$$\sphericalangle QDX_4 = \sphericalangle QDC = \sphericalangle DCB = \sphericalangle X_4CB \,; \qquad (4)$$

podle věty o obvodových úhlech je však

$$\sphericalangle X_4CB = \sphericalangle X_4AB = \sphericalangle X_4AD . \tag{5}$$



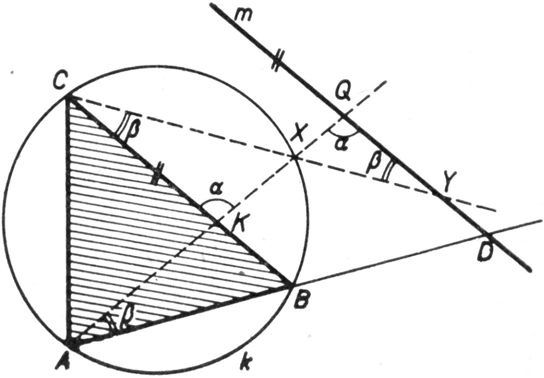
Obr. 32.



Obr. 33.

Spojíme-li (4), (5), dostaneme vztah $\sphericalangle X_4AD = \sphericalangle QDX_4$. Odtud vyplývá, že kružnice $\varkappa$ procházející body A, D, X_4 se dotýká v bodě D přímky m.

Iné riešenie. a) Východzia situácia je naznačená na obr. 34, kde okrem toho K znamená priesečník priamky AX so stranou BC a Q priesečník priamky AX s priamkou m. Keďže $BC \parallel m$, vyplýva stade, že $\sphericalangle CKX =$



Obr. 34.

$= \sphericalangle XQY$ a $\sphericalangle XCK = \sphericalangle QYX$, pretože sú to uhly striedavé. Uhly $\sphericalangle XCB$ a $\sphericalangle XAB$ sú obvodové uhly prislúchajúce tomu istému oblúku kružnice k, preto sú zhodné. Z toho vyplýva, že $\triangle XYQ \sim \triangle DAQ$ (podľa vety $u\,u$). Z podobnosti oboch trojuholníkov vyplýva:

$$QX : QY = QD : QA \text{ alebo } QX \,.\, QA = QD \,.\, QY. \quad (1)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva na základe vzťahu pre mocnosť bodu ku kružnici, že body A, X, D, Y ležia na kružnici $\varkappa$.

b) Ak body C, X, D, Y ležia na priamke, tou istou úvahou dostaneme, že $\triangle XDQ \sim \triangle DAQ$, odkiaľ

$$QX : QD = QD : QA \quad \text{čiže} \quad QA \,.\, QX = QD^2 ,$$

čo znamená, že priamka m sa dotýka kružnice $\varkappa$ v bode D.

Riešil Erich Wiszt,
III.b SVŠ Banská Bystrica.