16. ročník matematické olympiády

III. Súťažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 16. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1966-1967. 9. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968. pp. 49–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404563

III. Súťažné úlohy I. kola

1. *KATEGÓRIA A*

1. Čísla a, b sú prirodzené nepárne čísla, $a < b$. Súčet všetkých prirodzených čísel väčších než a a menších než b sa rovná 1000. Určite čísla a, b.

Riešenie. Prirodzené čísla väčšie než a a menšie než b tvoria aritmetickú postupnosť

$$a + 1,\ a + 2,\ \ldots,\ b - 1, \tag{1}$$

ktorá obsahuje $b - 1 - a$ členov. Súčet členov postupnosti (1) je $\frac{1}{2}(b - a - 1)(a + b)$; je teda

$$(b - a - 1)(a + b) = 2\,000 = 2^4 \,.\, 5^3. \tag{2}$$

Zrejme je $b - a - 1 < a + b$, tj.

$$(b - a - 1)^2 < (b - a - 1)(a + b) = 2^4 \,.\, 5^3\,,$$

čiže

$$b - a - 1 < 20\sqrt{5} \doteq 44{,}7\,. \tag{3}$$

Pretože a, b sú nepárne čísla, je $b - a - 1$ tiež nepárne a podľa (2) je deliteľom čísla $2^4 \,.\, 5^3$. Nepárnymi deliteľmi čísla $2^4 \,.\, 5^3$ splňujúcimi podmienku (3) sú len čísla 5, 25, 1.

Je teda buď

$$b - a - 1 = 5,\ a + b = 400 \tag{4}$$

alebo

$$b - a - 1 = 25, a + b = 80 \tag{5}$$

alebo

$$b - a - 1 = 1,\ a + b = 2\,000\,. \tag{6}$$

Z rovníc (4) vyplýva $b = 203$, $a = 197$. Z rovníc (5) dostávame $a = 27$, $b = 53$ a z rovníc (6) $a = 999$, $b = 1\,001$. Hľadané postupnosti sú potom

$$198, 199, 200, 201, 202, \tag{7}$$

$$28, 29, 30, \ldots, 50, 51, 52, \tag{8}$$

$$1\,000\,. \tag{9}$$

Skúška. Z rovníc (4), (5), (6) dostávame nepárne čísla $a < b$. Ak vypočítame súčet členov postupnosti (7) i (8), presvedčíme sa o splnení druhej podmienky úlohy. Každý zo súčtov sa totiž rovná číslu 1 000, ktorému je rovný tiež jediný člen postupnosti (9).

Záver. Daná úloha má tri riešenia: $a = 197$, $b = 203$; $a = 27$, $b = 53$; $a = 999$, $b = 1\,001$.

2. V prostoru je dáno n rovin, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou a žádné čtyři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik oblastí dělí tyto roviny prostor.

(Návod. Předpokládejme znalost této věty: n přímek roviny, z nichž každé dvě jsou různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, dělí rovinu na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ oblastí.)

Řešení. Označme c_n počet oblastí, na něž rozdělí prostor n rovin vyslovených vlastností. Další rovina ϱ protne původní roviny v n přímkách, které splňují předpoklady pomocné věty. Rovina ϱ je jimi rozdělena tedy v $b_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ oblastí. Tolik také z c_n oblastí bylo rozděleno rovinou ϱ ve dvě, tj. rovina ϱ dala vznik b_n novým oblastem. Platí tedy

$$c_{n+1} = c_n + b_n\,. \tag{1}$$

Z (1) odvodíme

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + b_{n-1}\,, \\ c_{n-1} &= c_{n-2} + b_{n-2}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_2 &= c_1 + b_1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Sečtením rovností (2) dostaneme

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\,. \tag{3}$$

Je třeba vypočítat $\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$. Platí

$$2\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + 2(n-1)\,. \tag{4}$$

Podle známého vzorce je

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,. \tag{5}$$

Dále vypočteme $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$. Indukcí se snadno dokáže vzorec

$$\sum_{1}^{\nu} k^2 = \frac{1}{6}\,\nu(\nu+1)(2\nu+1); \quad \text{je} \quad \text{tedy}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}\,n(n-1)(2n-1)\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li z (5) a (6) do (4), dostaneme

$$2\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{6}\,n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}\,n(n-1) + 2(n-1),$$

po úpravě

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{6}\,(n-1)(n^2+n+6)\,. \qquad (7)$$

Dosadíme-li ze (7) do (3) — víme, že je $c_1 = 2$ — vyjde

$$c_n = \frac{1}{6}\,(n^3+5n+6)\,, \qquad (8)$$

což je výsledný vzorec. Přesvědčme se o tom znovu indukcí. Pro $n = 1$ dává (8) výsledek $c_1 = 2$; dále je podle (1)

$$c_{n+1} = \frac{1}{6}\,(n^3+5n+6) + \frac{1}{2}\,(n^2+n+2) =$$

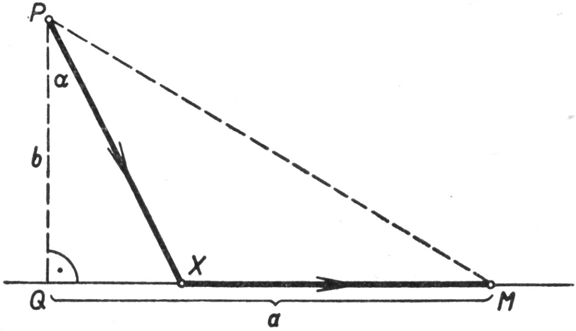
$$= \frac{1}{6}\,(n^3+3n^2+8n+12) = \frac{1}{6}\,[(n+1)^3+5(n+1)+6]\,.$$

3. Časť priamej hrádze rybníka možno považovať za odvesnu QM pravouhlého trojuholníka PQM s preponou PM. Plavec sa má dostať z miesta P v rybníku čo najskôr do miesta M na hrádzi. Známou rýchlosťou v_1 bude plávať priamo do určitého miesta X ležiaceho na hrádzi medzi Q a M a potom taktiež známou rýchlosťou v_2 pobeží z miesta X do miesta M. Vypočítajte veľkosť uhla $\sphericalangle QPX$.

Riešenie (obr. 9). Označme $PQ = b$, $QM = a$, $\sphericalangle QPX = \alpha$. Doba t_1 potrebná na preplávanie dráhy

PX je $\frac{1}{v_1} PX$, čiže

$$t_1 = \frac{b}{v_1 \cos \alpha}. \tag{1}$$



Obr. 9.

Doba t_2 potrebná na prebehnutie dráhy XM je $\frac{1}{v_2} XM$, čiže

$$t_2 = \frac{a - b \operatorname{tg} \alpha}{v_2}. \tag{2}$$

Je teda celková doba

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{1}{v_1 \cos \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v_2}\right) b + \frac{a}{v_2}. \tag{3}$$

Pretože $\frac{a}{v_2}$ je konštanta, je ľavá strana vzťahu (3) minimálna práve vtedy, keď je minimálny prvý člen pravej strany, tj. keď je minimálny výraz $\left(\frac{1}{v_1 \cos \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v_2}\right)$.

Po vytknutí kladného čísla $\frac{1}{v_1}$ stačí vyšetrovať funkciu

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{v_1}{v_2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \frac{v_1}{v_2}\sin\alpha}{\cos\alpha}\,. \tag{4}$$

Je zrejme $v_1 < v_2$, tj. $\frac{v_1}{v_2} < 1$; a teda $1 - \frac{v_1}{v_2}\sin\alpha > 0$.

Preto je pravá strana vzťahu (4) minimálna práve vtedy, ak je minimálna jej druhá mocnina, t. j. funkcia

$$z = \frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\sin\alpha\right)^2}{1 - \sin^2\alpha}\,. \tag{5}$$

Vieme totiž, že pre nezáporné čísla p, q platí: $p \leqq q$ práve vtedy, keď je $p^2 \leqq q^2$.

Ak položíme vo vzťahu (5) $\sin\alpha = x$, hľadáme minimum funkcie

$$z = \frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2}x\right)^2}{1 - x^2}$$

v intervale $0 < x < 1$. Toto minimum je $1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}$ a nastane pre $x = \sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}$. Ľahko totiž dokážeme, že pre všetky x z intervalu $-1 < x < 1$ platí nerovnosť

$$\frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2}x\right)^2}{1 - x^2} \leqq 1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\,. \tag{6}$$

Keďže $1 - x^2 > 0$, vyplýva z nerovnosti (6): $\left(1 - \frac{v_1}{v_2}x\right)^2 \geqq$ $\geqq \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)(1 - x^2)$ čiže $\left(\frac{v_1}{v_2} - x\right)^2 \geqq 0$. Postup možno obrátiť. Rovnosť vo vzťahu (6) nastane práve vtedy, keď je $x = \frac{v_1}{v_2}$.

Veľkosť ostrého uhla $\sphericalangle QPX = \alpha$ určíme z rovnice $\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}$. Dobu $t = t_1 + t_2$ vypočítame potom zo vzťahu (3).

4. Čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost, že

$$AB = BC = CD = DA = 1 .$$

Dokažte, že jeho objem je nejvýše $\frac{2}{27}\sqrt{3}$. Může nastat rovnost?

Řešení. Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, budeme každý čtyřstěn, jehož čtyři hrany, z nichž žádné tři neleží v rovině, mají délku 1, nazývat jednotkový.

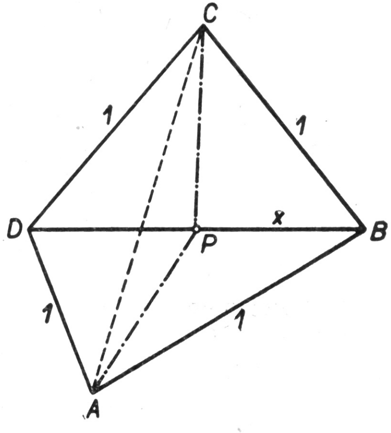
Ukažme nejprve, že má-li jednotkový čtyřstěn $\mathbf{Z}$ tu vlastnost, že odchylka stěn proti některé z obou zbývajících hran není rovna $90°$, pak existuje jednotkový čtyřstěn $\mathbf{Z}_1$ o větším objemu, než má čtyřstěn $\mathbf{Z}$.

Nechť tedy ve čtyřstěnu $ABCD$ je $AB = BC = CD = DA = 1$ a nechť např. úhel proti hraně AC (tj. úhel rovin ABD, CBD) není pravý. Objem tohoto čtyřstěnu je roven $\frac{1}{3}\,Pv$, kde P je obsah trojúhelníku ABD a v výška spuštěná z vrcholu C na stěnu ABD. Otočme rovinu CBD okolo přímky BD do polohy kolmé k ABD. Při tomto otočení přejde bod C v bod C', jehož vzdálenost v' od roviny ABD je větší než v. Čtyřstěn $ABC'D$ je opět jednotkový a jeho objem je $\frac{1}{3}\,Pv' > \frac{1}{3}\,Pv$, jak jsme chtěli ukázat.

Nechť nyní má jednotkový čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ vlastnost, že proti oběma zbylým hranám A_1C_1 a B_1D_1 leží pravé úhly. Potom, označíme-li S_1 střed hrany A_1C_1 a T_1 střed hrany B_1D_1, platí $A_1S_1 = S_1T_1 = T_1B_1$, a přitom úsečky A_1C_1, B_1D_1 a S_1T_1 jsou po dvou navzájem kolmé. Abychom to ukázali, všimněme si předně, že $A_1C_1T_1$ kolmo půlí úsečku B_1D_1; je totiž $A_1B_1 = A_1D_1$, takže $D_1B_1 \perp A_1T_1$; obdobně $C_1B_1 = C_1D_1$, takže $D_1B_1 \perp C_1T_1$. Proto je D_1B_1 kolmá k rovině $A_1C_1T_1$, která ji půlí. Je tedy $A_1C_1T_1$ kolmá k $A_1B_1D_1$ i $C_1B_1D_1$, takže trojúhelník $A_1T_1C_1$ je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu T_1. Odtud je $A_1S_1 = S_1T_1$. Obdobně $B_1D_1S_1$ půlí kolmo úsečku A_1C_1, odkud vyplývá $S_1T_1 = T_1B_1$. Protože podle Pythagorovy věty $1 = A_1B_1 = \sqrt{A_1S_1^2 + S_1T_1^2 + T_1B_1^2} = A_1S_1\sqrt{3}$, je $A_1S_1 = S_1T_1 = T_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a rovněž $C_1S_1 = D_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Je ihned zřejmé, že jsou-li obráceně p, q kolmé mimoběžky, jejichž nejkratší (ke každé z nich kolmá) příčka S_2T_2 (kde S_2 je na p, T_2 na q) má délku $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pak body A_2 a C_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu S_2 na p a body B_2 a D_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu T_2 na q tvoří vrcholy jednotkového čtyřstěnu, proti jehož zbylým hranám jsou pravé úhly. Z uvedené analýzy vyplývá, že takový čtyřstěn existuje a je až na polohu v prostoru určen jednoznačně. Vypočteme jeho objem. Ve stejném označení jako nahoře je obsah stěny $A_1B_1D_1$ roven

$$B_1T_1 \, . \, T_1A_1 = B_1T_1\sqrt{T_1S_1^2 + S_1A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

výška spuštěná z C_1 na $A_1B_1D_1$ má délku $C_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2}$, takže objem je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{27} \cdot \sqrt{3}$. Tím jsme podle první části dokázali, že každý jednotkový čtyřstěn má objem nejvýše $\frac{2}{27}\sqrt{3}$, a právě u jednotkového čtyřstěnu, jehož oba úhly proti zbylým hranám jsou pravé, nastane rovnost.



Obr. 10.

Jiné řešení (obr. 10). Označme P střed hrany BD; pak je $AP \perp BD$, $CP \perp BD$. Označíme-li ještě $BP = DP = x$, je

$$AP = CP = \sqrt{1 - x^2}. \tag{1}$$

Pokládáme-li nejprve stěnu ABD za konstantní podstavu čtyřstěnu $ABCD$ (tj. x je konstantní), pak tento čtyřstěn má maximální objem y právě tehdy, je-li rovina BCD kolmá k rovině ABD, neboť pak je výška čtyřstěnu příslušná ke stěně ABD maximální. Tato maximální výška má podle (1) velikost $\sqrt{1-x^2}$. Maximální objem y každého z uvažovaných čtyřstěnů (při konstantním x) vypočteme vzhledem k (1) podle vzorce

$$y = \frac{1}{3} x \sqrt{1-x^2} \, . \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}(x - x^3) \, . \qquad (2)$$

Trojúhelníky ABD, BCD vzniknou právě tehdy, je-li $x < 1$. Máme tedy vlastně vyšetřit maximum funkce (2) v intervalu $0 < x < 1$.

K vyšetření tohoto maxima použijeme obratu, který se opírá o goniometrický vzorec

$$\sin 3\alpha = 3 \, . \sin \alpha - 4 \, . \sin^3 \alpha \, . \qquad (3)$$

Do (2) dosadíme $x = k \, . \sin \varphi$ a kladnou konstantu k určíme tak, aby poměr koeficientů při $\sin \varphi$ a při $\sin^3 \varphi$ byl $-\frac{3}{4}$. Dostaneme $y = k \, . \sin \varphi - k^3 \sin^3 \varphi$, takže $\frac{k}{-k^3} = -\frac{1}{k^2} = -\frac{3}{4}$, odkud $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$; je tedy

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \, . \qquad (4)$$

Po dosazení do (2) vyjde

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi - \frac{8}{3\sqrt{3}} \sin^3 \varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} (3 \, . \sin \varphi - 4 \, . \sin^3 \varphi)$$

a podle (3)

$$y = \frac{2}{9\sqrt{3}} \, . \sin 3\varphi \, . \qquad (5)$$

Probíhá-li x interval $0 < x < 1$, probíhá φ podle (4) interval $0^\circ < \varphi < 60^\circ$. Máme tedy určit maximum funkce (5) v intervalu $0^\circ < 3\varphi < 180^\circ$. Je patrné, že toto maximum nastane pro $3\varphi_m = 90^\circ$, kdy je $\sin 3\varphi_m = 1$. Odtud vypočteme $\varphi_m = 30^\circ$ a podle (4) $x_m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Pro toto x_m nabývá objem y podle (5) maximální hodnoty

$$y_m = \frac{2}{9\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\,.$$

Existenci čtyřstěnu s uvedeným objemem zjistíme obdobně jako v prvním řešení.

2. *KATEGORIE B*

1. Vyšetřete průběh funkce

$$y = \sqrt{|1 - x| + 1} - 1 \qquad (1)$$

a načrtněte její graf. Výpočtem rozhodněte, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a ve kterých klesající. Dále rozhodněte, pro která x nepřekračují funkční hodnoty číslo 2.

(Poznámka. Bližší vysvětlení týkající se vyšetřování průběhu funkcí najdete ve svazečku č. 4 z edice *Škola mladých matematiků* od Šislera a Jarníka: *O funkcích.*)

Řešení. Z rovnice (1) dostaneme

$$(y + 1)^2 = |1 - x| + 1\,, \qquad (2)$$

tj. pro $x \leqq 1$ dostaneme z (2)

$$(y + 1)^2 = 2 - x\,,$$

neboli

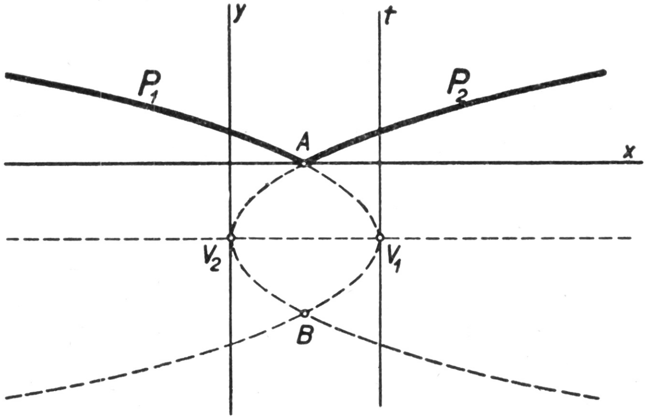
$$x - 2 = -(y + 1)^2\,. \qquad (3)$$

Pro $x \geqq 1$ dostaneme z (2)

$$(y + 1)^2 = x\,. \tag{4}$$

Z rovnice (1) je patrné, že pro všechna x je $y \geqq 0$. Graf funkce (1) se tedy bude skládat z částí (oblouků) parabol o rovnicích (3) a (4), které leží nad osou x.

Parabola $\boldsymbol{P}_1$ daná rovnicí (3) má vrchol $V_1 \equiv [2, -1]$ a prochází body $A \equiv [1, 0]$, $B \equiv [1, -2]$. Její vrcholová tečna t je přímka $x = 2$ a parabola $\boldsymbol{P}_1$ leží v polorovině tA. Parabola $\boldsymbol{P}_2$ daná rovnicí (4) má vrchol $V_2 \equiv [0, -1]$ a prochází také body A, B. Její vrcholová tečna je osa y a parabola $\boldsymbol{P}_2$ leží v polorovině yA.



Obr. 11.

Graf dané funkce (1) tvoří ty oblouky obou parabol, které se stýkají v bodě A (obr. 11).

Funkce (1) je shora neomezená, je definovaná pro všechna x.

Z grafu na obr. 11 je vidět, že funkce (1) je pro $x \leqq 1$ klesající a pro $x \geqq 1$ rostoucí. To snadno dokážeme:

a) Pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \leqq 1$ vypočítáme rozdíl funkčních hodnot $y_2 - y_1$. Z rovnice (3) dostaneme

$$(y_2 + 1)^2 = 2 - x_2\,, \tag{5}$$

$$(y_1 + 1)^2 = 2 - x_1\,. \tag{6}$$

Od rovnice (5) odečteme rovnici (6); dostaneme

$$y_2^2 + 2y_2 + 1 - (y_1^2 + 2y_1 + 1) = x_1 - x_2 < 0$$

čili

$$(y_2^2 - y_1^2) + 2(y_2 - y_1) < 0\,.$$

Po úpravě je

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2) < 0\,. \tag{7}$$

Vzhledem k (1) je $y_2 > 0$, $y_1 > 0$, a tedy i činitel $y_2 + y_1 + 2$ je kladný; aby byla splněna nerovnost (7), musí být $y_2 - y_1 < 0$, což znamená, že funkce (1) je pro $x \leqq 1$ klesající.

b) Obdobným postupem pro $1 \leqq x_1 < x_2$ zjistíme, že pro rozdíl funkčních hodnot y_2 a y_1 platí

$$y_2 - y_1 > 0\,,$$

což znamená, že funkce (1) je pro $x \geqq 1$ rostoucí.

c) Dodatková otázka vyžaduje řešení nerovnosti

$$\sqrt{|1 - x| + 1} - 1 \leqq 2\,.$$

Odtud dostaneme

$$|1 - x| \leqq 8$$

a po výpočtu jednak pro $x \leqq 1$, jednak pro $x \geqq 1$ zjistíme, že je $y \leqq 2$ pro $-7 \leqq x \leqq 9$.

2. Určete nejmenší přirozené číslo N, které má právě 15 dělitelů. Určete všechna přirozená čísla menší než N, která mají více než 15 dělitelů.

Řešení. a) Je-li přirozené číslo x rozloženo v součin prvočinitelů

$$x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n} \tag{1}$$

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla), pak počet jeho dělitelů je

$$\nu = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1),$$

neboť při tvoření dělitelů volíme za exponenty u prvočinitele p_k postupně všechna čísla $0, 1, \ldots, a_k$. Je-li $\nu = 15 = 5 \cdot 3$, je $n = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$. Má-li být číslo N co nejmenší, musí být prvočísla p_1, p_2 co nejmenší, tj. buď $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, nebo $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Protože $2^4 \cdot 3^2 < 3^4 \cdot 2^2$, je hledané číslo

$$N = 2^4 \cdot 3^2 = 144.$$

b) Budiž $x < N$ přirozené číslo, jehož počet dělitelů je $\nu > 15$; budiž (1) jeho rozklad v prvočinitele. Protože $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 144$, je $n < 4$; je totiž při vzestupném uspořádání prvočinitelů $p_1 \geqq 2$, $p_2 \geqq 3$, $p_3 \geqq 5, \ldots$.

Je-li $n = 3$, je buď $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 8$, nebo $a_1 = 2, a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 12$, nebo $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 16$, nebo $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $\nu = 18$. Další případy není třeba zkoumat, neboť např. pro $a_1 = 4$ je $x > 144$; je totiž $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geqq 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 240 > 144$. Z téhož důvodu nevyhovuje případ $a_1 = a_2 = 2, a_3 = 1$, neboť je $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geqq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 > 144$. Vyhovuje $a_1 = 3$, $a_2 = a_3 = 1$, $x = 120$.

Je-li $n = 2$, je buď $a_1 = a_2 = 1$, $\nu = 4$, nebo $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\nu = 6$, atd. až $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $\nu = 12$; případy $a_1 \geqq 6$, $a_2 = 1$ opět není třeba zkoumat, neboť $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \geqq 2^6 \cdot 3 = 192 > 144$. Obdobně probíráme případy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$ (zde je $\nu = 5 \cdot 3 = 15$). Případy $a_1 \geqq 5$, $a_2 = 2$ opět nepřicházejí v úvahu, neboť $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \geqq 2^5 \cdot 3^2 = 288 > 144$.

Obdobně se zkoumají případy $a_1 = 1, a_2 = 3, a_1 = 2, a_2 = 3$. Tím je případ $n = 2$ vyčerpán. Také $n = 1$ nedává řešení, neboť počet dělitelů je $a_1 + 1$ a přitom $a_1 \leqq 7$, neboť $p_1^8 \geqq 2^8 = 256$. Hledané x je tedy jediné číslo $x = 120$ s 16 děliteli.

3. Je daná sústava rovníc s troma neznámymi x, y, z a s parametrami a, b:

$$\begin{aligned} x + ay &= b, \\ y - a^2z &= 1, \\ az + x &= b + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Určite všetky také hodnoty parametrov a, b, pre ktoré má daná sústava nekonečne mnoho riešení.

Riešenie. Odčítaním tretej rovnice sústavy (1) od prvej rovnice dostaneme

$$ay - az = -1. \tag{2}$$

Rovnicu (2) združíme s druhou rovnicou sústavy (1). Po vylúčení neznámej y a po úprave dostaneme

$$a(1 - a^2)z = 1 + a. \tag{3}$$

Koeficient $a(1 - a^2) = a(1 - a)(1 + a)$ je rovný nule práve vtedy, keď je buď $a = 0$ alebo $a = 1$ alebo $a = -1$.

Ak je $a \neq 0, 1, -1$, dostaneme z rovnice (3)

$$z = \frac{1}{a(1 - a)}.$$

Po dosadení za z do druhej a tretej rovnice sústavy (1) dostaneme x a y, tj. sústava (1) má v tomto prípade najviac jedno riešenie.

Pre $a = 0$ má sústava (1) tvar

$$x = b, \; y = 1, \; x = b + 1, \tag{1'}$$

čo však je sústava neriešiteľná, pretože $b \neq b + 1$.

Pre $a = 1$ má sústava (1) tvar

$$x + y = b,\ y - z = 1,\ z + x = b + 1\,. \tag{1''}$$

Sčítaním druhej a tretej rovnice sústavy (1″) dostaneme $x + y = b + 2$. Pretože $b \neq b + 2$, je tiež v tomto prípade sústava (1) neriešiteľná.

Pre $a = -1$ má sústava (1) tvar

$$x - y = b,\ y - z = 1,\ -z + x = b + 1\,. \tag{1'''}$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (1‴) od tretej dostaneme $x - y = b$, čo je prvá rovnica sústavy (1‴). Sústava (1‴) má nekonečne mnoho riešení $x = b + y$, y, $z = y - 1$, kde y je ľubovoľné reálne číslo. Parameter b môže byť pritom volený ľubovoľne.

Záver. Sústava (1) má nekonečne mnoho riešení len v prípade, keď $a = -1$; b môže byť volené ľubovoľne.

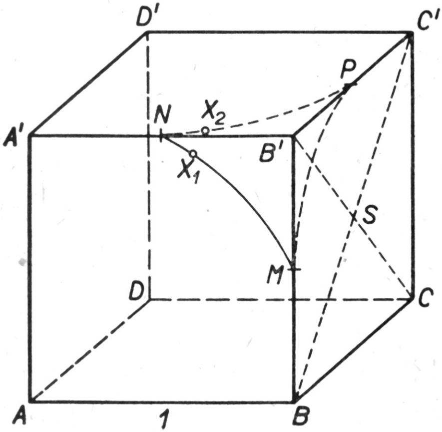
4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1. Sestrojte ve volném rovnoběžném promítání na jejím povrchu všechny body X, pro něž platí $DX = \frac{3}{2}$ a jejichž nejkratší vzdálenost od středu S stěny $BCC'B'$ měřená po povrchu krychle je rovna jedné.

Řešení. Hledané body X náležejí předně kulové ploše Γ, která má střed D a poloměr $\frac{3}{2}$. Plocha Γ nemá žádný společný bod se stěnou $ABCD$, neboť nejvzdálenější bod této stěny od bodu D je vrchol B a platí $DB = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Obdobná tvrzení platí o stěnách $ADD'A'$ a $DCC'D'$. Plocha Γ protne stěnu $ABB'A'$ v části kružnice, která má střed A a poloměr

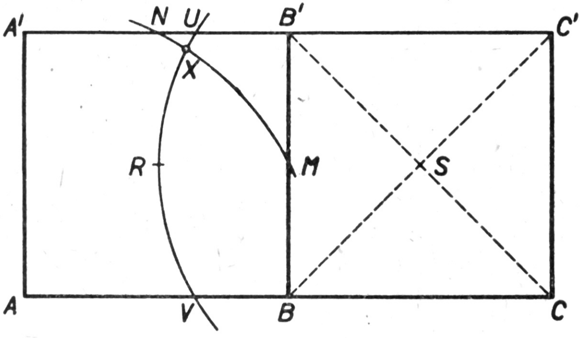
$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,.$$

Tato kružnice protne hranu BB' v bodě M, pro který platí $AM = r$, tj.

$$BM = \sqrt{r^2 - 1} = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2}\,.$$



Obr. 12a.



Obr. 12b.

Bod M je tedy středem hrany BB'. Obdobně protne kulová plocha Γ hrany $A'B'$ a $B'C'$ po řadě v jejich středech N, P. Stěny, které neobsahují vrchol D, protne Γ ve třech obloucích kružnic (viz obr. 12a).

Žádný z hledaných bodů X neleží ve stěně $BCC'B'$, neboť každý bod stěny má od bodu S vzdálenost nejvýše $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$.

Body stěny $ABB'A'$, které mají od bodu S nejkratší vzdálenost 1 měřenou po povrchu krychle, dostaneme z části sítě tělesa (viz obr. 12b). Bod náleží jednak oblouku MN, jednak oblouku URV kružnice $(S; 1)$; přitom R značí střed stěny $ABCD$.

Úloha má dvě řešení X_1, X_2 naznačená na obr. 12a.

3. *KATEGÓRIA C*

1. Osobný vlak idúci rýchlosťou v_1 (m/s) predchádzal po vedľajšej koľaji rýchlik idúci rýchlosťou v_2 (m/s). Cestujúci osobného vlaku nameral dobu t_1 sekúnd, ktorú trvalo predchádzanie rýchlika. Pozorovateľ na trati nameral t_2 sekúnd, než ho minul osobný vlak a t_3 sekúnd od okamžiku, keď dostihla lokomotíva rýchlika posledný vozeň osobného vlaku až do okamžiku, keď minul posledný vozeň rýchlika lokomotívu osobného vlaku.

Vyjadrite pomer rýchlostí $v_1 : v_2$ pomocou t_1, t_2, t_3.

Riešenie. Označme d_1 (v metroch) dĺžku osobného vlaku, d_2 (v metroch) dĺžku rýchlika. Rýchlik ide vzhľadom na osobný vlak (ktorý ako by stál) rýchlosťou $v_2 - v_1$. Z prvej podmienky úlohy vyplýva

$$\frac{d_2}{v_2 - v_1} = t_1 . \tag{1}$$

Osobný vlak minie pozorovateľa za $t_2 = \frac{d_1}{v_1}$ sekúnd.

Z tretej podmienky dostaneme: K tomu, aby úplne predišiel osobný vlak, musí rýchlik uraziť $d_1 + d_2$ metrov, a to rýchlosťou $v_2 - v_1$. Je teda

$$t_3 = \frac{d_1 + d_2}{v_2 - v_1}. \qquad (2)$$

Dosadíme $t_2 = \frac{d_1}{v_1}$ a vzťahy (1), (2), upravíme:

$$d_1 = v_1 t_2, \; d_2 = (v_2 - v_1)t_1, \; d_1 + d_2 = (v_2 - v_1)t_3 .$$

Ak sčítame prvé dve rovnice (3) a spojíme s treťou rovnicou, dostaneme

$$v_1 t_2 + (v_2 - v_1)t_1 = (v_2 - v_1)t_3$$

čiže

$$v_1(t_2 - t_1 + t_3) = v_2(t_3 - t_1).$$

Stadiaľ vyplýva

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1 + t_3},$$

čo je výsledná formula.

2. Zvolte si libovolné trojciferné číslo (např. 638). V zápise tohoto čísla obraťte pořadí číslic a z těchto čísel vypočítejte nezáporný rozdíl (např. 836 − 638 = 198). V zápise rozdílu opět obraťte pořadí číslic a tato dvě čísla sečtěte (např. 198 + 891 = 1089). Vyšetřete, jaká čísla vycházejí. Svou domněnku přesně vyslovte a dokažte.

Řešení. Zvolené číslo napíšeme ve tvaru

$$a = 100x + 10y + z\,;$$

číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic, má v desítkové soustavě tvar

$$b = 100z + 10y + x\,.$$

Můžeme předpokládat, že $x \geqq z$. (Jinak změníme označení.) Potom

$$a - b = 100(x - z) + (z - x) . \qquad (1)$$

1. Je-li $x = z$, je $a - b = 0$.

2. Je-li $x > z$, pak $z - x < 0$. Abychom zjistili zápis čísla (1) v desítkové soustavě, užijeme úpravy

$$\begin{aligned} a - b &= 100(x - z - 1) + 100 + z - x = \\ &= 100(x - z - 1) + 9 \,.\, 10 + u \,, \end{aligned} \qquad (2)$$

kde $100 + z - x = 90 + u$, neboli

$$u + x - z = 10 \,. \qquad (3)$$

Protože je $z - x < 0$, je $x - z - 1 \geqq 0$. Musíme tedy rozlišit dva případy: a) $x - z - 1 > 0$, b) $x - z - 1 = 0$.

a) V tomto případě je $a - b$ trojciferné číslo. Jestliže pak v zápise čísla (2) obrátíme pořadí číslic, dostaneme

$$c = 100u + 9 \,.\, 10 + (x - z - 1) \,.$$

Proto platí vzhledem k (3)

$$\begin{aligned} (a - b) + c &= 100\,(x - z - 1 + u) + 180 + \\ &+ (u + x - z - 1) = 900 + 180 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

b) Je-li $x - z - 1 = 0$, je $a - b$ dvojciferné číslo. Podle (3) je $u = 9$ a dále

$$c = 10u + 9 = 99 \,.$$

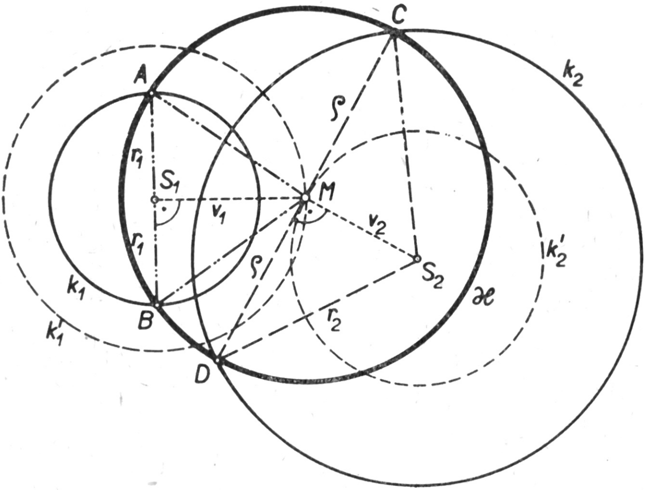
Proto platí

$$(a - b) + c = 99 + 99 = 198 \,.$$

Výsledek. Má-li dekadický zápis zvoleného čísla na prvním a třetím místě tutéž číslici, vyjde nula. Jsou-li tyto číslice různé, vyjde buď 1089, nebo 198.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a kladné číslo ϱ. Sestrojte kružnici $\varkappa$

o poloměru ϱ, která dělí kružnici k_1 ve dvě polokružnice a je dělena kružnicí k_2 ve dvě polokružnice.



Obr. 13.

Řešení. Nechť kružnice $\varkappa$ má střed M (obr. 13). Označme A, B společné body kružnic k_1 a $\varkappa$; pak je $AB = 2r_1$. Je $AM = BM$; tj. ABM je rovnoramenný trojúhelník*) se základnou AB a rameny délky ϱ. Je proto nutně

$$r_1 < \varrho\,. \tag{1}$$

Výška MS_1 trojúhelníku ABM má tedy délku

$$v_1 = \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}\,, \tag{2}$$

*) Bod M nemůže náležet přímce AB, neboť v tomto případě by kružnice k_1, $\varkappa$ splynuly a $\varkappa$ by nedělila k_1 ve dvě polokružnice.

kterou můžeme zjistit konstrukcí. Proto bod M leží na kružnici $k_1' \equiv (S_1; v_1)$.

Označme dále C, D společné body kružnic k_2 a $\varkappa$, takže $CD = 2\varrho$. Platí $CS_2 = DS_2$; trojúhelník CDS_2 je tedy rovnoramenný se základnou $CD = 2\varrho$ a rameny délky r_2. Proto je nutně

$$\varrho < r_2\,. \tag{3}$$

Pro výšku $MS_2 = v_2$ trojúhelníku CDS_2 platí

$$v_2 = \sqrt{r_2^{\,2} - \varrho^2}\,; \tag{4}$$

bod M pak leží na kružnici $k_2' \equiv (S_2; v_2)$.

Je bezprostředně patrno, že kružnice $\varkappa \equiv (M; \varrho)$ splňuje požadavky úlohy (M je společný bod kružnic k_1' a k_2').

Existence řešení a jejich počet závisí na společných bodech kružnic k_1', k_2'. Tyto kružnice mají aspoň společný bod, tj. úloha má aspoň jedno řešení právě tehdy, platí-li pro vzdálenost $d = S_1S_2$ nerovnosti

$$|v_2 - v_1| \leqq d \leqq v_2 + v_1$$

neboli vzhledem k (2) a (4)

$$\left|\sqrt{r_2^2 - \varrho^2} - \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}\right| \leqq d \leqq \sqrt{r_2^2 - \varrho^2} + \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}\,. \tag{5}$$

Kružnice k_1', k_2' existují právě tehdy, platí-li (1) a (3), čili je-li

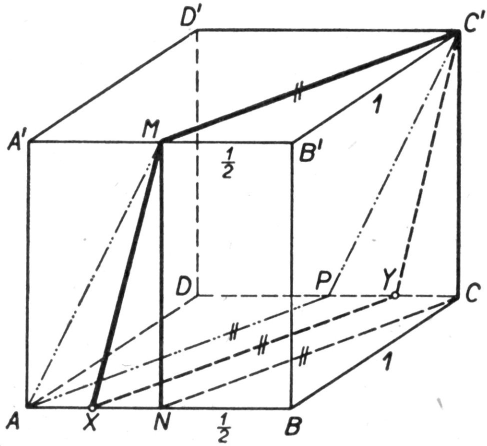
$$r_1 < \varrho < r_2\,. \tag{6}$$

Nerovnosti (5), (6) vyjadřují podmínku řešitelnosti úlohy.

4. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky 1. M je stred hrany $A'B'$. Priamkou $C'M$ je vedená rovina ϱ, ktorá rozdeľuje kocku na dve telesá. Teleso obsahujúce vrchol B má objem $\frac{1}{3}$. Určite, v akej vzdialenosti od vrcholu B pretína rovina ϱ hranu AB.

Riešenie (obr. 14). Označme N stred hrany AB, P stred strany CD.

Rovina $MNCC'$ oddelí od kocky trojboký hranol $\tau \equiv \equiv NBCMB'C'$, ktorého objem je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 . 1 = \frac{1}{4}$.



Obr. 14.

Rovina $AMC'P$ oddelí od kocky teleso zložené z hranola τ a z trojbokého šikmého hranola $ANMPCC'$, ktorého objem je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 . 1 = \frac{1}{4}$. Objem oddeleného telesa je teda v tomto prípade $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Zvoľme bod X medzi bodmi A a N a označme $BX = x$. Je teda

$$\frac{1}{2} < x < 1 . \qquad (1)$$

Objem telesa oddeleného rovinou $\varrho \equiv MXC'$ vypočítame ako v predchádzajúcom prípade. Rovina pretne hranu CD v bode Y a platí zrejme $CY = NX = x - \frac{1}{2}$. Ďalej je $\triangle XNM \cong \triangle YCC'$. Oddelené teleso sa skladá z hranola τ a zo šikmého hranola $XNMYCC'$, ktorého objem je $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) . 1 . 1 = \frac{1}{4}(2x - 1)$. Objem oddeleného telesa je teda

$$V = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(2x - 1) . \qquad (2)$$

Podľa podmienky úlohy je $V = \frac{1}{3}$. Ak dosadíme do (2), dostaneme rovnicu pre x, ktorej koreň je $x = \frac{2}{3}$. Tento koreň vyhovuje aj nerovnostiam (1) a dáva teda riešenie danej úlohy.

4. *KATEGORIE D*

1. Když jsem vkročil na náměstí, odbíjely právě hodiny na radnici 8 hodin, kostelní hodiny však už ukazovaly 8^{02}. Když jsem přešel náměstí a dorazil k zámku, bylo na zámeckých hodinách teprve 8^{01}, ale na kostelních hodinách už 8^{06}. Mám však už s hodinami v našem městě své zkušenosti: zámecké nikdy nejdou napřed, radniční zato vždycky jdou napřed a čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty. Určete (na minuty), jaký byl správný čas, kdy jsem vkročil na náměstí.

Řešení. Z údajů kostelních hodin je vidět, že od vstupu na náměstí do příchodu k zámku uplynuly 4 minuty.

Tudíž v okamžiku vstupu na náměstí bylo na zámeckých hodinách 7^{57} h.

Zámecké hodiny nikdy nejdou napřed, takže ukazují-li 7^{57}, jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{57},\ 7^{58},\ 7^{59},\ 8^{00},\ 8^{01},\ \ldots. \tag{1}$$

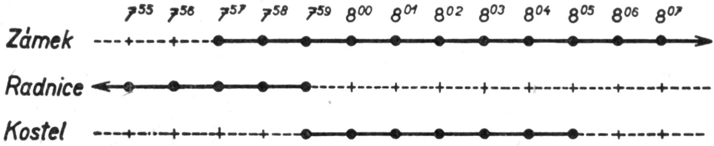
Radniční hodiny jdou vždy napřed, a proto když odbíjejí 8 hodin, ještě 8 hodin není a jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje:

$$7^{59},\ 7^{58},\ 7^{57},\ 7^{56},\ \ldots. \tag{2}$$

Čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty, tudíž když tyto hodiny ukazují 8^{02}, jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{59},\ 8^{00},\ 8^{01},\ 8^{02},\ 8^{03},\ 8^{04},\ 8^{05}. \tag{3}$$

Porovnáme-li možné časové údaje všech tří hodin, tj. množiny (1), (2) a (3), vidíme, že správný čas (na minuty) byl 7^{59} hod. Tento výsledek lze také dostat pomocí grafického znázornění (obr. 15).



Obr. 15.

2. Oldo si kontroloval po hodine úlohu z písomky: „Mali sme upraviť výraz

$$\frac{x^2-3}{x+1}+\frac{6x-7}{2x-1}.$$

V čitateli mi vyšiel nejaký mnohočlen $ax^3 + bx^2 + cx + d$; koeficienty si už nepamätám. V menovateli bolo $2x^2 + x - 1$. Vyšla mi dobre skúška pre $x = 0$, 1 a 2, ale pre $x = 3$ už nie. To vyšlo na ľavej strane 3,7 a na pravej 4.“

Dokážete z týchto údajov zistiť koeficienty a, b, c, d a rozhodnúť, či Oldovo riešenie bolo správne?

Riešenie. Rozriešime znovu Oldov príklad:

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1} = \frac{(x^2 - 3)(2x - 1) + (x + 1)(6x - 7)}{(x + 1)(2x - 1)}.$$

V čitateli vyjde po vynásobení a sčítaní

$$2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\,,$$

v menovateli vyjde skutočne $2x^2 + x - 1$, ako tvrdil Oldo. Pre $x = 0$ malo vyjsť na ľavej i pravej strane číslo 4. Oldovi vyšlo $-d$. Pretože mu skúška súhlasila, bolo $d = -4$. Pre $x = 1$ malo vyjsť -2. Oldo dostal

$$\frac{a + b + c - 4}{2}.$$

Pretože mu skúška súhlasila, bolo

$$\frac{a + b + c - 4}{2} = -2, \text{ tj.}$$

$$a + b + c = 0\,. \tag{1}$$

Pre $x = 2$ malo vyjsť 2. Oldo dostal $\dfrac{8a + 4b + 2c - 4}{9}$.

Z toho, že mu skúška súhlasila, po úprave dostávame

$$4a + 2b + c = 11\,. \tag{2}$$

Konečne pre $x = 3$ malo vyjsť 3,7. Oldo dostal

$$\frac{27a + 9b + 3c - 4}{20} = 4,$$

t. j. po úprave

$$9a + 3b + c = 28\,. \qquad (3)$$

Ak dosadíme z (1) $c = -a - b$ do (2) a (3), dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} 3a + b &= 11\,, \\ 4a + b &= 14\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Odčítaním prvej rovnice sústavy (4) od druhej vyjde $a = 3$, potom z prvej rovnice sústavy (4) máme $b = 2$ a zo vzťahu (1) je $c = -5$.

Oldov nesprávny výsledok bol teda

$$\frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{2x^2 + x - 1}\,.$$

3. Je daný trojuholník ABC. Vyšetrite geometrické miesta bodov X tohto trojuholníka, pre ktoré platí

$$AX \geqq BX \geqq CX\,. \qquad (1)$$

Pomocou veľkostí strán a uhlov trojuholníka ABC vyjadrite podmienky pre to, aby

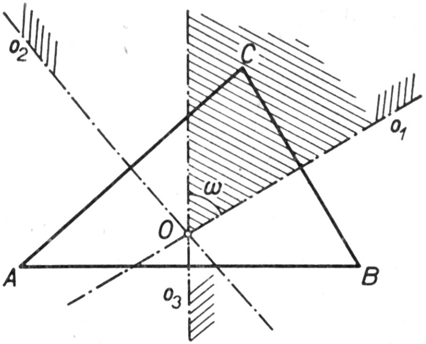
a) geometrickým miestom bodov X bol päťuholník;

b) geometrickým miestom bodov X bol šesťuholník;

c) geometrické miesto bodov X obsahovalo práve jeden bod;

d) geometrické miesto bodov X neobsahovalo žiadny bod.

Riešenie (obr. 16). Geometrickým miestom bodov X, pre ktoré platí napr. $AX \geqq BX$, je polrovina o_3B, kde o_3 je os úsečky AB. Pretože sa osi strán trojuholníka ABC pretínajú v jedinom bode O, tvorí geometrické miesto bodov X, ktoré splňujú podmienku (1), dutý uhol ω, ktorý je spoločnou časťou polrovín o_3B a o_1C. Hľadané geometrické miesto je teda spoločnou časťou trojuholníka ABC a uhla ω.



Obr. 16.

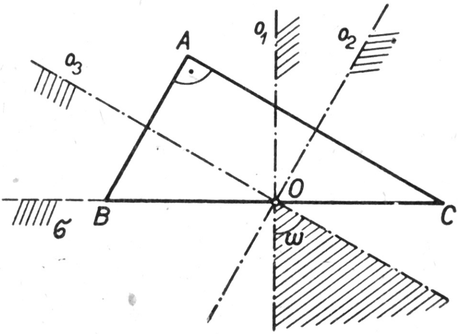
Vieme, že poloha vrcholu O, t. j. stredu opísanej kružnice vzhľadom na priamku BC závisí na tom, či uhol $\sphericalangle BAC$ je tupý, pravý alebo ostrý. Rozlišujeme preto tieto prípady:

1. Uhol $\sphericalangle BAC$ je tupý. Potom O leží v tej polrovine σ vyťatej priamkou BC, ktorá neobsahuje bod A. Pretože aj obe ramená uhla ω ležia v polrovine σ, leží celý uhol ω v polrovine σ, takže hľadané geometrické miesto bodov neobsahuje žiadny bod.

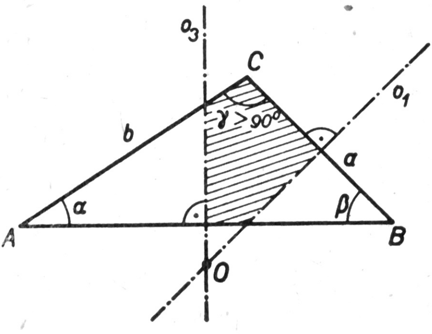
2. Uhol $\sphericalangle BAC$ je pravý. Bod O leží potom na strane BC, obe ramená uhla ω sú opäť v polrovine σ. Bod O je preto jediným bodom hľadaného geometrického miesta (obr. 17).

3. Uhol $\sphericalangle BAC = \alpha$ je ostrý. Potom bod O leží v tej polrovine vyťatej priamkou BC, ktorá obsahuje vrchol A. Hľadané geometrické miesto bodov potom obsahuje stred S strany BC a ďalšie body blízke k bodu S, teda aspoň dva rôzne body. Z toho už vyplýva, že prípad d) v úlohe nastane práve vtedy, keď $\alpha > 90°$ a prípad c) nastane práve vtedy, keď $\alpha = 90°$. Aby sme našli riešenie v prí-

padoch a) a b), všimnime si, kedy je spoločnou časťou ľubovoľného trojuholníka a ľubovoľného dutého uhla päťuholník a kedy šesťuholník. Pretože strany tejto časti, pokiaľ je to mnohouholník, sú časťami troch strán trojuholníka a dvoch ramien uhla, je týchto strán najviac päť. Nikdy teda nevznikne šesťuholník. Päťuholník vznikne práve vtedy, keď jeden vrchol trojuholníka leží vo vnútri uhla, zostávajúce dva mimo uhla tak, že úsečka, ktorá ich spája, pretne obe ramená uhla.



Obr. 17.



Obr. 18.

Vráťme sa k prípadu ostrého uhla $\sphericalangle BAC$. Pretože ω je spoločná časť polrovín o_1C a o_3B a pretože B nie je v o_1C, A nie je v o_3B, nastane prípad b) práve vtedy, keď C je v o_3B čiže $a < b$ (C je vždy v o_1C) a strana AB pretne obe ramená uhla ω (obr. 18). Strana AB pretne rameno obsažené v o_3B práve vtedy, keď O leží v tej polrovine vyťatej priamkou AB, ktorá neobsahuje bod C. Potom však už AB pretne aj druhé rameno. Prípad a) nastane teda práve vtedy, keď uhol γ je tupý a uhol α je menší než uhol β alebo $a < b$ (uhol α je potom skutočne ostrý).

Záver. Podmienky, kedy nastanú jednotlivé prípady, sú:

a) $\gamma > 90°, \quad \alpha < \beta$;
b) nikdy;
c) $\alpha > 90°$;
d) $\alpha = 90°$.

4. Je dán čtvrtkruh SBC s poloměrem $SB = SC = r$; A je takový bod oblouku BC, pro který platí $\sphericalangle ASB = 60°$; X je libovolný bod úsečky SC (obr. 19).

a) Vyjádřete obsah P plochy omezené úsečkami BX, AX a obloukem AB pomocí délky $x = SX$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah P roven polovině obsahu čtvrtkruhu SBC, a porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC.

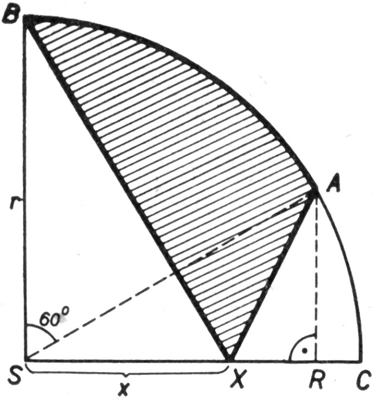
Řešení (obr. 19).

a) Pro obsahy obrazců platí (podle obrázku)

$$P = (ABX) = (SAB) + (SAX) - (SBX) . \qquad (1)$$

Podle známého vzorce

$$(SAB) = \frac{1}{6}\pi r^2 . \qquad (2)$$



Obr. 19.

Trojúhelník ASX má stranu $SX = x$ a k ní kolmou výšku $AR = \frac{1}{2} r$; proto

$$(SAX) = \frac{1}{4} rx \,. \tag{3}$$

Pro obsah trojúhelníku SBX platí

$$(SBX) = \frac{1}{2} rx \,. \tag{4}$$

Spojíme-li (1), (2), (3), (4), dostaneme

$$P = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} rx \,. \tag{5}$$

b) Z podmínky úlohy plyne

$$\frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} rx = \frac{1}{8} \pi r^2 \,,$$

neboli

$$\frac{1}{4}rx = \frac{1}{24}\pi r^2$$

a odtud

$$x = \frac{1}{6}\pi r\,.$$

Délka x je tedy třetina délky oblouku BC, tj. délka oblouku AC.