VI. Úlohy III. kola kategorie A

1. Je dána soustava nerovností

$$y - x \geqq |x + 1| - |x - 1| , \qquad (1)$$
$$|y - x| - y + x \geqq 2 .$$

Znázorněte řešení každé z daných nerovností v rovině a určete všechna řešení úlohy.

Řešení. a) Pro znázornění řešení první nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $x \leqq -1$, 2) $-1 \leqq x \leqq 1$, 3) $x \geqq 1$. V případě 1) je $x + 1 \leqq 0$, $x - 1 \leqq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geqq -x - 1 + x - 1$ neboli

$$y \geqq x - 2 . \qquad (x \leqq -1) \qquad (2)$$

V případě 2) je $x + 1 \geqq 0$, $x - 1 \leqq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geqq x + 1 + x - 1$ neboli

$$y \geqq 3x . \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \qquad (3)$$

V případě 3) je $x - 1 \geqq 0$, $x + 1 \geqq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geqq x + 1 - x + 1$ neboli

$$y \geqq x + 2 . \qquad (x \geqq 1) \qquad (4)$$

b) Pro znázornění řešení druhé nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $y \geqq x$, 2) $y \leqq x$. V případě 1) zní druhá nerovnost $y - x - y + x \geqq 2$ neboli

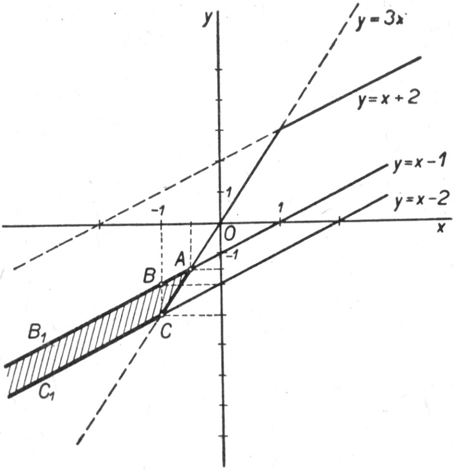
$$0 \geqq 2 .$$

Druhá nerovnost není tedy splněna pro žádnou dvojici x, y, pro niž platí $y \geqq x$.

V případě 2) zní druhá nerovnost $-y + x - y + x \geqq 2$ neboli (po krácení)

$$y \leqq x - 1 . \qquad (5)$$

Grafické znázornění je na obr. 66.



Obr. 66.

Řešení soustavy jsou dána nerovnostmi:

(I) $x \leqq -1, \quad x - 2 \leqq y \leqq x - 1\,,$ [(2) a (5)]

(II) $-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{2}, \quad 3x \leqq y \leqq x - 1\,.$ [(3) a (5)]

(4) a (5) nedávají řešení (jsou ve sporu). Graf je část roviny skládající se z části pásu omezeného polopřímkami BB_1, CC_1 a úsečkou BC (řešení I) a z trojúhelníka ABC (řešení II). Body A, B, C mají souřadnice

$$A = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right], \quad B = [-1, -2], \quad C = [-1, -3].$$

2. V rovine je daných n kružníc, z ktorých každé dve sa pretínajú práve v dvoch bodoch a žiadnym bodom neprechádzajú tri z týchto kružníc. Určite celkový počet častí, na ktoré delí sústava kružníc rovinu. (Napr. tri kružnice uvedených vlastností delia rovinu na osem častí.)

Riešenie. Počet častí, na ktoré delí rovinu n kružníc uvedených vlastností, označíme a_n. Pridajme k týmto n kružniciam ďalšiu kružnicu k tak, aby sústava $n + 1$ kružníc mala požadované vlastnosti. Kružnica k pretína každú z n pôvodných kružníc v 2 bodoch. Celkom na k vznikne $2n$ bodov, ktoré ohraničujú $2n$ jej oblúkov. Ku každému z týchto oblúkov patrí jedna z a_n častí roviny, ktorá ním bola rozdelená na 2 časti. To znamená, že kružnica k zapríčinila vznik $2n$ ďalších častí roviny. Je teda

$$a_{n+1} = a_n + 2n \,. \tag{1}$$

Zo vzťahu (1) odvodíme vzorec pre a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1)\,, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2)\,, \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2(n-3)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 &= a_1 + 2\,.\,1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Sčítaním všetkých rovností (2) dostaneme

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k\,. \tag{3}$$

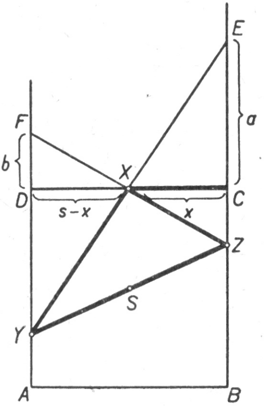
Platí $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = \frac{1}{2}(2 + 2n - 2)\,.\,(n-1) = n(n-1)\,.$ Keďže $a_1 = 2$ (vnútro a vonkajšok kružnice), je

$$a_n = n(n-1) + 2 = n^2 - n + 2\,. \tag{4}$$

Správnosť vzorca (4) dokážeme teraz pomocou vzťahu (1) *matematickou indukciou*: Pre $n = 1$ dá vzorec (4) skutočne $a_1 = 2$. Nech platí (4), potom $a_{n+1} = a_n + 2n = n^2 - n +$ $+ 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n+1)^2 - (n+1) + 2$.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stredom S a stranou $s = AB = 1$. Ďalej sú dané dva body E, F ležiace v uvedenom poradí na priamkach BC, AD vo vnútri polroviny opačnej k CDA.

Určite na základe výpočtu všetky také trojuholníky XYZ, že vrcholy X, Y, Z ležia v uvedenom poradí na úsečkách CD, AD, BC a priamky XY, YZ, ZX prechádzajú v uvedenom poradí bodmi E, S, F. (Poznámka. Výpočtom určujte napr. dĺžku CX.)



Obr. 67.

Riešenie (obr. 67). Označme s dĺžku strany štvorca, a, b dĺžky CE, DF a x dĺžku CX. Trojuholníky CEX, DYX a trojuholníky DFX, CZX sú rovnoľahlé podľa stredu X.

Z toho vyplýva

$$CZ = \frac{x}{s-x}\, b\,, \qquad DY = \frac{s-x}{x}\, a\,. \tag{1}$$

Dĺžka strednej priečky lichobežníka (obdĺžnika) $DYZC$ je vzdialenosť stredu S od priamky CD, t. j. rovná sa $\frac{1}{2}s$. Preto platí $CZ + DY = s$, čiže podľa vzťahu (1)

$$\frac{x}{s-x}b + \frac{s-x}{x}a = s\,. \qquad (2)$$

Po úprave vzťahu (2) dostaneme pre x rovnicu 2. stupňa

$$(a + b + s)x^2 - (2a + s)sx + as^2 = 0. \qquad (3)$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = (s^2 - 4ab)s^2\,. \qquad (4)$$

Ak je $D \geqq 0$, má rovnica (3) dva (rôzne alebo splývajúce) korene

$$x = \frac{(2a + s)\,s \pm \sqrt{D}}{2(a + b + s)}\,. \qquad (5)$$

Každý z koreňov (5) je kladný, pretože $(2a + s)s \geqq \sqrt{D}$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s < \sqrt{D}$, dostali by sme po umocnení $a + s < -b$, čo je spor. Oba korene (5) sú taktiež menšie alebo rovné s, pretože $(2a + s)s \pm \sqrt{D} \leqq 2(a + b + s)s$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s + \sqrt{D} > 2(a + b + s)s$, dostali by sme po úprave a umocnení $D > (s + 2b)^2s^2$ čiže $-a > s + b$, čo je spor. Podmienkou riešiteľnosti úlohy je teda

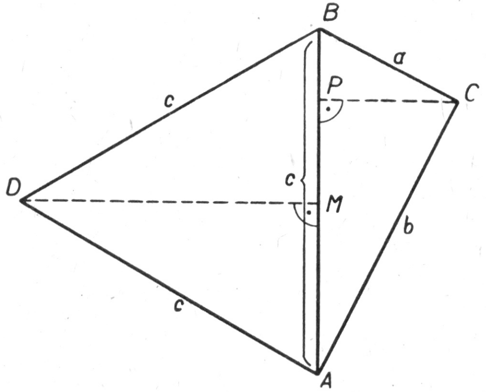
$$D \geqq 0\,.$$

Zostrojenie sa prevedie konštrukciou koreňov (5), kde D je dané vzorcom (4). Pre $D = 0$ má úloha jediné riešenie, pre $D > 0$ dve riešenia.

4. V prostoru jsou umístěny dva trojúhelníky ABC a ABD se společnou stranou délky c. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB, trojúhelník ABD je rovnostranný, roviny ABC, ABD mají odchylku φ.

a) Vyjádřete vzdálenost bodů C, D pomocí délek stran obou trojúhelníků a čísla φ; určete tuto vzdálenost konstrukcí.

b) Najděte takovou odchylku φ, aby čtyřstěn $ABCD$ měl čtyři shodné hrany.



Obr. 68.

Řešení (obr. 68). a) Označme délky stran trojúhelníka ABC obvyklým způsobem; označme M střed úsečky AB, P patu kolmice spuštěné z bodu C na přímku AB. Pak platí

$$DM = \frac{c}{2}\sqrt{3}, \quad CP = \frac{ab}{c} \tag{1}$$

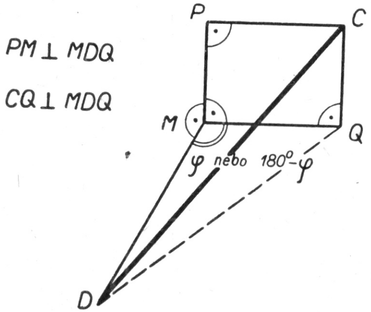
a dále

$$PM = |BM - BP| = \left|\frac{c}{2} - \frac{a^2}{c}\right|. \tag{2}$$

Situaci v prostoru ukazuje obr. 69. $CPMQ$ je obdélník;

proto platí podle (1), (2)

$$MQ = CP = \frac{ab}{c}, \quad CQ = PM = \left| \frac{c}{2} - \frac{a^2}{c} \right| . \tag{3}$$



Obr. 69.

Podle kosinové věty je

$$DQ^2 = DM^2 + MQ^2 \pm 2DM \,.\, MQ \,.\, \cos \varphi$$

neboli podle (1), (3)

$$DQ^2 = \frac{3c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab \sqrt{3} \,.\, \cos \varphi \,. \tag{4}$$

Podle Pythagorovy věty (v $\triangle\, DCQ$) platí

$$CD^2 = DQ^2 + CQ^2$$

neboli podle (3), (4)

$$CD^2 = \frac{3}{4} c^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab \sqrt{3} \,.\, \cos \varphi + \frac{c^2}{4} + \frac{a^4}{c^2} - a^2 \,,$$

po úpravě

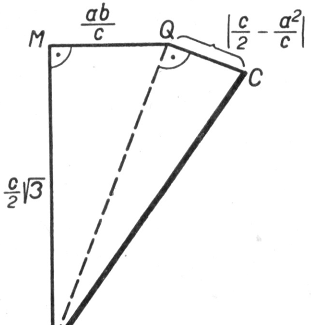
$$CD^2 = c^2 + \frac{a^2}{c^2}\underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2} \pm bc\sqrt{3}\cos\varphi - a^2,$$

tj.

$$CD = \sqrt{c^2 \pm ab\sqrt{3}\cos\varphi}, \qquad (5)$$

což je výsledný vzorec.

Konstrukce: Sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník DMQ a pak sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník CDQ; provedení ukazuje obr. 70.



Obr. 70.

b) Má-li čtyřstěn $ABCD$ čtyři shodné hrany, je $CD = c$, neboť $BC = a < c$, $AC = b < c$. Ze vzorce (5) pak plyne

$$c^2 = c^2 \pm ab\sqrt{3} \, . \, \cos\varphi,$$

tj. $\cos\varphi = 0°$, takže $\varphi = 90°$.