15. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967. pp. 65–114.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404552

IV. Soutěžní úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Určete nejmenší kladný zlomek, jehož součet s jeho druhou mocninou je větší než šest a jehož čitatel a jmenovatel mají součet menší než 100.

(Poznámka. Ze všech zlomků s daným jmenovatelem v a větších než číslo 2 vyberte nejmenší zlomek.)

Řešení. Hledaný kladný zlomek budiž $\frac{u}{v}$, kde u, v jsou celá čísla buď obě zároveň kladná nebo zároveň záporná.

a) Nechť $u > 0$, $v > 0$. Podle podmínek úlohy platí

$$\frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} > 6\,, \tag{1}$$

$$u + v < 100\,. \tag{2}$$

Nerovnost

$$x^2 + x - 6 > 0\,, \tag{1'}$$

kde $x = \frac{u}{v}$, má kladná řešení

$$x > 2\,.$$

Je tedy

$$\frac{u}{v} > 2\,. \tag{1''}$$

Nejmenší kladný zlomek větší než 2 s daným jmenovatelem v je

$$\frac{u}{v} = \frac{2v+1}{v}\,. \tag{3}$$

Spojíme-li (2), (3), dostaneme po úpravě

$$v < 33 . \tag{4}$$

Jsou-li $\dfrac{2v_1 + 1}{v_1}$, $\dfrac{2v_2 + 1}{v_2}$ dvě racionální čísla, pro něž platí $v_1 < v_2$, je

$$\frac{2v_1 + 1}{v_1} > \frac{2v_2 + 1}{v_2} .$$

Ze všech čísel tvaru $\dfrac{2v + 1}{v}$ je co **nejmenším** číslem číslo s co **největším** jmenovatelem; v našem případě je to tedy podle (4)

$$v = 32 .$$

Hledané číslo je $\dfrac{65}{32}$; toto číslo splňuje nerovnost (1″), tedy i (1′) a (1).

b) Nechť $u < 0$, $v < 0$ jsou celá čísla; pak podmínka (2) je splněna. Podmínka (1) platí jako v odst. a); platí také nerovnost (1″); z ní plyne (ježto $v < 0$)

$$u < 2v . \tag{1‴}$$

Nerovnost (1‴) splňují např. čísla $u = 2v - 1$; pak je

$$\frac{u}{v} = \frac{2v - 1}{v} = 2 - \frac{1}{v} > 0 ,$$

neboť $v < 0$. Pro $v = -33$ dostaneme $2 - \dfrac{1}{v} = \dfrac{67}{33} < \dfrac{65}{32}$.

Je-li $x > 2$ libovolné racionální číslo, které vyhovuje podmínkám úlohy, můžeme najít záporné celé číslo v tak, že

$$2 - \frac{1}{v} < x$$

a přitom podle předchozího číslo $2 - \frac{1}{v} = \frac{2v-1}{v}$ také splňuje podmínky úlohy.

Neexistuje tedy v případě b) nejmenší číslo žádaných vlastností, tj. úloha je neřešitelná.

2. V rovine je daných päť bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Každé dva z týchto bodov sú spojené červenou alebo modrou úsečkou tak, že žiadne tri z týchto úsečiek nevytvoria trojuholník tej istej farby.

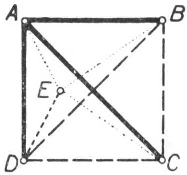
a) Dokážte, že z každého z daných päť bodov vychádzajú dve úsečky červené a dve modré.

b) Dokážte, že existuje uzavretá lomená čiara zložená z piatich červených úsečiek a uzavretá lomená čiara zložená z piatich modrých úsečiek, z ktorých každá obsahuje všetkých päť daných bodov.

c) Zistite, koľkými spôsobmi možno dané body spojiť červenými a modrými úsečkami tak, aby bola splnená podmienka úlohy.

(Poznámka. Riešte len úvahami, nie výpočtom. V prípade a) uvážte, či je možné, aby z jedného vrcholu vychádzali tri úsečky tej istej farby, t. j. preveďte tzv. nepriamy dôkaz.)

Riešenie. a) Pripusťme, že by z daného bodu A vychádzali tri červené úsečky (dané body označme A, B, C, D, E). Nech sú to napr. úsečky AB, AC, AD — pozri obr. 26 (červená je tľste vytiahnutá).

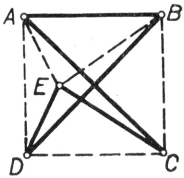


Obr. 26.

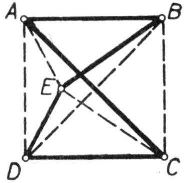
Podľa podmienky úlohy musia byť potom úsečky BC, BD, CD modré a vznikne „modrý" trojuholník, čo odporuje podmienkam úlohy.

Podobne nie je možné, aby z bodu A vychádzali aspoň tri modré úsečky. Zostáva tedy jediná možnosť, že z každého bodu vychádzajú dve červené a dve modré úsečky (vyznačené dlhými čiarkami).

b) Podľa odst. a) vychádzajú teda z bodu A dve červené úsečky — nech sú to napr. AB, AC; zostávajúce dve úsečky AD, AE sú modré — pozri obr. 27. Z podmienky úlohy potom vyplýva, že úsečka BC je modrá, úsečka DE červená. Z bodu D vychádzajú podľa odst. a) dve červené úsečky. Úsečka CD je teda buď červená (obr. 27) alebo modrá (obr. 28). V prípade z obr. 27 je podľa podmienky úlohy CE modrá a podľa odst. a) (použitého na body D, E) je BD modrá a BE červená. Podobne doplníme obr. 28. Hľadané lomené čiary sú na obr. 27 $ABEDCA$ (červená) a $ADBCEA$ (modrá); na obr. 28 $ABDECA$ (červená) a $ADCBEA$ (modrá).



Obr. 27.



Obr. 28.

c) Ak vyjdeme z bodu A a ak zvolíme obe červené úsečky, ktoré z neho vychádzajú, dostaneme dve rôzne možnosti. Červené úsečky vychádzajúce z bodu A možno voliť $\binom{4}{2} = 6$ rôznymi spôsobmi. Dostaneme teda $2 \cdot 6 = 12$ rôznych situácií.

3. Do jednotkové kružnice se středem S je vepsán pravidelný n-úhelník $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$. Body S, A_0, A_1 jsou po řadě obrazy komplexních čísel 0, 1, t.

a) Vyjádřete vzdálenost $A_0A_k (k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ pomocí t.

b) Vypočtěte součet $A_0A_1^2 + A_0A_2^2 + \ldots + A_0A_{n-1}^2$.

Řešení. a) Zřejmě je

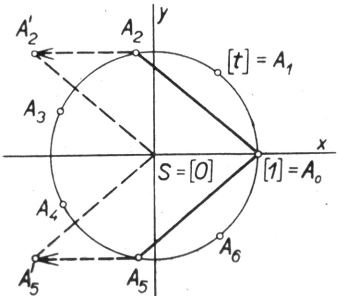
$$t = \cos \frac{360°}{n} + i \sin \frac{360°}{n} . \tag{1}$$

Bod A_k je obrazem komplexního čísla t_k, jehož absolutní hodnota je 1 a jehož amplituda je $k \cdot \frac{360°}{n}$. Je tedy podle Moivreovy věty a podle (1)

$$t_k = \cos \frac{360°k}{n} + i \sin \frac{360°k}{n} =$$

$$= \left(\cos \frac{360°}{n} + i \sin \frac{360°}{n}\right)^k = t^k . \tag{2}$$

Uvažujme o komplexních číslech $t^k - 1, t^{n-k} - 1$; jejich obrazy jsou podle (2) body A'_k, A'_{n-k}, které vzniknou z bodů A_k, A_{n-k} posunutím o daný vektor $\overrightarrow{A_0S}$ (na obr. 29 je $k = 2$, $n = 7$).



Obr. 29.

Komplexní čísla $t^k - 1$, $t^{n-k} - 1$ mají za amplitudy opačná čísla, jejich absolutní hodnota je velikost úsečky A_0A_k; je tedy podle Moivreovy věty

$$(t^k - 1)(t^{n-k} - 1) = A_0A_k^2 \,.\, [\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi)] = \\ = A_0A_k^2 \,,$$

tj.

$$A_0A_k = \sqrt{(t^k - 1)(t^{n-k} - 1)} \,. \tag{3}$$

Rovnice (3) je řešením úlohy a).

b) Vypočteme

$$\sigma = A_0A_1^2 + A_0A_2^2 + \ldots + A_0A_{n-1}^2 = (t - 1)(t^{n-1} - 1) + \\ + (t^2 - 1)(t^{n-2} - 1) + \ldots + (t^{n-1} - 1)(t - 1) \,,$$

tj.

$$\sigma = t^n - t - t^{n-1} + 1 + t^n - t^2 - t^{n-2} + 1 + \ldots + \\ + t^n - t^{n-1} - t + 1 \,. \tag{4}$$

Protože je $t^n = 1$, dostaneme z (4)

$$\sigma = 2(n - 1) - 2(t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) = \\ = 2(n - 1) - 2t \frac{t^{n-1} - 1}{t - 1} \,,$$

a dále

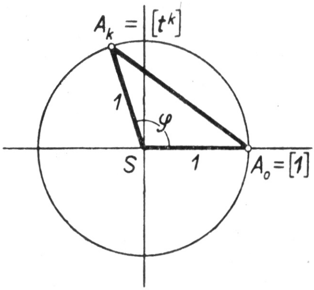
$$\sigma = 2(n - 1) + \frac{2}{1 - t}(t^n - t) = \\ = 2(n - 1) + \frac{2}{1 - t} \,.\, (1 - t) \,,$$

tj.

$$\sigma = 2n \,. \tag{5}$$

Vzorec (5) je řešením úlohy b).

Jiné řešení úlohy a). Platí $\varphi = \dfrac{360° k}{n}$. Podle kosinové věty je (viz obr. 30)



Obr. 30.

$$A_0A_k^2 = 2 - 2\cos\varphi = 2(1 - \cos\varphi) = 2\left(1 - \cos\frac{360°k}{n}\right); \tag{6}$$

tento vzorec platí i v případě, že $\varphi = 180°$, tj. kdy A_0A_k prochází bodem S.

Podle Moivreovy věty je

$$t^k = \cos\frac{360°k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{360°k}{n},$$

$$t^{n-k} = \cos\frac{360°(n-k)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{360°(n-k)}{n} =$$

$$= \cos\frac{360°k}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{360°k}{n}$$

a dále

$$t^k + t^{n-k} = 2\cos\frac{360°k}{n}. \tag{7}$$

Dosadíme-li ze (7) do (6), vyjde

$$A_0A_k^2 = 2 - t^k - t^{n-k} = (t^k - 1)(t^{n-k} - 1),$$

neboť $t^n = 1$. Je tedy

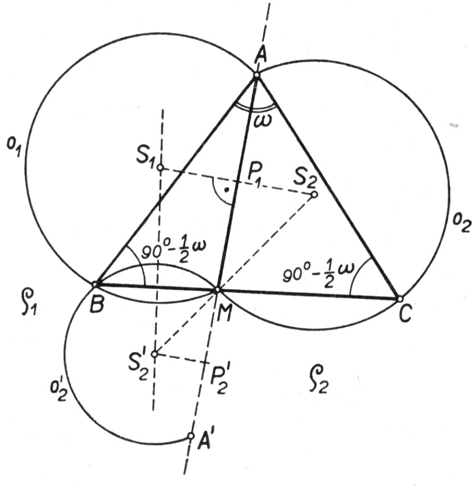
$$A_0A_k = \sqrt{(t^k - 1)(t^{n-k} - 1)} = \sqrt{2 - t^k - t^{n-k}},$$

což jsme měli dokázat.

4. V rovině je dána úsečka AM, dále je dán dutý úhel ω a kladné číslo k.

a) Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, který má vnitřní úhel $\sphericalangle BAC = \omega$ a jehož základna BC je bodem M dělena v poměru $BM : CM = k$.

b) Vyšetřte geometrické místo středů základen BC všech takových trojúhelníků, nabývá-li poměr k všech kladných hodnot.



Obr. 31.

Řešení. a) Rozbor. Protože je $\sphericalangle BAC = \omega$, je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 90° - \frac{1}{2}\omega$. Proto náleží bod B (obr. 31) oblouku o_1, který je geometrickým místem bodů X ležících v polorovině ϱ_1 s hranicí AM, pro něž platí

$$\sphericalangle AXM = 90° - \frac{1}{2}\omega .$$

Obdobně náleží bod C oblouku o_2, který je geometrickým místem bodů Y ležících v polorovině ϱ_2 opačné k ϱ_1, pro něž platí

$$\sphericalangle AYM = 90° - \frac{1}{2}\omega .$$

Oblouky o_1, o_2 jsou zřejmě souměrně sdružené podle přímky AM. Stejnolehlost se středem M a koeficientem $(-k)$ převede vrchol C ve vrchol B, oblouk o_2 v oblouk o_2', který leží v polorovině ϱ_1 a je sestrojen nad tětivou MA', kde $A'M = k \,.\, AM$. Vrchol B je tedy společným bodem oblouků o_1, o_2' různým od M. Tím je rozbor úlohy ukončen.

Konstrukce. V každé z polorovin ϱ_1, ϱ_2 vyťatých přímkou AM sestrojíme oblouk, jehož vnitřní body patří do množiny všech bodů, z nichž je vidět úsečku AM pod úhlem $90° - \frac{1}{2}\omega$; tyto oblouky nazveme o_1, o_2. Ve stejnolehlosti $(M; -k)$ sestrojíme oblouk o_2', který odpovídá oblouku o_2. Bod B je společným bodem oblouků o_1 a o_2' různým od M. Bod C sestrojíme ve stejnolehlosti $\left(M; -\frac{1}{k}\right)$ jako bod odpovídající bodu B.

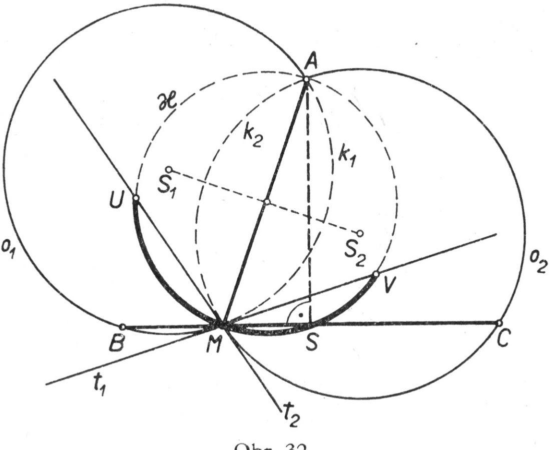
Zkouška (tzv. důkaz správnosti). Oblouk o_1 náleží kružnici k_1, jejíž střed S_1 leží uvnitř poloroviny ϱ_1 na ose úsečky AM. Oblouk o_2' náleží kružnici k_2', jejíž střed S_2' leží také uvnitř poloroviny ϱ_1 na ose úsečky $A'M$. Označme po řadě P_1, P_2' středy úseček AM, $A'M$; bod M odděluje body P_1, P_2'. Proto bod B souměrně sdružený s bodem M podle přímky S_1S_2' náleží vnitřku poloroviny ϱ_1, a ovšem i oběma kružnicím k_1, k_2', tj.

obloukům o_1, o_2'. Odvodíme-li z tohoto bodu B bod C jako průsečík oblouku o_2 s přímkou BM, je $BM : CM = k$ $\left(\text{bod } C\right.$ vznikne, neboť je obrazem bodu B ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\left.-\frac{1}{k}\right)$. Dále platí

$$\sphericalangle ABM = 90° - \frac{1}{2}\,\omega = \sphericalangle ACM\,,$$

tj. trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC a je $\sphericalangle BAC = \omega$.

Diskuse. Úloha má tedy dvě řešení, která dostaneme, vyměníme-li poloroviny ϱ_1 a ϱ_2 (a oblouky o_1, o_2). Tato řešení splynou pro $k = 1$.



Obr. 32.

b) Střed S základny BC je pata kolmice spuštěné z vrcholu A na základnu BC. Všechny tyto body S leží tedy podle Thaletovy věty na kružnici $\varkappa$ sestrojené nad průměrem AM

(obr. 32). Přímky BC však nevyplňují celý svazek se středem M, ale jen dva vrcholové úhly omezené tečnami t_1, t_2 sestrojenými v bodě M po řadě ke kružnicím k_1, k_2. Označme V, U po řadě průsečíky tečen t_1, t_2 s kružnicí $\varkappa$. Pak každá přímka, která prochází bodem M a náleží úhlu $\sphericalangle\ UMV$ a úhlu vrcholovému, protíná jen jeden z oblouků o_1, o_2 mimo bod M; každá jiná přímka procházející bodem M protíná oblouk o_1 v bodě B a oblouk o_2 v bodě C; body B a C jsou odděleny bodem M. Odtud je patrné, že každý ze středů S padne dovnitř oblouku $\widehat{UMV}$ kružnice $\varkappa$ a obráceně každý bod vnitřku tohoto oblouku je středem S některé z úseček BC.

Hledané geometrické místo bodů je tedy oblouk $\widehat{UMV}$ kružnice $\varkappa$ bez bodů U, V.

5. Vyšetřte množinu všech bodů v rovině, pro jejichž kartézské souřadnice x, y platí nerovnost

$$|x| + |y| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\,. \tag{1}$$

Řešení. Umocněním a úpravou dostaneme z (1) nerovnost:

$$|xy| < 1 - x - y\,. \tag{2}$$

Z nerovnosti (2) obráceně plyne nerovnost (1), jak zjistíme obrácením postupu. Je tedy také (2) analytickým vyjádřením hledaného geometrického místa bodů. Rozlišíme dva případy:

1. $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ nebo $x \leqq 0$, $y \leqq 0$;
2. $x \geqq 0$, $y \leqq 0$ nebo $x \leqq 0$, $y \geqq 0$.

V případě 1 je $|xy| = xy$ a nerovnost (2) lze upravit na tvar

$$(x+1)(y+1) < 2\,. \tag{3}$$

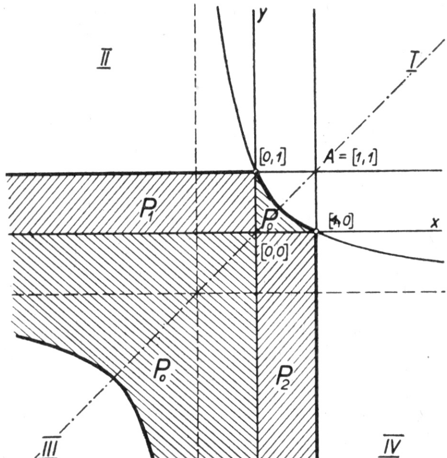
Rovnice $(x+1)(y+1) = 2$ vyjadřuje rovnoosou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -1$, $y = -1$. Nerovnost (3) vyjadřuje tu uzavřenou oblast $\mathbf{O}_1$ omezenou oběma větvemi hyperboly, v níž leží bod [0, 0]; bod [0, 0] totiž splňuje nerovnost (3). Připojíme-li k nerovnosti (3) ještě nerovnost $xy \geqq 0$, dostaneme průnik $\mathbf{P}_0$ I. a III. kvadrantu s oblastí $\mathbf{O}_1$.

V případě 2 je $|xy| = -xy$ a nerovnost (2) lze upravit na tvar

$$(1 - x)(y - 1) < 0\,. \tag{4}$$

Rovnice $(1 - x)(y - 1) = 0$ vyjadřuje dvojici přímek $x = 1$, $y = 1$. Nerovnost (4) vyjadřuje ten pravý úhel sevřený těmito přímkami, v němž leží počátek [0, 0]. Připojíme-li k nerovnosti (4) ještě nerovnost $xy \leqq 0$, která vyjadřuje sjednocení II. a IV. kvadrantu, dostaneme část roviny složenou ze dvou polopásů $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$. Hledaná množina je sjednocením množin $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$.

Situace je znázorněna na obr. 33, kde je množina vyšrafována.



Obr. 33.

6. Zistite, pre ktoré ostré uhly α platí nerovnosť

$$\frac{2}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha} \geqq 6\,. \tag{1}$$

Dokážte, že rovnosť vo vzťahu (1) nastane len pre $\alpha = 30°$.

(Poznámka. Ak poznáte jeden koreň mnohočlena tretieho stupňa jednej premennej, možno tento mnohočlen pomocou delenia koreňovým činiteľom rozložiť na súčin mnohočlenov nižších stupňov.)

Riešenie. Je zrejmé, že musí byť $\alpha \neq 45°$, pretože ak je $\alpha = 45°$, je $2\alpha = 90°$, $\cos 2\alpha = 0$. Budeme rozlišovať dva prípady: $\alpha < 45°$ a $\alpha > 45°$.

a) Nech je $\alpha < 45°$. Potom $\sin\alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$. Obidve strany nerovnosti (1) vynásobíme súčinom $\sin\alpha \cos 2\alpha$ a dostaneme

$$2\cos 2\alpha + \sin\alpha \geqq 6\sin\alpha \,.\, \cos 2\alpha\,. \tag{2}$$

Použijeme vzorec $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, dosadíme do (2) a po úprave vyjde

$$12\sin^3\alpha - 4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 2 \geqq 0\,. \tag{3}$$

Označme kvôli stručnosti $\sin\alpha = x$. Nerovnosť (3) má potom tvar

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \geqq 0\,. \tag{3a}$$

Dosadením si overíme, že rovnice

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0 \tag{4}$$

má zrejme koreň $x = \frac{1}{2}$ $\left(\text{pretože } \sin 30° = \frac{1}{2}\right)$. Túto skutočnosť použijeme na rozklad štvorčlena na ľavej strane nerovnosti (3a). Vo vzťahu

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) \tag{5}$$

určíme koeficienty a, b, c. Vynásobíme pravú stranu a porovnáme koeficienty pri mocninách x s rovnakým exponentom na oboch stranách rovnosti (5). Dostaneme

$$a = 12,\ b - \frac{1}{2}a = -4,\ c - \frac{1}{2}b = -5,\ -\frac{1}{2}c = 2.$$

Stadiaľ vyjde

$$a = 12,\ b = 2,\ c = -4.$$

Rozklad teda po úprave znie

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(6x^2 + x - 2). \qquad (6)$$

Rozložíme ešte kvadratický trojčlen $6x^2 + x - 2$ pomocou koreňov kvadratickej rovnice $6x^2 + x - 2 = 0$. Tieto korene sú

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12},$$

t. j. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. Hľadaný rozklad je

$$6x^2 + x - 2 = (2x - 1)(3x + 2). \qquad (7)$$

Ak dosadíme zo vzťahu (7) do vzťahu (6), prevedieme nerovnosť (3a) na tvar

$$(2x - 1)^2 . (3x + 2) \geqq 0. \qquad (8)$$

Nerovnosť (8) je splnená pre každé $x > 0$, t.j. nerovnosť (1) je splnená pre každý ostrý úhol $\alpha < 45°$ (to sa dostane obrátením postupu). Rovnosť vo vzťahu (8) nastane jedine pre $x = \frac{1}{2}$ čiže pre $\alpha = 30°$.

b) Zostáva vyšetrovať prípad $45° < \alpha < 90°$. Postupujeme pri tom ako v prípade a). Pretože tu je $90° < 2\alpha < 180°$, je $\cos 2\alpha < 0$ a namiesto nerovnosti (2) dostaneme nerovnosť

$$12\sin^3 \alpha - 4\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + 2 \leqq 0 .$$

Po rovnakých úpravách ako v odst. a) dostaneme namiesto nerovnosti (3a) nerovnosť

$$12x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \leqq 0 . \tag{3b}$$

Nerovnosť (3b) je ekvivalentná s nerovnosťou

$$(2x - 1)^2 . (3x + 2) \leqq 0 . \tag{9}$$

Pretože je $x > 0$, je $3x + 2 > 0$ a nerovnosť (9) prejde na rovnosť len pre $x = \frac{1}{2}$ a $x = -\frac{2}{3}$. Pretože však uhol α je ostrý a väčší ako 45°, nemôže byť ani $x = \frac{1}{2}$, ani $x = -\frac{2}{3}$. Vzťah (9) teda nie je splnený pre žiadne $x \in \langle 45°; 90°)$.

Výsledok. Riešením nerovnosti (1) sú všetky ostré uhly $\alpha < 45°$. Rovnosť nastane jedine pre $\alpha = 30°$.

2. *KATEGORIE B*

1. „Vzorec pro umocňování třemi"

$$(2a^2 - a + 1)^3 = 8a^6 - a^3 + 1 \tag{1}$$

platí pro $a = \frac{1}{2}$. Najděte všechna reálná čísla a, pro něž tento „vzorec" platí.

(Poznámka. Kořen polynomu lze někdy bez řešení příslušné rovnice najít zkusmo. Budete-li znát jeden z kořenů polynomu vyššího stupně, lze tento polynom rozložit pomocí dělení kořenovým činitelem v součin polynomů nižších stupňů.)

Řešení. Umocníme-li

$(2a^2 - a + 1)^3 = 8a^6 - a^3 + 1 + 12a^4 + 6a^2 - 12a^5 + 6a^4 + 3a^2 - 3a - 12a^3$, dostáváme za předpokladu, že pro číslo a platí (1), rovnici

$$-12a^5 + 18a^4 - 12a^3 + 9a^2 - 3a = 0 . \qquad (2)$$

Mnohočlen na levé straně rovnice (2) lze rozepsat jako součin

$$-3a . (4a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 3a + 1) = 0 . \qquad (3)$$

Rovnice (2) má tedy kořen $a = 0$, který vyhovuje i rovnici (1).

V textu úlohy je uvedeno, že rovnici (1) vyhovuje $a = \frac{1}{2}$.

Zřejmě $a = \frac{1}{2}$ splňuje také rovnici (3) a tedy i rovnici

$$P(a) = 0 ,$$

kde $P(a) = 4a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 3a + 1$. Po dělení mnohočlenu $P(a)$ kořenovým činitelem $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ dostaneme

$$P(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)(4a^3 - 4a^2 + 2a - 2) . \qquad (4)$$

Použijeme-li vztahu

$$4a^3 - 4a^2 + 2a - 2 = 2(a - 1)(2a^2 + 1) ,$$

dále rovnosti (4) a úpravy, kterou jsme obdrželi rovnici (3), lze rovnici (2) psát po zkrácení ve tvaru

$$a . \left(a - \frac{1}{2}\right) . (a - 1) . (2a^2 + 1) = 0 ,$$

odkud již plyne, že všechny reálné kořeny rovnice (2) a tedy i rovnice (1) jsou čísla $0, \frac{1}{2}, 1$. Mnohočlen $(2a^2 + 1)$ totiž není v oboru reálných čísel rozložitelný.

Závěr: Vzorec (1) platí právě pro čísla $0, \frac{1}{2}, 1$.

2. Znázorněte graficky průběh funkce

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}\right). \tag{1}$$

(Poznámka. Vyjádření funkce nejprve vhodně upravte tak, aby výraz na pravé straně obsahoval goniometrické funkce argumentu x.)

Řešení. Protože $-1 \leqq \sin 2x \leqq 1$, je funkce daná předpisem (1) definována pro všechna reálná x. Funkční předpis (1) si nejprve upravíme tímto obratem: umocníme-li na druhou, dostaneme

$$y^2 = \frac{1}{4}\left(2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 2x}\right) = \frac{1 + \sqrt{\cos^2 2x}}{2} = \frac{1 + |\cos 2x|}{2}.$$

Protože odmocnina je definována jako nezáporné číslo, platí $y \geqq 0$, takže

$$y = \sqrt{\frac{1 + |\cos 2x|}{2}}. \tag{2}$$

Funkce $|\cos 2x|$ je periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$, tedy i námi vyšetřovaná funkce, jak plyne z předpisu (2), je periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$, takže stačí graficky znázornit její průběh v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Nyní budeme rozlišovat dva případy:

a) Je-li $\cos 2x \geqq 0$, pak $|\cos 2x| = \cos 2x$, takže předpis (2) zní

$$y = |\cos x| \, . \qquad (3)$$

Případ a) nastává v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ pro ta x, pro něž $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$. Avšak pro $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ je $|\cos x| = \cos x$, tedy (3) zní

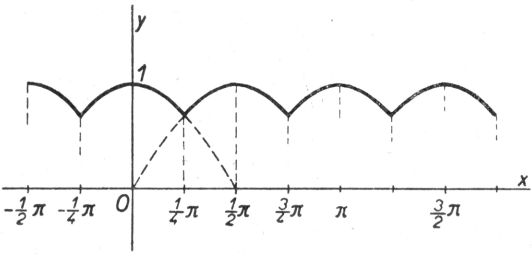
$$y = \cos x \, . \qquad (3a)$$

b) Je-li $\cos 2x < 0$, pak $|\cos 2x| = -\cos 2x$, takže předpis (2) nabývá tvar

$$y = |\sin x| \, . \qquad (4)$$

Případ b) nastává všude tam, kde nenastal případ a). V našem případě se jedná o interval $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, kde však $|\sin x| = \sin x$ a tudíž (4) zní

$$y = \sin x \, .$$



Obr. 34.

Výsledný graf je na obr. 34. V intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ se užívá funkčního předpisu (3a) a v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ předpisu (4).

Jiné řešení. Upravíme danou funkci

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}\right) +$$
$$+ \left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\right),$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\right),$$

$$y = \frac{1}{2} \left(|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|\right). \qquad (5)$$

Rozlišíme tyto čtyři případy:

a) $\sin x - \cos x \geqq 0$, $\sin x + \cos x \geqq 0$;
b) $\sin x - \cos x \geqq 0$, $\sin x + \cos x \leqq 0$;
c) $\sin x - \cos x \leqq 0$, $\sin x + \cos x \geqq 0$;
d) $\sin x - \cos x \leqq 0$, $\sin x + \cos x \leqq 0$.

Jak zjistíme snadno např. pomocí grafů, platí v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nerovnosti

$$\sin x - \cos x \geqq 0 \text{ pro } x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle;$$

$$\sin x - \cos x \leqq 0 \text{ pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right\rangle;$$

$$\sin x + \cos x \geqq 0 \text{ pro } x \in \left\langle 0, \frac{3\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle;$$

$$\sin x + \cos x \leqq 0 \text{ pro } x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle.$$

Nastane tedy případ:

$$\text{a) pro } x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle,$$

$$\text{b) pro } x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle,$$

$$\text{c) pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle, \tag{6}$$

$$\text{d) pro } x \in \left\langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle.$$

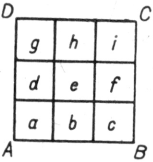
V jednotlivých případech a) až d) dostaneme z (5)

$$\begin{aligned} &\text{a) } y = \sin x\,, \\ &\text{b) } y = -\cos x\,, \\ &\text{c) } y = \cos x\,, \\ &\text{d) } y = -\sin x\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Zobrazením funkcí (7) v intervalech (6) dostaneme graf dané funkce.

3. Štvorec *ABCD* je rozdelený štyrmi priečkami na deväť zhodných štvorcov. Každé z týchto deviatich polí má byť natreté jednou zo štyroch daných farieb tak, aby žiadne dve susedné polia neboli rovnakej farby. Za susedné polia pokladáme štvorce, ktoré majú spoločnú buď stranu alebo vrchol.

Zvoľte pevne farbu stredného a ľavého dolného štvorca a zistite počet rôznych možností zafarbenia ostatných polí.



Obr. 35.

Riešenie. Polia označme malými písmenami podľa obr. 35. Farbu, ktorou je natreté pole *a*, označme 1. Farby, ktorými sú natreté polia *b*, *d* označme v uvedenom poradí 2, 3. Potom pole *e* je natreté farbou 4. Pre pole *c* sú podľa podmienky úlohy dve možnosti: farba 1 alebo farba 3 (obr. 36).

Pre pole f potom vychádza určitá farba: v prvom prípade 3, v druhom prípade 1. Zostáva doplniť prvé riadky oboch tabuliek z obr. 36. Ľavú tabuľku možno doplniť dvoma spôsobmi (obr. 37). Pole h môže mať totiž buď farbu 1 alebo farbu 2. Druhú tabuľku z obr. 36 možno však doplniť len jedným spôsobom: pole h musí mať farbu 2 (obr. 38).

3	4	3
1	2	1

3	4	1
1	2	3

Obr. 36.

2	1	2
3	4	3
1	2	1

1	2	1
3	4	3
1	2	1

Obr. 37.

Farby 1 a 4 polí a a e sú pevne zvolené. Za farby 2 a 3 možno teda voliť z ostávajúcich dvoch farieb a sú práve dve možnosti. Voľba každej z oboch možností vedie ku trom spôsobom zafarbenia polí (pozri obr. 37, 38).

1	2	3
3	4	1
1	2	3

Obr. 38.

Počet rôznych možností zafarbenia polí, ak sú pevne zvolené farby stredného a ľavého dolného štvorca, je teda

$$2 \,.\, 3 = 6\,.$$

4. Je daná kružnica k a jej dva rôzne priemery AB, CD.

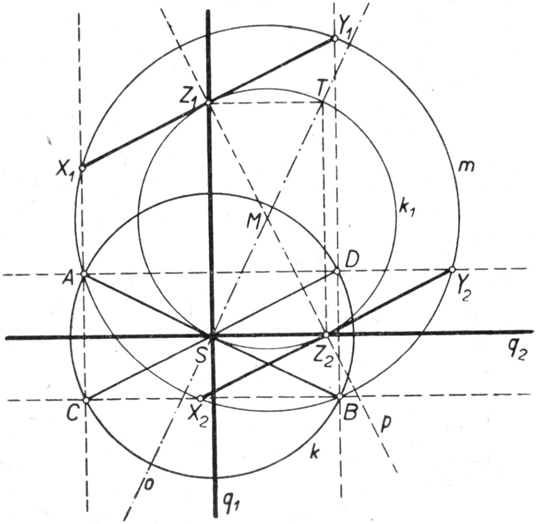
Vyšetrite geometrické miesto stredov všetkých úsečiek XY, ktoré majú tieto vlastnosti:

a) $XY \parallel CD$;

b) $XY = CD$;

c) body A, B, X, Y ležia na kružnici.

Riešenie. Označme (obr. 39) S stred kružnice k. Nech m je ľubovoľná kružnica prechádzajúca bodmi A a B. Jej stred M leží teda na osi o úsečky AB. Nájdeme všetky úsečky XY vyhovujúce podmienkam a) a b) úlohy a také, že X aj Y ležia na kružnici m. Ak je $M \equiv S$, je $m \equiv k$ a CD je jediná taká úsečka.



Obr. 39.

Nech je teda $M \not\equiv S$. Z podmienky b) vyplýva, že taká úsečka má dĺžku $CD = AB$. Všetky tetivy kružnice m dĺžky AB sa však dotýkajú kružnice $k_1 \equiv (M; MS)$. Medzi nimi sú práve dve tetivy X_1Y_1 a X_2Y_2, ktoré vyhovujú podmienke a) úlohy, t. j. $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2 \parallel CD$. Dotykové body Z_1 a Z_2 týchto tetív na kružnici k_1 ležia na priamke p idúcej stredom M a kolmej k CD. Pretože Z_1 a Z_2 sú v uvedenom poradí stredmi tetív X_1Y_1 a X_2Y_2, patria k hľadanému geometrickému miestu. Označme ešte T druhý priesečník (okrem S) priamky o s kružnicou k_1. Potom sú Z_1Z_2 a ST dva rôzne priemery kružnice k_1 a platí $Z_1Z_2 \perp CD$, $ST \perp AB$. Body S, Z_1, T, Z_2 sú teda vrcholmi obdĺžnika, ktorého uhlopriečky sú kolmé k uhlopriečkam obdĺžnika $ACBD$. Preto strany oboch obdĺžnikov sú rovnobežné a body Z_1, Z_2 ležia na osiach q_1, q_2 uhlov ASD, ASC rôznobežiek AB, CD. Tieto osi obsahujú tedy všetky body hľadaného geometrického miesta.

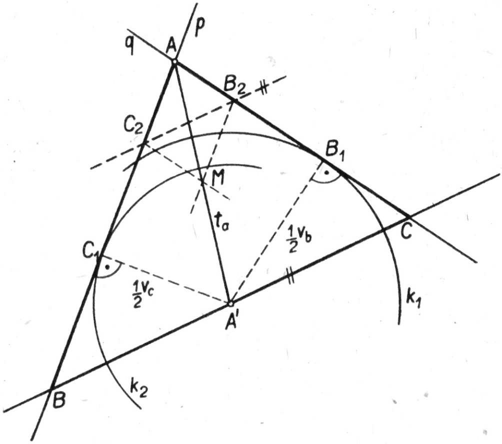
Ukážme teraz, že aj obrátene každý bod oboch osí je stredom niektorej úsečky XY. Pre stred S to platí ($XY \equiv CD$). Ak je $Z_1 \not\equiv S$ bodom osi q_1, veďme ním kolmicu k priamke CD. Tá pretína o v bode, ktorý označíme M, druhú os q_2 v bode, ktorý označíme Z_2. Pretože body Z_1, S, Z_2 sú troma vrcholmi obdĺžnika (s uhlopriečkami kolmými k uhlopriečkam obdĺžnika $ACBD$), prechádza kružnica $k_1 \equiv (M; MS)$ bodmi Z_1, Z_2. Jej dotyčnica v bode Z_1 pretína kružnicu $m \equiv (M; MA)$ v bodoch X_1 a Y_1 vyhovujúcich podmienkam úlohy. Taktiež pre každý bod $Z_2 \not\equiv S$ osi q_2 sa dokáže, že patrí k hľadanému geometrickému miestu.

Záver: Hľadané geometrické miesto je zložené z oboch osí q_1, q_2 obdĺžnika $ACBD$.

Poznámka. Pretože platí $CS \parallel X_1Z_1$, $CS = X_1Z_1$ podľa podmienok úlohy, je pre $S \not\equiv Z_1$ štvoruholník CSZ_1X_1 rovnobežníkom. Ďalej je $AC \parallel q_1 \equiv SZ_1$, takže bod X_1 leží na priamke AC. Podobne dokážeme, že bod X_2 leží na priamke CB, bod Y_1 na priamke BD a bod Y_2 na priamke AD.

5. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky těžnice t_a a výšek v_b, v_c. Proveďte diskusi řešitelnosti.

Řešení. Rozbor (obr. 40). Označme A' střed strany BC; je tedy $AA' = t_a$. Dále označme po řadě B_1, C_1 paty kolmic spuštěných z bodu A' na přímky AC, AB. Stejnolehlost se středem B a koeficientem $\frac{1}{2}$, převede vrchol C v bod A' a výšku v_c v úsečku $A'C_1$; proto je $A'C_1 = \frac{1}{2} v_c$. Z obdobné-



Obr. 40.

ho důvodu je $A'B_1 = \frac{1}{2} v_b$, přímky $p \equiv AB$, $q \equiv AC$ se tedy dotýkají po řadě kružnic $k_2 \equiv \left(A'; \frac{1}{2} v_c\right)$, $k_1 \equiv \left(A'; \frac{1}{2} v_b\right)$ a přitom bod A' leží uvnitř úhlu BAC.

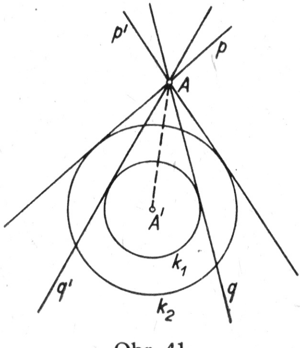
Konstrukce. Nejprve sestrojíme úsečku AA', pak kružnice k_1, k_2 a vedeme k nim z bodu A tečny. Z nich vybereme tečnu p ke kružnici k_2 a tečnu $q \not\equiv p$ ke kružnici k_1. Právě jeden ze čtyř úhlů určených přímkami p, q obsahuje úsečku AA'; na jeho ramenech leží vrcholy B, C. Směr přímky BC určíme takto: Sestrojíme rovnoběžník AB_2MC_2 tak, aby body C_2, B_2 ležely na obou ramenech úhlu, který obsahuje úsečku AA'; přitom bod C_2 leží na přímce p, bod B_2 na přímce q (M značí bod vnitřku úsečky AA'). Přímka BC procházející bodem A' je rovnoběžná s přímkou C_2B_2.

Zkouška. Je zřejmé, že podle předchozího sestrojené přímky p, q mají od bodu A' po řadě vzdálenosti $\frac{1}{2} v_c$, $\frac{1}{2} v_b$, dále, že úsečka BC je půlena bodem A', tj., že trojúhelník ABC má těžnici AA' délky t_a. Konečně je patrné, že výšky spuštěné z vrcholů B, C mají po řadě délky v_b, v_c.

Diskuse. Úsečku AA' a kružnice k_1, k_2 lze sestrojit za všech okolností. Tečny p, q lze vést právě tehdy, je-li

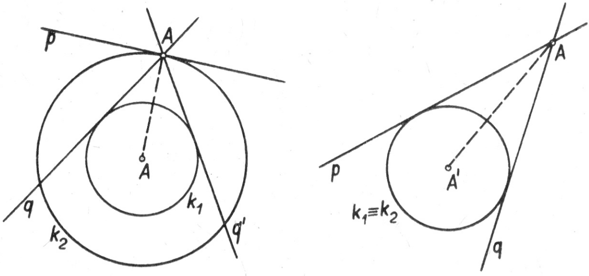
$$v_b \leqq 2t_a \, , v_c \leqq 2t_a \, . \tag{1}$$

Tečny p, q nesplynou (jsou různoběžné) právě tehdy, když ve vztazích (1) platí aspoň jedna ostrá nerovnost. Rovnoběžka vedená k přímce C_2B_2 bodem A' protne obě přímky p, q. Vztahy (1), v nichž nastane rovnost v nejvýše jednom případě, udávají tedy podmínku řešitelnosti úlohy.



Obr. 41

Obr. 41 ukazuje, jak můžeme vybrat dvojice tečen p, q v případě, že $k_1 \not\equiv k_2$ ($v_b \neq v_c$) a platí obě ostré nerovnosti (1). Obr. 42a znázorňuje případ, kdy $2t_a = v_c$, $2t_a > v_b$. Na obr. 42b je $k_1 \equiv k_2 (v_b = v_c < 2t_a)$.



Obr. 42a, b.

Možný výběr dvojic tečen na obr. 41 je pq, pq', $p'q$, $p'q'$; na obr. 42a jsou dvě dvojice pq a pq'; na obr. 42b je jediná dvojice pq (nehledíme-li na souměrnost podle přímky AA').

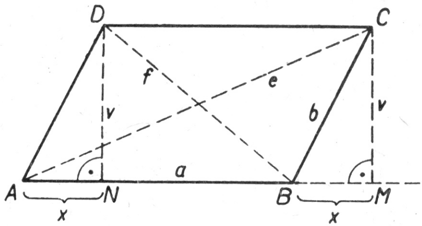
6. Strany rovnoběžníka $ABCD$ označme $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ a jeho úhlopříčky $AC = e$, $BD = f$.

a) Dokažte, že o velikostech stran a úhlopříček libovolného rovnoběžníka $ABCD$ platí rovnost

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

b) Použijte této rovnosti a vyjádřete vzdálenost středů hran AB, CD čtyřstěnu $ABCD$ pomocí délek všech jeho stran.

Řešení. a) I. *Pomocí kosinové věty* (obr. 43).



Obr. 43.

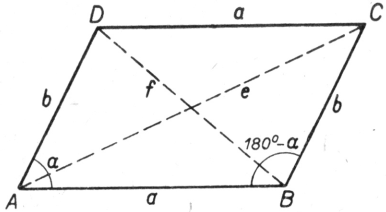
V trojúhelníku ABC a v trojúhelníku ABD platí

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \qquad f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha;$$

sečtením těchto rovností dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2) .$$

II. *Bez kosinové věty* (obr. 44).



Obr. 44.

Zavedeme označení podle obr. 44. Platí podle Pythagorovy věty v trojúhelnících AMC a BMC

$$(a + x)^2 + v^2 = e^2 , \qquad x^2 + v^2 = b^2 .$$

Odečtením obou rovností dostaneme

$$a^2 + 2ax = e^2 - b^2 . \tag{1}$$

Obdobně pro trojúhelníky BND a AND platí

$$(a - x)^2 + v^2 = f^2 , \qquad x^2 + v^2 = b^2 ,$$

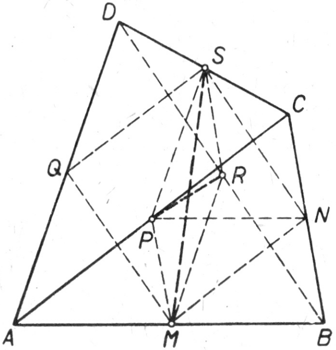
tj.

$$a^2 - 2ax = f^2 - b^2 . \tag{2}$$

Sečtením (1), (2) dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2) .$$

b) Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme M, N, P, Q, R, S po řadě středy hran AB, BC, AC, AD, BD, CD. Budeme hledat vyjádření délky MS (obr. 45).



Obr. 45.

Podle vlastností střední příčky trojúhelníka je

$$PS = MR = \frac{1}{2} AD, \qquad PS \parallel MR,$$

$$PM = RS = \frac{1}{2} BC, \qquad PM \parallel RS;$$

proto je čtyřúhelník $MPSR$ rovnoběžník. Podle a) platí

$$MS^2 + PR^2 = 2(PS^2 + PM^2) = \frac{1}{2} AD^2 + \frac{1}{2} BC^2. \tag{3}$$

Analogicky dostaneme

$$PR^2 + NQ^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} CD^2, \tag{4}$$

$$NQ^2 + MS^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} BD^2. \tag{5}$$

Od sečtených rovnic (3) a (5) odečteme rovnici (4):

$$2MS^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} AD^2 + \frac{1}{2} BC^2 + \frac{1}{2} BD^2 -$$

$$- \frac{1}{2} AB^2 - \frac{1}{2} CD^2 ,$$

tj.

$$MS = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2} .$$

3. *KATEGORIE C*

1. Určite všetky zlomky $\frac{a}{b}$ (a, b prirodzené čísla), ktoré majú tieto vlastnosti:

$$90 < a + b < 100 , \tag{1}$$

$$0{,}9 < \frac{a}{b} < 0{,}91 . \tag{2}$$

Riešenie. Z prvej podmienky vyplýva

$$\frac{90}{b} < 1 + \frac{a}{b} < \frac{100}{b} , \tag{3}$$

t. j. vzhľadom na nerovnosti (2) a (3)

$$1{,}9 < \frac{100}{b} , \quad \frac{90}{b} < 1{,}91$$

a stadiaľ

$$47{,}1\ldots \doteq \frac{90}{1{,}91} < b < \frac{100}{1{,}9} \doteq 52{,}6\ldots$$

čiže

$$48 \leqq b \leqq 52\,. \tag{4}$$

Vyšetrujeme najskôr menovateľa $b = 52$. Z nerovnosti (2) po vynásobení číslom 52 vyplýva

$$46{,}8 < a < 47{,}32\,,$$

t. j. $a = 47$. Skutočne je $a + b = 99 < 100$.

Vyšetrujme za druhé menovateľa $b = 51$. Z nerovnosti (2) po vynásobení číslom 51 vyplýva

$$45{,}9 < a < 46{,}41\,,$$

t. j. $a = 46$. Skutočne je $a + b = 97 < 100$.

Vyšetrujme za tretie menovateľa $b = 50$. Z nerovnosti (2) vyplýva

$$45 < a < 45{,}5\,. \tag{5}$$

Nerovnostiam (5) nevyhovuje však žiadne prirodzené číslo a. Za štvrté vyšetríme menovateľa $b = 49$. Z nerovnosti (2) dostaneme

$$44{,}1 < a < 44{,}59\,. \tag{6}$$

Konečne vyšetríme menovateľa $b = 48$. Z nerovnosti (2) vyjde

$$43{,}2 < a < 43{,}68\,. \tag{7}$$

Zrejme ani nerovnostiam (6) a (7) nevyhovuje žiadne prirodzené číslo a.

Úloha má tedy dve riešenia. Sú to zlomky $\frac{47}{52}$, $\frac{46}{51}$.

2. Udejte všecky dvojice přirozených čísel p, q, pro něž je číslo

$$N = 7^p - 3^q$$

násobkem deseti.

Úlohu řešte nejprve pro přirozená čísla p, q, která jsou vázána podmínkami

$$1001 \leqq p \leqq 1005 \text{ a } 2002 \leqq q \leqq 2006 .$$

Řešení. Číslo N je násobkem deseti právě tehdy, když mocniny 7^p, 3^q končí toutéž číslicí. Sestavíme tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	3	9	27	81	243	729	...7	...1	...3	...9
7^n	7	49	243	1701	11907	...9	...3	...1	...7	...9

Z tabulky je patrné, že poslední číslice přirozených mocnin čísla 3 se pravidelně opakují tak, že pro exponent $n = 4a + 1$ (kde a je libovolné nezáporné celé číslo) je poslední číslicí 3, pro $n = 4a + 2$ je poslední číslicí 9, pro $n = 4a + 3$ je poslední číslicí 7 a konečně pro $n = 4a + 4$ je poslední číslicí 1.

Poslední číslice čísla 7^n se také opakují: pro $n = 4b + 1$ (kde b je libovolné nezáporné číslo) je poslední číslicí 7, pro $n = 4b + 2$ je poslední číslicí 9, pro $n = 4b + 3$ je poslední číslicí 3 a pro $n = 4b + 4$ je poslední číslicí 1.

Poslední číslice mocnin čísel 3 a 7 pro daná přirozená q a p sestavíme rovněž do tabulky (pod sebe napíšeme mocniny s týmiž posledními číslicemi):

p	1 001	1 002	1 003	1 004	1 005
7^p	...7	...9	...3	...1	...7
q	2 003	2 002 2 006	2 005	2 004	2 003
3^q	...7	...9	...3	...1	...7

Hledaných dvojic přirozených čísel p, q z daných exponentů lze sestavit 6; jsou to: (1 001; 2 003), (1 002; 2 002), (1 002; 2 006), (1 003; 2 005), (1 004; 2 004) a (1 005; 2 003).

b) Vzhledem k tomu, že se poslední cifry mocnin čísel 3 a 7 pravidelně opakují, lze vyjádřit dvojice přirozených exponentů p, q i obecně (čísla a_i a b_j jsou nezáporná celá):

1. Je-li

$$p = 4a_1 + 1\,, \qquad q = 4b_1 + 3\,,$$

mají obě mocniny za poslední cifru číslo 7 a příslušné číslo N je tedy násobkem deseti.

Z obdobných důvodů tvoří dvojice hledaných přirozených exponentů ještě tato čísla:

2. $p = 4a_2 + 2\,, \qquad q = 4b_2 + 2;$
3. $p = 4a_3 + 3\,, \qquad q = 4b_3 + 1;$
4. $p = 4a_4 + 4\,, \qquad q = 4b_4 + 4\,.$

3. Větší počet provozoven se podílel stejným dílem na výrobním plánu. Vzhledem k zahraničním objednávkám bylo třeba zvýšit plán na 108 %. Shodou okolností p% zúčastněných provozoven splnilo svůj plán jen na 90 %. O jaký počet q % musela zvýšit každá ze zbývajících provozoven svůj plán, aby byl celkový zvýšený výrobní plán splněn?

Vyjádřete q pomocí p a sestrojte graf této funkce pro $0 \leqq p < 100$.

Řešení. Označme a počet provozoven, které splnily svůj plán jen na 90 %, b počet zbývajících provozoven. Pak platí rovnost

$$a \,.\, 0{,}9 + b\left(1 + \frac{q}{100}\right) = (a + b)\, 1{,}08\,. \tag{1}$$

Obě strany rovnice (1) dělíme číslem $a + b$ a použijeme vztahů

$$\frac{a}{a+b} = \frac{p}{100}\,, \qquad \frac{b}{a+b} = \frac{100-p}{100}\,;$$

vyjde

$$\frac{p}{100} \,.\, 0{,}9 + \frac{100-p}{100}\left(1 + \frac{q}{100}\right) = 1{,}08\,.$$

Po úpravě (vynásobení stem) dostaneme

$$\frac{pq}{100} + 0{,}1p - q + 8 = 0$$

neboli

$$pq + 10p - 100q + 800 = 0\,,$$

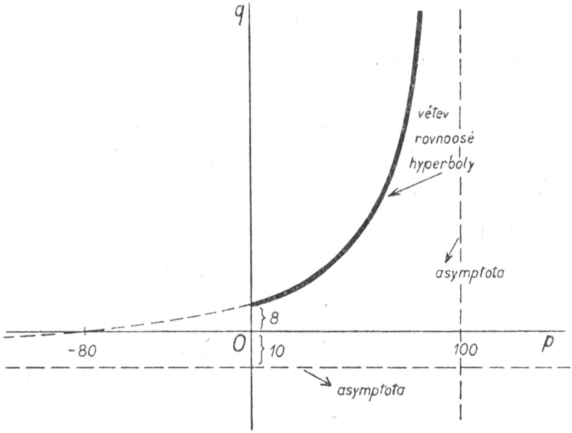
tj.

$$q(100 - p) = 10(p + 80)\,. \tag{2}$$

Protože je $p < 100$, je $100 - p > 0$ a lze tímto číslem dělit obě strany rovnice (2); dostaneme

$$q = 10 \,.\, \frac{80 + p}{100 - p}\,, \tag{3}$$

což je výsledek úlohy. Grafické znázornění funkce (3) je na obr. 46.

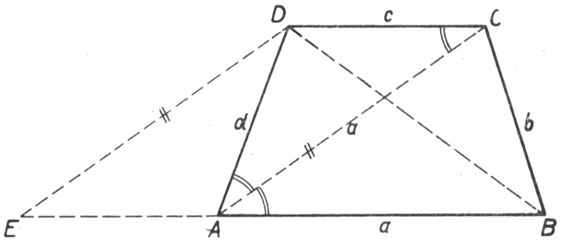


Obr. 46.

4. Lichoběžník $ABCD$ má úhlopříčky AC, BD, které jsou téže délky a půlí úhly při základně AB.

a) Dokažte, že platí $BC = CD = DA$.

b) Sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = AC = a$.



Obr. 47.

Řešení. a) Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$ (obr. 47). Dále je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ (úhly střídavé). Proto je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD$ a trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC. Z obdobného důvodu je rovnoramenný trojúhelník BDC se základnou BD. Je tedy

$$BC = CD = DA = b\,. \tag{1}$$

b) Dokončíme r o z b o r: Na přímce AB sestrojíme bod E tak, aby bylo $DE \parallel AC$; pak je $AE = CD = b$, $DE = AC = a$, $\sphericalangle DEB = \sphericalangle CAB$ (úhly souhlasné), $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DBE$ (trojúhelník BED je rovnoramenný). Je tedy

$$\triangle BED \sim \triangle ACD \ (uu)\,. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}\,.$$

Odtud dostaneme kvadratickou rovnici pro b

$$b^2 + ab - a^2 = 0\,. \tag{3}$$

Rovnice (3) má vždy jediný kladný kořen

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4a^2} - a\right) = \frac{1}{2}\,a\left(\sqrt{5} - 1\right). \tag{4}$$

K o n s t r u k c i lichoběžníka můžeme provést po konstrukci úsečky délky b (použitím Pythagorovy věty) pomocí a, b obvyklým způsobem. Jinak je možno sestrojit trojúhelník BED a z něho lichoběžník $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy.

Podmínka sestrojitelnosti trojúhelníka BED je $BD + ED > BE$ neboli

$$2a > a + b\,;$$

pomocí vztahu (4) dostáváme

$$a > \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

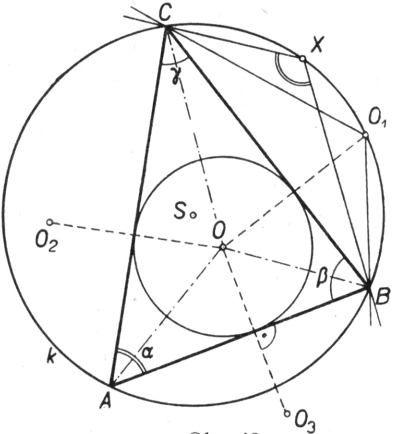
tj.

$$2 > \sqrt{5} - 1. \tag{5}$$

Protože $\sqrt{5} < 3$, je vztah (5) správný. Protože postup lze obrátit, je podmínka (5) i podmínkou postačující. Úloha má tedy vždy jediné řešení (ve zvolené polorovině s hranicí AB).

5. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ. Označme O_1, O_2, O_3 body, které jsou souměrně sdružené se středem O vepsané kružnice po řadě podle přímek BC, CA, AB.

Udejte všechny možnosti poloh bodů O_1, O_2, O_3 vzhledem ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC (v závislosti na velikostech úhlů α, β, γ).



Obr. 48.

Řešení (obr. 48). Přímka BC odděluje body A, O_1, neboť střed vepsané kružnice leží v polorovině BCA. Označme X libovolný bod opsané kružnice k, který leží uvnitř poloroviny BCO_1. Podle známé věty o obvodových úhlech je

$$\sphericalangle BXC = 180^\circ - \alpha\,. \tag{1}$$

Z konstrukce bodu O_1 vyplývá, že platí $\sphericalangle CBO_1 = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle BCO_1 = \frac{1}{2}\gamma$, tedy

$$\sphericalangle BO_1C = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\,. \tag{2}$$

Bod O_1 leží *na kružnici* k právě tehdy, je-li $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BO_1C$, neboli podle (1), (2)

$$\alpha = 60^\circ. \tag{3}$$

Dále odvodíme, že bod O_1 leží *vně* kružnice k právě tehdy, je-li $\sphericalangle BXC > \sphericalangle BO_1C$, neboli podle (1) a (2)

$$\alpha < 60^\circ. \tag{4}$$

Obdobně bod O_1 leží *uvnitř* kružnice k právě tehdy, je-li

$$\alpha > 60^\circ. \tag{5}$$

Je tedy třeba uvážit všechny možnosti velikostí úhlů trojúhelníka ABC vzhledem k úhlu velikosti 60°. Označíme-li úhel větší než 60° značkou $+$, úhel menší než 60° značkou $-$, dostaneme tyto případy:

I.	60°,	60°,	60°;	VI.	60°,	$-$,	$-$;
II.	60°,	60°,	$+$;	VII.	$+$,	$+$,	$+$;
III.	60°,	60°,	$-$;	VIII.	$+$,	$+$,	$-$;
IV.	60°,	$+$,	$+$;	IX.	$+$,	$-$,	$-$;
V.	60°,	$+$,	$-$;	X.	$-$,	$-$,	$-$.

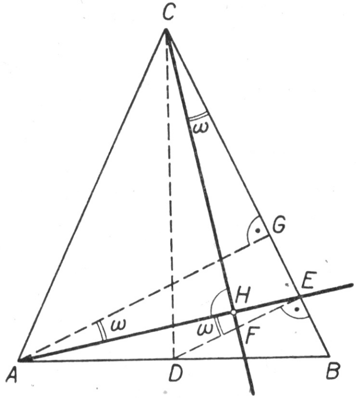
Případy II, III, IV, VI, VII a X nemohou v trojúhelníku nastat; sečteme-li totiž velikosti úhlů v každém z těchto případů, dostaneme součet různý od 180°.

V případě I, tj. u rovnostranného trojúhelníka, leží podle (3) všechny body O_1, O_2, O_3 na kružnici k.

V případě V, je-li např. $\alpha = 60°$, $\beta > 60°$, $\gamma < 60°$, leží podle (3), (4) a (5) bod O_1 na kružnici k, bod O_2 leží uvnitř kružnice k a bod O_3 leží vně kružnice k (obr. 48).

Obdobně popíšeme situaci i v případě VIII a IX. Obecně lze o případech V, VIII a IX říci, že u nerovnostranného trojúhelníka platí: Ten z bodů O_1, O_2, O_3, který odpovídá úhlu většímu než 60°, leží uvnitř kružnice k, který odpovídá úhlu 60°, leží na kružnici k a který odpovídá úhlu menšímu než 60°, leží vně kružnice k.

6. Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Zo stredu D úsečky AB je spustená kolmica na priamku BC. Jej päta je označená E, stred úsečky DE je označený F. Dokážte, že priamky AE, CF sú navzájom kolmé.



Obr. 49.

Riešenie (obr. 49). Označme G pätu kolmice spustenej z vrcholu A na priamku BC. Podľa vety *uu* je

$$\triangle ABG \sim \triangle CDE\,. \tag{1}$$

Je totiž

$$\sphericalangle ABG = 90° - \sphericalangle GAB = 90° - \sphericalangle EDB = \sphericalangle CDE\,.$$

Z (1) vyplýva

$$AG : GB = CE : ED\,,$$

t. j.

$$AG : \frac{1}{2}\,GB = CE : \frac{1}{2}\,ED,$$

čiže

$$AG : GE = CE : EF\,. \tag{2}$$

Podľa vety *sus* o podobnosti trojuholníkov je vzhľadom na vzťah (2)

$$\triangle AGE \sim \triangle CEF\,,$$

a teda platí

$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle ECF = \omega\,.$$

Pretože $AG \parallel DE$, je

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle ECF = \omega\,.$$

Označme H priesečník priamok AE, CF. V trojuholníku CHE potom platí

$$\sphericalangle HEC = 90° - \omega\,.$$

Je teda $\sphericalangle CHE = 90°$ čiže $AE \perp CF$, čo sme mali dokázať.

4. *KATEGORIE D*

1. Najděte všechna čísla x, která splňují rovnici

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}. \qquad (1)$$

Proveďte zkoušku a diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům a, b, c.

Řešení. Aby rovnice (1) byla řešitelná, je nutné, aby bylo

$$a \neq 0, \qquad a + b \neq 0\,. \qquad (2)$$

Znásobme obě strany rovnice (1) výrazem $a(a+b)^3$; vyjde

$$3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2 + (2a+b)(a+b)b^2x = \\ = 3ac(a+b)^3x + bx(a+b)^3\,.$$

Další úpravou

$$3a^4bc + 6a^3b^2c + 3a^2b^3c + a^3b^2 = \\ = xa(a+b)(3a^2c + 6abc + 3b^2c + ab)$$

neboli

$$a^2b\,.\,V = ax(a+b)\,.\,V\,, \qquad (3)$$

kde

$$V = 3a^2c + 6abc + 3b^2c + ab = 3c(a+b)^2 + ab\,. \qquad (4)$$

Nyní je třeba rozlišit dva případy:

1. Je-li $V \neq 0$, dělíme obě dvě strany rovnice (3) součinem $a(a+b)\,.\,V$ a vyjde

$$x = \frac{ab}{a+b}\,. \qquad (5)$$

Zkouška:

$$\mathbf{L} = \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)ab^3}{a(a+b)^3} =$$

$$= \frac{1}{(a+b)^3}\,[3abc(a+b)^2 + a^2b^2 + (2a+b)b^3] =$$

$$= \frac{1}{(a+b)^3}\,[3abc(a+b)^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4] =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^3}\,(3abc + b^2)\,.$$

$$\mathbf{P} = \frac{3ac+b}{a} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{3ac+b}{a+b} \cdot b\,,$$

tj.

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\,.$$

2. Je-li $V = 0$, je

$$c = \frac{-ab}{3(a+b)^2}\,.$$

Pak rovnice (1) zní

$$-\frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = -\frac{abx}{(a+b)^2} + \frac{bx}{a}$$

neboli

$$\frac{bx}{a(a+b)^2}\,[2ab + b^2 + a^2 - a^2 - b^2 - 2ab] = 0\,.$$

Protože výraz v hranaté závorce je nulový, jsou kořeny rovnice (1) všechna (reálná) čísla.

2. Určite všetky dvojciferné čísla x tej vlastnosti, že každé z čísiel $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, $8x$, $9x$ má ten istý ciferný súčet ako číslo x.

Riešenie. Predpokladajme, že číslo m vyhovuje podmienkam úlohy. Potom číslo m má rovnaký ciferný súčet ako číslo $9m$. Pretože číslo $9m$ je zrejme deliteľné deviatimi, je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Teda aj číslo m je deliteľné deviatimi. Preto hľadané dvojciferné čísla x musia byť medzi dvojcifernými násobkami čísla 9, tj. medzi číslami

$$18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 \text{ a } 99. \qquad (1)$$

Teraz postupne u každého z čísel (1) overíme podmienky úlohy.

Uvažujme o čísle 18. Potom všetky čísla $2 . 18 = 36$, $3 . 18 = 54$, $4 . 18 = 72, \ldots, 9 . 18 = 162$ majú ciferný súčet rovný deviatim, t. j. rovnaký ako číslo 18. Číslo 18 je tedy jedným z riešení úlohy.

Ak vyšetrujeme násobky čísla 27, zistíme, že číslo $7 . 27 = 189$ má ciferný súčet 18. Preto číslo 27 nie je riešením úlohy.

Podobne vyskúšame aj ostatné čísla z (1) a zistíme, že hľadané čísla x sú len čísla

$$18, 45, 90 \text{ a } 99 .$$

3. Čtyřciferné číslo N je dělitelné osmnácti, má vesměs různé číslice a dá se napsat jako součet tří čísel: první je dvojciferné, druhé je jeho desetinásobek a třetí je jeho stonásobek. Najděte všechna čísla N těchto vlastností.

Řešení. Číslo N se dá vytvořit jako součet:

$$\begin{array}{r} ab \\ ab \\ ab \\ \hline N \end{array} \qquad (1)$$

Protože je N dělitelné osmnácti, je sudé a je dělitelné devíti. Je tedy buď $b = 0$ nebo 2 nebo 4 nebo 6 nebo 8. Číslo $3(a + b)$ je dělitelné devíti jako ciferný součet čísla N; je tedy $a + b$ dělitelné třemi. Protože $a + b \neq 0$, jsou tyto možnosti:

$a + b = 3$ nebo 6 nebo 9 nebo 12 nebo 15 nebo 18. Kdyby však bylo $a + b < 10$, pak by při sčítání (viz (1)) vyšly prostřední dvě číslice stejné; je tedy

$$a + b = 12 \text{ nebo } 15 \text{ nebo } 18\,.$$

Nemůže však být $a + b = 18$, neboť pak by nemohlo být b sudé (bylo by $a = b = 9$). Zbývají tedy jen dvě možnosti $a + b = 12$ nebo $a + b = 15$, b sudé, tj.

a	8	6	4	9	7
b	4	6	8	6	8
$a + b$	12	12	12	15	15

Přezkoušíme jednotlivé případy:

$$\begin{array}{r} 84 \\ 84 \\ 84 \\ \hline 9324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66 \\ 66 \\ 66 \\ \hline 7326 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ 48 \\ 48 \\ \hline 5328 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78 \\ 78 \\ 78 \\ \hline 8658 \end{array}$$

Případ

$$\begin{array}{r} 96 \\ 96 \\ 96 \\ \hline 10\,656 \end{array}$$

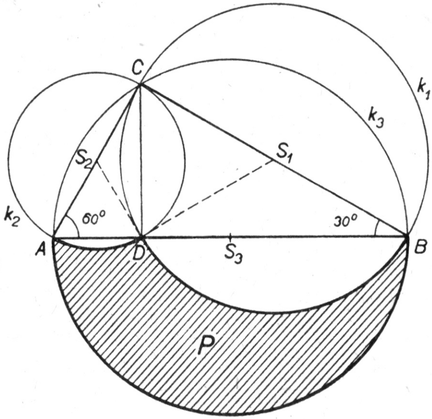
nemůže nastat, neboť vede k číslu N pěticifernému.

Případ

$$\begin{array}{r} 78 \\ 78 \\ 78 \\ \hline \end{array}$$

8658 rovněž nemůže nastat, neboť číslo N má pak dvě číslice stejné.

Úloha má tedy tři řešení: 9 324, 7 326 a 5 328.



Obr. 50.

4. Je dán trojúhelník ABC, jehož úhly mají velikosti $\sphericalangle BAC = 60°$, $\sphericalangle ABC = 30°$ a strana AC má velikost 1. Vypočítejte obsah vyšrafované plochy, která je omezena (obr. 50) kružnicemi sestrojenými nad průměry AB, BC, CA (na dvě desetinná místa).

Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý, $\sphericalangle ACB = 90°$. Označme D patu výšky na přeponu. Podle obrácení Thaletovy věty procházejí kružnice k_1, k_2 sestrojené nad odvěsnami BC, CA bodem D. Pro délky stran trojúhelníku ABC platí

$$AC = 1,\ AB = 2,\ BC = \sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Označme P obsah vyšrafované plochy, P_1, P_2 obsahy úsečí omezených tětivami BD, AD a kružnicemi k_1, k_2; středy těchto kružnic označme S_1, S_2. Pak platí vzhledem k (1)

$$P = \frac{1}{2}\pi - P_1 - P_2\,. \tag{2}$$

Obsahy P_1, P_2 vypočteme pomocí středových úhlů

$$\sphericalangle BS_1D = 120°,\ \sphericalangle AS_2D = 60°\,.$$

Je tedy vzhledem k (1)

$$P_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2; \tag{3}$$

$\left(\text{trojúhelník } BDS_1 \text{ má týž obsah jako rovnostranný trojúhelník o straně délky } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Rovnost (3) po úpravě zní

$$P_1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{3\sqrt{3}}{16}\,. \tag{4}$$

Obdobně dostaneme

$$P_2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

po úpravě

$$P_2 = \frac{1}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{16}\,. \tag{5}$$

Dosadíme-li z (4) a (5) do (2), vyjde

$$P = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Numericky

$$P \doteq (3{,}14 \,.\, 5) : 24 + (1{,}73 : 4) \doteq 0{,}65 + 0{,}43\,,$$

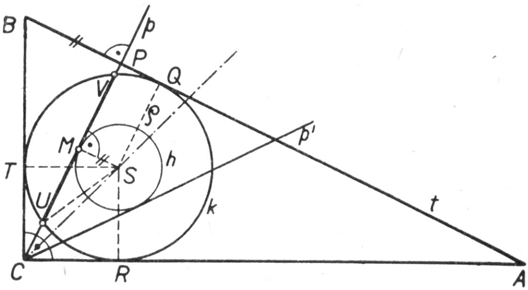
tedy

$$P \doteq 1{,}08\,.$$

5. Je daný polomer ϱ kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku a dĺžka $d = \frac{7}{4}\varrho$ úsečky, ktorú vytína vpísaná kružnica na jeho výške v spustenej na preponu:

a) Vyjadrite dĺžku výšky v pomocou polomeru ϱ.

b) Zostrojte pravouhlý trojuholník pre $\varrho = 2$ cm.



Obr. 51.

Riešenie. a) Do pravého uhla s vrcholom C (obr. 51) vpíšeme kružnicu $k \equiv (S; \varrho)$. Výška na preponu hľadaného trojuholníka ABC leží v takej priesečnici p kružnice k, ktorá prechádza bodom C a na ktorej kružnica k vytína úsečku UV dĺžky $d = \frac{7}{4}\varrho$. Označme M stred tetivy UV. Potom MS je vzdialenosť stredu S od priesečnice p. Vzdialenosť MS vieme určiť konštrukciou i výpočtom z pravouhlého trojuholníka MSU, v ktorom je

$$UM = \frac{1}{2}d = \frac{7}{8}\varrho, \qquad US = \varrho.$$

Vyjde

$$MS = \sqrt{\varrho^2 - \frac{49}{64}\varrho^2} = \frac{1}{8}\varrho \cdot \sqrt{15}. \tag{1}$$

Priesečnica p sa teda dotýka kružnice $h \equiv (S; MS)$.

Zrejme je (pozri obr. 51)

$$v = CP = CM + MP.$$

Z obdĺžnika $SMPQ$ vyplýva $MP = SQ = \varrho$, t. j.

$$v = CM + \varrho. \tag{2}$$

Zostáva tedy vypočítať dĺžku CM z pravouhlého trojuholníka CMS. Podľa Pythagorovej vety je

$$CM^2 = CS^2 - SM^2.$$

Zo štvorca $CRST$ vyplýva $CS = \varrho\sqrt{2}$. Vzhľadom na (1) je teda

$$CM^2 = 2\varrho^2 - \frac{15}{64}\varrho^2 = \frac{113}{64}\varrho^2,$$

t. j.

$$CM = \frac{\sqrt{113}}{8}\varrho. \tag{3}$$

Ak spojíme (2) a (3), dostaneme

$$v = \frac{8 + \sqrt{113}}{8}\,\varrho \doteq \frac{8 + 10{,}63}{8}\,\varrho \doteq 2{,}33\varrho\,.$$

b) Konštrukcia. Zostrojíme pravý uhol s vrcholom C a vpíšeme do neho kružnicu $k \equiv (S;\ 2\ \text{cm})$. Okolo bodu S opíšeme kružnicu h s polomerom $SM = \frac{1}{8}\varrho \cdot \sqrt{15} \doteq 0{,}97$ cm. Bodom C vedieme dotýčnicu p ku kružnici h. Ku kružnici k zostrojíme dotýčnicu $t \perp p$ tak, aby kružnica k ležala v polrovine tS. Priesečníky ramien pravého uhla s priamkou t sú vrcholy A, B.

Dôkaz. Zostrojený trojuholník ABC je zrejme pravouhlý a kružnica k je jeho vpísanou kružnicou. Priamka p je výškou, pretože $p \perp AB$. Pretože p je dotýčnicou kružnice $h \equiv \equiv \left(S;\ \frac{1}{8}\varrho\sqrt{15}\right)$, dostaneme (pozri obr. 51)

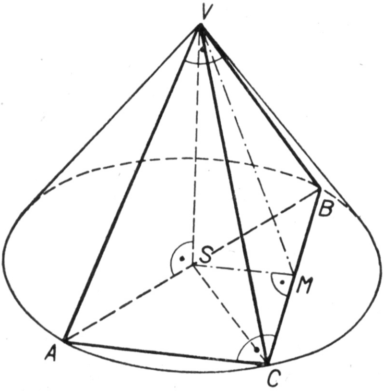
$$UM^2 = US^2 - SM^2 = \varrho^2 - \left(\frac{1}{8}\varrho\sqrt{15}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\varrho\right)^2,$$

takže skutočne je dĺžka úsečky, ktorú vytína vpísaná kružnica na výške spustenej na preponu $\frac{7}{4}\varrho$. Zámenou označenia vrcholov A, B dostaneme dve rôzne riešenia. Pretože $CS = \varrho\sqrt{2} > > \varrho > MS$, možno bodom C viesť dve dotýčnice p a p' ku kružnici h. Tieto dotýčnice sú súmerne združené podľa priamky CS a vedú ku zhodným riešeniam úlohy.

6. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d. Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC. Vyjádřete pomocí proměnné d

a) objem jehlanu $ABCV$;

b) povrch jehlanu $ABCV$.



Obr. 52.

Řešení. Bod V je vrcholem kužele (obr. 52); platí

$$AV = BV = \frac{d}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Označíme S střed podstavy kužele; jeho výška je pak

$$SV = \frac{d}{2}. \tag{2}$$

Protože trojúhelník VAC je rovnostranný, je

$$AC = \frac{d}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Trojúhelník ABC je podle Thaletovy věty pravoúhlý s přeponou AB; podle Pythagorovy věty tedy platí

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Podle (3) a (4) je tedy

$$\triangle\, VAB \cong \triangle\, CAB;$$

proto je i trojúhelník VBC rovnostranný.

a) Pro objem jehlanu $ABCV$ s podstavou ABC a výškou SV dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3}{24}.$$

b) Povrch jehlanu vyjde

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\,d^2.$$