15. ročník matematické olympiády

III. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967. pp. 21–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404551

III. Přípravné úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Z jistého množství rozváleného těsta se vykrájí p koláčů, po novém rozválení stačí průměrně těsto z okrajků k koláčů na vykrojení jednoho dalšího koláče.

Odvoďte vzorec pro celkový počet koláčů, které lze z tohoto těsta vyrobit za předpokladu, že $p < k^k$.

(Poznámka. Využijte rozkladu čísla p na mnohočlen v mocninách čísla k:

$$p = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_1 k + a_0.)$$

Řešení. Číslo p rozložíme na mnohočlen v mocninách čísla k. Budiž

$$p = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_1 k + a_0 \,, \qquad (1)$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla menší než k, $a_n \neq 0$.

Z počtu k^n koláčů je tak velké množství okrajků, že z nich lze po novém rozválení těsta průměrně vyrobit dalších k^{n-1} koláčů. Z těchto koláčů je opět k^{n-1} okrajků, z nichž lze po dalším rozválení těsta vyrobit k^{n-2} koláčů, atd. Celkem lze z těsta na $a_n k^n$ koláčů vyrobit

$$a_n(k^n + k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k + 1) = a_n \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \qquad (2)$$

koláčů. Nakonec ještě zbude $a_n < k$ okrajků, z nichž už nelze vyrobit žádný celý koláč. Obdobně z těsta na $a_{n-1} k^{n-1}$ koláčů lze vyrobit

$$a_{n-1} \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{3}$$

koláčů a zbude $a_{n-1} < k$ okrajků, atd. Celkem se z daného těsta vyrobí podle (2), (3) a dalších podobných výrazů

$$N_1 = a_n \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} + a_{n-1} \frac{k^n - 1}{k - 1} + \ldots +$$

$$+ a_1 \frac{k^2 - 1}{k - 1} + a_0 \frac{k - 1}{k - 1} \tag{4}$$

koláčů a zbude

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \tag{5}$$

okrajků. Z okrajků (5) se vyrobí ještě N_2 koláčů, kde N_2 je největší celé číslo splňující vztah

$$N_2 \leqq \frac{1}{k} (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \,. \tag{6}$$

Počet okrajků z těchto N_2 koláčů je menší nebo roven číslu

$$Z = \frac{1}{k} \,.\, (n + 1) \,.\, a \,, \tag{7}$$

kde $(n + 1)$ je počet koeficientů polynomu (1) a číslo a je maximum z těchto koeficientů a_i (pro i $= 0, 1, 2, \ldots, n$). Protože podle podmínky úlohy je $p < k^k$, je $n < k$ a dále

$$n + 1 \leqq k \,. \tag{8}$$

Pro každý z koeficientů a_i platí $a_i < k$ a tedy i

$$a < k \,. \tag{9}$$

Dosadíme-li z (8) a (9) do pravé strany vztahu (7), pak platí

$$Z < \frac{1}{k} \,.\, k \,.\, k = k\,,$$

což značí, že ze $Z < k$ okrajků už nelze vyrobit žádný další koláč.

Upravíme vzorec pro N_1 s použitím (1):

$$N_1 = \frac{1}{k-1}\,\{k(a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0) - (a_n +$$

$$+ a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)\} =$$

$$= \frac{k}{k-1} \,.\, p - \frac{1}{k-1}(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0). \qquad (10)$$

Celkový počet N vyrobených koláčů je tedy nejbližší nižší celé číslo k součtu pravých stran vztahů (6) a (10); označíme je hranatými závorkami $[a]$. Platí tedy po úpravě

$$N = N_1 + N_2 =$$

$$= \left[\frac{k}{k-1}\,p - \frac{1}{k(k-1)}\,(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)\right],$$

což je hledaný vzorec.

Např. pro $p = 1000$, $k = 7$, kde $1000 < 7^7$, dostaneme

$$N = \left[\frac{7000}{6} - \frac{16}{42}\right],$$

neboť $1000 = 2 \,.\, 7^3 + 6 \,.\, 7^2 + 2 \,.\, 7 + 6$. Je tedy

$$N = \left[1166 + \frac{2}{3} - \frac{8}{21}\right] = \left[1166 + \frac{2}{7}\right] = 1166\,.$$

Jiné řešení. V celém řešení značí latinská písmena celá nezáporná čísla.

Po vykrájení p koláčů zůstane také p okrajků. Nechť je nyní

$$p = c_1k + d_1, \quad \text{kde } 0 \leqq d_1 < k, \quad c_1 \neq 0, \qquad (1)$$

$$c_1 + d_1 = c_2k + d_2, \quad \text{kde } 0 \leqq d_2 < k, \quad c_2 \neq 0, \qquad (2)$$

$$c_2 + d_2 = c_3k + d_3, \quad \text{kde } 0 \leqq d_3 < k, \quad c_3 \neq 0, \qquad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n-1} + d_{n-1} = c_nk + d_n, \quad \text{kde } 0 \leqq d_n < k, \quad c_n \neq 0, \qquad (n)$$

$$c_n + d_n = d_{n+1}, \quad \text{kde } 0 < d_{n+1} < k. \qquad (n+1)$$

Z rovnosti (1) je vidět, že po prvním rozválení těsta využijeme z původních p okrajků pouze c_1k okrajků ke zhotovení nových c_1 koláčů. Z nich zůstane opět c_1 nových okrajků. Zbytek, tj. d_1 starých okrajků, nelze zatím využít.

Z rovnosti (2) je vidět, že po druhém rozválení těsta z $c_1 + d_1$ okrajků dostaneme nových c_2 koláčů a zůstane $c_2 + d_2$ okrajků atd. Tento postup skončí, jakmile zbude méně než k okrajků. Všimněme si ještě, že $d_{n+1} \neq 0$. Jinak by totiž z $(n + 1)$ plynulo, že $c_n = d_n = 0$, což je spor.

Počet všech koláčů je dán součtem

$$s = p + z\,,$$

kde

$$z = c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Číslo z dostaneme sečtením levých a pravých stran rovností (1) až $(n + 1)$. Po snadné úpravě dostaneme

$$p = (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)(k - 1) + d_{n+1}\,,$$

tj.

$$p = z(k - 1) + d_{n+1}\,.$$

Protože

$$p - 1 = z(k - 1) + q', \text{ kde pro } q' = d_{n+1} - 1 \text{ je}$$

$0 \leqq q' < k - 1$, je z částečný podíl a q' zbytek při dělení čísla $p - 1$ číslem $k - 1$. Označíme-li jako $C(x)$ největší celé číslo nepřevyšující x, je celkový počet koláčů roven

$$p + C\left(\frac{p-1}{k-1}\right).$$

Tento výsledek je nezávislý na podmínce $p < k^k$.

2. Funkcia premennej x je pre $x > 0$ daná predpisom

$$y = \sqrt{\frac{3x - 4\,C(x)}{2x - C(x)}}, \tag{1}$$

kde $C(x)$ znamená najväčšie celé číslo neprevyšujúce x. Je teda $C(x)$ celé číslo, pre ktoré platí

$$C(x) \leqq x < C(x) + 1\,. \tag{2}$$

Vyšetrite obor definície tejto funkcie a načrtnite jej graf. (Poznámka. Vyšetrujte danú funkciu postupne v intervaloch $\langle 0; 1\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, atď.)

Riešenie. Vyšetrujme najskôr obor definície funkcie (1). Odmocnina na pravej strane je definovaná len pre tie x, pre ktoré platí

$$\frac{3x - 4\,C(x)}{2x - C(x)} \geqq 0\,. \tag{3}$$

Pretože z nerovnosti (2) vyplýva $x - C(x) \geqq 0$, je pre $x > 0$ menovateľ zlomku $2x - C(x)$ vždy kladný. Nerovnosť (3) platí preto len pre tie x, pre ktoré súčasne platí

$$3x - 4\,C(x) \geqq 0. \tag{4}$$

Pre ľubovoľné prirodzené číslo x platí

$$C(x) = x\,,$$

takže po dosadení do ľavej strany nerovnosti (4) dostaneme

$$3x - 4x < 0 \,.$$

Funkcia (1) nie je preto definovaná pre žiadne prirodzené číslo x.

Z nerovnosti (4) vyplýva

$$3x \geqq 3\,C(x) + C(x)\,,$$

čiže

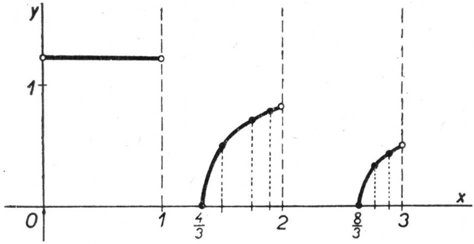
$$x \geqq C(x) + \frac{1}{3}\,C(x)\,. \tag{5}$$

Pre $x > 3$ je $\frac{1}{3}\,C(x) \geqq \frac{1}{3}\,.\,3 = 1$, takže po dosadení do (5) dostaneme

$$x \geqq C(x) + 1\,,$$

čo je v spore s nerovnosťou (2). Funkcia (1) nie je preto definovaná pre žiadne $x > 3$.

Zostáva teda vyšetriť funkciu (1) v otvorených intervaloch (0; 1) (1; 2) a (2; 3).



Obr. 1.

a) V intervale $(0;1)$ je $C(x) = 0$, takže predpis (1) má tvar

$$y = \sqrt{\frac{3x}{2x}}, \qquad (1')$$

t. j.

$$y = \sqrt{\frac{3}{2}} \doteq 1{,}22 .$$

Graf funkcie je znázornený na obr. 1.

b) V intervale $(1; 2)$ je $C(x) = 1$, takže predpis (1) bude mať tvar

$$y = \sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}} . \qquad (1'')$$

Pretože pre čitateľa zlomku na pravej strane vzťahu $(1'')$ musí platiť

$$3x - 4 \geqq 0 ,$$

je funkcia (1) definovaná v intervale $(1; 2)$ len pre $x \geqq \frac{4}{3}$.

Graf funkcie na obrázku vznikol spojením bodov, ktorých súradnice sú uvedené v tabuľke

x	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1,9
y	0	0,5	0,71	0,78

c) V intervale $(2; 3)$ je $C(x) = 2$, takže predpis (1) bude mať tvar

$$y = \sqrt{\frac{3x-8}{2x-2}} . \qquad (1''')$$

Pretože pre čitateľa zlomku na pravej strane vzťahu (1''') musí platiť

$$3x - 8 \geqq 0 ,$$

je funkcia (1) definovaná v intervale (2; 3) len pre $x \geqq \frac{8}{3}$.

Graf funkcie na obrázku vznikol spojením bodov, ktorých súradnice sú v tabuľke:

x	$\frac{8}{3}$	2,8	2,9
y	0	$\frac{1}{3}$	0,43

Záver: Funkcia (1) je definovaná v intervaloch $(0; 1)$, $\langle \frac{4}{3}; 2)$ a $\langle \frac{8}{3}; 3)$. V týchto intervaloch nadobúda predpis (1) v uvedenom poradí tvar (1'), (1''), resp. (1'''). Graf funkcie je na obrázku 1.

3. Je daná kvadratická rovnica

$$az^2 + (b - \bar{b})z - \bar{a} = 0 , \qquad (1)$$

kde a, b sú komplexné čísla, $a \neq 0$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ čísla komplexne združené k číslam a, b. Koreňmi tejto rovnice sú dve komplexné jednotky práve vtedy, keď je

$$(b - \bar{b})^2 + 4\, a\bar{a} \geqq 0 . \qquad (2)$$

Dokážte!

(Poznámka. Pre rovnice typu (1) s komplexnými koeficientami platia tie isté vety o vlastnostiach koreňov ako pre rovnicu s reálnymi koeficientami. Číslo z je komplexnou jednotkou práve vtedy, ak platí

$$|z|^2 = z \,.\, \bar{z} = 1 .$$

V dôkaze použite nerovnosť

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \,.)$$

Riešenie. a) Predovšetkým je zrejmé, že ak jeden koreň rovnice (1) je komplexná jednotka, potom aj druhým koreňom bude komplexná jednotka, pretože súčin oboch koreňov je číslo

$-\dfrac{\bar{a}}{a}$, čo je komplexná jednotka.

b) Nech koreňmi rovnice (1) sú komplexné jednotky z_1, z_2. Potom platí

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2| = 2. \tag{3}$$

Pre súčet koreňov rovnice (1) platí

$$z_1 + z_2 = \frac{\bar{b} - b}{a}, \tag{4}$$

Ak dosadíme zo vzťahu (4) do (3), dostaneme

$$\left| \frac{\bar{b} - b}{a} \right| \leqq 2 \,.$$

Teda

$$\sqrt{\frac{(\bar{b} - b)\,\overline{(\bar{b} - b)}}{a \,.\, \bar{a}}} \leqq 2$$

čiže

$$\sqrt{-\frac{(b - \bar{b})^2}{a \,.\, \bar{a}}} \leqq 2 \,.$$

Po umocnení nezáporných výrazov na oboch stranách poslednej nerovnosti a jednoduchej úprave dostaneme nerovnosť (2).

c) Nech platí vzťah (2). Označme

$$d = \sqrt{(b - \bar{b})^2 + 4a\bar{a}} \,.$$

Podľa vzorca pre riešenie kvadratickej rovnice je potom jeden z koreňov rovnice (1) daný vzťahom

$$z_1 = \frac{\bar{b} - b + d}{2a} . \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) dostaneme

$$\bar{z}_1 = \frac{b - \bar{b} + d}{2\bar{a}} . \tag{6}$$

Zo vzťahov (5), (6) ich vynásobením dostaneme

$$z_1 \,.\, \bar{z}_1 = \frac{d^2 - (b - \bar{b})^2}{4a \,.\, \bar{a}} = \frac{(b - \bar{b})^2 + 4a\bar{a} - (b - \bar{b})^2}{4\,a \,.\, \bar{a}} = 1 \,.$$

To znamená, že z_1 je komplexná jednotka a podľa odstavca a) je potom tiež druhý koreň z_2 rovnice (1) komplexná jednotka.

Tým je dôkaz úplne prevedený.

4. Je dán trojúhelník ABC a záporné číslo $\varkappa$. Vyšetřte množinu všech bodů X v rovině ABC, které maji tyto vlastnosti:

a) každý z bodů X leží uvnitř trojúhelníka ABC;

b) stejnolehlost se středem X a koeficientem $\varkappa$ převádí vrcholy A, B v body ležící uvnitř trojúhelníka ABC a vrchol C v bod ležící vně trojúhelníka ABC.

(Poznámka. Experimentujte pro různá $\varkappa$, např. pro $\varkappa = -\frac{2}{3}$. Vyšetřování lze zjednodušit např. tím, že střed X stejnolehlosti s koeficientem $\varkappa$, která převádí vrchol A v bod A', lze sestrojit jako obraz bodu A' v stejnolehlosti $\left[A, \frac{1}{1 - \varkappa}\right]$; dokažte tuto větu.)

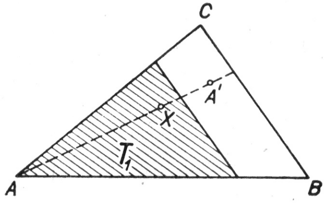
Řešení. Označme A' obraz vrcholu A v stejnolehlosti $[X, \varkappa]$. Protože X leží mezi A, A' (neboť je $\varkappa < 0$), platí

$$\frac{AX}{AA'} = \frac{AX}{AX + XA'} = \frac{1}{1 + \dfrac{XA'}{AX}}.$$

Avšak $\varkappa = -\dfrac{XA'}{XA}$; proto stejnolehlost se středem A, která převádí A' v X má koeficient

$$\frac{AX}{AA'} = \frac{1}{1 - \varkappa}.$$

Stejnolehlost $\left[A, \dfrac{1}{1 - \varkappa}\right]$ převádí *vnitřek* trojúhelníka ABC ve *vnitřek* jistého trojúhelníka $\mathbf{T}_1$ (obr. 2). Obdobně stejnolehlost $\left[B, \dfrac{1}{1 - \varkappa}\right]$ převádí *vnitřek* trojúhelníka ABC ve *vnitřek* jistého trojúhelníka $\mathbf{T}_2$. Obdobně stejnolehlost $\left[C, \dfrac{1}{1 - \varkappa}\right]$ převádí *vnějšek* trojúhelníka ABC ve *vnějšek* jistého trojúhelníka $\mathbf{T}_3$. Řešení úlohy dává společná část (průnik) vnitřků trojúhelníků $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ a vnějšku trojúhelníku $\mathbf{T}_3$.



Obr. 2.

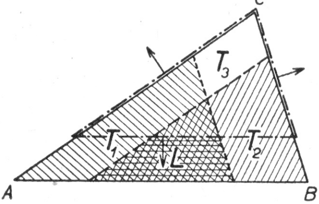
Rozlišíme tři případy:

a) $\varkappa > -\frac{1}{2}$;

b) $-1 < \varkappa \leqq -\frac{1}{2}$;

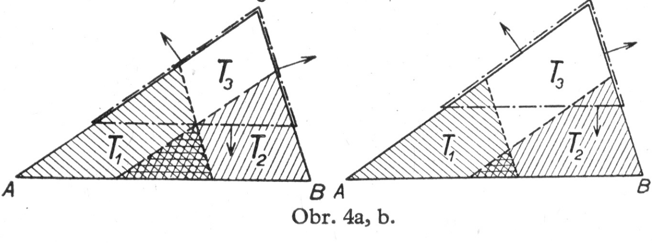
c) $\varkappa \leqq -1$.

a) Na obr. 3 je zvoleno $\varkappa = -\frac{1}{3}$. Body X žádaných vlastností vyplní v tomto a v obdobných případech vnitřek vyšrafovaného lichoběžníka **L**.



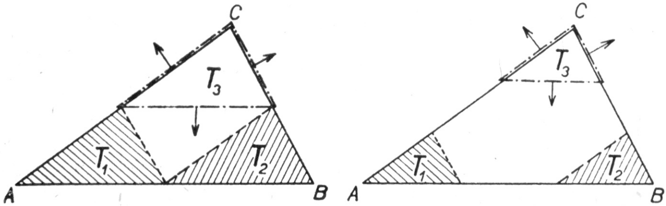
Obr. 3.

b) Na obr. 4a je zakreslena situace pro $\varkappa = -\frac{1}{2}$ a na obr. 4b situace pro $\varkappa = -\frac{5}{7}$. Středy X tu vyplní vždy vnitřek vyšrafovaného trojúhelníka.



Obr. 4a, b.

c) Na obr. 5a je zakreslena situace pro $\varkappa = -1$ a na obr. 5b situace pro $\varkappa = -2$. Množina všech bodů X je v obou případech prázdná.



Obr. 5a, b.

Výsledek je shrnut v tabulce:

$\varkappa$	$0 > \varkappa > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \geqq \varkappa > -1$	$-1 \geqq \varkappa$
Množina všech bodů X	Vnitřek lichoběžníka	Vnitřek trojúhelníka	Množina prázdná

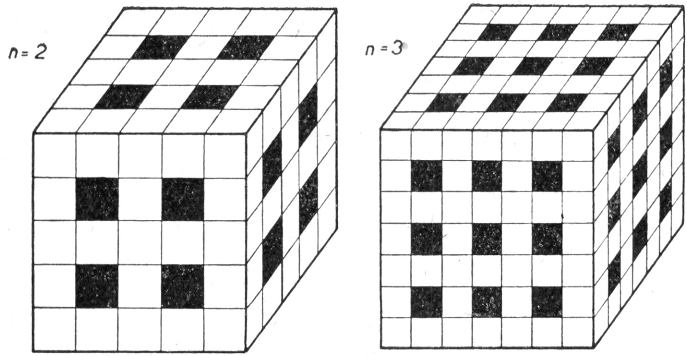
5. Je dána krychle o hraně délky 1. Každá její stěna je rozdělena v $(2n + 1)^2$ shodných čtverců podle obr. 6 (kde $n = 2$ a $n = 3$). Vnitřními n^2 čtverci každé stěny (na obrázku černými) jsou vedeny celým tělesem kolmo ke stěně „kanály" ve tvaru pravidelných čtyřbokých hranolů.

a) Vypočtěte objem V_n a povrch S_n zbylého tělesa.

b) Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $V_n \leqq \frac{1}{2}$.

c) Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $S_n > 100$.

(P o z n á m k a. V případě b) vyšetřujte výraz $2 \,.\, V_n$.)



Obr. 6.

Řešení. a) Každý „kanál" obsahuje $2n + 1$ krychliček; počet „kanálů" je $3 \,.\, n^2$. Sečteme-li nezávisle objemy všech $3n^2$ „kanálů", počítáme objemy jejich průniků třikrát; počet těchto průniků je $n \,.\, n^2$ (každý „kanál" obsahuje právě n průniků). Objem všech „kanálů" je tedy

$$V'_n = \left[3n^2 \,.\, (2n + 1) - 2n \,.\, n^2\right] . \frac{1}{(2n + 1)^3} \, ; \qquad (1)$$

$\dfrac{1}{(2n + 1)^3}$ je totiž objem jedné malé krychličky z průniku „kanálů".

Z (1) dostaneme

$$V_n = 1 - V'_n = 1 - \frac{4n^3 + 3n^2}{(2n + 1)^3}$$

a po úpravě

$$V_n = \frac{4n^3 + 9n^2 + 6n + 1}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} \, . \qquad (2)$$

Povrch S_n zbylého tělesa se skládá z šesti „děravých" stěn a ze stěn „kanálů". Počet čtverečků děravých stěn je

$$6[(2n + 1)^2 - n^2] = 6(n + 1)(3n + 1) . \qquad (3)$$

Počet čtverečků ve stěnách „kanálu" je $4(n + 1)$; počet čtverečků skládajících stěny všech kanálů je tedy

$$12n^2 (n + 1) . \qquad (4)$$

Spojením (3), (4) dostaneme

$$S_n = \left[6(n + 1)(3n + 1) + 12n^2 (n + 1)\right] . \frac{1}{(2n + 1)^2} ; \qquad (5)$$

$\frac{1}{(2n + 1)^2}$ je totiž obsah jednoho čtverečku. Vzorec (5) upravíme:

$$S_n = \frac{6(n + 1)}{(2n + 1)^2}\left[3n + 1 + 2n^2\right] = \frac{6(n + 1)^2(2n + 1)}{(2n + 1)^2} =$$

$$= \frac{6(n + 1)^2}{2n + 1} . \qquad (6)$$

b) Uvažujme dvojnásobek čísla V_n ze vzorce (2):

$$2V_n = \frac{8n^3 + 18n^2 + 12n + 2}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} =$$

$$= 1 + \frac{6n^2 + 6n + 1}{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1} > 1$$

neboli pro všechna n platí

$$V_n > \frac{1}{2} .$$

Žádné n, pro které by platilo, že $V_n \leqq \frac{1}{2}$, tedy neexistuje.

c) Máme řešit nerovnost (viz (6))

$$\frac{6(n+1)^2}{2n+1} > 100$$

neboli po úpravě

$$3n^2 - 94n - 47 > 0\,. \tag{7}$$

Rovnice $3n^2 - 94n - 47 = 0$ má dva reálné kořeny n_1, n_2, pro něž platí

$$-1 < n_1 < 0\,, \qquad 31 < n_2 < 32\,.$$

Zvolíme-li libovolné přirozené $n > n_2$, je $S_n > 100$. Pro $n = 32$ je počet „kanálů", který splňuje požadavek úlohy c), minimální, tj. $3 \,.\, 32^2 = 3072$.

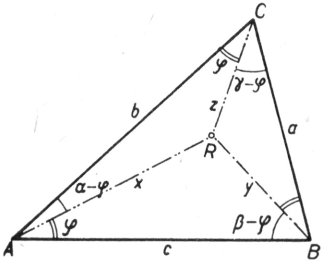
6. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod R té vlastnosti, že $\sphericalangle RAB = \sphericalangle RBC = \sphericalangle RCA = \varphi$.

Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka ABC, platí

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}\,;$$

dokažte.

(Poznámka. Obsah trojúhelníka ABC vyjádřete jako součet obsahů trojúhelníků ABR, BCR, CAR.)



Obr. 7.

Řešení (obr. 7). Označme $AR = x$, $BR = y$, $CR = z$, dále označme strany trojúhelníka ABC obvyklým způsobem a písmenem P jeho obsah. Podle sinové věty (pro trojúhelníky CAR, ABR a BCR) dostaneme

$$x = \frac{b}{\sin\alpha} \,.\, \sin\varphi\,, \quad y = \frac{c}{\sin\beta} \,.\, \sin\varphi\,, \quad z = \frac{a}{\sin\gamma} \,.\, \sin\varphi\,; \tag{1}$$

je totiž $\sphericalangle\, ARC = 180° - \alpha$, $\sphericalangle\, ARB = 180° - \beta$, $\sphericalangle\, BRC = 180° - \gamma$.

Pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle\, ABR + \triangle BCR + \triangle CAR = \triangle\, ABC$$

neboli

$$\frac{1}{2} cx \,.\, \sin\varphi + \frac{1}{2} ay \,.\, \sin\varphi + \frac{1}{2} bz \,.\, \sin\varphi = P\,. \tag{2}$$

Z (2) dostaneme úpravou

$$cx + ay + bz = \frac{2\,P}{\sin\varphi}\,. \tag{3}$$

Do (3) dosadíme z (1) a dělíme číslem $\sin\varphi$; vyjde

$$\frac{bc}{\sin\alpha} + \frac{ac}{\sin\beta} + \frac{ab}{\sin\gamma} = \frac{2P}{\sin^2\varphi}\,. \tag{4}$$

Použijeme-li vzorců pro obsah trojúhelníku

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma\,,$$

vyjde dokazovaná rovnost.

2. *KATEGORIE B*

1. Najděte všecka reálná čísla x, pro která platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1\,. \tag{1}$$

Řešení. a) Platí-li pro reálné číslo x vztah (1), je

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geqq \sqrt{1-x^2}\,, \tag{1a}$$

umocněním dostaneme

$$2 - 2\sqrt{1-x^2} \geqq 1 - x^2\,, \tag{1b}$$

tj.

$$1 + x^2 \geqq 2\sqrt{1-x^2}\,. \tag{1c}$$

Provedeme další umocnění; vyjde

$$1 + 2x^2 + x^4 \geqq 4 - 4x^2\,, \tag{1d}$$

tj.

$$x^4 + 6x^2 - 3 \geqq 0\,. \tag{2}$$

Trojčlen na levé straně (2) vyjádříme ve tvaru

$$(x^2+3)^2 - 12 \geqq 0\,,$$

tj.

$$(x^2 + 3 + \sqrt{12})(x^2 + 3 - \sqrt{12}) \geqq 0\,. \tag{3}$$

První činitel na levé straně (3) je vždy kladné číslo; proto musí být

$$x^2 + 3 - \sqrt{12} \geqq 0\,, \tag{3'}$$

tj.

$$|x| \geqq \sqrt{\sqrt{12} - 3} \doteq \sqrt{0{,}464} \doteq 0{,}68\,. \tag{4}$$

b) Zkouška. Z (4) plyne (3′), odtud (3), (2), (1d). Z (1d) plyne (1c) právě tehdy, když platí

$$|x| \leqq 1\,. \tag{5}$$

Nerovnost (1c) upravíme na tvar (1b) neboli

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2 \geqq (\sqrt{1-x^2})^2\,.$$

Z této nerovnosti plyne nerovnost (1a) právě tehdy, když je

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geqq 0\,,$$

neboli

$$\sqrt{1+x} \geqq \sqrt{1-x}\,,$$

neboli

$$1 + x \geqq 1 - x\,. \tag{6}$$

Nerovnost (6) platí právě tehdy, když je

$$x \geqq 0\,. \tag{7}$$

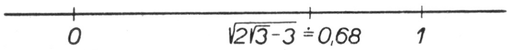
Z nerovnosti (1a) plyne (1) právě tehdy, pokud je

$$x \neq \pm 1\,. \tag{8}$$

Spojíme-li (4), (5), (7) a (8), dostaneme řešení

$$1 > x \geqq \sqrt{\sqrt{12} - 3}\,.$$

Znázornění na číselné ose je na obr. 8.



Obr. 8.

2. Dekadický zápis práve jedného z čísel

$$a_n = 7^{2n} + 2 \,.\, 7^n + 2, \qquad b_n = 7^{2n} - 2 \,.\, 7^n + 2\,,$$

kde n je prirodzené číslo, má na mieste jednotiek číslicu 5. Dokážte.

Riešenie. Ľahko sa presvedčíme, že mocniny 7^n pre $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ končia v uvedenom poradí číslicami 7, 9, 3, 1, pričom sa tieto číslice v postupnosti mocnín opakujú (podrobný dôkaz tohto pomocného tvrdenia možno podať matematickou indukciou).

Čísla a_n, b_n možno vyjadriť v tvare

$$a_n = (7^n + 1)^2 + 1\,, \qquad b_n = (7^n - 1)^2 + 1\,.$$

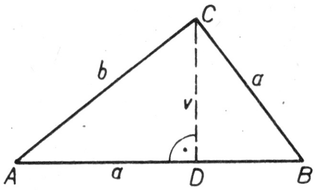
Čísla $7^n + 1$, resp. $7^n - 1$ končía teda postupne číslicami 8, 0, 4, 2, resp. 6, 8, 2, 0. Potom čísla $(7^n + 1)^2$, resp. $(7^n - 1)^2$ končia číslicami 4, 0, 6, 4, resp. 6, 4, 4, 0 a konečne čísla $(7^n + 1)^2 + 1$, resp. $(7^n - 1)^2 + 1$ končia číslicami 5, 1, 7, 5, resp. 7, 5, 5, 1.

Je teda vidieť, že pre každé prirodzené n končí práve jedno z čísel a_n, b_n číslicou 5. Tým je dôkaz prevedený.

3. Pravoúhlý trojúhelník má tuto vlastnost: Z jeho odvěsen a z výšky na přeponu lze sestrojit opět pravoúhlý trojúhelník.

a) Vypočtěte poměr odvěsny a přepony.

b) Sestrojte aspoň jeden trojúhelník uvedené vlastnosti.



Obr. 9.

Řešení (obr. 9). a) Budiž $b \geqq a > v$. Pak pro druhý pravoúhlý trojúhelník platí

$$b^2 = a^2 + v^2\,, \tag{1}$$

takže zároveň je

$$AD = BC = a\,.$$

Podle Eukleidovy věty je

$$AC^2 = AD\,.\,AB\,,$$

tj.

$$b^2 = ac\,. \tag{2}$$

Do (2) dosadíme $b^2 = c^2 - a^2$, upravíme a získáme rovnici

$$a^2 + ac - c^2 = 0\,. \tag{3}$$

Protože $c \neq 0$, násobíme rovnici (3) číslem $\frac{1}{c^2}$ a dostaneme kvadratickou rovnici pro hledaný poměr odvěsny a a přepony c, tj. rovnici

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} - 1 = 0\,. \tag{3'}$$

Rovnice (3′) má jediný kladný kořen

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,. \tag{4}$$

Rovnice (3) vyjadřuje nutnou a postačující podmínku pro to, aby daný trojúhelník měl vyslovenou vlastnost, jak plyne z obrácení postupu.

P o z n á m k a. Při výpočtu poměru druhé odvěsny b a přepony c vyjdeme rovněž ze vztahu (2); jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\,.$$

Dále platí

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b}\,,$$

tj.

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1}\,.$$

Umocněním a substitucí $x = \frac{b}{c}$ dostaneme

$$x^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

čili

$$x^4 + x^2 - 1 = 0\,, \tag{5}$$

což je kvadratická rovnice pro x^2. Její jediný kladný kořen je

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

takže platí

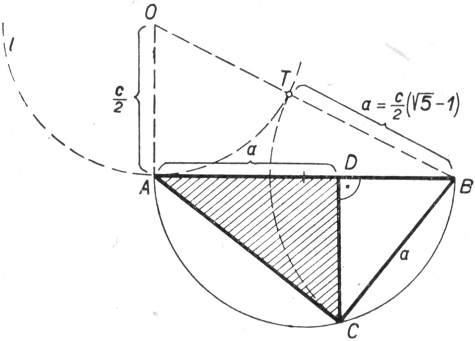
$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}\,.$$

b) Pro zvolené $c = AB$ provedeme s použitím výsledku (4) konstrukci trojúhelníku ABC takto:

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník BAO s odvěsnami $AO = \frac{c}{2}$, $AB = c$. Kružnice $l = \left(O; \frac{c}{2}\right)$ protne úsečku BO v bodě T. Výpočtem se přesvědčíme, že

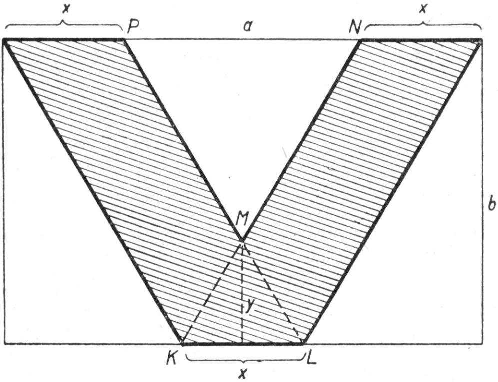
$$BT = \frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)\,,$$

což je délka hledané odvěsny a, kterou vypočítáme ze (4). Další kroky konstrukce jsou zřejmé z obr. 10. Důkaz vyplývá z obrácení postupu a).



Obr. 10.

4. Je dán obdélník o rozměrech a, b. Do něho je vepsáno písmeno „V“ podle obrázku 11.



Obr. 11.

a) Vyjádřete obsah plochy písmene „V“ pomocí délky x a rozměrů a, b.

b) Pro kterou délku x je obsah plochy „V“ polovinou obsahu obdélníka?

Řešení. a) Z obrázku je patrno, že písmeno „V“ vznikne jen pro $x < \frac{a}{2}$. Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle KLM \sim \triangle NPM \quad (u\,u)$$

vyplývá

$$\frac{y}{x} = \frac{b-y}{a-2x},$$

odtud po úpravě

$$y = \frac{bx}{a-x}. \tag{1}$$

Obsah plochy písmene „V" označme z; pak platí

$$z = 2bx - \frac{1}{2}xy\,. \tag{2}$$

Spojíme-li vztahy (1), (2) vyloučením y, dostaneme

$$z = \frac{4abx - 5bx^2}{2(a - x)}\,, \tag{3}$$

což je hledaný vzorec pro z platný pro $x < \frac{a}{2}$.

b) Druhou otázku zodpovíme po rozřešení rovnice $z = \frac{1}{2}ab$ (viz (3)) neboli

$$\frac{4abx - 5bx^2}{2(a - x)} = \frac{1}{2}ab\,, \tag{4}$$

kde neznámou je délka x; a, b jsou dané rozměry obdélníku.

Odtud dostaneme po úpravě rovnici

$$5x^2 - 5ax + a^2 = 0. \tag{5}$$

Rovnice (5) má dva kladné kořeny

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}a\,, \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}a\,.$$

Kořen x_1 nevyhovuje, neboť je

$$x_1 \doteq \frac{7{,}236}{10}a = 0{,}7236\,a > \frac{1}{2}a;$$

pro tuto délku x_1 nevznikne písmeno „V". Druhý kořen x_2 vyhovuje, neboť je

$$x_2 \doteq \frac{2{,}764}{19}a = 0{,}2764\,a < \frac{1}{2}a\,.$$

Je třeba si ještě uvědomit, že z rovnice (5) vyplývá (4) neboli $z = \frac{1}{2} ab$; tím je provedena zkouška pro druhý kořen. Z postupu je patrné, že a je libovolné reálné kladné číslo; číslo b je rovněž kladné reálné číslo na čísle a nezávislé (viz úprava (4) na (5) a obráceně). Omezení $x < \frac{a}{2}$ vyplývá z požadavku existence písmene tvaru „V".

5. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c, který není krychle. Součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobný objem daného kvádru; dokažte.

(Poznámka. Použijte výrazu $(a + b + c)^3$.)

Řešení. Máme vlastně dokázat toto tvrzení: Jsou-li a, b, c tři kladná čísla, ne vesměs sobě rovná (neboť jde o rozměry kvádru, který není krychle), pak platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0\,. \tag{1}$$

Abychom tuto nerovnost dokázali, užijme vzorce

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + \\ + b^2c + bc^2) + 6abc\,.$$

Tedy

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + \\ + ac^2 + b^2c + bc^2) - 9abc = \\ = (a + b + c)^3 - 3[ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + \\ + bc(a + b + c)] = \\ = (a + b + c)\,[a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc] = \\ = \frac{1}{2}(a + b + c)\,[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]\,.$$

Poslední výraz je vždy kladný, neboť a, b, c jsou kladná čísla ne vesměs sobě rovná. Tím je nerovnost (1) dokázána.

6. V rovine leží sedem rôznych priamok, ktorých vzájomná poloha je popísaná takto:

a) z daných priamok možno vybrať práve štyri dvojice rovnobežiek;

b) v rovine je 11 rôznych bodov, z ktorých každý je priesečníkom práve dvoch priamok.

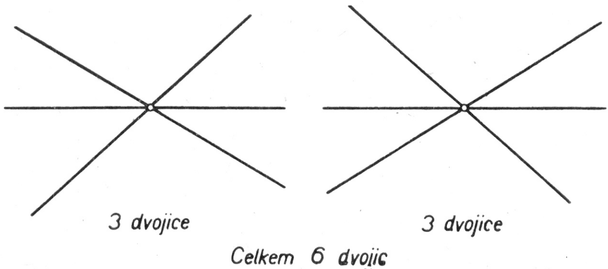
Zistite, či niektorým bodom roviny prechádza viac než dve z daných priamok.

Úloha má dva typy riešení; načrtnite ich!

(Poznámka. Počítame všetky možné zostaviteľné dvojice rovnobežiek, napr. tri rôzne rovnobežky predstavujú tri dvojice rovnobežiek.)

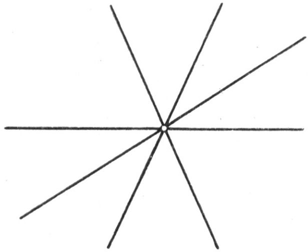
Riešenie. Zo siedmich rôznych priamok možno utvoriť $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ rôznych dvojíc. V sústave sú štyri dvojice rovnobežiek, a teda $21 - 4 = 17$ dvojíc rôznobežiek. Z nich je $17 - 11 = 6$ takých, ktoré sú tvorené priamkami, ktorých priesečníkom prechádza viac než dve priamky. To je možné dvoma spôsobmi:

1. dva priesečníky ležia na troch priamkach (obr. 12 a, b);



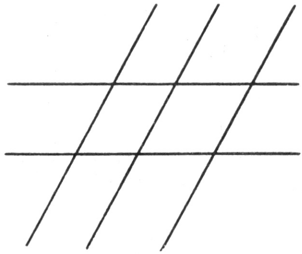
Obr. 12a, b.

2. jeden priesečník leží na štyroch priamkach (obr. 13).



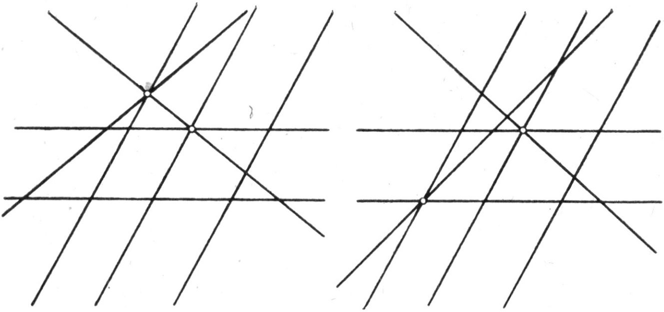
Obr. 13.

Štyri dvojice rovnobežiek nemôžu patriť štyrom rôznym smerom, pretože potom by všetkých priamok muselo byť aspoň osem. Patria tedy aspoň tri priamky tomu istému smeru. Nemôžu však tomu istému smeru patriť štyri priamky, pretože potom by existovalo aspoň 6 dvojíc rovnobežiek. Situácia s rovnobežkami je teda jedine takáto (obr. 14):



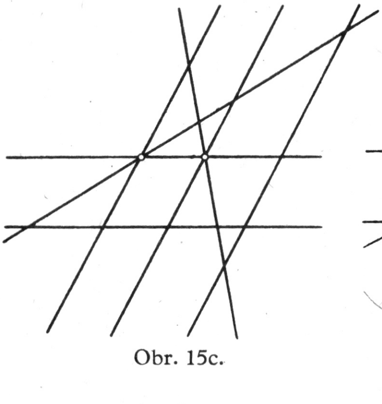
Obr. 14.

a) Predchádzajúci obr. 14 doplníme najskôr dvoma priamkami tak, aby vznikli dva priesečníky troch priamok. Sú to napr. takéto obrázky (obr. 15a, b, c):

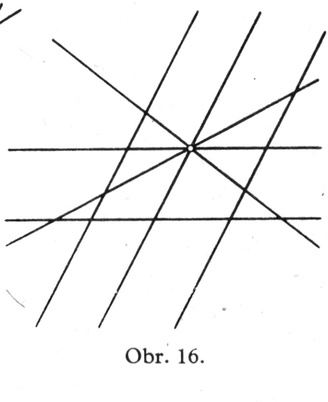


Obr. 15a, b.

b) Druhý spôsob doplnenia je taký, že vznikne priesečník štyroch priamok (obr. 16).



Obr. 15c.



Obr. 16.

3. *KATEGORIE C*

1. Tři navzájem různá přirozená čísla a, b, c mají tuto vlastnost: součet každých dvou z nich je dělitelný třetím číslem. Vyjádřete všecka čísla takové trojice pomocí nejmenšího z nich.

Řešení. Zvolme označení čísel a, b, c tak, aby bylo

$$a < b < c \,. \tag{1}$$

Podle (1) je $a + b < 2c$. Nechť $a + b = k \,.\, c$, kde k je přirozené číslo. Je tedy $k \,.\, c < 2c$, tj. $k = 1$, takže platí

$$c = a + b \,. \tag{2}$$

Podle (2) je

$$a + c = 2a + b = k' \,.\, b \,, \tag{3}$$

kde k' je přirozené číslo.

Mimo to je podle (1) $2a < 2b$ a $b < a + c$. Je tedy podle (3)

$$b < k' \,.\, b < 3b \,,$$

tj. $k' = 2$ a dále z (3) vyplývá

$$b = 2a \,. \tag{4}$$

Spojíme-li (2), (4), dostaneme

$$c = 3a \,. \tag{5}$$

Zvolíme-li a, dostaneme trojici a, $2a$, $3a$. Nejmenší taková trojice je 1, 2, 3.

Zkouškou se přesvědčíme, že trojice vyhovuje daným podmínkám.

2. O daných kladných číslech a, b, c, d platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \,. \tag{1}$$

Dokažte, že pro každou dvojici kladných čísel x, y platí nerovnosti

$$\frac{a}{b} < \frac{ax + cy}{bx + dy} < \frac{c}{d}\,. \tag{2}$$

Řešení. Z (1) plyne

$$bc - ad > 0\,. \tag{1'}$$

Vypočteme rozdíl

$$\frac{ax + cy}{bx + dy} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(bx + dy)}(abx + bcy - abx - ady) =$$

$$= \frac{y(bc - ad)}{b(bx + dy)}\,. \tag{3}$$

Poslední výraz v zápisu (3) je kladný, neboť $b > 0$, $bx + dy > > 0$, $y > 0$, $bc - ad > 0$ (podle (1')).

Vypočteme rozdíl

$$\frac{c}{d} - \frac{ax + cy}{bx + dy} = \frac{1}{d(bx + dy)}(bcx + cdy - adx - cdy) =$$

$$= \frac{(bc - ad)x}{d(bx + dy)}\,. \tag{4}$$

Také ve vztahu (4) je z obdobných důvodů jako při výpočtu prvního rozdílu poslední výraz kladný.

Vzhledem k výsledkům (3) a (4) jsou nerovnosti (2) správné.

3. Škola s n žiakmi mala pochodové cvičenie. Zraz bol na konečnej stanici elektrickej dráhy. Električkou pricestovalo p % zo všetkých žiakov, p % z ostatných prišlo pešo. Pri kontrole sa ukázalo, že chýba jediný žiak. Vyjadrite p pomocou n a výpočet preveďte pre $n = 400$.

(Poznámka. Pri úprave rovnice pre p vytknite n.)

Riešenie. Električkou pricestovalo $n . \frac{p}{100}$ žiakov, zvyšok bol $n\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Pešo prišlo teda $n\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}$ žiakov. Podľa textu úlohy je

$$n . \frac{p}{100} + n\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = n - 1 ,$$

z čoho po úprave máme

$$2n . \frac{p}{100} - n . \left(\frac{p}{100}\right)^2 = n - 1 .$$

Výrazy obsahujúce číslo n prevedieme na ľavú stranu a číslo n vytkneme. Dostaneme

$$n\left[2 . \frac{p}{100} - \left(\frac{p}{100}\right)^2 - 1\right] = -1$$

a po vynásobení číslom $\left(-\frac{1}{n}\right)$

$$1 - 2 . \frac{p}{100} + \left(\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{1}{n} . \qquad (1)$$

Výraz na ľavej strane je druhou mocninou dvojčlena $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Pretože $\frac{p}{100} < 1$, t. j. $1 - \frac{p}{100} > 0$, vyplýva z (1)

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

čiže

$$p = 100\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) . \qquad (2)$$

Ak dosadíme do (2) číslo $n = 400$, vyjde $p = 95$. Po dosadení do podmienok úlohy zistíme, že električkou pricestovalo 380 žiakov, 19 žiakov prišlo pešo a jeden chýbal.

Skúška: $380 + 19 + 1 = 400$.

Iné riešenie. Jeden žiak sa nedostavil, t. j. 1 je $(100 - p)$ percent zo zvyšku z. Platí teda

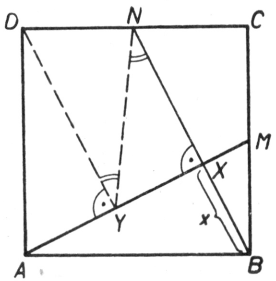
$$z = 1 \cdot \frac{100}{100 - p}.$$

Zvyšok je zo všetkých n žiakov $(100 - p)$ percent. Pre celkový počet žiakov tedy dostaneme

$$n = z \cdot \frac{100}{100 - p} = \left(\frac{100}{100 - p}\right)^2,$$

skadiaľ už vyplýva

$$p = 100\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$



Obr. 17.

4. Narýsujte obrazec podle připojeného obr. 17; $ABCD$ je čtverec o straně délky 6 cm, bod M je středem strany BC

($BN \perp AM \perp DY$). Vypočtěte vzdálenost NY a zjistěte výpočtem, zda trojúhelník DNY je pravoúhlý.

Řešení. Zřejmě je

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN\,, \quad (usu) \tag{1}$$

neboť $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NBC$. Z (1) plyne $BM = CN = 3$ cm. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABM je

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,. \tag{2}$$

Označíme-li $BX = x$ a vyjádříme-li obsah trojúhelníka ABM dvojím způsobem, dostaneme

$$AM \,.\, BX = 3x\sqrt{5} = 2 \,.\, \triangle ABM = AB \,.\, BM = 6 \,.\, 3\,,$$

odtud

$$x = \frac{6}{\sqrt{5}}\,. \tag{3}$$

Dále je podle Pythagorovy věty vzhledem ke (3)

$$AX = \sqrt{AB^2 - BX^2} = \sqrt{36 - \frac{36}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = 2x\,. \tag{4}$$

Podle věty *usu* je však

$$\triangle DAY \cong \triangle ABX\,,$$

tj.

$$AY = BX = x = \frac{6}{\sqrt{5}}\,. \tag{5}$$

Bod Y je tedy podle (4), (5) středem úsečky AX.

Vzdálenost NY vypočteme podle Pythagorovy věty z trojúhelníka NYX. Platí podle (2), (3)

$$NY^2 = NX^2 + YX^2 = \left(3\sqrt{5} - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

po úpravě

$$NY^2 = \frac{117}{5}, \tag{6}$$

tj.

$$NY = 3 \cdot \sqrt{\frac{13}{5}}.$$

Podle obrácení Pythagorovy věty je trojúhelník DNY pravoúhlý (jeho nejdelší strana je DY) právě tehdy, platí-li

$$DY^2 - DN^2 - NY^2 = 0.$$

Protože je $\triangle DAY \cong \triangle ABX$, je podle (4) $DY = AX = = 2x = \frac{12}{\sqrt{5}}$; mimo to je $DN = 3$. Platí tedy podle (6)

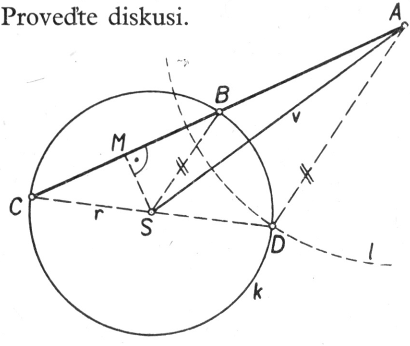
$$DY^2 - DN^2 - NY^2 = \frac{144}{5} - 9 - \frac{117}{5} = -\frac{18}{5} \neq 0.$$

Trojúhelník DNY tedy není pravoúhlý.

5. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod A jejího vnějšku.

a) Bodem A sestrojte přímku, která protíná kružnici k v bodech B, C tak, že B je středem úsečky AC (*úloha Catalanova*). Proveďte diskusi.

b) Vyjádřete délku tětivy BC pomocí délek r, $v = AS$.



Obr. 18.

Řešení. a) Předpokládejme, že jsme přímku sestrojili (obr. 18). Budiž CD průměr kružnice, M střed úsečky BC. Neleží-li body A, B, C, D v přímce, vznikne trojúhelník ACD, v němž je

BS střední příčka rovnoběžná s AD; je tedy

$$AD = 2 \,.\, BS = 2r \,.$$

Leží-li body A, B, C, D v přímce, je $B \equiv D$ a platí

$$AD = AB = BC = 2r \,,$$

tj.

$$AS = v = 3r \,.$$

Bod D leží tedy vždy na kružnici $l \equiv (A;\ 2r)$. Úloha má aspoň jedno řešení právě tehdy, mají-li kružnice k, l aspoň jeden společný bod, tj. když platí

$$r = 2r - r \leqq v \leqq 2r + r = 3r \,. \tag{1}$$

Levá nerovnost (1) je splněna (neboť A je bod vnějšku kružnice k). Podmínka řešitelnosti je tedy

$$v \leqq 3r \,, \tag{2}$$

neboť platí-li (2), platí i (1) a kružnice k, l mají společný aspoň jeden bod; každý společný bod vede k jednomu řešení úlohy.

Platí-li ve vztahu (2) rovnost, má úloha jediné řešení; v případě ostré nerovnosti má úloha dvě řešení. Jinak úloha řešení nemá.

b) Označme $BC = x$; z pravoúhlého trojúhelníka BMS dostaneme podle Pythagorovy věty

$$MS^2 = r^2 - \frac{x^2}{4} \,.$$

Dále vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka ASM

$$AS^2 = MS^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2,$$

tj.

$$v^2 = r^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}x^2 \,,$$

odtud $2x^2 = v^2 - r^2$ neboli

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{v^2 - r^2}. \qquad (3)$$

Vzorec (3) platí i v případě, když je $v = 3r$ a kdy nevznikne trojúhelník ACD; pak vyjde $x = 2r$.

Ze vzorce (3) dostaneme znovu podmínku řešitelnosti: ježto musí platit $x \leqq 2r$, je

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{v^2 - r^2} \leqq 2r,$$

tj.

$$v^2 - r^2 \leqq 8r^2,$$

takže

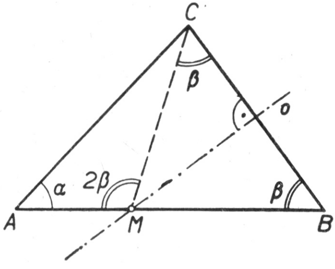
$$v \leqq 3r,$$

což souhlasí s podmínkou (2).

6. Dokážte: Os strany BC trojuholníka ABC pretne stranu AB vo vnútornom bode práve vtedy, keď pre uhly trojúholníka platí vzťah

$$\alpha + 2\beta < 180°.$$

(Poznámka. Pri dôkaze obrátenej vety vyjdite zo situácie, keď os úsečky BC nepretína úsečku AB.)



Obr. 19.

Riešenie (obr. 19). a) Ak pretína os o stranu AB vo vnútornom bode M, vznikne rovnoramenný trojuholník BCM a trojuholník ACM. Pre vonkajší uhol $\sphericalangle AMC$ zrejme platí $\sphericalangle AMC = 2\beta$. Okrem toho v trojuholníku ACM platí

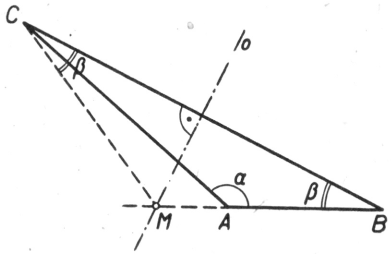
$$\sphericalangle AMC + \sphericalangle CAM < 180°,$$

čiže

$$\alpha + 2\beta < 180°. \tag{1}$$

b) Predpokladajme, že priamka o nepretína úsečku AB v jej vnútornom bode. Ak je $\beta \geqq 90°$, potom nerovnosť (1) zrejme neplatí. Ak je $\beta < 90°$, pretne priamka o (podľa 5. postulátu) polpriamku BA v bode M, ktorý neleží vo vnútri úsečky AB. Vznikne rovnoramenný trojuholník BCM so základňou BC (obr. 20), je teda

$$\sphericalangle BCM = \beta .$$



Obr. 20.

Pretože bod A leží na úsečke BM, je $\sphericalangle ACB \leqq \sphericalangle BCM$, t. j.

$$180° - \alpha - \beta \leqq \beta$$

čiže

$$\alpha + 2\beta \geqq 180°,$$

čo je negácia vzťahu (1).

Iné riešenie. b) Predpokladajme, že priamka o nepretne úsečku AB v jej vnútornom bode. Potom priamka o buď prechádza bodom A alebo (podľa Paschovho postulátu) pretne úsečku AC v jej vnútornom bode. V prvom prípade je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC a platí

$$\alpha + 2\,\beta = 180°.$$

V druhom prípade podľa a) je

$$\alpha + 2\gamma < 180^\circ = 2(\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ,$$

takže

$$\alpha + 2\beta > 180^\circ.$$

Vždy teda platí

$$\alpha + 2\beta \geqq 180^\circ,$$

čo je negácia vzťahu (1).

4. *KATEGORIE D*

1. Žiak dostal za úlohu umocniť trojčlen $(a + 2b - 3)^2$. Vyšiel mu výsledok $a^2 + 4b^2 - 9$. „Ale to predsa nie je správne — namietal učiteľ — dosaď si na skúšku za a, b nejaké určité prirodzené čísla.“ Žiak poslúchol a skúška mu vyšla. Ktoré čísla dosadil? Ako znie správne vzorec pre druhú mocninu daného trojčlena?

Riešenie. Správny výsledok má znieť

$$(a + 2b - 3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b\,. \qquad (1)$$

Ak porovnáme správny výsledok s výsledkom žiaka, dostaneme

$$a^2 + 4b^2 + 9 + 4ab - 6a - 12b = a^2 + 4b^2 - 9$$

čiže

$$4ab - 6a - 12b + 18 = 0\,,$$

t. j.

$$2ab - 3a - 6b + 9 = 0\,.$$

Vytknutím spoločných činiteľov postupne dostaneme

$$a(2b - 3) - 3(2b - 3) = 0\,,$$

čiže

$$(2b - 3)(a - 3) = 0 .$$

Stadiaľ vyplýva $a = 3$, pretože $2b - 3$ ako nepárne číslo je nenulové. Obrátene z $a = 3$ vyplýva vzťah (1). Máme teda výsledok:

Žiak dosadil $a = 3$ a za b nejaké prirodzené číslo.

2. Je dané prvočíslo p. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y, ktoré vyhovujú rovnici

$$\frac{1}{p + x} + \frac{1}{p + y} = \frac{1}{p} . \tag{1}$$

Riešenie. Rovnicu (1) vynásobíme súčinom $p(p + x)(p + y)$, ktorý je zrejme od nuly rôzny, pretože p, x, y sú prirodzené čísla. Dostaneme

$$p(p + y) + p(p + x) = (p + x)(p + y)$$

a po ďalšej úprave

$$p^2 = xy . \tag{2}$$

Deliteľmi čísla p^2 sú čísla 1, p a p^2. Dvojice prirodzených čísel $[x, y]$, ktoré vyhovujú rovnici (2) zostavíme do tabuľky:

x	1	p	p^2
y	p^2	p	1

Každá z usporiadaných dvojíc prirodzených čísel $[1, p^2]$ alebo $[p, p]$ alebo $[p^2, 1]$ vyhovuje tiež rovnici (1), o čom sa presvedčíme dosadením. Riešením úlohy sú teda uvedené tri usporiadané dvojice čísel $[x, y]$.

3. Písmeno a označuje přirozené číslo, jehož dekadický zápis má více než 6 cifer, písmeno b označuje číslo, jehož dekadický zápis tvoří posledních šest cifer čísla a. Dokažte: Je-li a násobkem čísla 2^6, je také b násobkem čísla 2^6 a obráceně.

Řešení. Číslo a vyjádříme jako součet nezáporného celého čísla b a vhodného přirozeného čísla c, násobeného 10^6; je tedy

$$a = b + 10^6 . c ,$$

tj.

$$a = b + 2^6 . (5^6 c) , \tag{1}$$

1. Je-li $a = 2^6 . a'$, je podle (1)

$$b = 2^6(a' - 5^6 c) ,$$

kde $a' - 5^6 c$ je číslo celé; proto: je-li 2^6 dělitelem čísla a, je i dělitelem čísla b.

2. Je-li $b = 2^6 . b'$, je podle (1)

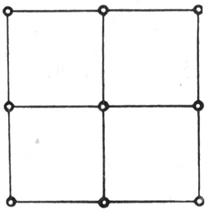
$$a = 2^6(b' + 5^6 c) ,$$

kde $b' + 5^6 c$ je číslo celé; proto: je-li 2^6 dělitelem čísla b, je i dělitelem čísla a.

4. Vrcholy, stredy strán a priesečník uhlopriečok štvorca tvoria skupinu deviatich bodov. Koľko trojuholníkov má všetky tri vrcholy v týchto deviatich bodoch?

Je osem typov (nezhodných) trojuholníkov. Nakreslite ich a udajte, koľko je trojuholníkov každého typu.

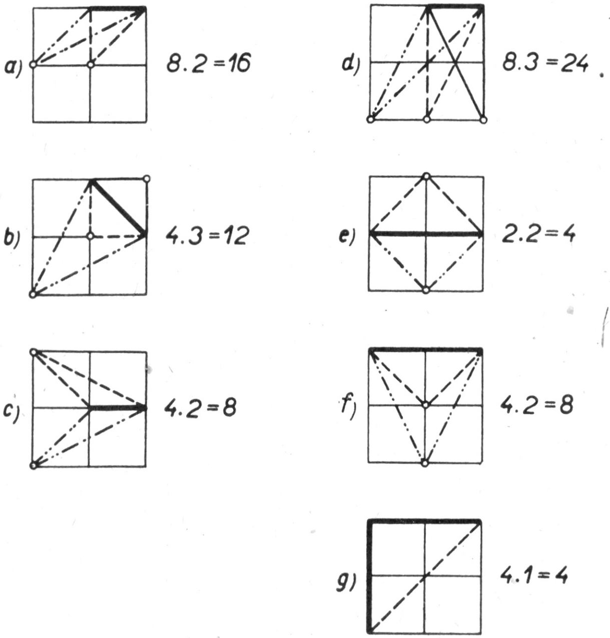
(Poznámka. Všetkých trojíc rôznych bodov je 84.)



Riešenie. Skupina daných deviatich bodov je znázornená na obr. 21. Počet všetkých trojíc bodov je 84. Počet trojíc bodov ležiacich na priamke je 8. Preto počet všetkých možných trojuholníkov je $84 - 8 = 76$.

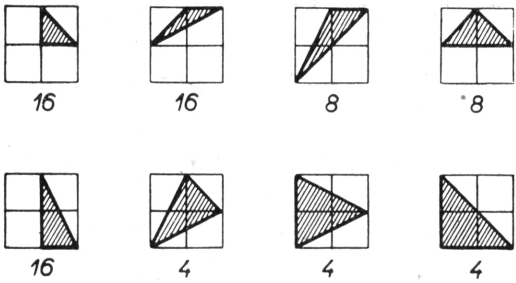
Obr. 21.

Na obr. 22 abcdefg je znázornený jeden spôsob postupného vytvárania trojuholníkov. V každom obrázku sa vychádza od hrubo vytiahnutej strany. Prvý činiteľ udáva, koľkokrát sa táto strana opakuje. Druhý činiteľ udáva počet vrcholov, ktoré s uvažovanou stranou určujú trojuholníky. Tieto vrcholy sú vyberané tak, aby nevznikli už vytvorené trojuholníky.



Obr. 22.

Na obr. 23 je prehľad jednotlivých typov (nezhodných) trojuholníkov. Pri každom type je uvedené číslo, ktoré udáva, koľkokrát sa príslušný trojuholník v našej úlohe vyskytne.

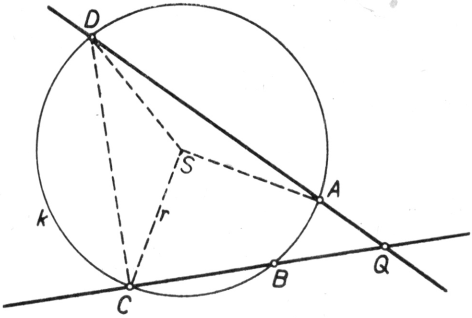


Obr. 23.

5. Body A, B, C, D dělí kružnici $k = (S; r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 1 : 2 : 4 : 5 .$$

Přímky AD, BC se protnou v bodě Q. Vypočtěte vzdálenosti QB a QD.



Obr. 24.

Řešení (obr. 24). Zřejmě platí pro středové úhly

$$\sphericalangle ASB : \sphericalangle BSC : \sphericalangle CSD : \sphericalangle DSA = 1 : 2 : 4 : 5 .$$

Odtud snadno vypočteme

$$\sphericalangle ASB = 30°, \sphericalangle BSC = 60°, \sphericalangle CSD = 120°, \sphericalangle DSA = 150° .$$

V rovnoramenném trojuhelníku ADS je $\sphericalangle ADS = 15°$, v rovnoramenném trojúhelníku CDS je $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SCD = 30°$. Protože trojúhelník BCS je rovnostranný, je $\sphericalangle SCB = 60°$. Je tedy

$$\sphericalangle ADC = 15° + 30° = 45°,$$
$$\sphericalangle BCD = 60° + 30° = 90°. \tag{1}$$

Z rovnoramenného trojúhelníka CDS (který rozdělíme výškou ve dva pravoúhlé) dostaneme

$$CD = r\sqrt{3} . \tag{2}$$

Podle (1) je trojúhelník CDQ pravoúhlý a rovnoramenný; podle (2) je tedy $CQ = CD = r\sqrt{3}$. Protože je $CB = r$, je

$$BQ = CQ - CB = r(\sqrt{3} - 1) .$$

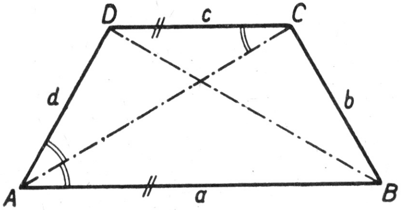
Z trojúhelníka QCD dostaneme

$$QD = CD . \sqrt{2} = r\sqrt{6} .$$

6. Lichoběžník $ABCD$ má uhlopříčky AC, BD, které mají tutéž délku a půlí úhly při základně AB. Dokažte, že platí $BC = CD = DA$ a sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = a$, $\sphericalangle ACB = 90°$.

Řešení (obr. 25). Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB$; dále je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD$ (úhly střídavé). Proto je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$ a trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC. Z obdobného důvodu je trojúhelník BCD rovnoramenný se základnou BD. Je tedy

$$AD = CD = BC . \tag{1}$$



Obr. 25.

Ze vztahů (1) plyne, že lichoběžník je rovnoramenný; je tedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$; z toho vyplývá

$$\sphericalangle CBA = 2 \, . \sphericalangle CAB \, , \tag{2}$$

neboť AC je osa úhlu $\sphericalangle DAB$. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý, je $\sphericalangle CBA + \sphericalangle CAB = 90°$; z (2) pak plyne

$$\sphericalangle CAB = 30°, \ \sphericalangle CBA = 60° \, .$$

Lichoběžník $ABCD$ se např. sestrojí jako část pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice nad průměrem AB.