14. ročník matematické olympiády

III. Přípravné úlohy (texty)

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Rudolf Zelinka (author): 14. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1964-1965. 7. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. pp. 22–25.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404541

III. Přípravné úlohy (texty)

1. Kategorie A

1. Dekadický zápis přirozeného čísla a dekadický zápis jeho páté mocniny končí touž cifrou. Dokažte.

2. Součet čtverců nad stranami rovnoběžníku je roven součtu čtverců nad jeho úhlopříčkami. Dokažte.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(a^2-b^2)\,x^4 - 2\,(a^2+b^2)\,x^2 + a^2 - b^2 = 0$$

o neznámé x, kde a, b jsou daná reálná čísla. Stanovte podmínku řešitelnosti vzhledem k číslům a, b.

4. Řešte rovnici

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos x\,.$$

5. V rovině jsou dány vedlejší úhly $\sphericalangle\, MON$, $\sphericalangle\, NOP$ a uvnitř úhlu $\sphericalangle\, NOP$ je dán bod Q.

Bodem Q veďte přímku, která s polopřímkami OM, ON omezuje trojúhelník, jehož obvod je roven danému kladnému číslu $2s$.

6. Jsou-li a, b taková dvě komplexní čísla, že součet $a+b$ je reálné kladné číslo a že platí $a+\bar{a} > b+\bar{b}$, potom platí $|a|^2 > |b|^2$. Dokažte. (Poznámka: $\bar{a}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu a.)

2. Kategorie B

1. Řešte soustavu rovnic

$$x = a + ky\,,\quad y = b + kz\,,\quad z = c + kx$$

o neznámých x, y, z. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným reálným číslům a, b, c, k.

2. Udejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, který má tyto vlastnosti: výška a těžnice při jednom vrcholu trojúhelníku dělí úhel trojúhelníku na tři shodné úhly.

3. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y = \sqrt{(1 + x)|1 - x|}$, a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y + x = |y - x|$. Výpočtem pak řešte soustavu rovnic

$$y = \sqrt{(1 + x)\,|1 - x|}\,, \quad y + x = |y - x|\,.$$

4. Každé dvě z hran OA, OB, OC čtyřstěnu $OABC$ stojí navzájem kolmo. Dokažte, že potom druhá mocnina obsahu stěny ABC je rovna součtu druhých mocnin obsahů zbývajících tří stěn.

5. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A. Dvěma odlišnými metodami řešte úlohu: Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný kružnici k tak, aby úhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ měly dané velikosti. Udejte podmínky řešitelnosti.

6. Řešte nerovnost

$$\frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leqq 1\,.$$

3. Kategorie C

1. Dokažte, že výraz

$$\frac{a^2}{(a - b)(a - x)} + \frac{x^2}{(x - a)(x - b)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - x)}\,,$$

pokud má smysl, nezávisí na čísle x.

2. Je dána polorovina ABP a uvnitř úsečky AB je dán bod M. Dále je dán úhel velikosti γ.

V polorovině ABP sestrojte trojúhelník ABC takový, aby úhel $\sphericalangle BCA = \gamma$ a aby osa tohoto úhlu procházela bodem M.

3. V rovině pravoúhlých souřadnic $[x, y]$ sestrojte graf funkce

$$y = |x + 2| - |x - 2| .$$

4. Zlomek

$$\frac{7^n + 1}{3^n + 1},$$

kde n je liché přirozené číslo, lze vždy krátit číslem 4. Dokažte.

5. Zmenšíme-li poloměr i výšku rotačního kužele o p %, o kolik procent se změní jeho objem?

6. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A, jehož vzdálenost od středu S je $v < r$.

Bodem A veďte přímku, která od kružnice k oddělí čtvrtkružnici. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům r, v.

4. Kategorie D

1. Tahem krále na šachovnici rozumějme tah ze zvoleného pole na některé pole k němu sousední (až 8 možností); přitom tah z pole A na pole B je jiný než tah z pole B na pole A.

Kolik takových tahů lze na prázdné šachovnici udělat?

2. Je dána přímka AP a mimo ni bod B; dále je dána úsečka délky d. Na polopřímce AP sestrojte bod X takový, že platí vztah

$$AX + BX = d\,.$$

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1;\ 10\ \text{cm})$, $k_2 \equiv (S_2;\ 10\ \text{cm})$, kde $S_1S_2 = 10$ cm.

Vypočtěte délku x poloměru kružnice, která má s každou z daných kružnic vnitřní dotyk a vedle toho se dotýká přímky S_1S_2; na základě výpočtu proveďte konstrukci.

4. Dokažte, že:

a) $3^7 + 7^7$ je dělitelné deseti, aniž mocniny počítáte.*)

b) $20\,193^7 + 3\,027^7$ je dělitelné číslem 270.

5. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, jestliže je dáno:

a) Součet základny a jednoho ramena a dále úhel při základně. (Pokyn. Uvažujte trojúhelník BCD, kde D je bod polopřímky CA a platí $CD = AB + AC$).

b) Rozdíl ramena a základny (v tomto pořadí) a dále je dán úhel proti základně. (Pokyn. Vyhledejte vhodný pomocný trojúhelník.)

6. Najděte všechna čísla p, pro která zlomek

$$\frac{(3p - 2)^2 - (2p - 3)^2}{(2p - 1)^2 - (3p - 4)^2}$$

nemá smysl. Pak vypočtěte všechna čísla p, pro která je zlomek roven nule.

---

*) Sledujte jen jednotky mocnin 3^2, 3^3, ..., 7^2, 7^3, ... v jejich dekadických zápisech.