13. ročník matematické olympiády

V. Zpráva o Šesté mezinárodní matematické olympiádě

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 13. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1963-1964. 6. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965. pp. 124–145.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404533

V. Zpráva o Šesté mezinárodní matematické olympiádě

1. Šestá mezinárodní matematická olympiáda (VI. MMO) se konala v Sovětském svazu ve dnech 30. června až 10. července 1964. Uspořádalo ji ministerstvo osvěty RSFSR; přípravou, řízením a celou organizací byl pověřen zvláštní organizační komitét (OK), jehož předsedou byl *prof. A. I. Markuševič*, vicepresident Pedagogické akademie věd RSFSR, sekretářem komitétu byl *Ivan Semjonovič Petrjakov*, pracovník v oboru metodiky matematiky v ministerstvu osvěty RSFSR. Vlastní soutěž řídila mezinárodní komise (MK), jejímiž členy byli vedoucí jednotlivých zúčastněných delegací. Předsedou MK byl rovněž *profesor A. I. Markuševič*; v této funkci jej popřípadě zastupoval *DrSc. Alexandr A. Kirilov*, profesor Lomonosovovy státní university v Moskvě. Delegace byly ubytovány v budově Lomonosovovy státní university na Leninských horách, v níž se konaly i všechny porady MK, vlastní soutěž, rozdělení cen, slavnostní oběd apod.

Soutěže se zúčastnilo po osmi žácích z devíti zemí, tedy celkem 72 žáků; každá z delegací měla svého vedoucího a pedagogického průvodce. Byli to:

Bulharsko (B): *Alippi Mateev*, profesor university v Sofii, a *Stoian Budurov*, inspektor ministerstva osvěty B. L. R., Sofia.

Československo (Č): *Rudolf Zelinka* a *František Zítek CSc.*, oba vědečtí pracovníci Matematického ústavu ČSAV, Praha.

N D R (D): *W. Engel*, profesor university, Rostock, a *doc. Herbert Titze*, vědecký pracovník Pedagogického ústavu v Berlíně.

M a ď a r s k o (H): *prof. Hódi Endre*, vědecký pracovník Ústavu optiky, Budapešť, a *Reiman István.*

M o n g o l s k o (M): *B. Altangerel*, pracovník ministerstva osvěty, Ulán Bátor, a *D. Gurisav*, pracovník pedagogického institutu, Ulán Bátor.

P o l s k o (P): *Mieczysław Czyżykowski*, profesor polytechniky, Varšava, a *Andrzej Mąkowski*, odborný asistent university, Varšava.

R u m u n s k o (R): *Tiberiu Roman*, docent polytechniky a generální sekretář Rumunské matematické společnosti, Bukurešť, a *Paul Alger*, učitel matematiky, Bukurešť.

S S S R (S): *Jelena Alexandrovna Morozovova*, docentka Lomonosovovy státní university v Moskvě, a *L. B. Fuks*, asistent Lomonosovovy státní university v Moskvě.

J u g o s l á v i e (Y): profesorka *Milica C. Dajevićová* z Bělehradu a profesorka *M. Stojanovićová.*

2. Organizační komitét sestavil návrh dvou šestic soutěžních úloh z textů, které zaslaly zahraniční instituce; návrhy obsahovaly stručná řešení. Po zevrubných poradách, hodnoceních a po určitých úpravách byla přijata první šestice. Zároveň MK rozhodla, kolik bodů bude maximálně přiděleno za řešení jednotlivých úloh; rovněž byly stanoveny některé zásady pro klasifikaci (maximálního počtu 42 bodů dosáhl jeden sovětský žák). Dále bylo rozhodnuto, že o nejasnostech a případných sporných otázkách rozhodne MK. Texty úloh s řešeními jsou uvedeny v příloze č. 2; zároveň je tam udán maximální počet bodů, které mohl žák za řešení úlohy získat, jakož i země, která úlohu navrhla.

Žáci se k soutěži sjeli do 2. července 1964. Vlastní soutěž se konala v sobotu 4. 7. a v neděli 5. 7. 1964 v posluchárně č. 02 Lomonosovovy státní university, vždy v době od 9.30 hod. do 14 hod. Ve dvou následujících dnech pak prováděli vedoucí delegací spolu s pedagogickým průvodcem opravy úloh vlastních žáků; úlohy současně korigovali členové koordinační komise z řad sovětských vysokoškolských pracovníků. Koordinaci řešení sovětských žáků prováděli členové zahraničních delegací.

Na závěrečném zasedání MK za předsednictví profesora A. A. Kirilova bylo rozhodováno hlasováním o nejasných případech klasifikace. Celé jednání mělo celkem velmi hladký průběh. Na základě schválené klasifikace byly přiděleny ceny jednotlivým řešitelům (viz tab. č. 1 *„Přehled o celkovém počtu bodů, které získali jednotliví žáci"*, tab. č. 2 *„Přehled o počtu udělených cen jednotlivým delegacím"* a přílohu 1 *„Jmenný seznam vítězů VI. MMO"*); bylo uděleno 7 prvních, 9 druhých a 19 třetích cen (celkem 35). Bodové rozpětí pro I. cenu bylo 42—37 bodů, pro II. cenu 36—31 bodů a pro III. cenu 30—27 bodů. Z tabulky je patrno, že nejlepší bylo družstvo sovětské a těsně za ním družstvo maďarské. Čs. družstvo bylo na konci jakéhosi středu, který tvořila mužstva těchto zemí: R, P, B, D, Č. Přitom Jugoslávie postavila nové družstvo, ačkoli mohla užít loňského.

V maďarském družstvu bylo 5 loňských účastníků V. MMO, kdežto v sovětském žádný; v našem a polském družstvu bylo po jednom z loňských účastníků. Absolutním vítězem se stal *David Bernštejn*, žák moskevské střední školy, který jediný získal maximální počet 42 bodů. Dva naši žáci, *Tamara Marcisová*, 2. tr. SVŠ, Bratislava, a *Pavel Bureš*, 3. roč. SVVŠ, Brno, získali druhé ceny. Další dva čs. žáci, *Jaroslav Zemánek*, 3. roč.

SVVŠ, Praha 4, a *Miloslav Znojil*, 3. roč. SVVŠ, Prostějov, získali třetí ceny; čs. žáci tedy získali 4 ceny z celkového počtu 35 cen.

Ve středu 8. 7. 1964 se pro účastníky VI. MMO konala slavnostní večeře, které za přítomnosti *A. Černiševa*, prvního náměstka ministra osvěty RSFSR, předsedal *profesor A. I. Markuševič*. Večeře proběhla v radostném a veselém ovzduší, o něž se postarali především sovětští hostitelé.

Ceny a upomínkové dary byly vítězům odevzdány na slavnosti, která se konala ve čtvrtek 9. 7. 1964 o 13. hod. v promočním sále Lomonosovovy university; žáci, kteří nedostali cenu, obdrželi diplom o účasti na mezinárodní soutěži. Schůzi zahájil a řídil profesor *A. I. Markuševič*. Po něm pronesl slavnostní projev ministr osvěty RSFSR *J. I. Afanasjenko*, který jako matematik zhodnotil význam této vědy pro lidskou společnost a její perspektivy; konstatoval výslovně, že sovětští účastníci všesvazové matematické olympiády nekonají přijímací zkoušky na vysoké školy, protože svým výkonem v soutěži prokázali svou kvalifikaci. Blahopřál všem účastníkům, že se svým pracovním úsilím probojovali do této mezinárodní soutěže a zdůraznil velký mezinárodně politický význam tohoto mírového setkání mládeže. Zvláště přitom ocenil výchovná hlediska, spočívající v tom, že se tu schází a svá přátelství uzavírá právě dorůstající mladá generace budoucích vědeckých pracovníků. Za mezinárodní komisi poděkoval sovětským hostitelům profesor *W. Engel* z NDR. Nejlepší maďarský žák *Laszló Gerencsér*, který v soutěži získal 41 bodů, poděkoval jménem žáků za udělené ceny a uznání.

V pátek 10. 7. 1964 o 9. hod. moskevského času odletěla naše delegace zpět do vlasti.

3. Za svého pobytu v Moskvě zhlédli žáci řadu pamětihodností tohoto města a jeho bezprostředního okolí.

Jmenujme Kreml, Leninské Gorki, Palác pionýrů, Treťjakovskou galerii, řadu muzeí a výstav, poklady ve Zbrojním paláci v Kremlu, Lužniky; mimo jiné se účastnili baletu Labutí jezero v Kremelském divadle. Vedoucí delegací s pedagogickými průvodci navštívili Velké akademické divadlo.

Sovětští hostitelé svou pečlivostí připravili dospělým i žákům vskutku příjemné prostředí. Ještě poslední večer pobytu v Moskvě zhlédli členové MK bibliofilské sbírky ručně psaných knih a prvotisků v bytě předsedy MK profesora A. I. Markuševiče, kde byli mile pohoštěni.

Zvláštní událostí je přijetí členů MK ministrem osvěty RSFSR *Jevgenijem Ivanovičem Afanasjenkem*, a to ve středu 8. 7. 1964 dopoledne. Ministr přednesl delší referát, ve kterém informoval hosty o současné situaci, pokud jde o vyučování matematice, dále o experimentech, které se budou konat ve speciálních třídách. Ministr se pak v diskusi zvláště rozhovořil o nejbližších úkolech výchovy a výuky sovětských škol. Na závěr přál školám socialistických zemí hodně úspěchů. Ministr sledoval průběh olympiády a činnost MK. Řada novinářů a reportérů z rozhlasu a televize navštěvovala nejdůležitější akce, které se konaly v rámci soutěže.

4. Posuzujeme-li úlohy, pak celkem zapadaly do normálu soutěže. Jistou závadu měla úloha č. 2, neboť nerovnost platí pro všechna kladná čísla (tedy i pro jiné trojice čísel, než jsou jen velikosti stran trojúhelníku). Rozhodně obtížný byl dodatek k úloze č. 6; úspěšně jej řešili 4 žáci a jeden z nich jen částečně. Jeden náš žák se pokoušel o řešení, ale bezvýsledně.

Naše družstvo jen asi z poloviny bylo na výši, což vzhledem k slabým výsledkům naší celostátní soutěže nepřekvapuje; výsledek MMO to celkem potvrdil.

Úlohy č. 1 až 3 většině našich žáků dopadly celkem dobře, i když se i někteří lepší žáci dopustili triviálních chyb, hlavně numerického rázu. Je vidět, že našim žákům chybí jistota, které lze nabýt jen soustavnou prací. Velmi špatně však dopadla úloha č. 4, jejíž tematika měla spíše povahu časopiseckých zábavných koutků a byla zadána jako úloha pro útěchu, která si nevyžaduje žádných předběžných znalostí. Úlohu rozřešili jen 3 naši žáci. Ještě horší výsledky máme při úloze č. 5, kde řešitelé neuvažovali o ortocentrech trojúhelníků a vůbec zápasili s pojmem kombinace. Lze říci, že první část úlohy č. 6, kde se dalo získat 6 bodů, dopadla dobře; o druhé části, kde se daly získat maximálně 3 body, jsme se již zmínili; dopadla vesměs špatně. Aby čtenář získal představu o tom, jak naši žáci řešili jednotlivé úlohy, připojujeme tabulku č. 3 „Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků".

Žáci se před odjezdem na soutěž účastnili týdenní instruktáže ve Žďáru nad Sázavou. I když to bylo nouzové opatření, přece jen tu asi žáci získali jakýsi přehled o tom, jakým způsobem tu či onu úlohu řešit. Naše dosavadní péče o nejlepší žáky je však zatím nepostačující; potřebujeme pomoc stálou a trvalé vedení a povzbuzování. Bude třeba najít cestu, jakou formou se to má provádět. 70 bodů, o něž jsme zůstali pozadu za sovětským družstvem, je příliš veliký rozdíl, který nelze omluvit náhodou, cizím prostředím apod.

Tabulka č. 1

Přehled o celkovém počtu bodů, které získali jednotliví žáci na VI. MMO

Žák \ Země čís.	B	Č	D	H	M	P	R	S	Y
1	30	28	29	35	26	39	16	36	16
2	27	36	31	24	22	1	33	39	29
3	24	13	25	21	26	26	30	42	24
4	23	30	24	41	26	30	21	30	7
5	23	36	27	26	27	31	24	30	18
6	18	14	20	39	14	30	27	38	17
7	30	19	15	28	15	28	30	25	13
8	32	18	25	39	13	24	32	29	31
Součet za zemi	198	194	196	253	169	209	213	269	155

Tabulka č. 2

Přehled o počtu udělených cen jednotlivým delegacím

Cena číslo	Země (číslice udává počet získaných cen)
I.	S 3; H 3; P 1
II.	Č 2; D 1; H 1; P 1; R 2; S 1; Y 1
III.	B 3; Č 2; D 2; H 1; M 1; P 3; R 3; S 3; Y 1

Tabulka č. 3

Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků
(v závorkách je uveden maximální počet bodů za dokonalé řešení úlohy)

Žák čís.	Úlohy						Získal celkem bodů (celkem max. 42 bodů)
	1 (7)	2 (7)	3 (6)	4 (6)	5 (7)	6 (9)	
1	7	5	6	0	4	6	28
2	7	7	6	6	4	6	36
3	5	1	5	0	2	0	13
4	6	0	5	6	7	6	30
5	7	7	6	6	4	6	36
6	0	0	6	0	2	6	14
7	7	0	5	0	1	6	19
8	4	0	6	0	2	6	18
Součet	43	20	45	18	26	42	194

PŘÍLOHA 1

Jmenný seznam vítězů VI. MMO

I. cena:

Genadij Archipov S; David Bernštejn S; Jurij Matijasevič S; László Gerensér H; László Lovász H; József Pelikán H; Tadeusz Figiel P.

II. cena:

Pavel Bureš Č; Tamara Marcisová Č; Wolfgang Klamt D; Marian Orlowski P; István Berkes H; Alexandru Vinea R; Octavian Bisca R; Viktor Urumov Y; Valerij Aleksejev S.

III. cena:

Mižiddorž Cevegmidyn M; Miloslav Znojil Č; Jaroslav Zemánek Č; Monika Titzová D; Manfred Brandt D; Zbigniew Słodkowski P; Wojciech Patkaniowski P; Krzysztof Nowiński P; Avram Eskenazi B; Svjetoslav Bilčev B; Vladimír Zajmov B; Endré Makai H; Tiberiu Spircu R; Eleodor Popescu R; Mihai Chercin R; Stanko Verščaj Y; Alexandr Florensov S; Boris Ivlev S; Alexandr Vilenkin S.

PRÍLOHA 2

Súťažné úlohy zo VI. Medzinárodnej matematickej olympiády

1. a) Určite všetky celé kladné čísla n, pre ktoré je číslo $2^n - 1$ deliteľné siedmimi.

b) Dokážte, že neexistuje žiadne celé kladné číslo n, pre ktoré je číslo $2^n + 1$ deliteľné siedmimi. (ČSSR — 7 bodov.)

Riešenie. Každé prirodzené číslo $n > 2$ možno napísať v práve jednom z tvarov:

α) $n = 3k$,
β) $n = 3k + 1$,
γ) $n = 3k + 2$,

kde k je vhodné prirodzené číslo.

a) Do daného výrazu dosadíme postupne každú z týchto troch možností:

α) $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$; podľa známeho vzorca
$8^k - 1 = 7(8^{k-1} + 8^{k-2} + \ldots + 1)$, t. j. dané číslo je deliteľné siedmimi;

β) $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \,.\, 8^k - 1 = 8^k + 8^k - - 1 = 8^k + 7K$,

kde K je vhodné prirodzené číslo. Aby platilo, že 7 je deliteľom čísla $2^n - 1$, muselo by platiť i to, že 7 je deliteľom čísla 8^k, čo zrejme nie je možné pre žiadne prirodzené číslo k.

γ) $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \,.\, 8^k - 1 = 8^k - 1 + + 3 \,.\, 8^k$. Aby 7 bolo deliteľom $2^n - 1$, muselo by byť tiež deliteľom čísla $3 \,.\, 8^k$, čo zrejme neplatí pre žiadne prirodzené k.

Dosadíme do daného výrazu ešte $n = 1$, $n = 2$; je $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 1 = 3$.

Číslo $2^n - 1$ je deliteľne číslom 7 práve pre tie prirodzené čísla n, ktoré sú násobkami čísla 3.

b) Za n do výrazu $2^n + 1$ dosadíme z možností α), β), γ). Pritom máme dokázané, že číslo $8^k - 1$, kde k je prirodzené číslo, je deliteľné siedmimi.

α) $2^n + 1 = 2^{3k} + 1 = 8^k - 1 + 2 = 7K + 2$, kde K je vhodné prirodzené číslo. Aby číslo 7 delilo číslo $2^n + 1$, muselo by deliť i číslo 2, čo nie je možné;

β) $2^{3k+1} + 1 = 2 . 8^k - 2 + 3 = 2(8^k - 1) + 3$. Keďže číslo 7 nie je deliteľom čísla 3, nemôže deliť ani $2^n + 1$;

γ) $2^{3k+2} + 1 = 4 . 8^k - 4 + 5 = 4(8^k - 1) + 5$. Z toho, že číslo 7 nedelí 5, vyplýva, že nemôže deliť ani $2^n + 1$.

Dosadíme ešte $n = 1, n = 2$; je $2^1 + 1 = 3, 2^2 + 1 = 5$.

Keďže iná možnosť neexistuje, dokázali sme, že číslo $2^n + 1$ pre žiadne prirodzené číslo n nie je deliteľné číslom 7.

Riešila Tamara Marcisová,
2. tr. SVŠ, Bratislava

2. Ak sú a, b, c dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, potom platí

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqq$$
$$\leqq 3abc;$$

dokážte. (Maďarsko — 6 bodov.)

Riešenie. Ak sú a, b, c dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, je vždy splnená nerovnosť

$$0 \leqq (a - b)^2 (a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) +$$
$$+ (c - a)^2(a + c - b), \tag{1}$$

pretože v trojuholníku musí byť súčet ľubovoľných dvoch strán väčší ako tretia strana (je $a + b - c > 0$, atď.) a na pravej strane nerovnosti (1) je teda súčet 3 nezáporných čísel, z ktorých každé je súčinom kladného a nezáporného čísla. Rovnosť nastane zrejme iba v prípade $a = b = c$. Prevedením naznačených úkonov dostávame na pravej strane (označme ju P):

$$
\begin{aligned}
P = {} & (a^2 - 2ab + b^2)(a + b - c) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
& (b + c - a) + (c^2 - 2ac + a^2)(a + c - b) = \\
= {} & a^3 - 2a^2b + ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3 - a^2c + \\
& + 2abc - b^2c + b^3 - 2b^2c + bc^2 + b^2c - 2bc^2 + \\
& + c^3 - ab^2 + 2abc - ac^2 + ac^2 - 2a^2c + a^3 + \\
& + c^3 - 2ac^2 + a^2c - bc^2 + 2abc - a^2b = \\
= {} & 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc - 2(a^2b + ab^2 + a^2c + \\
& + ac^2 + b^2c + bc^2).
\end{aligned}
$$

Pre čísla a, b, c, ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka, platí teda vždy nerovnosť

$$
\begin{aligned}
0 \leqq {} & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - a^2c - \\
& - ac^2 - b^2c - bc^2, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

pretože je ekvivalentná s (1). Po úprave dostaneme

$$
\begin{aligned}
& -a^3 + a^2b + a^2c - b^3 + ab^2 + b^2c - c^3 + ac^2 + \\
& + bc^2 \leqq 3abc
\end{aligned}
$$

a teda

$$
\begin{aligned}
& a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqq \\
& \leqq 3abc. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Nerovnosť (3) je zhodná s danou nerovnosťou. Platí pre všetky a, b, c, ktoré sú dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka, pretože je ekvivalentná s nerovnosťou (1), ktorá je pre všetky takéto a, b, c zrejme splnená.

Riešenie Tamary Marcisovej,
2. tr. SVŠ, Bratislava

Jiné řešení. Danou nerovnost upravíme postupně takto:

$$a^2(b + c - a) - abc + b^2(c + a - b) -$$
$$- abc + c^2(a - b - c) - abc \leqq 0$$
$$a(ab + ac - a^2 - bc) + b(bc + ba - b^2 - ac) +$$
$$+ c(ac + bc - c^2 - ab) \leqq 0$$
$$a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) +$$
$$+ c(c - a)(c - b) \geqq 0 \qquad (1)$$

Rozeznáváme tři možnosti:

Případ [1]. Nechť je $a = b = c$. Pak z (1) plyne $0 \geqq 0$, což je správná nerovnost.

Případ [2]. Nechť je např. $a = b$, $c \neq a$. Pak (1) lze psát

$$c(c - a)^2 \geqq 0,$$

což je správná nerovnost, neboť na pravé straně je součin dvou nezáporných čísel. Změnou označení dospějeme k podobným závěrům v případě, kdy dvě z daných čísel jsou si rovna, třetí je od nich různé.

Případ [3]. Vhodným označením při vesměs různých číslech lze dosáhnout, že platí

$$a > b > c. \qquad (2)$$

Pak je na levé straně (1) číslo $c(c - a)(c - b) > 0$, neboť je součinem čísla kladného a dvou čísel záporných. Jestliže dokážeme, že je $x = a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) \geqq 0$, bude platit i vztah (1). Avšak snadno se usoudí, že vzhledem ke (2) platí

$$x = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] >$$
$$> (a-b)\,b\,[a - c - (b-c)] = b(a-b)^2 > 0,$$

neboť v posledním součinu jsou oba činitelé kladná čísla.

Ve všech třech případech lze postup obrátit a dospět od výsledné nerovnosti k původní. Tím je řešení provedeno.

Poznámka. Předložený důkaz dokonce platí pro všechny trojice kladných čísel a, b, c.

Podle řešení Pavla Bureše, 3. roč. SVVŠ, Brno

3. Do trojúhelníku ABC se stranami o délkách a, b, c vepíšeme kružnici a sestrojíme k ní tři nové tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku.

Do každého z těchto tří nových trojúhelníků vepíšeme kružnici.

Vypočtěte součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů. (Jugoslávie — 6 bodů.)

Řešení. Označme po řadě ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 poloměry kružnic k, k_1, k_2, k_3 (viz obr. 40). Máme vypočítat číslo

$$V = \pi(\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2). \tag{1}$$

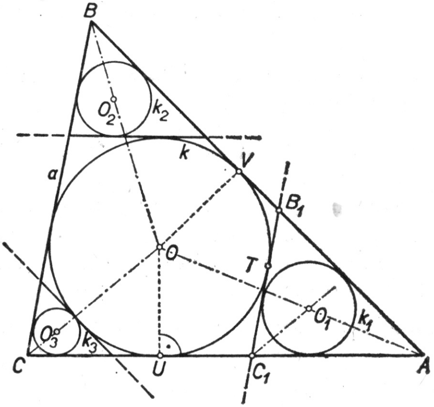
Pro výpočet poloměrů použijeme vzorců

$$\varrho = \frac{P}{s}, \quad \varrho_1 = \frac{P_1}{s_1}, \quad \varrho_2 = \frac{P_2}{s_2}, \quad \varrho_3 = \frac{P_3}{s_3}. \tag{2}$$

Přitom P, P_1, P_2, P_3 jsou po řadě obsahy trojúhelníku ABC a tří trojúhelníků oddělených při vrcholech A, B,

C; s, s_1, s_2, s_3 jsou jejich poloviční obvody. Vzorce (2) upravíme takto:

$$\varrho = \frac{P}{s^2} s, \qquad \varrho_1 = \frac{P_1}{s_1^2} \cdot s_1,$$
$$\varrho_2 = \frac{P_2}{s_2^2} \cdot s_2, \qquad \varrho_3 = \frac{P_3}{s_3^2} \cdot s_3. \tag{3}$$



Obr. 40.

Z podobnosti trojúhelníku ABC a každého z tří oddělených trojúhelníků vyplývá

$$\frac{P_1}{s_1^2} = \frac{P_2}{s_2} = \frac{P_3}{s_3^2} = \frac{P}{s^2}. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (3), vyjde

$$\varrho_1 = \frac{P}{s^2} \cdot s_1, \quad \varrho_2 = \frac{P}{s^2} \cdot s_2, \quad \varrho_3 = \frac{P}{s^2} s_3. \tag{5}$$

Z vlastností tečen snadno zjistíme, že obvod trojúhelníku AB_1C_1 je $AB_1 + AC_1 + B_1C_1 = AB_1 + AC_1 + B_1T + C_1U = AT + AU = s - b + s - c$ při obvyklém označení stran trojúhelníku ABC. Je tedy $2s_1 = s - b + s - c = a$, tj.

$$s_1 = \frac{a}{2}, \quad s_2 = \frac{b}{2}, \quad s_3 = \frac{c}{2}. \tag{6}$$

Dosadíme-li z (6) do (5) a odtud do (1), vyjde:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \frac{P^2}{s^4}\left(s^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right) = \\
&= \frac{\pi P^2}{4s^4}(4s^2 + a^2 + b^2 + c^2) = \\
&= \frac{\pi P^2}{4s^4}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = \\
&= \frac{\pi P^2}{2s^4}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca).
\end{aligned}$$

Za P^2 lze do tohoto vzorce dosadit ze vzorce Heronova.

Poznámky. a) Ze vzorců (5), (6) vyplývá vztah

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{P}{s^2}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{P}{2s^2}(a + b + c) =$$
$$= \frac{P}{2s^2} \cdot 2s = \frac{P}{s} = \varrho.$$

b) Poměr součtu obsahů kruhů k_1, k_2, k_3 k obsahu kruhu k je podle předcházejícího

$$\frac{\pi(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)}{\pi\varrho^2} = \frac{s^2}{P^2} \cdot \frac{P^2}{s^4}(a^2 + b^2 + c^2) =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}.$$

4. Sedemnásť osôb si navzájom píše, každá z nich so všetkými ostatnými. V celej korešpondencii sa objavujú celkom len tri rôzne témy. Každá dvojica osôb si spolu píše iba o jednej z týchto tém.

Dokážte, že existujú aspoň tri osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému. (Poľsko — 6 bodov.)

Riešenie. Označme jednu zo 17 osôb A. Osoba A si podľa podmienky úlohy píše so 16 inými osobami o maximálne 3 témach. Podľa Dirichletovho princípu si musí teda na jednu z týchto tém, označme ju I, písať aspoň so 6 osobami. Rozoznávajme tu práve 2 možnosti:

[1]. Aspoň 2 z týchto 6 osôb si píšu na tému I. Tým je splnené, že existujú aspoň tri osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému (I).

[2]. Žiadne 2 z týchto 6 osôb si nepíšu na tému I. Potom jedna z nich, nech je to B, si píše s ostatnými 5 z tejto skupiny na zostávajúce dve témy. Podľa Dirichletovho princípu si musí písať na jednu z týchto tém — označme ju II — aspoň s 3 z týchto 5 osôb. Opäť musíme rozoznávať práve 2 možnosti:

a) Z týchto 3 osôb si aspoň dve píšu na tému II, čím je splnené, že existujú aspoň 3 osoby, ktoré si navzájom píšu na tú istú tému (II).

b) Žiadne 2 z týchto 3 osôb si nepíšu na tému II, teda všetky 3 si píšu na zostávajúcu tému III.

V každom prípade si teda aspoň tri osoby navzájom píšu na tú istú tému. Tým je dôkaz prevedený.

Riešila Tamara Marcisová,
2. tr. SVŠ, Bratislava

5. V rovině je dáno 5 bodů. Mezi přímkami, které spojují vždy dva z těchto bodů, neexistují žádné dvě, které jsou navzájem rovnoběžné nebo kolmé nebo splývající.

Každým z daných bodů vedeme kolmice ke všem spojnicím zbývajících čtyř bodů.

Určete maximální počet průsečíků, které mohou mít navzájem tyto kolmice. (Rumunsko — 7 bodů.)

Řešení. Dané body lze spojit $\binom{10}{2}$ přímkami, z nichž žádné dvě podle textu úlohy nejsou ani splývající, ani rovnoběžné, ani kolmé (jsou tedy kosé).

Zvolme jeden z pěti daných bodů; pak 4 zbývající body mají 6 spojnic a zvoleným bodem k nim prochází 6 kolmic. Žádné dvě z nich nesplynou (jinak by dvě ze šesti spojnic splývaly nebo byly rovnoběžné) a žádná z těchto kolmic neprochází žádným ze čtyř zbývajících bodů (jinak by byly dvě spojnice daných bodů navzájem kolmé). Nesplynou však ani dvě kolmice příslušné ke dvěma různým z daných bodů; pak by totiž byly dvě spojnice daných bodů navzájem kolmé.

Každým z pěti daných bodů prochází proto 5 kolmic, což je celkem $6 . 5 = 30$ kolmic. Jestliže žádné dva z jejich průsečíků nesplynou, máme $\binom{30}{2} = 435$ průsečíků. Ale každým z pěti daných bodů prochází 6 kolmic; tím vždy $\binom{6}{2} = 15$ průsečíků splývá v jeden a odpadne tak $14 . 5 = 70$ průsečíků, takže jich zbývá $435 - 70 = 365$.

Vedeme-li dvěma z daných bodů kolmice k téže spojnici zbývajících tří z daných bodů, nemají tyto přímky průsečík, neboť jsou rovnoběžné a různé. Ke každé spojnici dvou daných bodů lze ze tří zbývajících vést 3 různé kolmice a z nich lze sestavit $\binom{3}{2} = 3$ dvojice;

žádná z nich nedává průsečík. Spojnic je $\binom{5}{2} = 10$, takže odpadne $3 \cdot 10 = 30$ průsečíků. Zbývá tedy $365 - 20 = 335$ průsečíků.

Každé tři z daných bodů určují trojúhelník a tvoří jeho vrcholy. Tři výšky tohoto trojúhelníku nemají celkem 3 průsečíky, nýbrž jen jeden (ortocentrum). Z pěti daných bodů jako vrcholů lze zkombinovat $\binom{5}{3} = 10$ trojúhelníků; každý z nich sníží počet hledaných průsečíků o dva, celkem tedy odpadne $2 \cdot 10 = 20$ průsečíků a zbývá $335 - 20 = 315$ průsečíků.

Maximální počet průsečíků je 315 (včetně pěti daných bodů).

Řešil Miloslav Znojil, 3. roč. SVVŠ, Prostějov

6. V daném čtyřstěnu $ABCD$ spojíme vrchol D s těžištěm D_1 trojúhelníku ABC. Rovnoběžky k přímce DD_1, vedené body A, B, C, protínají po řadě roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_1, B_1, C_1.

a) Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

b) Platí tento výsledek i v případě, kdy D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC? (Polsko — 6 + 3 body.)

Řešení (obr. 41). a) Bod A_1 je určen jako průsečík přímky $a \parallel DD_1$ vedené bodem A s rovinou $\varrho_1 \equiv BCD$. Rovina ADD_1 obsahuje přímku a a přímku $A'D$, kde A' je střed hrany BC. Z trojúhelníku $A'AA_1$ odvodíme

$$AA_1 = 3DD_1; \qquad (1)$$

je totiž $A'D_1 = \frac{1}{3}AA'$, $\triangle A'AA_1 \sim \triangle A'D_1D$.

Protože je $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 3DD_1$, $AA_1 // BB_1 // CC_1 // DD_1$, je

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \; (sss); \tag{2}$$

čtyřúhelníky ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1 jsou totiž rovnoběžníky. Výšky v, v_1 čtyřstěnů $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ vedené po řadě z vrcholů D, D_1 jsou v poměru 1 : 3, tj. platí

$$v : v_1 = 1 : 3. \tag{3}$$

Vztah (3) dokážeme takto: Ze stejnolehlosti trojúhelníků $\triangle A'AA_1$, $\triangle A'D_1D$ a ze vztahu (1) vyplývá

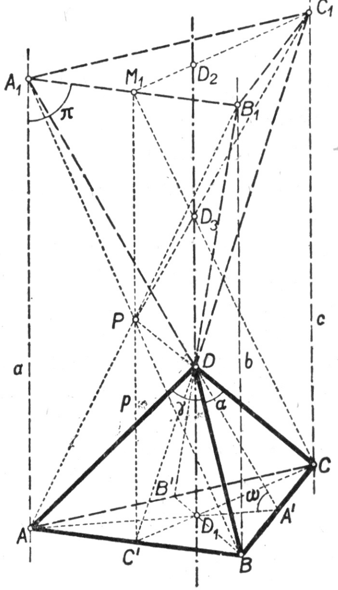
$$A'A_1 = 3A'D. \tag{4}$$

Je-li ω odchylka přímky $A'D$ od roviny ABC, platí pro výšku v čtyřstěnu $ABCD$ a pro vzdálenost u bodu A_1 od roviny ABC vztahy

$$v = A'D \sin \omega,$$
$$u = A'A_1 \sin \omega,$$

tj. podle (4)

$$v : u = 1 : 3. \tag{5}$$



Obr. 41.

Roviny ABC, $A_1B_1C_1$ jsou rovnoběžné; proto vzdálenost u bodu A_1 od roviny ABC je rovna vzdálenosti bodu D_1 od roviny $A_1B_1C_1$, tj. výšce v_1 čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

Je tedy

$$u = v_1. \qquad (6)$$

Spojením vztahů (5), (6) dostaneme (3). Pro objemy V, V_1 čtyřstěnů $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ vyjde vzhledem k (2), (3)

$$V = \frac{1}{3} p \,.\, v, \qquad V_1 = \frac{1}{3} p \,.\, 3v = 3V;$$

přitom p značí společný obsah trojúhelníků ABC, $A_1B_1C_1$.

Tím je tvrzení věty dokázáno.

b) Označme A', B', C' průsečíky přímek AD_1, BD_1, CD_1 po řadě s přímkami BC, CA, AB; dále označme α, β, γ roviny stěn DBC, DCA, DAB a a, b, c rovnoběžky s přímkou DD_1, vedené po řadě body A, B, C. Průsečík A_1 přímky a s rovinou α leží na přímce DA' a existuje, neboť přímky DD_1, DA' jsou různoběžné a platí $a /\!/ DA'$; stejně vždy existují body B_1, C_1 po řadě na přímkách DB', DC'. Roviny α, $\pi \equiv ABB_1A_1$ mají společné body B, A_1, takže BA_1 je jejich průsečnice. Označme P průsečík rovin α, π, CDC'; bod P je tedy průsečíkem přímek BA_1, p ležících v π, kde $p /\!/ DD_1$ prochází bodem C'.

Přímka AP leží v rovině β, neboť bod A a přímka $CP \equiv CD$ leží v β. Proto je přímka AP průsečnicí rovin β, π, a protože bod B leží v π, prochází přímka AP bodem B_1. Přímka $p \equiv PC'$ má s úsečkou A_1B_1 společný bod M_1 a přímka DD_1, ležící v rovině CC_1M_1C', má s úsečkou C_1M_1 společný bod D_2. Označme D_3 společný bod přímky D_1D_2 s úsečkou C_1P. Ve čtyřúhelníku ABB_1A_1 platí $AA_1 /\!/ BB_1$ a P je průsečík jeho úhlopříček; proto je $PC' \equiv PM_1$, jak snadno odvodíme užitím stejnolehlostí o středech B, B_1 a s konstantami rovnými poměru vzdáleností přímek a, b a přímek p, b (Vlastnost lichoběžníku nebo rovnoběžníku, že průsečík P jeho úhlopříček je středem jeho příčky M_1C' — viz obr. 41 — pro další úvahu označme věta 1.)

Úsečky PC', CC_1 jsou stejnolehlé podle bodu D a úsečky PM_1, C_1C s nimi shodné jsou stejnolehlé podle bodu D_3 (konstanta obou stejnolehlostí je $\frac{DP}{DC} = \frac{D_3P}{D_3C_1}$; proto je D_3 průsečíkem úhlopříček PC_1, CM_1 čtyřúhelníku CC_1M_1P. Proto podle věty 1 platí $DD_1 = DD_3$ (viz lichoběžník nebo rovnoběžník CC_1PC') a podle téže věty $DD_3 = D_3D_2$ (lichoběžník nebo rovnoběžník CC_1M_1P); je tedy $DD_1 = DD_3 = D_3D_2$. Proto je

$$D_1D_2 = 3DD_1.$$

Čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ lze rozložit ve tři čtyřstěny $A_1B_1D_2D_1$, $B_1C_1D_2D_1$, $C_1A_1D_2D_1$, které mají po řadě objemy rovné objemům čtyřstěnů ABD_1D_2, BCD_1D_2, CAD_1D_2 (např. čtyřstěny $A_1B_1D_2D_1$, ABD_1D_2 mají zřejmě stejné obsahy podstav $A_1D_1D_2$, AD_1D_2 a k nim příslušné délky výšek vedených po řadě vrcholy B_1, B jsou rovněž stejné).

Proto mají čtyřstěny $A_1B_1C_1D_1$ a $ABCD_2$ sobě rovné objemy. Avšak druhý z těchto čtyřstěnů má objem třikrát větší než čtyřstěn $ABCD$, s nímž má společnou podstavu ABC, přičemž výšky těchto čtyřstěnů jsou v témž poměru jako úsečky D_1D_2, D_1D, o nichž platí $D_1D_2 = 3D_1D$. Tím je platnost tvrzení úlohy rozšířena i na případ, že D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC.

Připomínka. Úlohu b) v podstatě rozřešili jen asi 3 žáci; jinak byla podána řada řešení úlohy a) asi tak, jak je uvedeno v odst. a).