IV. Riešenia úloh zo súťaže

1. *ÚLOHY I. KOLA KATEGÓRIE A*

1. Udajte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré číslo $n^8 - n^2$ nie je deliteľné číslom 504.

Riešenie. Číslo $N = n^8 - n^2$ je deliteľné číslom $504 = 7 . 8 . 9$ práve vtedy, keď je deliteľné každým z činiteľov 7, 8, 9, pretože každé dve z týchto čísel sú nesúdeliteľné. Pri vyšetrovaní deliteľnosti čísla N číslami 7, 8, 9 vyjadríme n postupne takto:

$$n = 7k_1 + z_1, \; n = 8k_2 + z_2, \; n = 9k_3 + z_3, \qquad (1)$$

kde k_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) sú nezáporné celé čísla a platí:

$$z_1 \leqq 6, \quad z_2 \leqq 7, \quad z_3 \leqq 8.$$

Ak do N dosadíme z (1) za n, zistíme, že číslo N je deliteľné siedmimi (ôsmimi, deviatimi) práve vtedy, ak je týmto číslom deliteľné číslo $z_1^8 - z_1^2$ ($z_2^8 - z_2^2$, $z_3^8 - z_3^2$).

Preveďme rozklad

$$z^8 - z^2 = z^2 (z^3 - 1) . (z^3 + 1)$$

a zostavme pomocou neho tabuľku (viď str. 33).

Z tejto tabuľky je vidieť, že každé z čísel $z^8 - z^2$ pre $0 \leqq z \leqq 8$ je deliteľné siedmimi a deviatimi; ôsmimi sú čísla $z^8 - z^2$ deliteľné len pre $z = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8$. To

z	$z^8 - z^2$	z	$z^8 - z^2$
0	0	5	25 . 124 . 126
1	0	6	36 . 215 . 217
2	4 . 7 . 9	7	49 . 342 . 344
3	9 . 26 . 28	8	64 . 511 . 513
4	16 . 63 . 65		

znamená, že číslo N nie je deliteľné číslom 504 práve vtedy, keď má číslo n tvar

$$n = 8k + 2$$

alebo

$$n = 8k + 6,$$

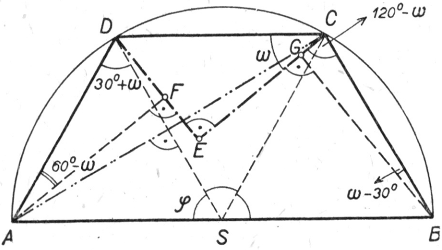
kde k je ľubovoľné celé nezáporné číslo.

2. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, o jehož základně AB platí $AB = 2BC = 2CD$. Uvnitř lichoběžníku nad úsečkou CD jako přeponou sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE, pro jehož úhel ω při vrcholu C platí $30° < \omega < 60°$. Označme F, G paty kolmic vedených po řadě body A, B k přímkám DE, CE.

Vypočtěte poměr obsahů obrazce $ABGEF$ a lichoběžníku $ABCD$ užitím úhlu ω a vyšetřte, kdy je tento poměr minimální.

Řešení (obr. 1). Je-li S střed úsečky AB a φ velikosti shodných úhlů $\sphericalangle ASD$, $\sphericalangle BSC$, je $ASCD$ rovnoběžník (je $AS = CD$, $AS \parallel CD$); v něm platí $\sphericalangle SAD = 180° - 2\varphi$ (úhel proti základně SD rovnoramenného trojúhelníku ASD, v němž podle textu úlohy je $AS = AD$), a tedy $\sphericalangle ASC = 2\varphi$ (jde o úhly přilehlé ke straně AS

rovnoběžníku $ASCD$). Je proto nutně $\sphericalangle CSD = \varphi$. Ze souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ vzhledem k jeho ose plyne, že i $\sphericalangle BCS = \varphi$; proto je $\varphi = \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°$. Trojúhelníky ASD, BSC, SCD jsou proto vesměs rovnostranné a shodné. Bod E tedy vždy leží uvnitř trojúhelníku SCD a body F, G vždy po řadě padnou dovnitř úseček ED, EC.



Obr. 1.

Označme P obsah lichoběžníku $ABCD$, P_1, P_2, P_3 po řadě obsahy trojúhelníků CDE, ADF, BCG a P_4 obsah obrazce $ABGEF$ z textu úlohy. Je-li $\sphericalangle ECD = \omega$, potom snadno vypočteme, že $\sphericalangle CBG = \omega - 30°$, $\sphericalangle ADF = \omega + 30°$. Položme $CD = 1$, takže $AD = BC = 1$, $AB = 2$. Pak je

$$P = 3 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{4} \sqrt{3}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \sin \omega \cos \omega,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \sin (\omega - 30°) \cos (\omega - 30°) =$$

$$= \frac{1}{8} (\sin 2\omega - \sqrt{3} . \cos 2\omega),$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\sin(\omega + 30°)\cos(\omega + 30°) =$$
$$= \frac{1}{8}(\sin 2\omega + \sqrt{3}\,.\cos 2\omega).$$

Vypočteme poměr

$$x = \frac{1}{P}(P - P_1 - P_2 - P_3) = 1 - \frac{1}{P}(P_1 + P_2 + P_3) =$$
$$= 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}}(2\sin 2\omega + \sin 2\omega - \sqrt{3}\cos 2\omega + \sin 2\omega + \sqrt{3}\cos 2\omega) =$$
$$= 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}}\,.\,4\sin 2\omega.$$

Hledaný poměr tedy je

$$x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2\omega. \qquad (1)$$

Minimum nastane, je-li druhý člen na pravé straně v (1) maximální, tj. je-li $\sin 2\omega = 1$ neboli je-li (jde o ostrý úhel ω)

$$\omega = 45°;$$

pak je $x = 1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \doteq 0{,}6$. Tím je řešení provedeno.

Podle řešení Jiřího Kabele, 3. roč.
SVVŠ, Křesomyslova ul., Praha 4

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je menší než jeho rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA, CB po řadě body X, Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC.$$

Vyšetřte geometrické místo bodů Z.

Řešení (obr. 2). V trojúhelníku ABC označme $AC = BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$; je tedy

$$a > c, \quad \alpha > \gamma, \quad \alpha < 90°, \quad \gamma < 90°,$$
$$\alpha + \gamma = 180° - \alpha > 90°.$$

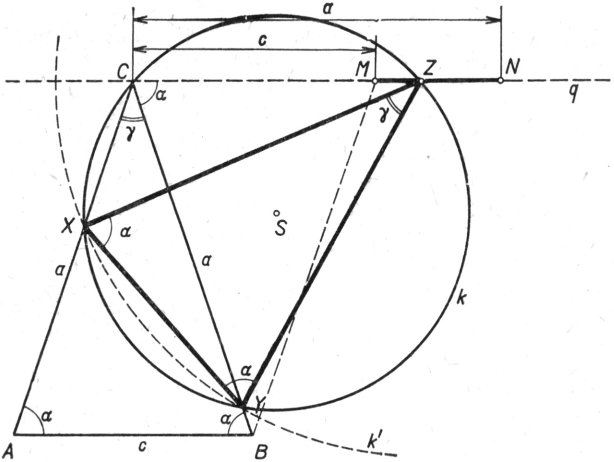
Je-li XYZ trojúhelník splňující požadavky textu úlohy, platí

$$ZX = ZY = a, \quad XY = c, \quad \sphericalangle X = \sphericalangle Y = \alpha, \quad \sphericalangle Z = \gamma.$$

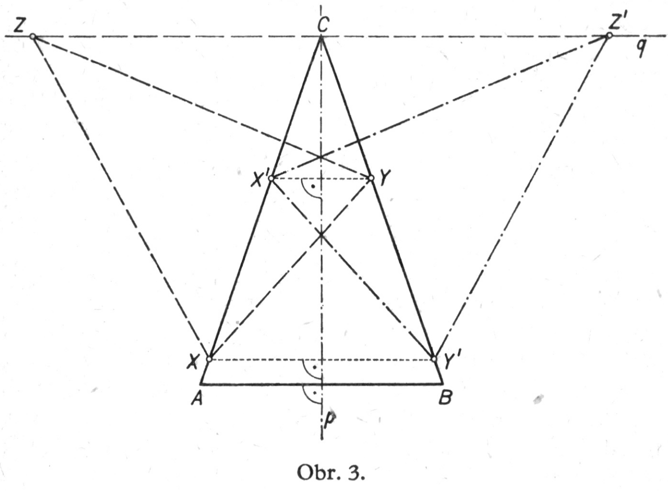
Body X, Y, Z, C jsou vesměs navzájem různé a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle ACB = \gamma$. Podle textu úlohy leží body C, Z v téže polorovině vyťaté přímkou XY a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle XZY$; proto body C, Z leží na větším oblouku jisté kružnice k, která prochází body X, Y. Jsou tedy X, Y, Z, C vrcholy jistého tětivového čtyřúhelníku a jsou dvě možnosti:

a) Body X, Z jsou odděleny přímkou BC (obr. 2).

b) Body X, Z padnou do téže poloroviny vyťaté přímkou BC, a protože v tětivovém čtyřúhelníku každá z úhlopříček odděluje jeden pár jeho protějších vrcholů, jsou nutně body Y, Z odděleny přímkou $AC \equiv XC$. Je-li p osa úsečky AB (obr. 3), označme $Y'X'CZ'$ obraz uvažovaného tětivového čtyřúhelníku $XYCZ$ v souměrnosti o ose p, takže X, Y' a Y, X' jsou dvojice souměrně sdružených bodů a CA, CB souměrně sdružené přímky. Tu body X', Y' po řadě padnou dovnitř úseček CA, CB, trojúhelník $X'Y'Z'$ patří k případu a) a body X', Z' (což jsou obrazy bodů Y, Z) jsou odděleny přímkou BC. Tím je případ b) převeden na případ a). Postačí tedy omezit se v dalším na případ a) a na výsledky užít souměrnosti vzhledem k přímce p.



Obr. 2.



Obr. 3.

Bod Z čtyřúhelníku $XYZC$ leží v polorovině opačné k polorovině BCA. Úhly obvodové $\sphericalangle YXZ = \alpha$, $\sphericalangle YCZ$ v kružnici k leží v téže polorovině vyťaté přímkou YZ, takže jsou shodné, a proto jsou shodné i střídavé úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle YCZ \equiv \sphericalangle BCZ$; odtud plyne, že je $CZ \| AB$ a že bod Z leží na jisté polopřímce q s počátkem C. Označme M ten bod polopřímky q, pro nějž platí

$$CM = c.$$

To znamená, že čtyřúhelník $ABMC$ je rovnoběžník. Dále sestrojme na polopřímce CM bod N tak, aby platilo

$$CN = a;$$

leží tedy bod M uvnitř úsečky CN.

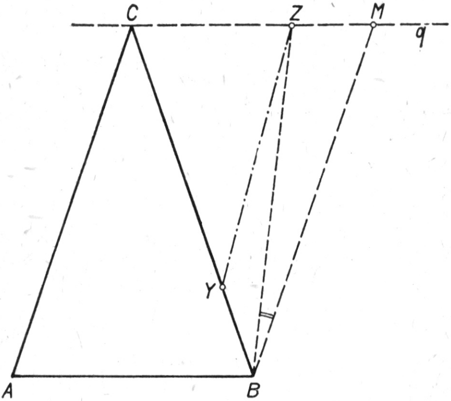
Dokážeme, že každý bod Z hledaného geometrického místa padne dovnitř úsečky MN (obr. 2). Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme nejprve, že bod Z náleží úsečce CM (obr. 4). Je-li $Z \equiv C$ nebo $Z \equiv M$, pak kružnice $k' \equiv (Z; a)$ prochází bodem B, tj. $Y \equiv B$ proti předpokladu. Leží-li bod Z mezi body C, M, je podle známé věty $ZB < CB = MB = a$; bod B — a ovšem i body C, M — leží uvnitř kružnice k' a vrchol Y nemůže náležet straně BC.

Předpokládejme za druhé, že bod Z náleží prodloužení úsečky CN za bod N. Je-li $Z \equiv N$, prochází kružnice k' vrcholem C a je tedy $X \equiv C$ proti předpokladu. Je-li $Z \not\equiv N$, pak pro všecky body X strany AC platí $ZX > ZC > a$ (úhel $\sphericalangle ZCA$ je totiž tupý) a kružnice k' nemá s úsečkou AC vůbec žádný společný bod.

Dokážeme nyní, že každý bod Z ležící mezi body MN je vrcholem jednoho z vyšetřovaných trojúhelníků XYZ (obr. 2). Sestrojíme opět kružnici $k' \equiv (Z; a)$; pro ni je vrchol C bodem vnitřním, neboť je $ZC < NC = a$.

Vrchol A je pro kružnici k' bodem vnějším; trojúhelník ACZ je totiž tupoúhlý ($\sphericalangle ACZ > 90°$), proto je $ZA > AC = a$. Kružnice k' protne tedy úsečku AC v jejím vnitřním bodě X. Trojúhelníku XCZ opišme kružnici k; polopřímka CB prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle XCZ$, protíná úsečku XZ v jejím vnitřním bodě, a tudíž i kružnici k



Obr. 4.

v jistém bodě $Y \not\equiv C$. Body X, Y, Z, C kružnice k jsou vesměs navzájem různé a jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníku; přitom X, Z jsou přímkou BC odděleny; vznikne tedy čtyřúhelník $XYZC$, takže C, Z jsou sousedními vrcholy tohoto čtyřúhelníku. Proto je $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XCY = \gamma$ (obvodové úhly v kružnici k nad tětivou XY); stejně platí $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YCZ = \alpha$. Je tedy $XZ = AC$, $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle XZY = \sphericalangle ACB$, a proto je $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$. Odtud plyne $ZY = CB = a$. Protože je $ZY = a$, leží bod Y na kružnici k'. Bod B je však vnějším bodem kružnice k'; protože $\sphericalangle BZN > \sphericalangle BMN >$

$> 90°$, je $ZB > BM = a$. Trojúhelník XYZ je tedy skutečně jedním z vyšetřovaných trojúhelníků.

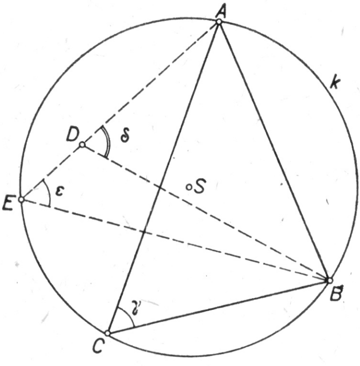
Závěr. Geometrickým místem bodů Z jsou dvě úsečky MN, $M'N'$ souměrně sdružené podle osy p úsečky AB, přičemž konstrukce úsečky MN je v tomto řešení popsána.

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

4. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.

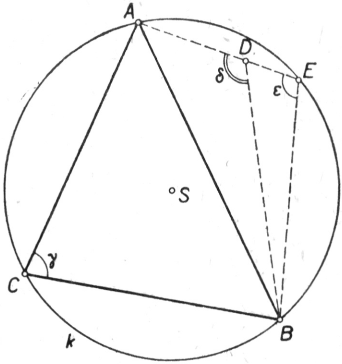
Dokažte, že lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů a že přitom žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice.

Řešení. Podle textu úlohy žádné tři z daných bodů neleží v téže přímce; proto žádné dva z daných n bodů nesplývají. Označme A, B ($A \neq B$) takové dva z daných bodů, pro které vzdálenost AB není větší než vzdálenost kterékoli dvojice z daných n bodů (jsou-li M, N dva libovolné různé body dané n-tice, platí tedy $MN \geqq AB$); označme $\mathbf{U}$ množinu $n - 2$ bodů, která se skládá z těch daných n bodů, od nichž jsme odňali body A, B. Je-li X bod množiny $\mathbf{U}$, potom vzniká trojúhelník ABX s ostrým úhlem $\xi \equiv$



Obr. 5.

$\equiv \sphericalangle AXB$, neboť žádná ze stran AX, BX není menší než strana AB; vzniká tak množina $n - 2$ takových ostrých zorných úhlů ξ, pod nimiž je vidět úsečku AB z bodů X. Označme γ ten z $(n - 2)$ úhlů ξ, který není větší než kterýkoli zbývající; příslušný bod X označme C. Buď k kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Uvnitř této kružnice již neleží žádný z bodů množiny $\boldsymbol{U}$. To dokážeme sporem: Jestliže je D bod množiny $\boldsymbol{U}$, který padne dovnitř kružnice k, potom je $\sphericalangle ADB > \gamma$. Toto tvrzení je patrné z obr. 5, pokud bod D leží v polorovině ABC (o vnějším úhlu $\delta \equiv \sphericalangle ADB$ trojúhelníku ABE platí $\delta > \varepsilon = \gamma$). Jestliže bod D leží v polorovině opačné k polorovině ABC (obr. 6), platí $\delta > \varepsilon = 180° - \gamma > 90°$ (protější úhly v tětivovém čtyřúhelníku), tj. $\delta > 90°$, což však vzhledem k tomu, že zorné úhly ξ jsou ostré, nemůže vůbec nastat. Tím je důkaz proveden a žádný z daných n bodů tedy nepadne dovnitř kružnice k.



Obr. 6.

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

5. Sú dané dve kvadratické nerovnosti

$$\left.\begin{aligned} x^2 + p_1x + q_1 < 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kde p_1, p_2, q_1, q_2 sú dané reálne čísla a platí $q_1 < 0$, $q_2 < 0$. Dokážte túto vetu:

Ak dané nerovnosti nemajú spoločné riešenie, potom platí:

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_1 q_2 - p_2 q_1) \leqq (q_1 - q_2)^2. \qquad (2)$$

Udajte príklad štyroch čísel p_1, p_2, q_1, q_2 tak, aby platila nerovnosť (2) a aby nerovnosti (1) mali spoločné riešenie.

Riešenie. (V ďalšom hovoríme len o reálnych číslach.) Funkcia $y = x^2 + p_1 x + q_1$ nadobúda hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_1 < x_2$, pretože diskriminant $D = p_1^2 - 4q_1$ rovnice $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ je kladný, pretože $q_1 < 0$. Z podobných dôvodov nadobúda funkcia $y = x^2 + p_2 x + q_2$ hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_3 < x_4$.

Sústava (1) je neriešiteľná práve vtedy, keď celý interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je obsiahnutý v intervale $\langle x_3, x_4 \rangle$ *); potom je

$$x_3 \leqq x_1, \quad x_2 \leqq x_4$$

čiže

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-p_2 - \sqrt{D'}) &\leqq \frac{1}{2}(-p_1 - \sqrt{D}), \\ \frac{1}{2}(-p_1 + \sqrt{D}) &\leqq \frac{1}{2}(-p_2 + \sqrt{D'}), \end{aligned} \qquad (3)$$

kde $D' = p_2^2 - 4q_2$ je diskriminant rovnice $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$. Z nerovností (3) vyplýva:

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geqq p_1 - p_2, \quad \sqrt{D'} - \sqrt{D} \geqq p_2 - p_1. \qquad (4)$$

Spojením vzťahov (4) dostávame

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geqq |p_1 - p_2|. \qquad (5)$$

---

*) Ako sa ľahko presvedčíme napr. z grafov kvadratických funkcií.

Teda, ak je sústava (1) neriešiteľná, platí vzťah (5) a tým aj

$$D + D' - 2\sqrt{DD'} \geqq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2$$

čiže

$$p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geqq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 + 2\sqrt{DD'},$$

skadiaľ

$$\sqrt{DD'} \leqq p_1p_2 - 2(q_1 + q_2), \qquad (6)$$

kde je na oboch stranách kladné číslo.

Umocnením vzťahu (6) dostaneme

$$DD' \leqq [p_1p_2 - 2(q_1 + q_2)]^2,$$

skadiaľ po dosadení za $D = p_1^2 - 4q_1$, $D' = p_2^2 - 4q_2$ a po jednoduchej úprave vyplýva nerovnosť (2).

Tým je veta dokázaná.

Príklad, kedy túto vetu nemožno obrátiť, je tento: Pre

$$p_1 = 0,\ q_1 = -1,\ D = 4;\ p_2 = -\frac{1}{3},\ q_2 = -\frac{1}{2},$$

$$D' = \frac{19}{36}$$

nie je splnenie nerovnosti (2) postačujúcou podmienkou pre neriešiteľnosť sústavy (1). V tomto prípade totiž sústava (1) má riešenie $-\frac{3}{4}$ aj napriek tomu, že je vzťah (2) splnený.

6. Je dán rotační kužel, jehož podstava má poloměr 1 a jehož strana má od roviny podstavy odchylku 2ω, kde

$\omega < \frac{1}{4}\pi$. Kuželi je vepsána koule K, která se dotýká pláště kužele i podstavy.

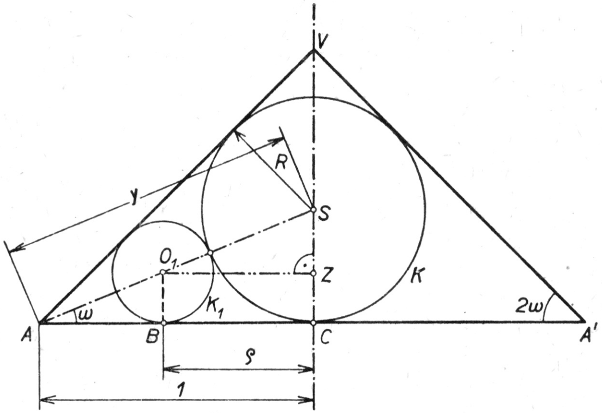
Dále je sestrojeno n shodných koulí, o nichž platí:

(1) Každá z nich se dotýká pláště a podstavy kužele i koule K (vnější dotyk).

(2) Každá z nich se dotýká dvou z těchto n koulí.

Najděte vztah mezi čísly n a ω a zjistěte, pro která n a ω může tato situace nastat.

Řešení. Označme S střed a R poloměr koule K, dále C střed podstavy a V vrchol daného kužele. Je-li A bod hrany kužele, je osovým řezem kužele vedeným tímto bodem rovnoramenný trojúhelník VAA' (viz obr. 7), ve kterém



Obr. 7.

je C střed jeho základny AA'. Označme y délku přepony AS pravoúhlého trojúhelníku ASC a ω velikost ostrého úhlu $\sphericalangle SAC$.

Platí

$$CS = R = \operatorname{tg} \omega, \quad y = AS = \frac{1}{\cos \omega}. \tag{1}$$

Koule K_1, jedna z n uvažovaných shodných koulí, má poloměr r a střed O_1 uvnitř úsečky SA. Z vnějšího dotyku koulí K, K_1 plyne

$$O_1S = R + r. \tag{1'}$$

Z vnějšího dotyku dvou sousedních shodných koulí K_1, K_2 o středech O_1, O_2 plyne vztah

$$O_1O_2 = 2r,$$

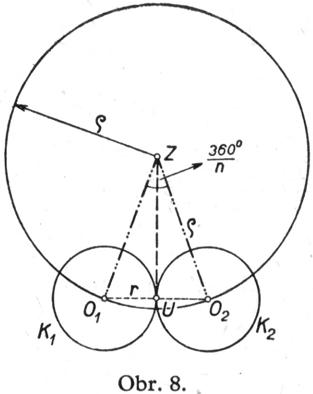
takže středy uvažovaných n shodných koulí jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku $O_1O_2 \ldots O_n$ o středu Z, délce strany $2r$ a o středovém úhlu velikosti $2\varepsilon = \frac{360°}{n}$ (viz obr. 8). Je-li U dotykový bod koulí K_1, K_2, je ZU osa rovnoramenného trojúhelníku ZO_1O_2, přičemž platí

$$\sin \varepsilon = \frac{r}{\varrho}, \tag{2}$$

kde $\varrho = ZO_1$.

Z trojúhelníku ABO_1, kde B je dotykový bod koule K_1 s rovinou podstavy daného kužele (viz obr. 7), dostáváme $\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{1 - \varrho}$ neboli

$$\varrho = \frac{\operatorname{tg} \omega - r}{\operatorname{tg} \omega}.$$



Obr. 8.

Dále je $\sin\omega = \dfrac{BO_1}{AO_1}$ neboli

$$\sin\omega = \frac{r}{AS - O_1S}.$$

Dosadíme-li sem z (1) a (1′), pak po úpravě obdržíme

$$r = \frac{\operatorname{tg}\omega\,(1 - \sin\omega)}{1 + \sin\omega}.$$

Ze vztahu (2) postupně dostáváme

$$\sin\varepsilon = \frac{r}{\varrho} = \frac{r\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\omega - r} = \frac{1 - \sin\omega}{2\cos\omega}.$$

Položme pro stručnost $\sin\varepsilon = x$, přičemž je nutně $x > 0$; z předchozího vztahu vypočteme, že

$$x^2 = \frac{(1 - \sin\omega)^2}{4\,(1 - \sin^2\omega)} = \frac{1 - \sin\omega}{4\,(1 + \sin\omega)}$$

a odtud

$$\sin\omega = \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2}. \tag{3}$$

Vzhledem ke geometrickému významu úhlu $\sphericalangle VAC$ zřejmě platí vztah

$$0 < \omega < 45°,$$

a proto o čísle $\sin\omega$ ze (3) nutně platí vztahy

$$0 < \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2} < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Odtud pro číslo $x > 0$ dostáváme snadným výpočtem omezení

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

neboli

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,. \tag{4}$$

Odtud ze vztahu $\frac{1}{2} > \sin\varepsilon$ plyne $\varepsilon = \frac{180°}{n} < 30°$ neboli

$$n > 6;$$

skutečně pro $n > 6$ je $\sin\frac{180°}{n} < \frac{1}{2}$. Z druhé nerovnosti (4) dostaneme postupně

$$x > \frac{1}{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}} > \frac{1}{2}\sqrt{3-2\,.\,1{,}415} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0{,}17} > \frac{1}{2}\,.\,0{,}4 = 0{,}2 \tag{5}$$

a pomocí tabulek hodnot funkce sinus dostaneme

$$\frac{180°}{n} > 11{,}5°$$

neboli

$$n < \frac{180}{11{,}5} < 16,$$

a tedy $n < 16$.

Pro $n = 15$ je $\varepsilon = \frac{180°}{15} = 12°$ a z tabulek dostaneme $\sin 12° > 0{,}207$.

Protože (viz tabulky druhých mocnin)

$$\frac{1}{2}\sqrt{3-2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\sqrt{3-2\,.\,1{,}414} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0{,}172} < \frac{1}{2}\sqrt{0{,}172\,225} = \frac{1}{2}\,.\,0{,}415 \doteq 0{,}207,$$

je vztah (5) již pro $n = 15$ skutečně splněn.

Přípustné hodnoty pro číslo n jsou tedy přirozená čísla 7 až 15. Příslušný kužel je pak dán poloměrem r a hodnotou ω, určenou vztahem (3) a požadavkem $0 < \omega < 45°$.

Podle řešení Břetislava Vernera, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

2. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A*

1. Je dána funkce

$$y = \frac{x(1-2x)}{2-3x}. \tag{1}$$

Načrtněte její graf a výpočtem zjistěte, kterých reálných hodnot y tato funkce nenabývá.

Řešení. I. Z dané rovnice (1) plyne, že pro $2 - 3x = 0$ neboli pro

$$x = \frac{2}{3} \tag{2}$$

není y definováno. V dalším proto je $x \neq \frac{2}{3}$.

Abychom mohli načrtnout graf, vyšetříme především, kdy je $y = 0$; z (1) plyne, že $y = 0$ pro $x(1 - 2x) = 0$, a tedy

$$x = 0 \text{ anebo } x = \frac{1}{2}.$$

Máme tedy dva body grafu

$$[0,\ 0],\quad \left[\frac{1}{2},\ 0\right].$$

Těchto hodnot užijeme nyní ke zkoumání znaménka čísla y, a to tak, že určíme znaménka čísel

$$x;\ 1 - 2x;\ 2 - 3x \tag{3}$$

a budeme na základě toho zkoumat znaménko zlomku na pravé straně v (1):

[1] Nechť je $x < 0$, a tedy $1 - 2x > 0$, $2 - 3x > 0$: pak je $y < 0$.

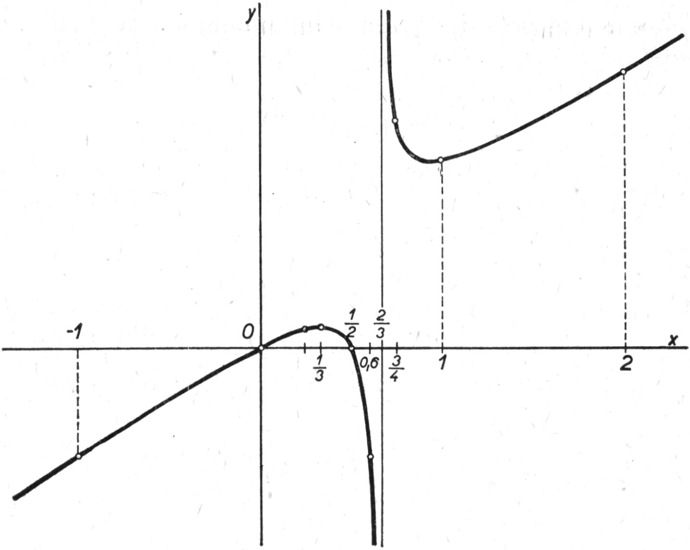
[2] Nechť je $0 < x < \frac{1}{2}$; pak je $1 - 2x > 0$; $2 - 3x > 0$, a tedy $y > 0$.

[3] Nechť je $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$; $2 - 3x > 0$, a tedy $y < 0$.

[4] Nechť je $\frac{2}{3} < x$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$; $2 - 3x < 0$, a tedy $y > 0$.

Těchto výsledků užijeme k načrtnutí grafu (obr. 9); dříve však ještě sestavme tuto tabulku hodnot dané funkce:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0{,}6$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$\frac{-5}{4} = -1{,}25$	$\frac{-3}{5} = -0{,}6$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9} > 0{,}1$	0	$-0{,}6$	není definováno	$\frac{6}{5} = 1{,}2$	1	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
	[1] záporné y			[2] kladné y			[3] záporné y		[4] kladné y		



Obr. 9.

II. Pro $x \neq \frac{2}{3}$ dostaneme znásobením obou stran rovnice (1) číslem $2 - 3x$ po úpravě kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (3y + 1)\,x + 2y = 0.$$

Hledáme taková y, pro která neexistuje příslušné x; to nastane právě tehdy, když diskriminant D této rovnice je záporný. Tu platí

$$D = (3y + 1)^2 - 16y = 9y^2 - 10y + 1 =$$
$$= (y - 1)(9y - 1).$$

Tento rozklad jsme získali řešením kvadratické rovnice $9y^2 - 10y + 1 = 0$. Diskriminant D je záporný pro y z intervalu

$$\frac{1}{9} < y < 1. \tag{4}$$

Závěr. Daná funkce nenabývá hodnot y z intervalu (4).

2. Nájdite všetky x z intervalu $0° \leqq x < 360°$, ktoré vyhovujú nerovnosti

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) \geqq (\sqrt{3} - 1)\sin 2x.$$

Riešenie. Danú nerovnosť postupne upravme takto:

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \\ + 2\sin x\cos x \geqq 0,$$

$$\cos x(\sin x + \cos x) - \sqrt{3}\sin x(\sin x + \cos x) \geqq 0,$$

$$(\sin x + \cos x)\,.\,(\cos x - \sqrt{3}\sin x) \geqq 0. \tag{1}$$

Sú dve možnosti [1], [2].

Prípad [1]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \geqq 0,\ \cos x - \sqrt{3}\sin x \geqq 0. \tag{2}$$

a) Nech je $\sin x > 0$. Tým sa obmedzujeme na interval $(0°, 180°)$. Vynásobením nerovností (2) číslom $\frac{1}{\sin x}$ dostaneme, že o čísle x platí súčasne

$$\operatorname{cotg} x \geqq -1,\ \operatorname{cotg} x \geqq \sqrt{3}. \tag{3}$$

Prvej z týchto nerovností vyhovujú čísla z intervalu $(0°, 135°\rangle$, druhej čísla z intervalu $(0°, 30°\rangle$; spoločnou časťou oboch uvedených intervalov je interval $(0°, 30°\rangle$.

Vzhľadom na to, že nerovnostiam (3) vyhovuje i $x = 0°$, je riešenie danej nerovnosti v tomto prípade určené intervalom

$$\langle 0°, 30° \rangle. \tag{4}$$

b) Nech je $\sin x < 0$, čiže nech x leží v intervale $(180°, 360°)$. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnosti

$$\operatorname{cotg} x \leqq -1, \ \operatorname{cotg} x \leqq \sqrt{3},$$

ktoré majú riešenia v intervaloch $\langle 315°, 360°)$, resp. $\langle 210°, 360°)$, a riešenie danej nerovnosti je určené intervalom

$$\langle 315°, 360°). \tag{5}$$

P r í p a d [2]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \leqq 0, \ \cos x - \sqrt{3} \sin x \leqq 0. \tag{6}$$

a) Pre $\sin x > 0$, t.j. pre x z intervalu $(0°, 180°)$, dostaneme z nerovností (6) nerovnosti

$$\operatorname{cotg} x \leqq -1, \ \operatorname{cotg} x \leqq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $\langle 135°, 180°)$, $\langle 30°, 180°)$, k čomu možno pripojiť i $x = 180°$. Máme teda interval

$$\langle 135°, 180° \rangle. \tag{7}$$

b) Pre $\sin x < 0$, t.j. pre x z intervalu $(180°, 360°)$, sa od nerovností (6) dostaneme k nerovnostiam

$$\operatorname{cotg} x \geqq -1, \ \operatorname{cotg} x \geqq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $(180°, 315° \rangle$, $(180°, 210° \rangle$, ku ktorej pripojíme aj $x = 180°$ a dostaneme interval

$$\langle 180°, 210° \rangle. \tag{8}$$

Záver. Danej nerovnosti vyhovujú všetky čísla z intervalov [viď (4), (7), (8), (5)] :

$$\langle 0°, 30° \rangle, \langle 135°, 210° \rangle, \langle 315°, 360°).$$

Podľa riešenia Pavla Hella, 4. tr.
SPŠ hutnícka, Košice

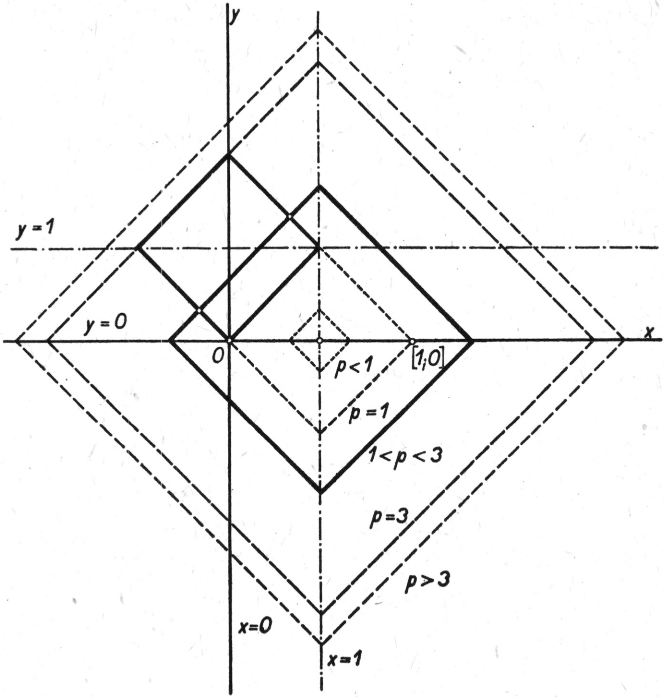
3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y - 1| = 1$, a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x - 1| + |y| = p$, kde p je reálný parametr. Užitím výsledku grafického znázornění pak výpočtem řešte soustavu rovnic

$$|x| + |y - 1| = 1, \quad |x - 1| + |y| = p. \tag{1}$$

Řešení. I. Množina bodů příslušná k první rovnici je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 0$, $y = 1$ a mají délku 2. Množina bodů příslušná k druhé rovnici pro $p > 0$ je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 1, y = 0$ a mají délku $2p$. Řešením soustavy (1) jsou souřadnice bodů společných oběma obvodům. Pro kladné hodnoty p lze z grafu vyčíst tento výsledek (obr. 10):

a) $p < 1$: úloha nemá řešení;
b) $p = 1$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
c) $1 < p < 3$: úloha má dvě řešení;
d) $p = 3$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
e) $p > 3$: úloha nemá řešení.

II. Početní řešení soustavy. Pro $p \leqq 0$ je úloha neřešitelná: pro $p < 0$ nemá druhá rovnice (1) řešení; pro $p = 0$ má druhá rovnice (1) jediné řešení $x = 1$, $y = 0$, to však nevyhovuje první rovnici (1). V dalším budeme předpokládat, že je $p > 0$.



Obr. 10.

Z první rovnice (1) vyplývá, že pro každé řešení soustavy platí $x \leqq 1$, $y \geqq 0$. (Kdyby bylo $x > 1$, bylo by $|x| > 1$; kdyby bylo $y < 0$, bylo by $|y - 1| > 1$.) Je tedy $x - 1 \leqq 0$, $y \geqq 0$ a druhou rovnici (1) lze psát ve tvaru

$$1 - x + y = p$$

neboli

$$y = x + p - 1. \tag{1'}$$

Odtud vyjádříme $y - 1$ a dosadíme do první rovnice (1); vyjde

$$|x| + |x + p - 2| = 1. \tag{2}$$

Nyní rozlišíme čtyři případy:

[1] $x + p - 2 \geqq 0,\ x \geqq 0$
[2] $x + p - 2 \geqq 0,\ x \leqq 0$
[3] $x + p - 2 \leqq 0,\ x \geqq 0$
[4] $x + p - 2 \leqq 0,\ x \leqq 0$

V případě [1] rovnice (2) zní $2x + p - 2 = 1$ a odtud plyne

$$x = \frac{1}{2}(3 - p),\ y = \frac{1}{2}(p + 1) \tag{3}$$

[vzorec pro y jsme dostali z (1′)].

V případě [2] rovnice (2) zní $p - 2 = 1$; je tedy

$$p = 3,\ y = x + 2. \tag{4}$$

V případě [3] rovnice (2) zní $2 - p = 1$; je tedy

$$p = 1,\ y = x. \tag{5}$$

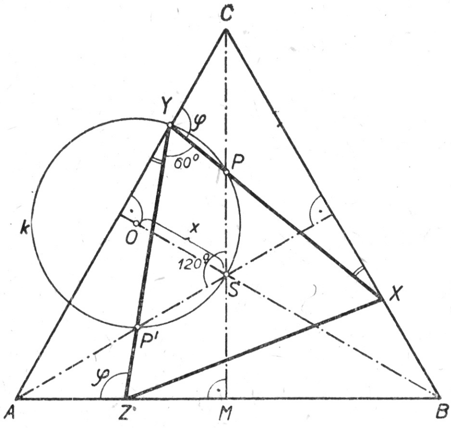
V případě [4] rovnice (2) zní $-2x - p + 2 = 1$, odtud

$$x = \frac{1}{2}(1 - p),\ y = \frac{1}{2}(p - 1). \tag{6}$$

Nyní probereme případy a) až e) pro parametr p a provedeme zkoušku.

V případě a) nevyhovuje žádné z řešení (3) až (6). V případě b) vyhovují řešení (5) a řešení (3), (6) — ovšem jen pro $p = 1$. V případě c) vyhovuje i řešení (3) i řešení (6) a jsou navzájem různá. V případě d) vyhovují řešení (4) a řešení (3), (6) — ovšem jen pro $p = 3$. V případě $p > 3$ nevyhovuje žádné z řešení (3), (6).

4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1 a bod P, který leží mezi průsečíkem výšek trojúhelníku ABC a bodem C.



Obr. 11.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník XYZ vepsaný trojúhelníku ABC tak, že vrcholy X, Y, Z leží po řadě na úsečkách BC, CA, AB a že strana XY prochází bodem P. Stanovte podmínku řešitelnosti.

Řešení (obr. 11). Označme $\sphericalangle CYP = \sphericalangle CYX = \varphi$; pak je $\sphericalangle CXY = 120° - \varphi$, $\sphericalangle AYZ = 180° - 60° - \varphi = 120° - \varphi$, tj. $\sphericalangle CXY = \sphericalangle AYZ$. Protože je $XY = YZ$, $\sphericalangle YCX = \sphericalangle ZAY = 60°$, je podle věty usu $\triangle XYC \cong \triangle YZA$, tj.

$$CY = AZ. \tag{1}$$

Dále je $\sphericalangle CYP = \sphericalangle AZP' = \varphi$; přitom P' je průsečík strany YZ s přímkou AS, kde S je průsečík výšek trojúhelníku ABC. Protože je $\sphericalangle YCP = \sphericalangle ZAP' = 30°$, je vzhledem k (1) podle věty usu $\triangle YCP \cong \triangle ZAP'$, tj. $CP = AP'$, a tedy i

$$SP = SC - CP = SA - AP' = SP'. \tag{2}$$

Z toho vyplývá, že bod P' vznikne z bodu P otočením kolem bodu S o úhel velikosti 120°. Bod Y náleží geometrickému místu bodů, z nichž je vidět úsečku PP' pod úhlem velikosti 60°, a to tomu oblouku, který leží v polorovině opačné k $PP'S$. Protože je $\sphericalangle PSP' = 120°$, náleží bod Y kružnici k opsané trojúhelníku $PP'S$.

V diskusi je třeba vyšetřit, za jakých podmínek má kružnice k s přímkou AC aspoň jeden společný bod. Střed O kružnice k je vrcholem kosočtverce $PSP'O$, složeného ze dvou rovnostranných trojúhelníků. Proto je $OS = SP = x$. Vzdálenost bodu O od přímky AC je dána výrazem

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{6} - x\right|,$$

neboť vzdálenost bodu S od přímky AC je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podmínka řešitelnosti úlohy je

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{6} - x\right| \leqq x,$$

tj.

$$\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}x + x^2 \leqq x^2$$

neboli

$$x \geqq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Střední příčka trojúhelníku ABC, spojující středy stran AC, BC, protíná výšku CM právě v bodě, jehož vzdálenost od bodu S je

$$\frac{1}{12}\sqrt{3} \left(= \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

3. *ÚLOHY III. KOLA KATEGÓRIE A*

1. Dokážte, že číslo $11^{100} - 1$ má dekadický zápis ukončený štvorčíslom 6000 a je deliteľné číslom 6000.

Riešenie. Keďže je $6\,000 = 3 \,.\, 2\,000$, musíme o čísle $N = 11^{100} - 1$ dokázať, že je deliteľné oboma nesúdeliteľnými číslami 2000 a 3.

Podľa binomickej vety platí

$$N = (10 + 1)^{100} - 1 = M + z, \tag{1}$$

kde M, z sú prirodzené čísla a platí (musíme si uvedomiť, že kombinačné čísla sú celé čísla)

$$\begin{aligned} M &= 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \ldots + \binom{100}{96} 10^4 + \\ &+ \binom{100}{97} 10^3 = 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \ldots + \\ &+ \binom{100}{4} 10^4 + \binom{100}{3} 10^3 = \\ &= 10^4 \,.\, a + 100 \,.\, 33 \,.\, 49 \,.\, 10^3 = 10^4 \,.\, b \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

(pritom a, b sú celé čísla),

$$\begin{aligned} z &= \binom{100}{98} 10^2 + \binom{100}{99} 10 = \binom{100}{2} 10^2 + \binom{100}{1} 10 = \\ &= 50 \,.\, 99 \,.\, 100 + 1\,000 = 496\,000. \end{aligned} \tag{3}$$

Dekadický zápis čísla M končí podľa (2) štyrmi nulami a podľa (3) je teda posledným štvorčíslím čísla N číslo 6000, takže je N deliteľné číslom 2000.

Ďalej platí

$$N = (12 - 1)^{100} - 1 = 12^{100} - \binom{100}{1} 12^{99} + \ldots -$$
$$- \binom{100}{1} 12 + 1 - 1 = 12P = 3 \,.\, 4P,$$

kde číslo P je celé (kombinačné čísla sú celé čísla). Číslo N je teda deliteľné tiež tromi.

Tým je dôkaz prevedený.

Podľa riešenia Petra Neuwirtha, 3. d tr.
SVŠ, Šrobárova 46, Košice

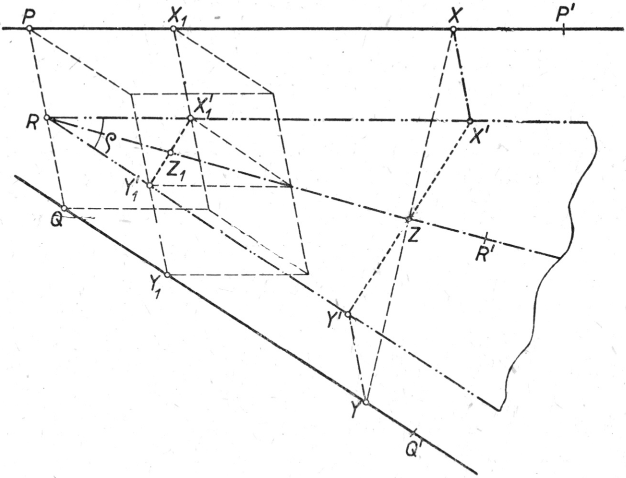
2. Jsou dány dvě mimoběžky $p = PP'$, $q = QQ'$. Bod X s počáteční polohou P se pohybuje po polopřímce PP' konstantní rychlostí c_1 a bod Y s počáteční polohou Q se pohybuje po polopřímce QQ' konstantní rychlostí c_2. Oba body se dají do pohybu současně.

Dokažte, že střed Z úsečky XY vždy leží na jisté polopřímce RR', kde R je střed úsečky PQ.

Řešení. V dalším užijeme známé věty **V**: „Jsou-li α, β dvě různé rovnoběžné roviny a X, Y libovolné body po řadě v těchto rovinách ležící, potom množinou všech středů Z úseček XY, když body X, Y po řadě probíhají roviny α, β, je rovina $\varrho // \alpha$, která má od každé z rovin α, β stejnou vzdálenost."

Je-li R střed úsečky PQ, veďme jím rovinu ϱ, kde $\varrho // PP'$, $\varrho // QQ'$ (obr. 12). Označme X, Y polohu uvažovaných bodů v čase $t > 0$ a X_1, Y_1 polohu těchto bodů v čase $t = 1$; potom snadno sestrojíme rovnoběžnostěn

T o hranách PQ, PX_1, QY_1; jeho dvě stěny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ (viz obr. 12). Středy úseček XY, X_1Y_1 po řadě označme Z, Z_1, kde Z_1 je středem rovnoběžnostěnu **T**, protože X_1Y_1 je jeho tělesová úhlopříčka;



Obr. 12.

bod Z_1 zřejmě leží v rovině ϱ. Sestrojme rovnoběžníky $PXX'R$, $PX_1X_1'R$, $QYY'R$, $QY_1Y_1'R$, přičemž první dva leží v rovině $\alpha \| \varrho$, druhé dva v rovině $\beta \| \varrho$; platí tedy

$$PR = QR = XX' = YY' = X_1X_1' = Y_1Y_1'.$$

Přitom trojúhelníky $RX_1'Y_1'$, $RX'Y'$ leží v rovině ϱ a platí $XX' \| PR$, $PR \| YY'$, takže je $XX' \| YY'$ a vedle toho $XX' = YY'$; v konvexním čtyřúhelníku $XX'YY'$ s průsečíkem Z úhlopříček jsou dvě protější strany XX', YY'

shodné a rovnoběžné; pak se snadno dokáže (např. užitím souměrnosti o středu Z), že $XX'YY'$ je rovnoběžník a že tedy platí $X'Z = Y'Z$, takže Z je středem úsečky $X'Y'$. Rovněž bod Z_1 je středem úsečky $X_1'Y_1'$. Snadno usoudíme, že platí

$$RX' = c_1 t,\ RY' = c_2 t,\ RX_1' = c_1,\ RY_1' = c_2,$$

takže trojúhelníky $RX_1'Y_1'$, $RX'Y'$, a tím i středy Z_1, Z jejich stran $X_1'Y_1'$, $X'Y'$ jsou stejnolehlé vzhledem k bodu R při konstantě stejnolehlosti $t > 0$. Odtud plyne, že je $RZ = RZ_1 \,.\, t$ a že bod Z leží na polopřímce RZ_1 pro každé $t > 0$, což jsme měli dokázat.

3. Určete všechny hodnoty parametru α z intervalu $\langle 0,2\pi \rangle$, pro které má rovnice

$$(2 \cos \alpha - 1)\, x^2 + 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0 \qquad (1)$$

kladný kořen x_1, kdežto druhý kořen x_2, pokud existuje a pokud je různý od x_1, není kladný.

Řešení. I. Je-li v (1)

$$2 \cos \alpha - 1 = 0,$$

tj.

$$\alpha = 60°,\ \alpha = 300°, \qquad (1')$$

pak, jak se snadno přesvědčíme, má rovnice jediný kořen $x = -1$. Hodnoty (1′) nejsou tedy řešením úlohy.

II. Dále nechť je $\alpha \neq 60°$, $\alpha \neq 300°$, a tedy $2 \cos \alpha - 1 \neq 0$. Kvadratická rovnice (1) pak má diskriminant $D = 8\,(3 - 4 \cos^2 \alpha)$. Reálné kořeny má právě tehdy, je-li $D \geqq 0$, tj. $3 - 4 \cos^2 \alpha \geqq 0$, tj.

$$|\cos \alpha| \leqq \frac{1}{2} \sqrt{3}\ ;$$

to nastane právě tehdy, náleží-li α jednomu z intervalů

$$\langle 30°, 150° \rangle, \langle 210°, 330° \rangle. \tag{2}$$

Rovnice (1) má jeden kořen kladný a druhý kořen záporný právě tehdy, když je $x_1 x_2 < 0$. Platí

$$x_1 x_2 = \frac{4 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1}. \tag{3}$$

Jsou možnosti [1], [2].

Případ [1]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 > 0$ neboli nechť je α v jednom z intervalů $\langle 0°, 60°)$, $(300°, 360° \rangle$; pak podle (3) je $2 \cos \alpha + 1 < 0$, tj. $\cos \alpha < -\frac{1}{2}$ a α je z intervalu $(120°, 240°)$. Uvedené intervaly nemají společné číslo. Případ [1] nedává tedy žádné řešení.

Případ [2]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 < 0$, tj. α je z intervalu $(60°, 300°)$ a vzhledem ke (2) z intervalů

$$(60°, 150° \rangle, \langle 210°, 300°). \tag{4}$$

Protože $x_1 x_2$ je číslo záporné, je podle (3) $2 \cos \alpha + 1 > 0$, tj. $\cos \alpha > -\frac{1}{2}$, takže α je v jednom z intervalů

$$\langle 0°, 120°), (240°, 360° \rangle. \tag{5}$$

Průnik intervalů (4), (5) jsou intervaly

$$(60°, 120°), (240°, 300°), \tag{6}$$

které dávají řešení úlohy.

Zbývá vyřídit případ, kdy je jeden kořen kladný a druhý roven nule. To nastane právě tehdy, když je $x_1 x_2 = 0$

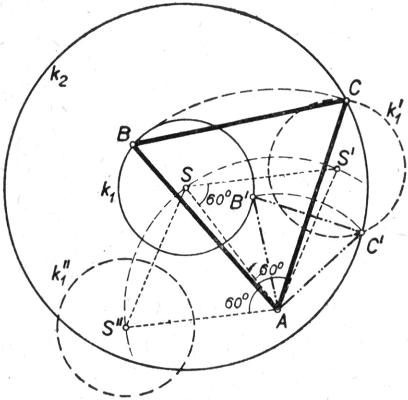
a zároveň $x_1 + x_2 > 0$. Z (3) pak plyne $2\cos\alpha + 1 = 0$, tj.

$$\alpha = 120° \text{ nebo } \alpha = 240°; \tag{7}$$

přitom vskutku je $2\cos\alpha - 1 = -2 \neq 0$. Dále je $x_1 + x_2 = 2$, což je kladné číslo. Spojením (1′), (6), (7) dostáváme, že řešením úlohy jsou všecka α z intervalů

$$(60°, 120°\rangle, \langle 240°, 300°).$$

4. V rovině jsou dány body A, S o dané vzdálenosti $a > 0$. Dále jsou dána kladná čísla b, c, pro která platí $b < a < c$.



Obr. 13.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy B, C měly od bodu S po řadě vzdálenosti b, c. Udejte podmínky řešitelnosti pomocí čísel a, b, c.

Řešení. I. *Rozbor* (obr. 13). Vrcholy B, C každého z hledaných trojúhelníků ABC leží po řadě na kružnicích

$k_1 \equiv (S;\ b)$, $k_2 \equiv (S,\ c)$. Otočení O kolem středu A o úhel velikosti $60°$ ve vhodném smyslu (kladném nebo záporném) převede vrchol B ve vrchol C; toto otočení O převede kružnici k_1 v jistou kružnici $k_1' \equiv \equiv (S', b)$. Bod C pak náleží dvěma geometrickým místům bodů: kružnici k_2 a kružnici k_1' (resp. kružnici k_1''; kružnice k_1', k_1'' vzniknou z k_1 otočením kolem bodu A o úhel velikosti $60°$ v kladném a záporném smyslu). Tím je rozbor úlohy proveden.

Z rozboru vyplývá *konstrukce*; je-li C libovolný společný bod kružnic k_2, k_1', je $C \neq A$ (neboť $c > a$). Bod B dostaneme otočením bodu C kolem A o úhel velikosti $60°$ ve vhodném smyslu. Trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC; úhel proti základně má velikost $\sphericalangle BAC = 60°$. Je tedy $\triangle ABC$ rovnostranný a splňuje zřejmě podmínky úlohy.

Diskuse. Úloha má tolik různých řešení, kolik různých společných bodů mají kružnice k_2, k_1' a k_2, k_1'' (u obou těchto dvojic jsou počty společných bodů stejné, neboť obě dvojice jsou souměrně sdruženy podle přímky AS). Protože trojúhelník ASS' je rovnostranný, je $SS' = = AS = a$. Podmínka pro existenci společných bodů obou kružnic tedy zní

$$b + c \geqq a \geqq c - b \qquad (1)$$

(neboť $c > a > b$). Platí-li v (1) rovnost, má úloha dvě řešení, neplatí-li v (1) žádná rovnost, má úloha čtyři řešení.

1. Šesticiferné přirozené číslo, které je v dekadické soustavě zapsáno ve tvaru $(xyxyxy)$, kde x, y jsou některé z cifer 0, 1, 2, ..., 9, nemá většího prvočinitele než 97; dokažte.

Řešení. Hledané číslo N zapsané znakem $(xyxyxy)$ je

$$\begin{aligned} N &= 10^5x + 10^4y + 10^3x + 10^2y + 10x + y = \\ &= (10x + y)(10^4 + 10^2 + 1) = \\ &= 10101\,(10x + y) = \\ &= 3 \,.\, 7 \,.\, 13 \,.\, 37\,(10x + y). \end{aligned}$$

Číslo $10x + y$ je dvojciferné (je $x \neq 0$) a největší prvočíselný dělitel čísla N bude $10x + y$, je-li $10x + y$ prvočíslo alespoň rovné 37; největší dvojciferné prvočíslo je 97. To vede k řešení pro $x = 9$, $y = 7$. Takové číslo je jediné, a to

$$979797,$$

o němž platí $979797 = 97 \,.\, 10101 = 97 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 13 \,.\, 37$; každé jiné číslo uvažovaného typu má největšího prvočíselného dělitele menšího než 97.

2. V rovine je daný lichobežník $ABCD$ s väčšou základňou AB.

Zostrojte priamku $p \parallel AB$ takú, že úsečky AD, AC, BD, BC ju pretínajú postupne v navzájom rôznych bodoch M, N, P, Q tak, že platí $MN = NP = PQ$.

Riešenie. Označme u vzdialenosť priamok AB, p a v vzdialenosť priamok CD, p. Ďalej postupne označme a, c dĺžky základní AB, CD. Z podobnosti trojuholníkov (obr. 14)

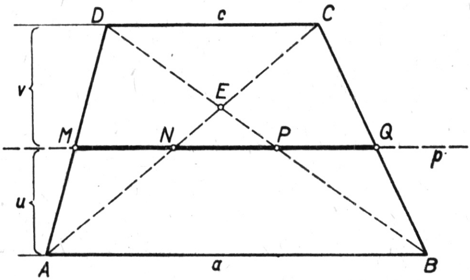
$$\triangle AMN \sim \triangle ADC$$

dostaneme rovnosť

$$MN = c\,\frac{u}{u+v}\,. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle BPQ \sim \triangle BDC$$



Obr. 14.

dostaneme rovnosť

$$PQ = c\,\frac{u}{u+v}\,. \tag{2}$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle DMP \sim \triangle DAB$$

dostaneme rovnosť

$$MP = a\,\frac{v}{u+v}\,. \tag{3}$$

Podľa (1), (2) platí teda pre každú priamku p rovnosť $MN = PQ$. Ak platí ešte $MN = NP$, je $MP = 2MN$, t. j. podľa (1), (3)

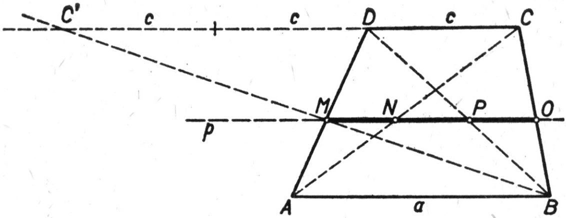
$$av = 2cu. \tag{4}$$

Obrátene, ak platí vzťah (4), potom je podľa (1) a (3) $MP = 2MN$, t. j. $MN = NP$, $MN = PQ$ a sú splnené požiadavky úlohy.

K rozriešeniu úlohy stačí teda zostrojiť medzi bodmi A, D bod M tak, aby platilo [podľa (4)]

$$\frac{AM}{DM} = \frac{u}{v} = \frac{a}{2c}.$$

Konštrukcia hľadaného bodu M je naznačená na obr. 15. Bod M je stred rovnoľahlosti, v ktorej body D, C' sú obrazmi bodov A, B.



Obr. 15.

3. Užitím výpočtu sestrojte trojúhelník ABC o obvodu 130 mm, který má tu vlastnost, že dotykové body kružnice jemu vepsané dělí strany AB, AC v obou případech v poměru 1 : 3.

Vypočtěte poměr stran trojúhelníku ABC.

Řešení (obr. 16—18). Pro stručnost položme

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a,\ 2s = a + b + c;$$

tu je z planimetrie známo, že

$$AC' = s - a,\ BC' = s - b,\ CB' = s - c \ldots \quad (1)$$

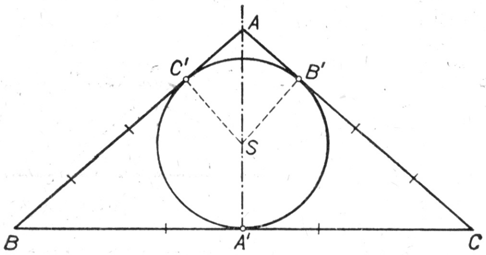
(viz označení v obr. 17).

Vzhledem k textu úlohy jsou tři možnosti: Buď je (obr. 16)

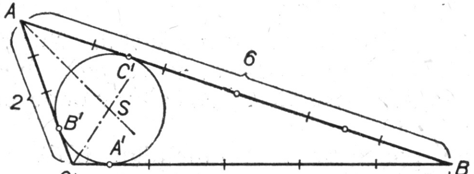
$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = \frac{1}{3} \tag{2a}$$

anebo je (obr. 17)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{CB'}{AB'} = \frac{1}{3}, \tag{2b}$$



Obr. 16.



Obr. 17.

anebo je (obr. 18)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = 3. \tag{2c}$$

Zdánlivá čtvrtá možnost se dá vyloučit záměnou označení bodů B, C.

Případ [1]. Vzhledem ke vztahům (1), (2a) platí

$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-a}{s-c} = \frac{1}{3}, \text{ tj.}$$

$$a = \frac{3}{2} b, \quad b = c.$$

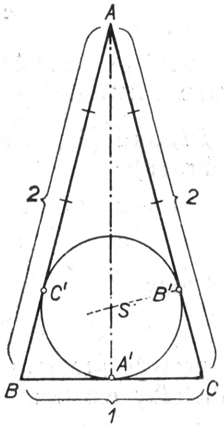
Je tedy

$$a : b : c = 3 : 2 : 2. \qquad (3)$$

Protože pro tento poměr délek a, b, c platí

$$a + b > c, \; b + c > a, \; c + a > b, \qquad (4)$$

proto trojúhelníky se stranami splňujícími (3) skutečně existují (viz obr. 16).



Obr. 18.

Případ [2]. Vzhledem ke vztahům (1), (2b) platí (obr. 17)

$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-c}{s-a} = \frac{1}{3}$$

neboli

$$s - b = 3(s - a), \quad s - c = \frac{1}{3}(s - a). \qquad (5)$$

Protože je

$a = (s - b) + (s - c)$, dostaneme po dosazení z předchozích vztahů $a = 3(s - a) + \frac{1}{3}(s - a)$ neboli $a = \frac{10}{13} s$.

Odtud a z (5) dostaneme

$$b = 3a - 2s = \frac{4}{13} s; \quad c = \frac{1}{3}(2s + a) = \frac{12}{13} s.$$

Je tedy

$$a : b : c = 5 : 2 : 6, \tag{6}$$

přičemž platí vztahy (4) a trojúhelníky s poměrem těchto stran existují.

Případ [3]. Vzhledem k vztahům (1), (2c) platí (obr. 18)

$$\frac{s-a}{s-b} = 3, \quad \frac{s-a}{s-c} = 3 \quad \text{neboli } b = c,\ b = 2a.$$

Je tedy

$$a : b : c = 1 : 2 : 2 \tag{7}$$

a protože pro tato čísla platí vztahy (4), příslušné trojúhelníky existují.

Konstrukci v jednotlivých případech provedeme tak, že daný obvod $2s = 130$ mm rozdělíme v předepsaném poměru [viz (3), (6), (7)] a sestrojíme z takto vzniklých úseček trojúhelník, který — jak jsme dříve dokázali — existuje.

Pomocí vzorců (1) snadno provedeme zkoušku, která nás přesvědčí o tom, že příslušné dotykové body kružnice vepsané takto sestrojenému trojúhelníku dělí strany AB, AC v poměru 1 : 3 (bez ohledu na pořadí úseků).

Úloha má tedy právě 3 řešení (pokud připustíme výměnu bodů B, C).

4. V rovine je daných 6 rôznych bodov tejto vlastnosti: každá štvorica vybraná spomedzi nich obsahuje aspoň tri body, ktoré ležia na priamke.

Dokážte, že aspoň 5 z daných šiestich bodov leží na priamke.

Riešenie. Kvôli jednoduchosti označíme dané body číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vo štvorici 1 2 3 4 existujú podľa predpokladu tri body, ktoré ležia na priamke. Označíme ich 1, 2, 3 a priamku, na ktorej ležia, označíme p. Ak mimo priamky p leží najviac jeden z bodov 4 až 6, je veta dokázaná. Pripusťme teda, že aspoň dva body (označíme ich 5, 6) ležia mimo priamky p. Vo štvorici 1 2 5 6 existuje trojica bodov ležiacich na priamke. Nemôže to byť trojica 1 2 5 ani trojica 1 2 6, pretože body 5, 6 neležia na priamke $p \equiv 1\ 2$. Trojicou bodov ležiacich na priamke je teda buď 1 5 6, alebo 2 5 6. Označenie bodov 1, 2 upravíme tak*), aby to bola trojica 1 5 6. Vo štvorici 2 3 5 6 existuje aspoň jedna trojica bodov ležiacich na priamke. Nie je ňou trojica 2 3 5 ani 2 3 6, pretože 5, 6 neležia na priamke $p \equiv$ $\equiv 23$, no ani 2 5 6, ani 3 5 6, pretože priamka $56 \not\equiv p$ pretína priamku p v bode 1, ktorý je rôzny od 2, 3. Tým je dokázané, že mimo priamky p nemôžu ležať dva z daných šiestich bodov, t. j. aspoň päť z daných bodov leží na p.

5. Najděte všechna celá čísla x, pro něž výraz

$$-6x^2 + 167x + 4\,823 \tag{1}$$

je roven:

a) prvočíslu;
b) co největšímu přirozenému číslu;
c) co nejmenšímu přirozenému číslu.

Řešení. Daný trojčlen (1) označme y a jeho diskriminant D.

---

*) T. j. vymeníme prípadne ich označenie.

Je

$$D = 167^2 + 4 \,.\, 6 \,.\, 4\,823 = 27\,889 + 115\,752 =$$
$$= 143\,641 = 379^2 > 0.$$

Proto rovnice $-6x^2 + 167x + 4\,823 = 0$ má dva různé reálné kořeny

$$x_1 = -\frac{53}{3}, \quad x_2 = \frac{91}{2} \tag{2}$$

a trojčlen (1) lze rozložit:

$$y = -6\left(x + \frac{53}{3}\right)\left(x - \frac{91}{2}\right)$$

neboli

$$y = (3x + 53)(-2x + 91). \tag{3}$$

Je patrno, že pro x z intervalu

$$x_1 = -\frac{53}{3} < x < \frac{91}{2} = x_2 \tag{4}$$

je $y > 0$. Pro hranice x_1, x_2 tohoto intervalu je $y = 0$; pro ostatní x je $y < 0$.

Obraťme se nyní k jednotlivým úlohám.

a) Má-li pro celé číslo x být y prvočíslo, musí jeden z činitelů na pravé straně (3) být ± 1. Rozlišme možnosti:

[1]. Pro číslo 1 je jediná možnost: $-2x + 91 = 1$ neboli $x = 45$; tu je $3x + 53 = 188$, což však není prvočíslo.

[2]. Pro číslo -1 jsou dvě možnosti:

(1) Je $3x + 53 = -1$, tj. $x = -18$ a $y = -127$, což není prvočíslo.

(2) Je $-2x + 91 = -1$, tj. $x = 46$ a $y = -191$, což také není prvočíslo.

Odpověď na otázku a): Požadované číslo x neexistuje.

Pro další vyšetřování si uvědomíme, že grafem funkce (3) v pravoúhlých souřadnicích je parabola, která protne osu x souřadnic v bodech

$$X_1 \equiv \left[-\frac{53}{3}; 0\right], \quad X_2 \equiv \left[\frac{91}{2}; 0\right], \tag{5}$$

její vrchol V je nad osou x; abychom stanovili souřadnice vrcholu, upravíme daný kvadratický trojčlen na tvar:

$$y = -6\left(x^2 - 2 \cdot \frac{167}{12}x + \frac{167^2}{12^2}\right) + 4\,823 + 6 \cdot \frac{167^2}{12^2}$$

neboli

$$y = -6\left(x - \frac{167}{12}\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot 143\,641\,. \tag{6}$$

Pro vrchol V paraboly je souřadnice y maximální; ze vztahu (6) je patrno, že maximum y nastane pro

$$x - \frac{167}{12} = 0, \text{ tj. pro } x = \frac{167}{12}.$$

Je tedy $V \equiv \left[\frac{167}{12}; \frac{143641}{24}\right]$.

Víme, že funkce (6) je v intervalu $\left[-\frac{53}{3}, \frac{167}{12}\right]$ rostoucí, v intervalu $\left[\frac{167}{12}; \frac{91}{2}\right]$ klesající; na základě toho zodpovíme otázky b), c).

b) Hledané celé číslo x, pro které je y v (6) co největší přirozené číslo, musí vzhledem k předchozímu být buď nejbližší přirozené číslo menší než $\frac{167}{12}$, anebo nejbližší větší přirozené číslo k číslu $\frac{167}{12}$; tj. buď je $x = 13$, anebo $x = 14$, neboť je

$$13 < \frac{167}{12} < 14.$$

Pro $x = 13$ je podle (3) $y = 92 \,.\, 65 = 5980$; pro $x = 14$ je $y = 95 \,.\, 63 = 5985$. Je tedy hledaným číslem číslo $x = 14$.

c) Hledané celé x, pro které je y co možná nejmenší přirozené číslo, musí být jedno z těchto čísel: buď nejbližší větší celé číslo než $x_1 = -\frac{53}{3}$, tj. $x_3 = -17$, anebo nejbližší menší celé číslo, než je $x_2 = \frac{91}{2}$, tj. $x_4 = 45$.

Pro $x = x_3$ ze (3) dostaneme
$y = (-51 + 53)(34 + 91) = 2 \,.\, 125 = 250.$

Pro $x = x_4$ ze (3) dostaneme
$y = (135 + 53)(-90 + 91) = 188.$

Hledané číslo je tedy $x = 45$.
Tím je úloha úplně rozřešena.

6. Jsou dány rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + px - 1 = 0, \qquad (2)$$

kde p je dané reálné číslo.

Dokažte, že obě rovnice mají reálné kořeny, a vyšetřte, jak jsou tyto kořeny uspořádány podle velikosti, jestliže parametr p probíhá všechna reálná čísla.

Řešení. Rovnice (2) má diskriminant $p^2 + 4 > 0$, takže má dva reálné různé kořeny; rovnici (1) dostaneme ze (2) pro $p = -1$. Každá z rovnic (1), (2) má tedy dva různé reálné kořeny. Pro $p = -1$ jsou kořeny rovnice (2) rovny po řadě kořenům rovnice (1); nechť v dalším je $p \neq -1$ a označme x_1, x_2 kořeny rovnice (1), x_3, x_4 kořeny rovnice (2). Podle známé věty o kvadratické rovnici platí:

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{3}$$

$$x_1 x_2 = -1 \tag{3'}$$

$$x_3 + x_4 = -p \tag{4}$$

$$x_3 x_4 = -1 \tag{4'}$$

O kořenech lze při vhodné volbě indexů předpokládat, že je

$$x_1 > x_2, \quad x_3 > x_4; \tag{5}$$

protože však platí vztah (3′), jsou x_1, x_2 různých znamének a tedy vzhledem k (5) je $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; podobně $x_3 > 0$, $x_4 < 0$. Platí tedy

$$x_1 > 0; \; x_3 > 0; \; x_2 = -\frac{1}{x_1} < 0; \; x_4 = -\frac{1}{x_3} < 0. \tag{6}$$

Řešením (1) dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \; x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \tag{7}$$

řešením rovnice (2) dostaneme

$$x_3 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 + 4}), \; x_4 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 + 4}). \tag{8}$$

Zkoumejme, pro které hodnoty p platí $x_3 > x_1$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p + \sqrt{p^2 + 4} > 1 + \sqrt{5}$$

a odtud po umocnění a úpravě

$$p < -1. \tag{9}$$

Obrácením postupu zjistíme, že pro každé $p < -1$ je $x_3 > x_1$.

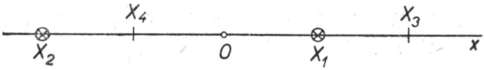
Zkoumejme obdobně, pro které hodnoty p platí $x_4 > x_2$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p - \sqrt{p^2 + 4} > 1 - \sqrt{5}$$

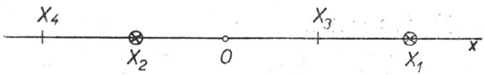
a odtud po umocnění a úpravě opět

$$p < -1. \tag{9'}$$

Také zde dostaneme obrácením postupu, že pro každé $p < -1$ je $x_4 > x_2$.



Obr. 19.



Obr. 20.

Odtud vyplývá, že pro $p < -1$ nastane situace zakreslená na obr. 19, pro $p > -1$ situace zakreslená na obr. 20.

Závěr. Znázorníme-li kořeny první rovnice body x_1, x_2 a (pro $p \neq -1$) kořeny druhé rovnice body x_3, x_4, potom je $x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$ a platí: a) Obraz O nuly leží uvnitř úseček x_1x_2, x_3x_4; b) každá dvojice x_3, x_4, kterou dostaneme pro $p \neq -1$, odděluje dvojici x_1, x_2.

5. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B*

1. Najděte všechna nezáporná čísla a, b, c, pro která platí rovnost

$$\sqrt{a - b + c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}. \qquad (1)$$

Řešení. Úkolem je najít všecka řešení rovnice (1). Umocnění dá

$$a - b + c = a + b + c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac},$$

po úpravě

$$b + \sqrt{ac} = \sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{c}).$$

Další umocnění dá

$$b^2 + 2b\sqrt{ac} + ac = b\,(a + 2\sqrt{ac} + c),$$

po úpravě

$$b^2 - (a + c)\,b + ac = 0. \qquad (2)$$

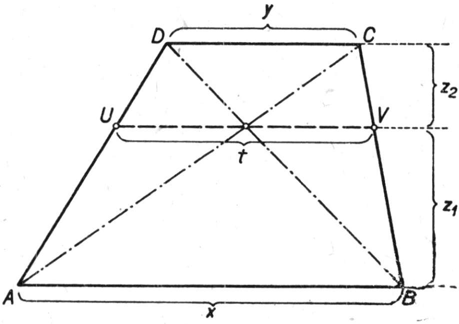
Rovnice (2) je kvadratická pro neznámou b a podle známé věty má za kořeny jedině čísla $b_1 = a$, $b_2 = c$; platí tedy nutně $a = b$ anebo $b = c$.

Zkouška. Např. pro libovolné nezáporné $a = b$ a libovolné nezáporné c je levá strana (1) rovna $\sqrt{c}$ a pravá rovněž $\sqrt{c}$.

2. V lichobežníku $ABCD$ sú dané dĺžky x, y základní AB, CD. Rovnobežka so základňami vedená priesečníkom uhlopriečok tohto lichobežníka pretne ramená AD, BC postupne v bodoch U, V.

Nájdite pomer obsahov lichobežníkov $ABVU$, $UVCD$.

Riešenie. Použijeme označenie z obr. 21. Pre obsahy P_1, P_2 lichobežníkov $ABVU$, $UVCD$ platí



Obr. 21.

$$P_1 = \frac{1}{2}(x + t)\,z_1, \quad P_2 = \frac{1}{2}(y + t)\,z_2,$$

takže

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + t)\,z_1}{(y + t)\,z_2}. \tag{1}$$

Z rovnoľahlosti úsečiek AB, UO podľa stredu D vyplýva

$$UO = x\,\frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Z rovnoľahlosti úsečiek AB, VO podľa stredu C vyplýva opäť

$$VO = x \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Stadiaľ

$$t = \frac{2xz_2}{z_1 + z_2}. \tag{2}$$

Z rovnoľahlosti úsečiek AB, CD podľa stredu O vyplýva

$$\frac{x}{y} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{3}$$

Ak zo vzťahu (3) vyjadríme z_1 a dosadíme do (2), dostaneme

$$t = \frac{2xy}{x + y}. \tag{4}$$

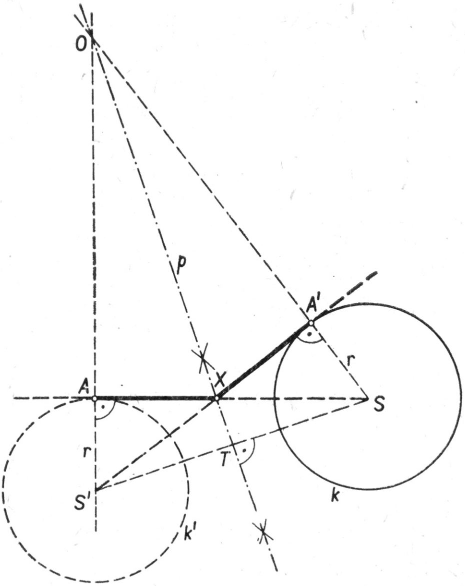
Ďalej vyjadríme pomocou vzťahu (4) dvojčleny $x + t$, $y + t$ a dosadíme do (1); dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + 3y)\, x^2}{(3x + y)\, y^2}.$$

3. Vně dané kružnice $k \equiv (S, r)$ je dán bod A. Uvnitř úsečky AS sestrojte bod X tak, aby délka tečny vedené z bodu X ke kružnici k byla rovna délce úsečky AX.

Poznámka. U této úlohy uvádíme několik řešení, z nichž čtenář vidí, že některou úlohu lze řešit velmi odlišnými způsoby.

Řešení č. 1 (obr. 22). Označme A' dotykový bod hledané tečny $A'X$, kde X je bodem úsečky AS a leží vně kružnice k, přičemž platí $XA' = XA$. Osa p úsečky AA' prochází bodem X (bod X je hlavním vrcholem



Obr. 22.

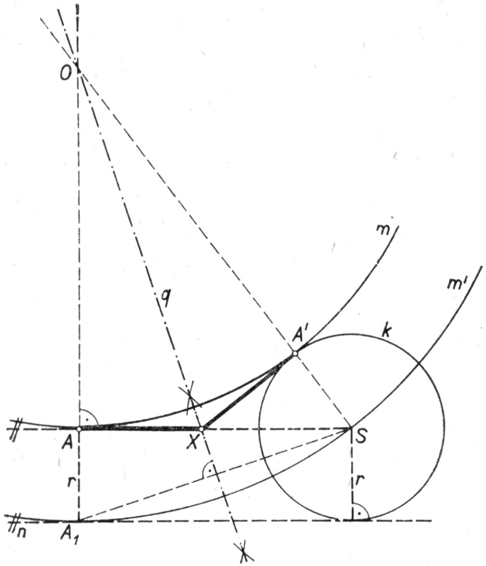
rovnoramenného trojúhelníku XAA'). Osová souměrnost o ose p převádí úsečku AX v úsečku $A'X$, trojúhelník SXA' (kde $\sphericalangle A' = 90°$) v trojúhelník $S'XA$ a kružnici k v jistou kružnici $k' \equiv (S', r)$, která se dotýká přímky AS v bodě A. Odtud tato *konstrukce*:

Na kolmici vedené bodem A k přímce AS sestrojme S' tak, aby $AS' = r$ (z obou možností volme jednu), a sestrojme kružnici $k' \equiv (S', r)$. Osa p úsečky SS' má s úsečkou AS společný bod X, který je hledaným bodem.

Důkaz a diskuse. Kružnice k, k' jsou podle konstrukce souměrně sdružené vzhledem k přímce p. Je $r < AS$

(bod A leží vně kružnice k) a tedy $AS' < AS$; podle známých vlastností osy p úsečky SS' leží bod A v polorovině pS' a body S, A jsou tedy přímkou p odděleny. Proto bod X padne dovnitř úsečky AS; dále leží na tečně AS kružnice k' a vně této kružnice; ze souměrnosti a z toho, že X leží na ose p, plyne, že X leží vně kružnice k. Existuje tedy právě jeden bod X.

Podle řešení Josefa Prokeše, 2. b roč. SVVŠ, České Budějovice



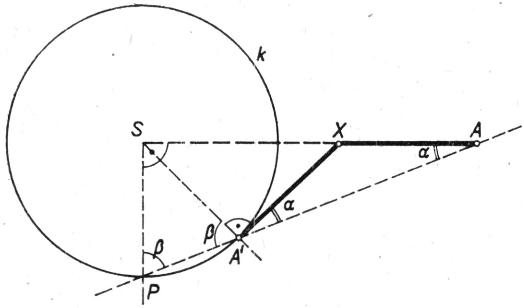
Obr. 23.

Řešení č. 2 (obr. 23). Užijme označení z předchozího řešení a sestrojme průsečík O osy úhlu $\sphericalangle AXA'$ a přímky

SA'. Platí $\triangle OXA' \cong \triangle OXA$ (usu), a tedy $OA = OA'$. Bod O je středem kružnice m, která se dotýká přímky SA v bodě A a s kružnicí k má vnější dotyk.

Konstrukci (obr. 23) provedeme převedením úlohy na sestrojení kružnice m', která je s m soustředná, prochází bodem S a dotýká se přímky $n \parallel SA$, která má od přímky SA vzdálenost r: Jestliže bod A_1 leží na kolmici vedené bodem A k přímce SA tak, že $AA_1 = r$, sestrojíme osu q úsečky SA_1 a označíme O průsečík přímek q, AA_1. Hledaná kružnice $m \equiv (O, OA)$ se zřejmě dotýká kružnice k vně v hledaném bodě A'; bod X je společný bod přímek q, SA, A_1A'.

Podle řešení Václava Pištěka, 2. b roč. SVVŠ, Pelhřimov

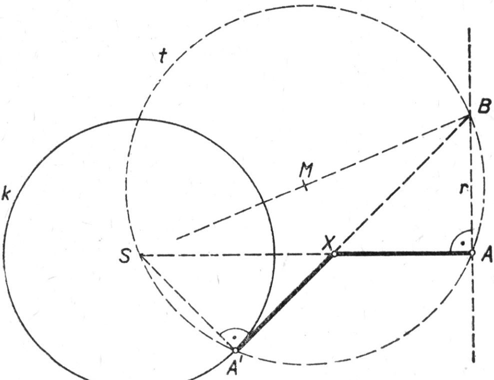


Obr. 24.

Řešení č. 3 (obr. 24). Úhel $\sphericalangle SA'A$, kde A' je hledaný dotykový bod, je tupý, neboť bod X leží uvnitř úsečky SA a je $\sphericalangle SA'X = 90°$. Proto polopřímka AA' má s kružnicí k společný bod $P \not\equiv A'$. Označme α, β úhly při základnách AA', PA' rovnoramenných trojúhelníků XAA', SPA'. Protože je $\sphericalangle SA'X = 90°$, je $\sphericalangle PA'S + \sphericalangle AA'X = 90°$ neboli $\alpha + \beta = 90°$ a v trojúhelníku APS je nutně $\sphericalangle S = 90°$. Odtud *konstrukce*:

Sestrojme kolmici k přímce SA bodem S a označme P jeden z jejích průsečíků s kružnicí k. Další průsečík přímky PA s kružnicí k označme A' (snadno se dokáže, že skutečně padne dovnitř úsečky PA); tečna v bodě A' ke kružnici k má s úsečkou společný hledaný bod X. Důkaz a diskusi provede čtenář.

Podle řešení Viliama Kozenčuka, 2. tr. SVŠ, Trenčianske Teplice



Obr. 25.

Řešení č. 4 (obr. 25). Označme vzhledem k předchozím řešením B průsečík přímky XA' a kolmice vedené bodem A k přímce AS. Potom je $\triangle XBA \cong \triangle XSA'$ ($XA = XA'$ a shodnost ve všech úhlech) a tedy $BA = SA' = r$. Bod A' tedy leží na Thaletově kružnici t opsané nad BS jako průměrem.

Odtud plyne snadno *konstrukce*: Na kolmici vedené bodem A k přímce AS označme B jeden z obou bodů, které mají od přímky AS vzdálenost r. Nad úsečkou BS jako průměrem sestrojme kružnici t se středem M. Kružnice k, t mají zřejmě dva různé průsečíky; ten, který leží v polorovině SBA, označme A' a průsečík úseček BA', AS je hledaný bod X. Diskusi si provede čtenář.

Podle řešení Karola Trnovského, 2. tr. SVŠ, Ružomberok

4. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y sestrojte graf funkce

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left(|x^2 - 32| - |x^2 - 18|\right)}\,. \qquad (1)$$

Řešení. Je-li $[x, y]$ bodem grafu funkce, je i bod $[-x, y]$ bodem grafu; proto se omezíme na $x \geqq 0$, přičemž je stále $y \geqq 0$. Graf funkce je tedy souměrný podle osy y.

Rozlišme vzhledem k $x \geqq 0$ možnosti:

[1] Nechť je $x^2 - 18 \leqq 0$, tj.

$$0 \leqq x \leqq 3\sqrt{2} \doteq 4{,}2.$$

Tu je $|x^2 - 18| = -(x^2 - 18)$, $|x^2 - 32| = -(x^2 - 32)$, takže (1) zní

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-x^2 + 32 + x^2 - 18\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\,.\,14} = \sqrt{7},$$

tj.

$$y = \sqrt{7}.$$

V intervalu $\langle 0, 3\sqrt{2}\rangle$ je grafem úsečka YX s krajními body $Y \equiv [0, \sqrt{7}]$, $X \equiv [3\sqrt{2}, \sqrt{7}]$.

[2] Nechť je $x^2 - 18 \geqq 0$, $x^2 - 32 \leqq 0$, tj.

$$3\sqrt{2} \leqq x \leqq 4\sqrt{2}, \tag{2}$$

pak

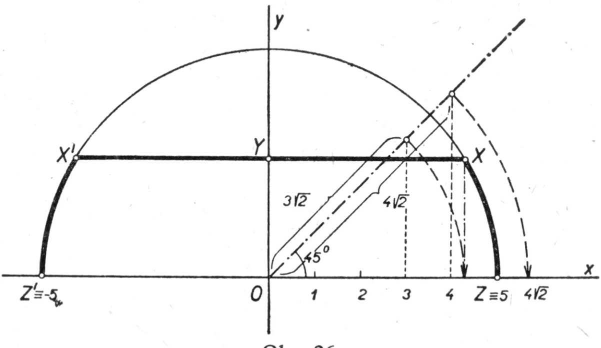
$$y = \sqrt{\frac{1}{2}[-x^2 + 32 - (x^2 - 18)]} = \sqrt{-x^2 + 25}, \tag{3}$$

takže musí platit $-x^2 + 25 \geqq 0$, tj. $x \leqq 5$ a spolu se (2) tedy nutně platí (je totiž $5 < 4\sqrt{2}$)

$$3\sqrt{2} \leqq x \leqq 5. \tag{4}$$

Ze vztahu (3) dostáváme $y^2 = -x^2 + 25$ neboli $x^2 + y^2 = 25$ a příslušné body $[x, y]$ leží na kružnici o středu O (počátek souřadnic) a poloměru 5; z této kružnice vzhledem ke (4) přichází v úvahu jen menší oblouk $\widehat{XZ}$, kde $Z \equiv [5, 0]$.

[3] Nechť je $x^2 - 32 \geqq 0$ a tím i $x^2 - 18 \geqq 0$, takže $|x^2 - 32| = x^2 - 32$, $|x^2 - 18| = x^2 - 18$ a $x \geqq 4\sqrt{2}$. Pak pod odmocninou v (1) je -7; takže odmocnina ani graf neexistuje.



Obr. 26.

Graf dané funkce (obr. 26) je tedy souměrný podle osy y a skládá se ze dvou menších kruhových oblouků XZ, $X'Z'$ a z úsečky XX', kde

$$X \equiv [3\sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad X' \equiv [-3\sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad Z \equiv [5, 0], \quad Z' \equiv [-5, 0].$$

6. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C*

1. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů $Z \equiv [x, y]$, o jejichž souřadnicích platí zároveň všechny tři nerovnosti:

$$|x - y| \leqq 1 \tag{1}$$

$$|x + y| \leqq 1 \tag{2}$$

$$x + |y| \leqq 1 \tag{3}$$

Řešení. a) Zjistíme nejprve, jaký útvar je množinou bodů, jejichž souřadnice splňují nerovnost (1). Tato nerovnost platí zároveň s nerovností, kterou dostaneme jejím umocněním dvěma, tj. s nerovností

$$(x - y)^2 \leqq 1. \tag{1'}$$

Nerovnost (1') upravíme

$$(x - y)^2 - 1 \leqq 0,$$

$$(x - y - 1)(x - y + 1) \leqq 0. \tag{1''}$$

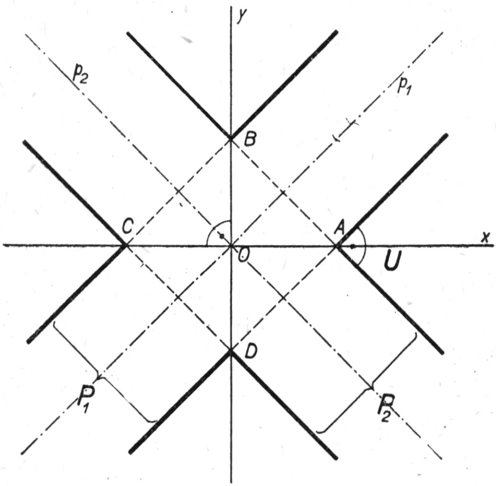
Nerovnost (1'') je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$\left.\begin{aligned} x - y - 1 &\leqq 0, \\ x - y + 1 &\geqq 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned} x - y - 1 &\geqq 0, \\ x - y + 1 &\leqq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Nerovnosti (4) vyjadřují společnou část polorovin s vyjádřením $x - y \geqq -1$ a $x - y \leqq 1$, tj. pás P_1 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = x + 1$, $y = x - 1$; obě poloroviny obsahují totiž počátek souřadnic (viz obr. 27).



Obr. 27.

Nerovnosti (5) si odporují, proto jim nevyhovují souřadnice žádného bodu.

Z á v ě r. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (1), je pás P_1.

Pro snazší vyjádření označíme A, B, C, D průsečíky hraničních přímek pásu P_1 s osami souřadnic, a to tak, aby platilo

$$A \equiv [1, 0], \quad B \equiv [0, 1], \quad C \equiv [-1, 0], \quad D \equiv [0, -1].$$

b) Obdobně vyšetříme množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2). Dostaneme postupně

$$(x + y)^2 - 1 \leqq 0,$$
$$(x + y - 1)(x + y + 1) \leqq 0.$$

Odtud plyne buď zároveň

$$x + y - 1 \leqq 0,$$
$$x + y + 1 \geqq 0,$$

nebo zároveň

$$x + y - 1 \geqq 0,$$
$$x + y + 1 \leqq 0.$$

Tyto poslední dvě nerovnosti si odporují. První dvě nerovnosti vyjadřují opět pás P_2 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = -x + 1$, $y = -x - 1$, tj. přímkami AB, CD.

Závěr. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2), je pás P_2 (viz obr. 27).

c) Při vyšetřování množiny bodů, jejíž vyjádření je nerovnost (3), dostaneme postupně

$$|y| \leqq 1 - x,$$
$$y^2 \leqq (1 - x)^2,$$
$$(1 - x - y)(1 - x + y) \geqq 0. \tag{6}$$

Nerovnost (6) je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\geqq 0, \\ 1 - x + y &\geqq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\leqq 0, \\ 1 - x + y &\leqq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Nerovnosti (7) vyjadřují poloroviny s hraničními přímkami o rovnicích $y = 1 - x$, $y = x - 1$, jež obě obsahují počátek souřadnic. Společná část těchto polorovin je pravý úhel $\sphericalangle BAD$. Nerovnosti (8) vyjadřují společnou část polorovin opačných k oběma předcházejícím, tj. pravý úhel U vrcholový k úhlu $\sphericalangle BAD$.

Závěr. Nerovnost (3) vyjadřuje dvojici vrcholových úhlů; úhel $\sphericalangle BAD$ a úhel U k němu vrcholový (viz obr. 27).

Průnik pásů P_1, P_2 je čtverec $ABCD$, který leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tento čtverec má s úhlem U jediný společný bod, tj. bod A.

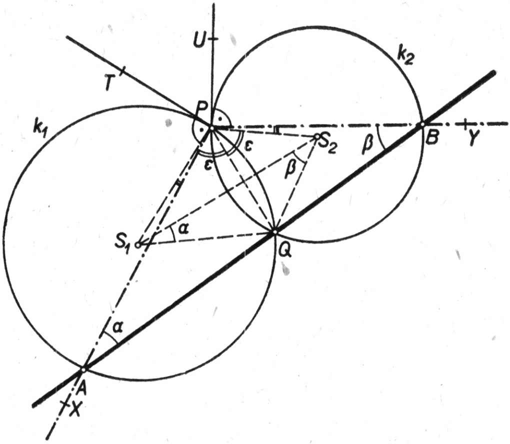
Výsledek. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují zároveň nerovnostem (1), (2), (3), je čtverec $ABCD$.

2. Sú dané dve kružnice k_1, k_2 so spoločnou tetivou PQ, ktorá oddeľuje ich stredy.

Nájdite na kružnici k_1 bod A a na kružnici k_2 bod B tak, aby bod Q ležal vo vnútri úsečky AB a aby platilo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ$.

Riešenie (obr. 28). *Rozbor.* Označíme

$$\alpha = \sphericalangle PAQ, \; \beta = \sphericalangle PBQ, \; \varepsilon = \sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ.$$



Obr. 28.

Z trojuholníkov APQ, BPQ vyplýva podľa vety o vonkajšom uhle trojuholníka

$$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \varepsilon) = 180°,$$

skadiaľ

$$\varepsilon = 90° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \tag{1}$$

Podľa vety o stredovom a obvodovom uhle je

$$\sphericalangle PS_1Q = 2\alpha, \quad \sphericalangle PS_2Q = 2\beta.$$

Pretože priamka S_1S_2 rozpoluje oba uhly $\sphericalangle PS_1Q$, $\sphericalangle PS_2Q$, je

$$\sphericalangle PS_1S_2 = \alpha, \quad \sphericalangle PS_2S_1 = \beta$$

a ďalej

$$\sphericalangle S_1PS_2 = 180° - (\alpha + \beta). \tag{2}$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sphericalangle S_1PS_2. \tag{3}$$

Zo vzťahu (3) vyplýva táto *konštrukcia*: Zostrojíme polpriamky PX, PY ležiace postupne v polrovinách PQS_1, PQS_2 tak, aby platilo

$$\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon.$$

Ak pretnú polpriamky PX, PY postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch $A \neq P$, $B \neq P$, je $\sphericalangle PAQ = \alpha$, $\sphericalangle PBQ = \beta$. Preto platí

$$\sphericalangle AQP = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon),$$
$$\sphericalangle BQP = 180^\circ - (\beta + \varepsilon),$$

t. j. podľa (1)

$$\sphericalangle AQP + \sphericalangle BQP = 360^\circ - (\alpha + \beta + 2\varepsilon) = 180^\circ.$$

Body A, B, Q ležia teda na priamke.

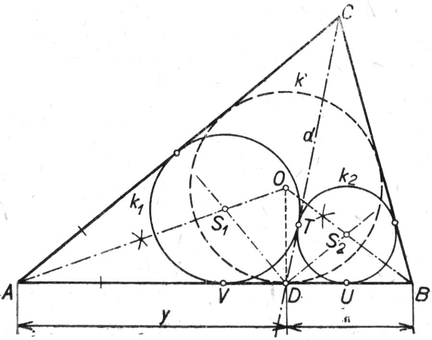
Diskusia. Zostáva rozhodnúť, za akých podmienok má úloha riešenie; riešenie je potom jediné. Pretože priamka PQ oddeľuje stredy S_1, S_2, prislúchajú obvodové uhly α, β k menším oblúkom PQ a sú obidva ostré.

Označíme PT, PU polpriamky, ktoré ležia postupne v dotyčniciach kružníc k_1, k_2 v bode P a postupne v polrovinách PQS_1, PQS_2. Uhly $\sphericalangle QPT$, $\sphericalangle QPU$ sú obidva tupé. Ak sú PX, PY polpriamky, o ktorých bola reč v skúške konštrukcie, je $\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon$ a podľa (3) je $\varepsilon < 90^\circ$, pretože uhol $\sphericalangle S_1PS_2$ je dutý. Preto pretnú polpriamky PX, PY postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch $A \neq P$, $B \neq P$.

Výsledok diskusie: Úloha má vždy jediné riešenie.

3. V rovine je daný trojuholník ABC. Použitím výpočtu určite medzi bodmi A, B taký bod D, aby sa kružnice vpísané trouholníkom ACD a BCD dotýkali priamky CD v tom istom bode.

Riešenie. *Rozbor.* Označme strany trojuholníka ABC obvyklým spôsobom: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; ďalej označme $d = CD$, $x = BD$, $y = AD$ (obr. 29), T spo-



Obr. 29.

ločný dotykový bod oboch vpísaných kružníc, ležiaci na strane CD. Potom platí podľa známeho vzorca

$$DT = \frac{1}{2}(x + d - a) \text{ (z trojuholníka } BCD\text{)},$$

$$DT = \frac{1}{2}(y + d - b) \text{ (z trojuholníka } ACD\text{)}.$$

Porovnaním dostávame $x + d - a = y + d - b$ čiže

$$x - y = a - b. \tag{1}$$

Okrem toho je

$$x + y = c. \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplýva sčítaním

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b) = s - b, \tag{3}$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Podľa známej vety je teda bod D bodom dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

Skúška. Zostrojíme bod D ako bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležiaci na strane AB. Trojuholníkom ACD, BCD vpíšeme postupne kružnice k_1, k_2, ktoré sa dotýkajú strany CD postupne v bodoch T_1, T_2. Vypočítame podľa známeho vzorca

$$DT_1 = \frac{1}{2}(d + y - b), \quad DT_2 = \frac{1}{2}(d + x - a). \tag{4}$$

Pretože je podľa (3) $x = s - b$, je $y = s - a$. Dosadením do (4) dostaneme

$$DT_1 = \frac{1}{2}(d + s - a - b) = DT_2. \tag{5}$$

Pretože oba body T_1, T_2 ležia na polpriamke DC, je podľa (5) $T_1 \equiv T_2$ a kružnice k_1, k_2 splňujú požiadavky úlohy.

Úloha má zrejme vždy jediné riešenie.

4. Najděte všechna celá čísla x, pro která je výraz

$$V = \frac{6(x^2 - 3px - x + 3p)}{x^3 - 3px^2 - x + 3p}$$

roven celému číslu.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému celému číslu p.

Řešení. Rozložme jmenovatele a čitatele v daném zlomku:

$$6(x^2 - 3px - x + 3p) = 6[(x^2 - x) - 3p(x - 1)] = \\ = 6(x - 1)(x - 3p);$$

$$x^3 - 3px^2 - x + 3p = x^2(x - 3p) - (x - 3p) = \\ = (x - 1)(x + 1)(x - 3p).$$

Platí tedy

$$V = \frac{6(x - 1)(x - 3p)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3p)}. \tag{1}$$

Výraz V má tedy význam pro všechna reálná čísla x s výjimkou čísel

$$-1;\ 1;\ 3p. \tag{2}$$

Nechť je tedy dále x různé od čísel (2). Zkrátíme zlomek na pravé straně (1) a dostaneme

$$V = \frac{6}{x + 1}. \tag{3}$$

Tento zlomek má být roven celému číslu, tj. číslo $x + 1$ musí být dělitelem čísla 6 neboli číslo $x + 1$ musí být rovno některému z čísel

$$-6;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6.$$

Odtud pro x dostáváme po řadě tyto hodnoty:

$$-7;\ -4;\ -3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5.$$

Podle (2) je vyloučena možnost $x = 1$ a možnosti $x = -3$, $x = 0$, které dostaneme ve (2) pro $p = -1$

a $p = 0$. Zbývá těchto 5 případů, k nimž pomocí (3) určíme hned příslušnou hodnotu V:

x	-7	-4	-2	2	5
V	-1	-2	-6	2	1

5. Žák měl najít objem kvádru z jeho daných rozměrů, což byla přirozená čísla. Když žák objem vypočetl, zjistil, že dojde k témuž výsledku, když sečte všechny tři rozměry.

Ukažte, že pomocí těchto údajů lze s jediným výsledkem vypočítat rozměry daného kvádru.

Řešení. Označme x, y, z rozměry kvádru tak, aby platilo

$$x \geqq y \geqq z. \tag{1}$$

Objem je $V = xyz$; podle textu úlohy platí

$$xyz = x + y + z. \tag{2}$$

Avšak vzhledem k (1) je $x + y + z \leqq 3x$ a ze (2) vyplývá, že nutně platí

$$xyz \leqq 3x$$

a po dělení obou stran číslem x

$$yz \leqq 3.$$

Pro přirozená čísla y, z máme vzhledem k (1) tyto tři případy:

[1] $y = 3$, $z = 1$, [2] $y = 2$, $z = 1$, [3] $y = 1$, $z = 1$.

Dosaďme za y, z do (2) a hledejme příslušné x, přičemž má platit (1):

Případ [1]. Pro $y = 3$, $z = 1$ ze (2) dostaneme $3x = x + 4$, tj. $x = 2$, což je spor se vztahy (1); nedostáváme žádné řešení.

Případ [2]. Pro $y = 2$, $z = 1$ ze (2) dostaneme $2x = x + 3$, tj. $x = 3$, což vyhovuje (1). Skutečně $V = 3 . 2 . 1 = 6$ a $x + y + z = 6$.

Případ [3]. Pro $y = z = 1$ dostaneme $x = x + 2$, takže není žádné řešení.

Odpověď. Rozměry kvádru jsou 3, 2, 1.

6. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d. Světelný paprsek vyslaný z bodu X, který leží mezi body A, B, se odrazí na odvěsně BC v bodě Y a dopadne právě do středu M odvěsny AC.

Sestrojte bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla danou délku d. Proveďte diskusi vzhledem k číslu d.

Řešení. Použijeme zákona o odrazu světelného paprsku: musí být $\sphericalangle CYM = \sphericalangle BYX$. Proto při překlopení trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC přejde úsečka YM v úsečku YM' tak, že body X, Y, M' leží v přímce. Přitom M' je střed překlopené odvěsny $A'C$. Má-li být $XY + YM = d$, musí být $XY + YM' = XM' = d$, tj. bod X musí ležet na kružnici $k \equiv (M';\ d)$ a uvnitř úsečky AB. Tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující.

Vzdálenost bodu M' od přímky AB je dána délkou kolmice $M'Q // A'B$ (viz obr. 30); $M'Q = \dfrac{3}{4}$. Úloha má tedy tyto možnosti řešení:

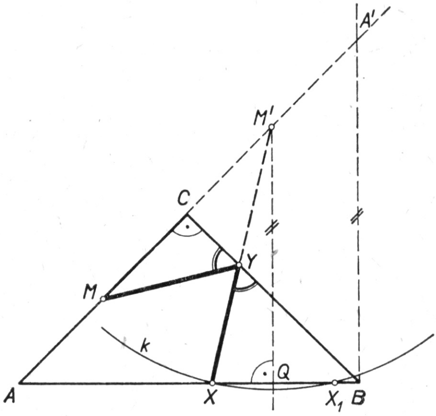
Žádné řešení pro $d < \frac{3}{4}$,

1 řešení pro $d = \frac{3}{4}$,

2 řešení pro $\frac{3}{4} < d < M'B$,

1 řešení pro $M'B \leqq d < M'A$,

žádné řešení pro $d \geqq M'A$.



Obr. 30.

Vzdálenosti $M'B$, $M'A$ se vypočtou snadno: $M'A = \frac{3}{4}\sqrt{2} \doteq 1{,}06$ a podle Pythagorovy věty je

$$M'B = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \doteq 0{,}79.$$

1. Riešte rovnicu

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-2p}+\frac{1}{x+3p}=\frac{3}{x}, \tag{1}$$

kde x je neznáma a p dané reálne číslo.

Riešenie. Vynásobme obidve strany danej rovnice (1) číslom $x(x-p)(x-2p)(x+3p)$ a postupne upravujme:

$$x(x-2p)(x+3p)+x(x-p)(x+3p)+$$
$$+x(x-p)(x-2p)=3(x-p)(x-2p)(x+3p),$$

$$3x^3+(3p-2p+3p-p-2p-p)x^2+$$
$$+(-6p^2-3p^2+2p^2)x=3x^3+(3p-2p-p)x^2+$$
$$+3(2p^2-6p^2-3p^2)x+18p^3,$$

$$14p^2x=18p^3,$$

$$7p^2x=9p^3. \tag{2}$$

Rozoznávajme dve možnosti:

[1] Nech je $p=0$. Potom rovnica (1) je splnená pre každé $x \neq 0$. Vtedy totiž skutočne platí rovnosť

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}.$$

[2] Nech je $p \neq 0$. Potom z rovnice (2) dostaneme

$$x=\frac{9p}{7}. \tag{3}$$

Preveďme *skúšku* dosadením. Pre ľavú stranu rovnice (1) dostaneme postupne:

$$L = \frac{1}{\frac{9p}{7} - p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} - 2p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} + 3p} =$$

$$= \frac{7}{(9-7)p} + \frac{7}{(9-14)p} + \frac{7}{(9+21)p} =$$

$$= \frac{7}{p}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30}\right) =$$

$$= \frac{7}{p} \cdot \frac{15 - 6 + 1}{30} = \frac{7}{3p}.$$

Predchádzajúci výpočet platí pre každé $p \neq 0$. Pre pravú stranu rovnice (1) dostaneme

$$P = \frac{3 \cdot 7}{9p} = \frac{7}{3p}.$$

Je teda skutočne $L = P$ a číslo (3) je pre $p \neq 0$ jediným koreňom danej rovnice.

2. Odvesna pravouhlého trojuholníka má veľkosť 1. Ťažnica prislúchajúca k druhej odvesne je kolmá k ťažnici prislúchajúcej k prepone.

Vypočítajte dĺžku ostatných dvoch strán.

Riešenie (obr. 31). V danom trojuholníku ABC označme $\sphericalangle C = 90°$, $a = BC$, $b = CA = 1$, $c = AB$, takže podľa Pythagorovej vety platí:

$$a^2 + 1^2 = c^2. \tag{1}$$

Nech sú ďalej A', C' postupne stredy strán BC, AB. Ťažnice AA', CC' majú spoločný bod T, ťažisko trojuholníka. Preto platí $2 \,.\, TA' = TA$, $2 \,.\, TC' = TC$. Položme

$$TA' = x, \; TC' = y. \tag{2}$$

Je teda

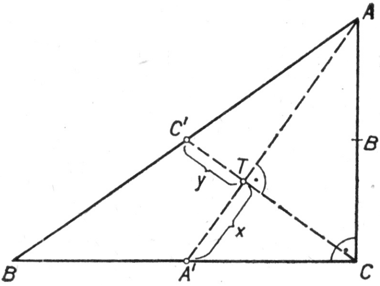
$$TC = 2y, \; TA = 2x, \; C'A = CC' = 3y. \tag{3}$$

Z pravouhlých trojuholníkov ACT, $AC'T$ dostaneme pomocou Pythagorovej vety

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 1,$$
$$(2x)^2 + y^2 = (3y)^2$$

čiže

$$4x^2 + 4y^2 = 1,$$
$$x^2 = 2y^2.$$



Obr. 31.

Z oboch posledných rovníc dostaneme $6x^2 = 1$, $12y^2 = 1$, t. j.

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Pretože $c = 6y$, je $c = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$. Pomocou tohto výsledku a vzťahu (1) dostaneme

$$a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 1 = 2,$$

t. j.

$$a = \sqrt{2}.$$

Trojuholník má teda tieto dĺžky strán:

$$a = \sqrt{2}, \; b = 1, \; c = \sqrt{3}. \tag{4}$$

Dokážeme naviac: Ak sú dĺžky strán (pravouhlého) trojuholníka dané rovnosťami (4), má trojuholník vlastnosť vyslovenú v texte úlohy.

Skúška. O týchto číslach platí vzťah (1), takže trojuholník so stranami uvedených dĺžok (podľa obrátenej Pythagorovej vety) je pravouhlý. Jeho ťažnice AA', CC' majú dĺžky $\left(\text{použijeme pravoúhlý trojuholník } AA'C\right.$ a vzťah $\left. CC' = \frac{1}{2}AB\right)$:

$$(AA')^2 = (3x)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2, \quad 3y = CC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Po dosadení

$$9x^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad x^2 = \frac{1}{6}.$$

Tým

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Dokážeme, že je $CC' \perp AA'$, t. j. že pre trojuholník ACT platí Pythagorova veta, t. j. že $TA^2 + TC^2 = 1$:

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1.$$

Tým je dôkaz prevedený.

Pekne túto úlohu vyriešil Michal Maruščák,
1. b tr. SVŠ Stropkov

3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y = |x - 3|$ a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y| = 6$. Užitím grafického znázornění a pak výpočtem řešte soustavu rovnic

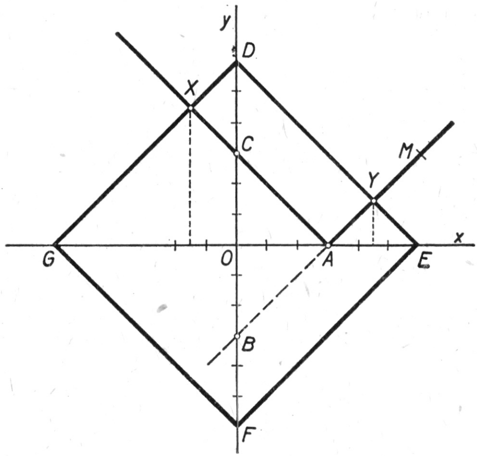
$$y = |x - 3|, \qquad (1)$$

$$|x| + |y| = 6. \qquad (2)$$

Řešení. I. Nejprve vyšetříme graf funkce (1), o níž zřejmě platí $y \geqq 0$.

[1]. Je-li $x - 3 \geqq 0$, je $|x - 3| = x - 3$; rovnice (1) pak zní

$$y = x - 3 \text{ (pro } x \geqq 3).$$



Obr. 32.

Grafem (obr. 32) je polopřímka AM opačná k polopřímce AB, určené počátkem $A \equiv [3, 0]$ a bodem $B \equiv [0, -3]$.

[2]. Je-li $x - 3 \leqq 0$, je $|x - 3| = -x + 3$, rovnice (1) pak zní

$$y = -x + 3 \text{ (pro } x \leqq 3).$$

Grafem je polopřímka AC určená počátkem A a bodem $C \equiv [0, 3]$.

Graf funkce (1) se skládá z polopřímek AM, AC.

II. Protože platí $|x| = |-x|$, $|y| = |-y|$, pak je-li bod $[x, y]$ bodem grafu rovnice (2), jsou i body $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[-x, -y]$ body grafu této rovnice, tj. graf je souměrný podle obou os souřadnic. Stačí se tedy omezit na vyšetření grafu v I. kvadrantu. Pro $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ rovnice (2) zní $x + y = 6$ neboli

$$y = -x + 6 \text{ (pro } x \geqq 0, y \geqq 0). \tag{5}$$

Grafem je úsečka DE s krajními body $D \equiv [0, 6]$, $E \equiv \equiv [6, 0]$. Grafem rovnice (2) je pak čtverec $DEFG$ se středem O.

III. Z obou grafů je patrno, že hledáme souřadnice těchto dvou průsečíků:

a) polopřímky AM a úsečky DE (označíme jej Y);

b) polopřímky AC a úsečky DG (označíme jej X).

Výpočet provedeme z daných dvou rovnic (1), (2).

Z rovnice (1) pak plyne

$$|y| = |x - 3|; \tag{3}$$

dosadíme-li z (3) do (2), dostaneme

$$|x| + |x - 3| = 6. \tag{4}$$

Při řešení rovnice (4) rozlišíme tři případy:

1. $x \leqq 0$; pak je $|x| = -x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$3 - 2x = 6,$$

odtud plyne $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

2. $0 \leqq x \leqq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$x + 3 - x = 6$$

a je neřešitelná.

3. $x \geqq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = x - 3$. Rovnice (4) pak zní

$$2x - 3 = 6;$$

odtud plyne $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Souřadnice obou bodů $X \equiv \left[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $Y \equiv \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$ vyhovují rovnicím (1), (2); tím jsou body X, Y určeny výpočtem.

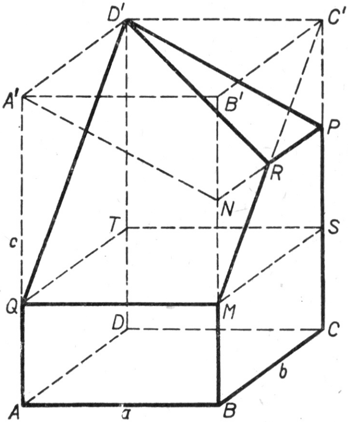
4. Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ je zkosen dvěma rovinnými řezy. Na hraně BB' jsou sestrojeny body M, N tak, že $BM = MN = NB' = \frac{1}{3}c$. Zkosení je provedeno rovinami $C'D'M$ a $A'D'N$.

Načrtněte ve volném rovnoběžném promítání obraz výsledného tělesa a vypočtěte, jakou částí objemu daného kvádru je objem tohoto tělesa.

Řešení. Z obrazu 33 ve volném rovnoběžném promítání, kde $QMST$ je obdélník shodný s obdélníkem

$ABCD$ a leží v rovině rovnoběžné s rovinou ABC, je vidět, že kvádr $QMSTA'B'C'D'$ $\left(\text{o rozměrech } a,\ b,\ \frac{2}{3}c\right)$ je rovinou $QMC'D'$ rozpůlen; objem této poloviny je $V_1 = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{3}c = \frac{1}{3}abc$. Objem kvádru $ABCDQMST$ $\left(\text{o rozměrech } a,\ b,\ \frac{1}{3}c\right)$ je $V_2 = \frac{1}{3}abc$. Objem větší části tělesa zkoseného rovinou $C'D'M$ je tedy roven $V_3 = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}abc$.

Objem tělesa po dalším zkosení rovinou $A'D'N$ dostaneme tak, že od čísla V_3 odečteme objem V_4 trojbokého jehlanu s podstavou $RC'P$ (kde $\sphericalangle P = 90°$) a s tělesovou výškou $C'D' = a$. Přitom je $PS = PC' = \frac{1}{3}c$, takže úsečka RP je střední příčka trojúhelníku MSC' a tedy platí $RP = \frac{1}{2}b$; obsah x trojúhelníku $RC'P$ tedy je



Obr. 33.

$$x = \frac{1}{2}RP \cdot PC' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}c = \frac{1}{12}bc.$$

Objem $V_4 = \frac{1}{3}x \cdot C'D'$ neboli

$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} bc \,.\, a = \frac{1}{36} abc.$$

Objem V výsledného tělesa pak je

$$V = V_3 - V_4 = \frac{2}{3} abc - \frac{1}{36} abc = \frac{1}{36}(24 - 1)\, abc =$$
$$= \frac{23}{36} abc.$$

Je tedy $V = \frac{23}{36} abc$; protože $\frac{23}{36} \doteq 0{,}64$, je to asi 64% objemu původního kvádru.

8. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D*

1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $10^n + 8$ dělitelné číslem 72.

Řešení. Protože je číslo $72 = 8 \,.\, 9$, kde 8, 9 jsou nesoudělná čísla, musíme najít všechna přirozená čísla n, pro něž je $10^n + 8$ dělitelné devíti a osmi. Číslo $10^n + 8$ má ciferný součet $1 + 8 = 9$, takže je dělitelné devíti.

Dále je $10^n = (2 \,.\, 5)^n = 2^n \,.\, 5^n$. Je tedy 10^n dělitelné osmi tehdy, je-li 2^n dělitelné osmi neboli číslem 2^3; to nastane právě pro $n \geqq 3$. Pak je $10^n + 8$ součtem dvou čísel dělitelných osmi a je tudíž dělitelné osmi.

Závěr. Dané číslo je dělitelné osmi pro všechna přirozená čísla $n \geqq 3$ a pro žádná jiná.

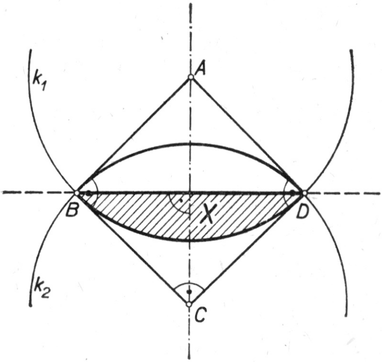
2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Uvažujme dva kruhy o poloměrech délky 1 a o středech A, C. Nazveme M obrazec, který se skládá z bodů společných oběma kruhům, a V obrazec, složený z těch bodů, které náležejí alespoň jednomu z obou kruhů.

Vypočtěte v procentech, jakou částí obsahu obrazce V je obsah obrazce M.

Řešení (viz obr. 34). Označme P obsah shodných kruhů K_1, K_2 o středech A, C a poloměrech 1; je

$$P = \pi.$$

Dále označme X obsah úseče kruhu K_1, která má středový úhel 90°; příslušný čtvrtkruh leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tu X je rozdílem obsahu $\frac{1}{4}\pi$ zmíněného čtvrtkruhu a obsahu pravoúhlého trojúhelníku BDA, který se rovná $\frac{1}{2}$ (je to polovina obsahu čtverce $ABCD$, který má obsah 1); proto je



Obr. 34.

$$X = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

Avšak $M = 2X$, tj.

$$M = \frac{1}{2}(\pi - 2). \qquad (1)$$

Dále obrazec V je přímkou BD rozdělen ve dvě shodné úseče, z nichž každá má obsah Y roven obsahu P kruhu K_1 zmenšenému o obsah X dříve uvažované úseče; je tedy $Y = P - X = \pi - \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{1}{4}(3\pi + 2)$. Protože je $V = 2Y$, dostáváme

$$V = \frac{1}{2}(3\pi + 2). \tag{2}$$

Hledaný počet procent x je

$$x = 100 \cdot \frac{M}{V}.$$

Po dosazení z (1), (2) máme

$$x = 100 \cdot \frac{\pi - 2}{3\pi + 2}. \tag{3}$$

Vypočteme přibližnou hodnotu čísla x, a to tak, že položíme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$x \doteq 100 \cdot \frac{\frac{22}{7} - 2}{3 \cdot \frac{22}{7} + 2} = 100 \cdot \frac{22 - 14}{66 + 14} =$$

$$= 100 \cdot \frac{8}{80} = 10.$$

Obsah obrazce M je asi 10 % obsahu obrazce V.

3. Je daný trojuholník ABC.

Zostrojte body X, Y tak, aby bod X ležal na strane CA a bod Y na strane CB a aby platilo: $XY \parallel AB$, $AX + BY = XY$.

Riešenie (obr. 35). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme našli priamku XY. Nanesme na polpriamku XY úsečku XA. Dostaneme úsečku XZ a platí $XZ = XA$. Ľahko zistíme, že vzhľadom na vzťah $AX + BY = XY$ je $YZ = YB$. Sú teda XAZ, YBZ rovnoramenné trojuholníky a v každom z nich sú oba uhly pri základni zhodné, t. j.

$$\sphericalangle XAZ = \sphericalangle XZA, \quad \sphericalangle YBZ = \sphericalangle YZB. \qquad (1)$$

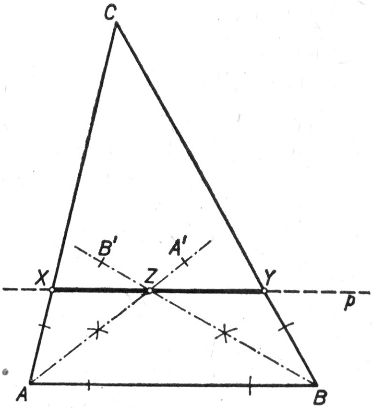
Pretože je $XY \parallel AB$, sú striedavé uhly pri týchto rovnobežkách zhodné. Platí teda:

$$\sphericalangle XZA = \sphericalangle ZAB,$$
$$\sphericalangle YZB = \sphericalangle ZBA. \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\sphericalangle XAZ = \sphericalangle ZAB,$$
$$\sphericalangle YBZ = \sphericalangle ZBA. \quad (3)$$

Polpriamky AZ, BZ sú teda postupne osami uhlov $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ trojuholníka ABC.



Obr. 35.

Stadiaľ *konštrukcia* (obr. 35): Zostrojme postupne osi AA', BB' uhlov $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ trojuholníka ABC a ich spoločný bod označme Z (poznámka: jedná sa zrejme o stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC). Ďalej veďme bodom Z priamku $p \parallel AB$ a označme X, Y postupne jej priesečníky s priamkami CA, CB. Potom je XY hľadaná priamka.

Skúška. Platia vzťahy (3) a podľa konštrukcie je bod Z stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, takže leží vo vnútri tohto trojuholníka. Preto body X, Y padnú postupne do vnútra úsečiek CA, CB, pričom podľa konštrukcie je $XY \parallel AB$, a preto platia vzťahy (2). Ale zo vzťahov (2), (3) vyplývajú vzťahy (1), t. j. trojuholníky XAZ, YBZ sú rovnoramenné a preto je $XA = XZ$, $YB = YZ$ a tým $AX + BY = XY$, čím je dôkaz prevedený.

Z prevedenej konštrukcie vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}, \quad \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je väčší.

Riešenie. Označme X, Y dané zlomky a kvôli stručnosti položme

$$5\,555\,555\,557 = x, \quad 6\,666\,666\,669 = y.$$

Potom platí

$$X = \frac{x - 4}{x}, \quad Y = \frac{y - 5}{y}.$$

Utvorme rozdiel $X - Y$. Platí

$$X - Y = \frac{x - 4}{x} - \frac{y - 5}{y}.$$

Po úpravách pravej strany postupne dostaneme

$$X - Y = \frac{y(x - 4) - x(y - 5)}{xy} = \frac{5x - 4y}{xy}. \quad (1)$$

Vypočítajme čísla $5x$, $4y$; platí

$$5x = 27\,777\,777\,785,$$
$$4y = 26\,666\,666\,676.$$

Zrejme je $5x - 4y$ kladné číslo. Pretože aj čísla x, y sú kladné, je zlomok (1) kladný a preto je rozdiel $X - Y$ tiež kladný. Teda je $X > Y$.

Odpoveď. Prvý z daných zlomkov je väčší než druhý.

5. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky musíme přitom užít?

Řešení. Označme x počet kg pájky prvního druhu, takže pájky druhého druhu bylo vzato $(10 - 2 - x)$ kg neboli $(8 - x)$ kg. Porovnejme nyní váhy cínu v obou použitých pájkách a ve výsledné slitině;

$$x \cdot \frac{25}{100} + (8 - x) \cdot \frac{60}{100} = \frac{10 \cdot 30}{100}.$$

Upravme obě strany této rovnice; dostaneme

$$\frac{25x + 60(8 - x)}{100} = 3$$

neboli

$$\frac{480 - 35x}{100} = 3.$$

Po znásobení obou stran číslem 100 a po dalších úpravách postupně dostaneme

$$480 - 35x = 300,$$

$$180 = 35x,$$

$$\frac{36}{7} = x.$$

Pájky prvního druhu bylo vzato $5\frac{1}{7}$ kg, pájky druhého druhu $2\frac{6}{7}$ kg.

Zkouška. Obě užité pájky se 2 kg čistého olova skutečně vážily 10 kg. Váha cínu v užitých pájkách v kg byla:

$$\frac{36}{7}\cdot\frac{25}{100}+\frac{20}{7}\cdot\frac{60}{100}=\frac{6\,.\,25}{700}(6+4\,.\,2)=$$
$$=\frac{6\,.\,25}{700}\,.\,14=\frac{6\,.\,25}{100}\,.\,2=\frac{300}{100}=3;$$

je však $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}$, takže výsledná slitina obsahovala skutečně 30 % cínu.

6. Rovnoběžník *ABCD* s ostrým úhlem při vrcholu *A* má strany $AB = 21$ cm, $AD = 13$ cm a jeho výška $DE \perp AB$ má délku 12 cm. Označme *F* patu výšky $DF \perp BC$.

Výpočtem dokažte, že body *E*, *F* padnou po řadě dovnitř stran *AB*, *BC*, a dále vypočtěte délky obou úseček *BD* a *EF*.

Řešení (viz obr. 36). Délky úseček uvedeme v cm. Označme *DE* výšku v trojúhelníku *ABD* a *DF* výšku v trojúhelníku *BCD*. Nejprve dokážeme, že body *E*, *F* padnou po řadě dovnitř úseček *AB*, *BC*, přičemž též určíme délku *BD*; potom vypočteme délky *BF*, *DF*.

a) Úhel $\sphericalangle DAB$ je podle textu úlohy ostrý; proto bod *E* padne dovnitř polopřímky *AB*. Vypočteme pomocí Pythagorovy věty délku *AE* z pravoúhlého trojúhelníku *ADE* (kde $\sphericalangle E = 90°$): Je

$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = 13^2 - 12^2 =$$
$$= (13 - 12)(13 + 12) = 25,$$

a tedy

$$AE = 5, \quad BE = AB - AE = 16. \tag{1}$$

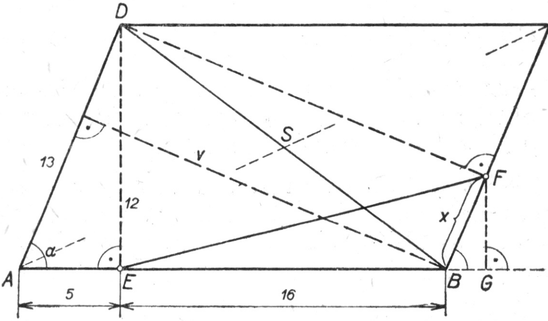
Je tedy $AE < AB$ a bod F padne dovnitř úsečky AB.

Nyní z pravoúhlého trojúhelníku BDE (kde $\sphericalangle E = 90°$) vypočteme přeponu BD; podle Pythagorovy věty platí:

$$BD^2 = DE^2 + BE^2 = 12^2 + 16^2 = 4^2 (3^2 + 4^2) =$$
$$= 4^2 . 5^2 = 20^2,$$

a tedy

$$BD = 20. \tag{2}$$



Obr. 36.

b) Výška DF trojúhelníku BCD je rovna výšce v trojúhelníku DAB, vedené bodem B (oba trojúhelníky jsou souměrně sdružené podle středu S rovnoběžníku $ABCD$, a tedy shodné). Obsah rovnoběžníku $ABCD$ vyjádříme dvojím způsobem:

$$AB . DE = AD . v, \quad \text{tj.} \quad 21 . 12 = 13v,$$

a tedy

$$DF = v = \frac{21 . 12}{13} = \frac{252}{13}. \tag{3}$$

Je ještě třeba dokázat, že bod F padne mezi body B, C. Z trojúhelníků ADE, BDE vypočteme pro úhly $\alpha = \sphericalangle DAE$, $\beta = \sphericalangle DBE$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{12}{5} = 2{,}5\,, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

V tabulkách najdeme

$$\alpha > 66°, \quad \beta > 36°.$$

Je tedy $\alpha + \beta > 102°$ a dále

$$\sphericalangle ADB = 180° - (\alpha + \beta) < 180° - 102° = 78°.$$

To znamená, že trojúhelník $\triangle ABD$ i $\triangle CDB$ s ním shodný je ostroúhlý. Proto pata každé výšky trojúhelníku CDB (tj. i bod F) leží uvnitř protější strany.

c) Zbývá vypočítat délku EF. Označme G patu kolmice spuštěné z bodu F na přímku AB. Vznikne pravoúhlý trojúhelník BFG, v němž je $\sphericalangle FBG = \alpha$. Označme $BF = x$; pak je

$$FG = x \sin \alpha, \; EG = EB + x \cos \alpha = 16 + x \cos \alpha.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$EF^2 = FG^2 + EG^2 = x^2 \sin^2 \alpha + 16^2 + 32x \cos \alpha + \\ + x^2 \cos^2 \alpha,$$

$$EF^2 = x^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 32x \cos \alpha + 16^2. \qquad (4)$$

Z trojúhelníku ADE dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \; \cos \alpha = \frac{5}{13}, \; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1\,.$$

Z (4) plyne po dosazení

$$EF^2 = x^2 + \frac{160}{13}\,x + 16^2. \tag{5}$$

Zbývá ještě vypočítat x z trojúhelníku BDF; podle (3) je

$$x^2 = BD^2 - DF^2 = 20^2 - \frac{252^2}{13^2} = \frac{4^2}{13^2}(5^2 \,.\, 13^2 - 63^2) =$$

$$= \frac{4^2}{13^2}(65 + 63)(65 - 63) = \frac{4^2 \,.\, 16^2}{13^2},$$

a dále

$$x = \frac{64}{13}.$$

Dosadíme-li za x do (5), vyjde

$$EF^2 = \frac{64^2}{13^2} + \frac{160}{13^2} \,.\, 64 + 16^2 =$$

$$= \frac{16^2}{13^2}(16 + 40 + 169) = \frac{16^2}{13^2} \,.\, 15^2,$$

a dále

$$EF = \frac{16 \,.\, 15}{13} = \frac{240}{13} \doteq 18{,}5.$$

9. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D*

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q o vzdálenosti d a přímka m k nim kolmá. Dále jsou dány dvě úsečky délek a, b.

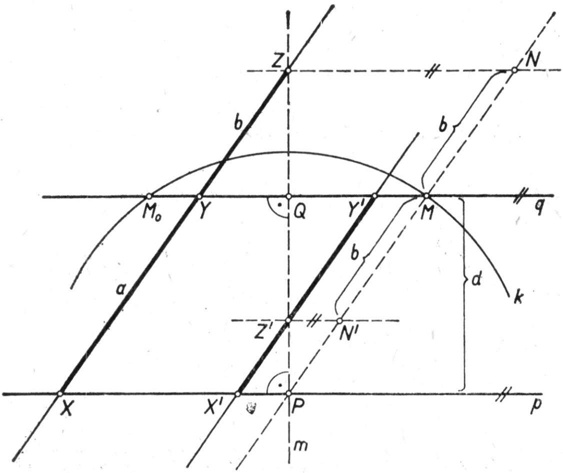
Na přímkách p, q, m sestrojte po řadě body X, Y, Z takové, aby všechny tři ležely na téže přímce a aby platilo:

$$XY = a, \quad YZ = b.$$

Udejte podmínku řešitelnosti úlohy jako vztah mezi čísly a, b, d.

Řešení (obr. 37). *Rozbor.* Označme P, Q průsečíky přímky m po řadě s přímkami p, q. Je-li XY přímka, která splňuje požadavky úlohy, veďme bodem P přímku $r \parallel XY$ a označme M její průsečík s přímkou q. Rovnoběžka s p bodem Z protne r v bodě N. Platí

$$XY = PM = a, \quad YZ = MN = b.$$



Obr. 37.

Bod M tedy leží na kružnici $k \equiv (P, a)$; bod Z leží na rovnoběžce vedené bodem N k přímce p.

Konstrukce. Opišme kružnici $k \equiv (P, a)$ a označme M jeden společný bod kružnice k a přímky q. Na polopřímku opačnou k polopřímce MP naneseme úsečku délky b, čímž dostaneme bod N; platí $MN = b$. Bodem N veďme rovnoběžku s přímkou p a označme Z její průsečík s přímkou m. Bodem Z veďme rovnoběžku k přímce PM a označme X, Y její průsečíky po řadě s přímkami p, q. Přímka XY vyhovuje požadavkům úlohy, jak snadno dokážeme. V obrázku 37 jsme bod N sestrojili na prodloužení úsečky PM za bod M; potom bod Z leží na prodloužení úsečky XY za bod Y. Naproti tomu bod N' leží na polopřímce MP a vede k druhému řešení $X'Y'$.

Diskuse. Aby existoval bod M, musí být $a \geqq d$ (pro $a < d$ není řešení). Pro $a = d$ zřejmě je $X \equiv P$, $Y \equiv Q$ a bod Z leží na prodloužení úsečky PQ za bod Q, kdežto bod Z' leží na polopřímce QP; v tomto případě má úloha dvě řešení. Pro $a > d$ protne kružnice k přímku q v různých bodech M, M_0 a každý z nich poskytne dvě řešení, takže jsou 4 řešení; dvě a dvě jsou navzájem souměrně sdružená podle přímky m, stejně jako oba body M, M_0.

2. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má větš základna AB délku 4 cm; úhlopříčky lichoběžníku jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru 2 : 1.

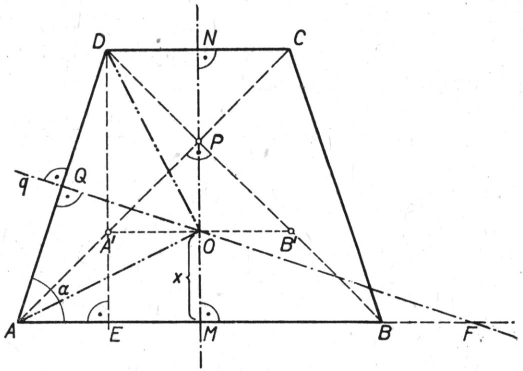
Vypočtěte poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

Řešení. Označme P průsečík úhlopříček a M, N po řadě středy úseček AB, CD (viz obr. 38). Jsou-li A', B' středy úseček PA, PB, potom podle textu úlohy je $PA' = PC$, $PB' = PD$; ve středové souměrnosti o středu P si příslušejí úsečky $A'B'$ a CD a je tedy $4 = AB = 2 \cdot A'B'$ ($A'B' \parallel AB$ střední příčka trojúhelníku PAB), $2 = A'B' = CD$ (středová souměrnost). Je tedy $CD = 2$. Trojúhelníky APM, DPN jsou rovnoramenné a pravoúhlé; je tedy $PM = AM = 2$, $PN = DN = 1$ a $MN = 3$.

Označme q osu ramena AD lichoběžníku. Průsečík O přímek MN, q je střed hledané kružnice $k \equiv (O, r)$

lichoběžníku opsané, tj. platí $OA = OD$. Sestrojíme-li v obrázku bod O, shledáme, že padne dovnitř úsečky MN. Správnost tohoto závěru ověříme výpočtem takto: Označme E patu kolmice DE k přímce AB; tu je $AE = AM - ME = 2 - 1 = 1$; v pravoúhlém trojúhelníku ADE o přeponě AD podle Pythagorovy věty platí

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = 1^2 + 3^2 = 10, \quad AD = \sqrt{10}.$$



Obr. 38.

Proto je $AQ = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, kde Q je střed úsečky AD. Přímky AB, AD, q omezují pravoúhlý trojúhelník AFQ, který má s trojúhelníkem ADE společný úhel $\alpha \equiv \sphericalangle DAE$. Pro $\cos \alpha$ tohoto úhlu z obou trojúhelníků dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AQ}{AF};$$

odtud dostaneme

$$AE \,.\, AF = AD \,.\, AQ$$

neboli

$$AF = AD \cdot \frac{AQ}{AE} = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{10} = 5.$$

Protože $AB = 4$, padne bod F do poloroviny MNB, kdežto bod Q do poloroviny MNA. Leží proto bod O úsečky QF spolu s bodem Q uvnitř poloroviny ABD, a tedy uvnitř úsečky MN.

Označme $MO = x$, takže $ON = MN - MO = 3 - x$. Z obou pravoúhlých trojúhelníků OAM, ODN ($\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90°$) o přeponách OA, OD délky r pomocí Pythagorovy věty dostaneme:

$$AM^2 + OM^2 = OA^2, \quad OD^2 = ON^2 + DN^2 \qquad (1)$$

neboli

$$4 + x^2 = r^2, \quad r^2 = (3 - x)^2 + 1. \qquad (2)$$

Porovnejme oba tyto výsledky; dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = (3 - x)^2 + 1$$

neboli

$$x = 1$$

(bod O je tedy střed úsečky $A'B'$). Podle (2) je $r^2 = 5$, tj.

$$r = \sqrt{5} \doteq 2{,}24.$$

Závěr. Vzhledem k (1) je $r = OA = OD = \sqrt{5}$.

Z úspěšných řešitelů úlohy uvádíme:

Erich Wint, 9. tr. ZDŠ, Banská Bystrica
Milan Šaling, 9. tr. ZDŠ, Podbrezová

3. Máme dva kusy klempířské pájky (slitina olova a cínu) o váhách 5 kg, $7\frac{1}{2}$ kg. Obsah cínu v prvním kusu je $\frac{1}{4}$ jeho váhy, ve druhém kusu $\frac{1}{3}$ jeho váhy. Od každého z obou kusů oddělíme část stejné váhy a připojíme ji ke zbytku druhého kusu; po slití zbytku a nově připojené části dostaneme opět dva kusy o váze 5 kg a o váze $7\frac{1}{2}$ kg.

Vypočtěte, jak těžké musí být oddělené části, aby nově slité kusy pájky obsahovaly stejné procento cínu. Proveďte zkoušku.

Řešení. V prvním kusu je $5\,\text{kg} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ kg cínu; ve druhém pak $7\frac{1}{2}\,\text{kg} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$ kg cínu. V obou kusech je $\frac{5}{4}\,\text{kg} + \frac{5}{2}\,\text{kg} = \frac{15}{4}$ kg cínu. Bude-li nakonec procento cínu v obou kusech stejné, bude poměr vah cínu v prvním a druhém kusu týž jako poměr celkových vah těchto kusů, tj. $5 : \frac{15}{2} = \frac{2}{3}$. Celkové množství $\frac{15}{4}$ kg cínu rozdělíme v poměru $\frac{2}{3}$, tedy v prvním kusu bude $\left(\frac{15}{4}\,\text{kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 2 = \frac{3}{2}$ kg cínu, ve druhém $\left(\frac{15}{4}\,\text{kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 3 = \frac{9}{4}$ kg cínu.

V prvním kusu přibylo o $\frac{3}{2}\,\text{kg} - \frac{5}{4}\,\text{kg} = \frac{1}{4}$ kg, ve druhém kusu ubylo o $\frac{5}{2}\,\text{kg} - \frac{9}{4}\,\text{kg} = \frac{1}{4}$ kg cínu (tedy skutečně stejná váhová množství). Jestliže jsme od každého kusu oddělili x kg pájky, pak v prvním kusu bylo v tomto množství $\frac{x}{4}$ kg cínu, ve druhém kusu pak $\frac{x}{3}$ kg cínu. Platí, že rozdíl $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ je roven $\frac{1}{4}$ neboli $\frac{x}{12} = \frac{3}{12}$, tj. $x = 3$.

Z každého kusu jsme tedy oddělili 3 kg pájky a připojili vždy ke druhému kusu.

Zkouška. Z prvého kusu jsme odebrali $3\,\text{kg} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ kg cínu, ze druhého $3\,\text{kg} \cdot \frac{1}{3} = 1$ kg cínu. V prvním kusu zbylo $5\,\text{kg} - 3\,\text{kg} = 2$ kg pájky a v ní $2\,\text{kg} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky 2. druhu k prvnímu kusu bylo v něm tedy $\frac{1}{2}\,\text{kg} + 1\,\text{kg} = 1\frac{1}{2}$ kg cínu. Ve druhém kusu zbylo $7\frac{1}{2}\,\text{kg} - 3\,\text{kg} = 4\frac{1}{2}$ kg pájky a v ní bylo $\frac{9}{2}\,\text{kg} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky prvního druhu ke druhému kusu v něm tedy bylo $\frac{3}{2}\,\text{kg} + \frac{3}{4}\,\text{kg} = \frac{9}{4}$ kg cínu. Procenta cínu v jednotlivých kusech nakonec jsou

$$100 \cdot \left(\frac{3}{2} : 5\right) = \frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 30,$$

$$100 \cdot \left(\frac{9}{4} : 7\frac{1}{2}\right) = \frac{100 \cdot 9 \cdot 2}{4 \cdot 15} = 30,$$

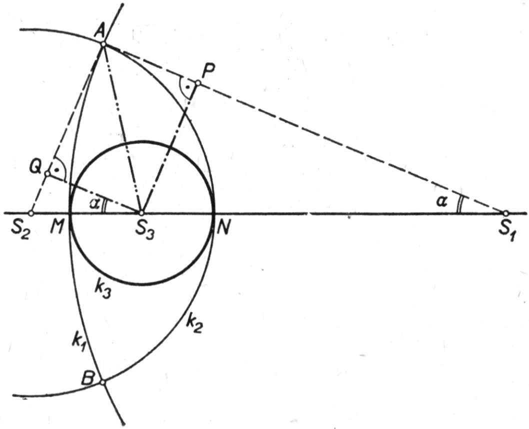
tedy stejná. Tím je zkouška provedena.

Řešil Jan Kastl, 9.b roč., 1. ZDŠ, Přeštice

4. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1 = 12\text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, r_2 = 5\text{ cm})$, které se protínají v bodech A, B tak, že trojúhelník S_1S_2A má při vrcholu A pravý úhel. Kružnice $k_3 \equiv (S_3, x)$ leží uvnitř každé z kružnic k_1, k_2 a má s každou z nich vnitřní dotyk; přitom střed S_3 leží na přímce S_1S_2.

Narýsujte obrázek a vypočtěte poloměr x a vzdálenost AS_3.

Řešení. Délky jsou v cm. Konstrukce je patrna z obrázku 39; v něm jsou M, N body kružnic k_1, k_2



Obr. 39.

ležící uvnitř úsečky S_1S_2, dále P, Q paty kolmic vedených bodem S_3 po řadě k přímkám AS_1, AS_2 a konečně α velikost úhlů $\sphericalangle S_2S_1A$, $\sphericalangle S_2S_3Q$. Trojúhelníky

$$S_1S_2A; \quad S_1S_3P; \quad S_3S_2Q \tag{1}$$

jsou pravoúhlé a podobné. Délku úsečky S_1S_2 najdeme pomocí Pythagorovy věty; platí

$$S_1S_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Pro body M, N, S_1, S_2, S_3 a délku x platí vztahy:

$$S_2M = S_1S_2 - r_1 = 13 - 12 = 1,$$
$$S_1N = S_1S_2 - r_2 = 13 - 5 = 8,$$
$$MN = 2x = S_1S_2 - S_2M - S_1N = 13 - 8 - 1 = 4;$$

tedy $$x = 2.$$

Proto je

$$S_3S_1 = S_1N + x = 10, \quad S_3S_2 = S_2M + x = 3. \quad (2)$$

Úsečka AS_3 je přepona v pravoúhlém trojúhelníku AS_3P a platí

$$AS_3^2 = PS_3^2 + PA^2.$$

Musíme tedy vypočítat PS_3, PA. Vypočteme je z trojúhelníků S_1S_3P, S_3S_2Q [viz (1)], kde známe přepony (2). Platí:

$$PS_3 = S_1S_3 \sin\alpha, \quad QS_3 = S_3S_2 \cos\alpha; \qquad (3)$$

pro $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ plyne z trojúhelníku S_1S_2A:

$$\sin\alpha = \frac{AS_2}{S_1S_2} = \frac{5}{13}, \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}. \qquad (4)$$

Po dosazení ze (2), (4) do (3) dostaneme

$$PS_3 = \frac{50}{13}, \quad QS_3 = \frac{36}{13},$$

takže

$$AS_3 = \sqrt{\frac{36^2 + 50^2}{13^2}} = \frac{1}{13}\sqrt{1296 + 2500} =$$
$$= \frac{1}{13}\sqrt{3796} \doteq \frac{1}{13} \,.\, 61{,}61 = 4{,}74.$$

Odpověď. Poloměr $x = 2$ cm a vzdálenost $AS_3 \doteq 4{,}74$ cm.