

13. ročník matematické olympiády

III. Přípravné úlohy (texty)

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 13. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1963-1964. 6. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, pp. 27-31.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404531>

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

III. Přípravné úlohy (texty)

1. KATEGORIE A

1. Najděte nutné a postačující podmínky mezi reálnými koeficienty p, q rovnice $x^2 + px + q = 0$ k tomu, aby měla kladné kořeny x_1, x_2 , o nichž platí $x_1 = 2x_2$.

2. Vypočtěte délku středné dvou kružnic o daných poloměrech R, r , které mají tu vlastnost, že úsek společné vnitřní tečny těchto kružnic, obsažený mezi jejich společnými tečnami vnějšími, má délku p , kde p je dané kladné číslo.

Proveďte konstrukci středné a diskusi řešitelnosti úlohy.

3. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je obdélník a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o rozměrech $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$.

Na přímce BB' najděte bod X a na přímce CA' bod Y tak, aby platilo $XY \perp BB'$, $XY \perp CA'$. Vypočtěte velikosti úseček XY, BX, CY .

4. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y , které splňují nerovnosti

$$\left| \sin \left(x + y + \frac{1}{2} \pi \right) \right| \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

V rovině pravouhlých souřadnic x, y pak zobrazte všechna tato řešení.

5. Jsou-li $b, n > 2$ přirozená čísla, potom číslo $b^{n+4} - b^n$ je dělitelné číslem 120. Dokažte.

6. Je dán lichoběžník $MNOP$, kde $MN > PQ$. Uvnitř úsečky PQ zvolme body A, B tak, aby platilo $\underline{PA} = \underline{QB}$, a sestrojme po řadě průsečíky X, Y dvojic přímek $\underline{MP}, \underline{NB}$ a $\underline{NQ}, \underline{MA}$.

Vyšetřte geometrické místo středů úseček XY .

2. KATEGORIE B

1. V rovině pravouhlých souřadnic x, y zobrazte funkci:

a) $y = x + 3$

b) $y = |x + 3|$

c) $y = |x| + 3$

d) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x|}$

e) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

f) $y = \frac{(x + 3)^2}{x + 3}$

g) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

h) $y = \frac{1}{2} (|x - 3| + |x + 3|) + 3$

2. Jsou dány rovnoběžky m, n a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod C , který má od nich po řadě vzdálenosti p, q .

Sestrojte trojúhelník ABC , v němž je $CA = CB$, $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ a body A, B leží po řadě na přímkách m, n . Vypočtete obvod a obsah tohoto trojúhelníku.

Pokyn. Lze užít otočení.

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1.

Sestrojte v něm tři shodné kružnice, z nichž každé dvě se navzájem dotýkají vně, přičemž první se dotýká

přímek AB , AD , druhá přímek BC , AC a třetí přímek CA , CD . Vypočtěte velikost poloměrů těchto kružnic.

4. Je dán trojúhelník ABC o stranách délek a , b , c . Vypočtěte vzdálenosti středu C' strany AB od čtyř bodů, ve kterých se přímky AB dotýkají kružnice vepsané a kružnice vně vepsané danému trojúhelníku.

5. Odvoďte vzorce pro všechna přirozená čísla, jejichž druhá mocnina dělena patnácti má za zbytek (v oboru celých nezáporných čísel) číslo: a) 9; b) 7.

6. Udejte, pro které trojice reálných čísel x , y , z nemá výraz

$$V = \frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}$$

smysl, a rozhodněte o hodnotě výrazu pro ostatní trojice reálných čísel x , y , z .

3. KATEGORIE C

1. Uvnitř stran BC , CA , AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC sestrojte po řadě body X , Y , Z tak, aby platilo $XY \perp BC$, $YZ \perp CA$, $ZX \perp AB$, a vypočtěte délky stran trojúhelníku XYZ pomocí délky $d = AB$.

2. Vypočtěte nejmenší přirozená čísla p , x , pro která je výraz

$$V = \frac{x^2 + 2px + p^2 - 16}{p^2 + px - 4x - 16}$$

roven číslu 1,05.

3. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ . Aniž narýsujete střed kružnice k tomuto trojúhelníku opsané, sestrojte k ní v bodech A, B, C tečny.

Poznámka. Lze užít úsekového úhlu.

4. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a vně tohoto úhlu je dán bod P . Na polopřímkách OM, ON sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bod Y byl středem úsečky PX . Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

5. Rozhodněte, které z celých čísel od 0 do 11 nedostaneme jako zbytek při dělení (v oboru celých nezáporných čísel) druhé mocniny přirozeného čísla dvanácti.

6. Řešte rovnici:

$$\text{a) } \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right| = \frac{x - 3}{x + 4};$$

$$\text{b) } \left| \frac{x^2 + 2px + p^2}{x^2 - p^2} \right| = \frac{x + p}{x + 4},$$

kde p je dané číslo.

4. KATEGORIE D

1. Napište všechny dvojice nesoudělných přirozených čísel x, y (bez ohledu na pořádek čísel dvojice), jejichž součin je roven číslu 415 800.

2. Narýsujte čtverec $MNPQ$ o stranách délky d a dále trojúhelník ABC o stranách délek a, b, c .

Sestrojte trojúhelník XYZ těchto vlastností:

(1) Platí $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

(2) Body X, Y, Z padnou po řadě na přímky MQ, MN, NP .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. Továrna splnila plán výroby na 108 %. Považujeme-li toto skutečné plnění výroby za základ, vypočtete, kolik procent představovala původně plánovaná výroba,

4. Narýsujte trojúhelník ABC , jestliže je $BC = 5$ cm, $CA = 12$ cm, $AB = 13$ cm. Označme X bod tohoto trojúhelníku, který splňuje tyto požadavky: Vzdálenost bodu X

(1) od bodu A je větší než od bodu B ;

(2) od přímky CA je větší než od přímky BC ;

(3) od přímky BC je větší než od přímky AB .

Vyšetřte, jaký útvar vyplní všechny body X uvedených vlastností. Tvrzení odůvodněte.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dvě její různé sečny $p \parallel q$.

Narýsujte kružnici m , která se dotýká obou přímek p, q a kružnice k .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

6. Výraz

$$V = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

je roven nule pro jediné číslo x ; dokažte. Zároveň udejte všechna čísla x , pro která tento výraz: a) je kladný; b) je záporný; c) nemá smysl.