12. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 12. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1962-1963. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. pp. 30–118.

IV. Řešení úloh ze soutěže

1. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A*

1. Je dána velikost výšky v příslušné k přeponě pravoúhlého trojúhelníku a poloměr ϱ kružnice tomuto trojúhelníku vepsané.

a) Vypočtěte délku přepony c pomocí čísel v, ϱ.

b) Sestavte kvadratickou rovnici (o jedné neznámé), jejímiž kořeny jsou délky odvěsen a, b uvažovaného trojúhelníku.

Pro které hodnoty v a ϱ existuje takový pravoúhlý trojúhelník?

Řešení. a) Mezi délkami ϱ, v, a, b, c jsou tyto vztahy:

$$2\varrho + c = a + b\,, \tag{1a}$$
$$vc = ab\,, \tag{1b}$$
$$c^2 = a^2 + b^2\,. \tag{1c}$$

První rovnost se odvodí z délek tečen vedených k vepsané kružnici z vrcholů trojúhelníku, druhá plyne ze vzorce pro obsah, třetí z věty Pythagorovy. Na základě rovnosti $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ sestavíme rovnici pro c

$$(2\varrho + c)^2 = c^2 + 2vc$$

a odtud

$$c = \frac{2\varrho^2}{v - 2\varrho}\,, \tag{2}$$

neboť $v > 2\varrho$.

b) Z (1ab) vypočteme s použitím vzorce (2)

$$a + b = 2\varrho \frac{v - \varrho}{v - 2\varrho}, \qquad ab = \frac{2\varrho^2 v}{v - 2\varrho}.$$

Délky odvěsen a, b jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2\varrho \frac{v - \varrho}{v - 2\varrho} x + \frac{2\varrho^2 v}{v - 2\varrho} = 0. \tag{3}$$

Nyní odpovíme na otázku, pro které hodnoty v, ϱ existuje takový pravoúhlý trojúhelník.

Má-li být úloha řešitelná, musí vyjít $c > 0$; podle (2) pak musí být $v - 2\varrho > 0$ neboli

$$v > 2\varrho. \tag{4}$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = 4\left[\varrho^2 \frac{(v - \varrho)^2}{(v - 2\varrho)^2} - \frac{2\varrho^2 v}{v - 2\varrho}\right] =$$

$$= \frac{4\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} (\varrho^2 + 2\varrho v - v^2) =$$

$$= \frac{4\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} [2\varrho^2 - (\varrho - v)^2] =$$

$$= \frac{4\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2} (\varrho\sqrt{2} + \varrho - v)(\varrho\sqrt{2} - \varrho + v).$$

Podle (4) je $\varrho\sqrt{2} - \varrho + v > 0$; platí tedy $D \geqq 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\varrho(\sqrt{2} + 1) - v \geqq 0$ neboli

$$v \leqq \varrho(1 + \sqrt{2}). \tag{5}$$

Dokážeme, že nerovnosti (4), (5) udávají nejen nutnou, ale i postačující podmínku řešitelnosti úlohy.

Platí-li totiž (4) i (5), vypočteme kořeny rovnice (3)

$$x = \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{D} =$$

$$= \frac{\varrho}{v - 2\varrho}\left(v - \varrho \pm \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}\right). \tag{6}$$

Oba tyto kořeny jsou kladná čísla, neboť podle (4) je $v - \varrho > 0$ a $v - \varrho > \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}$; platí totiž podle (4)

$$(v - \varrho)^2 - (\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2})^2 =$$
$$= v^2 - 2\varrho v + \varrho^2 - \varrho^2 - 2\varrho v + v^2 =$$
$$= 2v^2 - 4\varrho v = 2v(v - 2\varrho) > 0.$$

Existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky

$$a' = \frac{\varrho}{v - 2\varrho}\left(v - \varrho + \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}\right) =$$
$$= \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} + \tfrac{1}{2}\sqrt{D},$$

$$b' = \frac{\varrho}{v - 2\varrho}\left(v - \varrho - \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho v - v^2}\right) =$$
$$= \frac{\varrho(v - \varrho)}{v - 2\varrho} - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

Jeho přepona c' má pak délku [opět s použitím (4)]

$$c' = \sqrt{2\frac{\varrho^2(v - \varrho)^2}{(v - 2\varrho)^2} + \tfrac{1}{2}D} =$$
$$= \sqrt{\frac{2\varrho^2}{(v - 2\varrho)^2}\left[(v - \varrho)^2 + \varrho^2 + 2\varrho v - v^2\right]} =$$
$$= \sqrt{\frac{4\varrho^4}{(v - 2\varrho)^2}} = \frac{2\varrho^2}{v - 2\varrho}.$$

Tento pravoúhlý trojúhelník má výšku v' danou vzorcem

$$v' = \frac{a'b'}{c'} = \left[\frac{\varrho^2(v-\varrho)^2}{(v-2\varrho)^2} - \tfrac{1}{4}D\right]\cdot\frac{v-2\varrho}{2\varrho^2} =$$

$$= \frac{\varrho^2}{(v-2\varrho)^2}\,[(v-\varrho)^2 - \varrho^2 - 2\varrho v + v^2]\cdot\frac{v-2\varrho}{2\varrho^2} =$$

$$= \frac{\varrho^2}{(v-2\varrho)^2}\cdot 2v(v-2\varrho)\,.\,\frac{v-2\varrho}{2\varrho^2} = v\,.$$

Poloměr ϱ' vepsané kružnice se vypočte podle vzorce

$$\varrho' = s' - c' = \tfrac{1}{2}(a' + b' - c')\,,$$

tj.

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2\varrho(v-\varrho)}{v-2\varrho} - \frac{2\varrho^2}{v-2\varrho}\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\varrho(v-2\varrho)}{v-2\varrho} = \varrho\,.$$

Tím je dokázána postačitelnost podmínek řešitelnosti (4) a (5).

Jsou-li splněny podmínky (4) a (5), má úloha b) jediné řešení.

2. Buď dána kružnice k a její určitý průměr AB délky $2r$. Z bodu A se dá do pohybu bod X a s ním v témže okamžiku z bodu B bod Y; přitom se body X, Y pohybují po kružnici k v témže smyslu. Bod X se pohybuje rovnoměrně zrychleně a při prvním průchodu bodem B je jeho rychlost v; bod Y se pohybuje rovnoměrně rychlostí c.

Určete rychlosti c, v tak, aby byly splněny tyto dva požadavky:

(1) Bod X dostihne poprvé bod Y za bodem A, ale před bodem B.

(2) Když po třech obězích bod X dospěje do polohy A, tu současně bod Y dospěje do polohy B.

Řešení. Označíme s_1 (s_2) dráhu, kterou vykoná bod $X(Y)$ za t vteřin; pak je

$$s_1 = \tfrac{1}{2}at^2\,, \quad s_2 = ct\,,$$

kde a je zrychlení pohybu bodu X. Urazí-li bod X polokružnici AB za t_0 vteřin, platí za předpokladu, že $r = 1$:

$$\pi = \tfrac{1}{2}at_0^2\,, \quad v = at_0;$$

odtud plyne

$$a = \frac{v^2}{2\pi}\,.$$

Nechť bod X dostihne bod Y poprvé po t vteřinách; pak platí

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2\pi}\,t^2 = ct + \pi$$

neboli

$$v^2t^2 - 4\pi ct - 4\pi^2 = 0\,. \tag{1}$$

Rovnice (1) má jediný kladný kořen

$$t = \frac{2\pi}{v^2}\left(c + \sqrt{c^2 + v^2}\right). \tag{2}$$

Doby, které potřebuje bod Y k tomu, aby poprvé dospěl do bodu A, resp. B, jsou $\frac{\pi}{c}$, resp. $\frac{2\pi}{c}$. Podle (2) tedy má platit

$$\frac{\pi}{c} < \frac{2\pi}{v^2}\left(c + \sqrt{c^2 + v^2}\right) \leqq \frac{2\pi}{c}\,. \tag{3}$$

Označme $\frac{c}{v} = \lambda$, kde $\lambda > 0$. Podmínky (3) lze pak psát ve tvaru

$$1 < 2\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{1 + \lambda^2} < 2\,. \tag{3'}$$

Z pravé části nerovností (3′) plyne

$$\lambda < \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0{,}577. \tag{4}$$

Z levé části nerovností (3′) plyne

$$1 - 2\lambda^2 < 2\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}. \tag{5}$$

Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $1 - 2\lambda^2 < 0$ neboli $\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (tj. $\lambda > 0{,}708$); protože je $\frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nedostaneme vzhledem ke (4) žádné řešení nerovností (3′).

Případ [2]. Nechť je $1 - 2\lambda^2 > 0$ neboli $\lambda < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Potom z (5) řešením obdržíme $\frac{1}{4}\sqrt{2} < \lambda$, kde $\frac{1}{4}\sqrt{2} \doteq$ $\doteq 0{,}353$. Se zřetelem na (4) tedy nutně platí

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2} < \lambda < \tfrac{1}{3}\sqrt{3}; \tag{6}$$

obráceně je pro tato λ vztah (4) zřejmě splněn. Z druhé podmínky textu úlohy plynou vztahy $6\pi = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{v^2}{2\pi} t^2$, $2n\pi = ct$, kde n je jisté přirozené číslo, které máme určit. Vyloučením t z těchto vztahů plyne

$$24\pi^2 = v^2 \cdot \frac{4\pi^2 n^2}{c^2}$$

neboli $n = \lambda\sqrt{6}$. Znásobme strany nerovností (6) číslem $\sqrt{6}$; obdržíme $\frac{1}{2}\sqrt{3} < n < \sqrt{2}$ (tj. přibližně $0{,}866 <$ $< n < 1{,}42$). Tomu vyhovuje jediné přirozené číslo $n = 1$. Je tedy $\dfrac{c}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ neboli $v = c\sqrt{6}$, kde kladné číslo c lze volit libovolně; tím jsou určeny všechny dvojice čísel c, v, pro něž nastává v textu popsaná situace.

3. Určete velikosti všech ostrých úhlů α, pro něž obě čísla

$$\operatorname{tg}\alpha\,,\ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}3\alpha}$$

jsou přirozená.

Řešení. Ze vzorce $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ se odvodí vzorec

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}\,, \tag{1}$$

který platí pro všecka přípustná α, 3α.

[Je-li 2α nepřípustná hodnota, je třeba vzorec (1) ověřit přímo dosazením.]

Označme $\operatorname{tg}\alpha = a$; pak je podle (1):

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}3\alpha = \frac{3a^2 - 1}{a^2 - 3}\,. \tag{2}$$

Označme $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}3\alpha = b$. Z (2) vyplývá

$$a^2 = \frac{3b - 1}{b - 3}\,. \tag{3}$$

Rovnost (3) přepíšeme do tvaru

$$a^2 = 3 + \frac{8}{b - 3}\,. \tag{3'}$$

Protože a, a^2 jsou celá čísla, je i číslo $\dfrac{8}{b-3}$ celé, tj. $b - 3$ je dělitel čísla 8. Mimoto je $b \geqq 1$, tedy $b - 3 \geqq -2$. Pro $b - 3$ máme tudíž jen tyto možnosti: $-2, -1, 1, 2, 4, 8$.

Protože a^2 je kladné číslo, které je druhou mocninou přirozeného čísla, vyhovuje podle tabulky na str. 37 jen $a^2 = 4$, $a = 2$, $b = 11$. Z rovnice $\operatorname{tg}\alpha = 2$ dostaneme podle tabulek jediné řešení $\alpha \doteq 63°26'$.

Tabulka:

$b-3$	-2	-1	1	2	4	8
b	1	2	4	5	7	11
$\frac{8}{b-3}$	-4	-8	8	4	2	1
a^2	-1	-5	11	7	5	4

4. Ak (nekonečná) aritmetická postupnosť prirodzených čísel obsahuje tretiu mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne mnoho takých mocnín. Dokážte!

Uveďte príklad (nekonečnej) aritmetickej postupnosti prirodzených čísel, ktorej žiadny člen nie je treťou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie. a) Nech aritmetická postupnosť s diferenciou $d > 0$ obsahuje mocninu a^3 (a prirodzené). Potom obsahuje tiež mocninu $(a + kd)^3$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo. Platí totiž

$(a + kd)^3 - a^3 = kd[(a + kd)^2 + (a + kd)a + a^2] = md$,
($m > 0$ celé),
tj.

$$(a + kd)^3 = a^3 + md\,,$$

čím je tvrdenie dokázané.

b) Príkladom nekonečnej aritmetickej postupnosti, ktorej žiadny člen nie je treťou mocninou prirodzeného čísla, je postupnosť

$$5, 105, 205, 305, \ldots \qquad (1)$$

s diferenciou 100. Jej všeobecný člen možno napísať v tvare

$$5 + 100n \text{ (kde } n \geqq 0 \text{ je ľubovoľné celé číslo)} .$$

Ak je $5 + 100n = a^3$, kde a je prirodzené číslo, končí číslo a cifrou 5, t. j.

$$a = 10\alpha + 5 \quad (\alpha \geqq 0 \text{ celé}) .$$

Ďalej je

$$a^3 = (10\alpha + 5)^3 = 1000\alpha^3 + 1500\alpha^2 + \\ + 750\alpha + 125 . \tag{2}$$

Ak je α nepárne, vyplýva z (2)

$$a^3 = 100\beta + 75 \quad (\text{kde } \beta \geqq 0 \text{ je celé}) ,$$

ak je α párne, vyplýva z (2)

$$a^3 = 100\gamma + 25 \quad (\text{kde } \gamma \geqq 0 \text{ je celé}) .$$

Žiadne z týchto čísel nie je však v tvare $100n + 5$ ($n \geqq 0$ celé) čiže nemôže byť členom postupnosti (1).

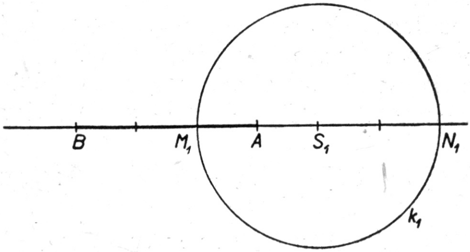
5. Je daný rovnostranný trojuholník ABC se stranou dĺžky 1.

Vyšetrite geometrické miesto bodov X v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B, C platí

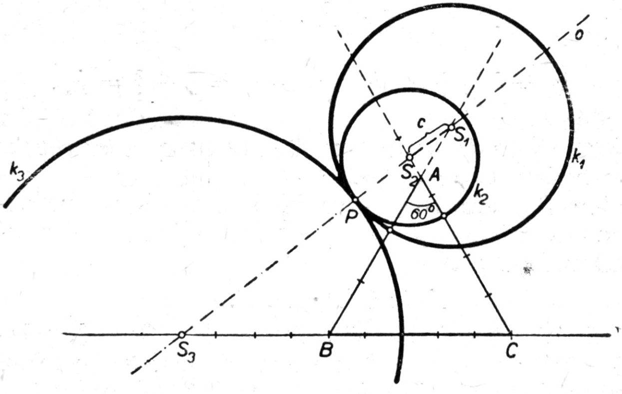
$$AX : BX : CX = 1 : 2 : 3 .$$

Riešenie. Vyšetrujme najskôr geometrické miesto bodov X roviny $\varrho \equiv ABC$, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B platí $AX : BX = 1 : 2$. Toto geometrické miesto bodov je — ako je známe — Apolloniova kružnica k_1 so stredom S_1 a polomerom r_1. Určenie stredu S_1 a polomeru r_1 sa prevedie pomocou obr. 1. Priemerom kružnice k_1 je úsečka M_1N_1 taká, že platí $AM_1 : BM_1 = AN_1 : BN_1 = 1 : 2$. Preto je $AS_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}$, $BS_1 = \frac{4}{3}$, $r_1 = \frac{2}{3}$. Geometrické miesto všetkých bodov X

v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B platí $AX : BX = 1 : 2$, je útvar, ktorý vznikne rotáciou kružnice k_1 okolo priamky AB; je to guľová plocha $\varkappa_1$ so stredom S_1 a polomerom $r_1 = \frac{2}{3}$.



Obr. 1



Obr. 2

Analogicky nájdeme geometrické miesto bodov X v rovine ϱ, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, C platí $AX : CX = 1 : 3$. Je to kružnica k_2 so stredom S_2 a polomerom $r_2 = \frac{3}{8}$; pritom platí $AS_2 = \frac{1}{8}$, $CS_2 = \frac{9}{8}$. Rotáciou kružnice k_2 okolo priamky AC vznikne guľová plocha $\varkappa_2$ so stredom S_2 a polomerom $r_2 = \frac{3}{8}$. Situácia v rovine ϱ je nakreslená na obr. 2. Hľadané geometrické miesto bodov **M** je prienik guľových ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Útvar **M** nájdeme, ak určíme spoločné body kružníc k_1, k_2 a necháme ich rotovať okolo priamky S_1S_2.

Treba teda výpočtom vyšetriť vzájomnú polohu kružníc k_1, k_2. Z trojuholníka AS_1S_2 dostaneme podľa kosínusovej vety

$$c^2 = S_1S_2^2 = AS_1^2 + AS_2^2 - 2\,AS_1\,.\,AS_2 \cos 60^\circ\,,$$

čiže

$$c^2 = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{64} - 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{49}{9\,.\,64}\,,$$

t. j.

$$c = \tfrac{7}{24}\,.$$

Ďalej je

$$r_1 + r_2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{25}{24}\,, \quad r_1 - r_2 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{7}{24}\,.$$

Platí teda rovnosť $c = r_1 - r_2$, a preto sa guľové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ navzájom dotýkajú v bode P. Hľadané geometrické miesto bodov je jediný bod P.

Bodom P prechádza aj kružnica k_3, ktorá je geometrickým miestom bodov X roviny ϱ, pre ktorých vzdialenosti od bodov B, C platí

$$BX : CX = 2 : 3\,.$$

Stred S_3 leží na priamke BC, $BS_3 = \frac{4}{5}$, $CS_3 = \frac{9}{5}$, polomer kružnice k_3 je $r_3 = \frac{6}{5}$. Pretože hľadané geometrické miesto má jediný bod P, dotýkajú sa tiež dvojice kružníc k_1, k_3 a k_2, k_3; preto ležia body S_1, S_2, S_3 na priamke.

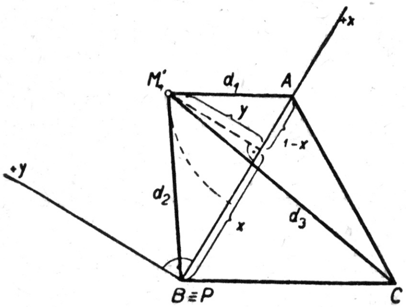
Iné riešenie. Označme M pätu kolmice spustenej z hľadaného bodu X na rovinu ϱ, ďalej označme $d_1 = AM$,

$d_2 = BM$, $d_3 = CM$, $z = XM$. Podľa podmienky úlohy je (obr. 3):

$$2\sqrt{d_1^2 + z^2} = \sqrt{d_2^2 + z^2}\,,$$
$$3\sqrt{d_1^2 + z^2} = \sqrt{d_3^2 + z^2}\,,$$

čiže

$$3z^2 = d_2^2 - 4d_1^2\,, \quad 8z^2 = d_3^2 - 9d_1^2\,. \tag{1}$$



Obr. 3

V rovine ϱ umiestnime sústavu kartézskych súradníc tak, aby kladná poloos x bola polpriamka BA (je teda bod B počiatkom P súradníc) a aby bod C mal zápornú súradnicu y. Súradnice bodu M v tejto sústave označíme $[x, y]$. Potom je

$$\begin{gathered} d_1^2 = (1 - x)^2 + y^2\,, \quad d_2^2 = x^2 + y^2\,, \\ d_3^2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Ak vylúčime z^2 z oboch rovníc (1), dostaneme

$$8d_2^2 = 5d_1^2 + 3d_3^2\,. \tag{3}$$

Ak do vzťahu (3) dosadíme z (2), po úprave dostaneme

$$13x - 3\sqrt{3}\,y = 8\,. \tag{4}$$

Ak zo vzťahu (4) vyjadríme

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{3}\,y}{13}, \quad 1 - x = \frac{5 - 3\sqrt{3}\,y}{13} \tag{5}$$

a dosadíme do prvých dvoch rovníc (2), bude

$$d_1^2 = \frac{25}{169} - \frac{30\sqrt{3}}{169}\,y + \frac{196}{169}\,y^2,$$

$$d_2^2 = \frac{64}{169} + \frac{48\sqrt{3}}{169}\,y + \frac{169}{196}\,y^2.$$

Z týchto dvoch vzťahov dosadíme teraz do prvej rovnice (1). Po vynásobení číslom 169, sčítání a krátení troma dostaneme

$$12 - 56\sqrt{3}y + 196y^2 + 169z^2 = 0,$$

čiže

$$(13z)^2 + (14y - 2\sqrt{3})^2 = 0\,.$$

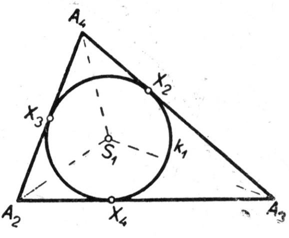
Stadiaľ vyplýva $z = 0$, $y = \frac{1}{7}\sqrt{3}$ a ďalej z prvej rovnosti (5) $x = \frac{5}{7}$.

Úloha má teda jediné riešenie — bod X so súradnicami $x = \frac{5}{7}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$; mimo to je $z = 0$.

6. Buď dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$, který má tyto vlastnosti: Lze sestrojit dvě (různé) kulové plochy, z nichž se každá dotýká všech šesti přímek, na nichž leží hrany daného čtyřstěnu. Přitom každá z těchto kulových ploch se dotýká přímky A_3A_4 ve vnitřním bodě úsečky A_3A_4, kdežto přímky A_1A_2 se dotýká v bodě, který nenáleží úsečce A_1A_2.

Dokažte, že každé dvě protější hrany daného čtyřstěnu mají touž délku.

Řešení. Každá z uvedených dvou kulových ploch protíná rovinu $A_1A_3A_4$ v kružnici, která se dotýká všech tří přímek A_1A_3, A_3A_4 a A_4A_1; je to tedy buď kružnice k_2 vepsaná trojúhelníku $A_1A_3A_4$, nebo kružnice h_2 vně vepsaná ke straně A_3A_4. Obdobně protíná každá z uvedených dvou kulových ploch rovinu $A_2A_3A_4$ buď v kružnici k_1 vepsané trojúhelníku $A_2A_3A_4$ nebo v kružnici h_1 vně vepsané ke straně A_3A_4. Žádná z našich kulových ploch nemůže obsahovat kružnice k_1, k_2, neboť v tomto případě by kulová plocha obsahovala vnitřní body pěti hran čtyřstěnu (A_1A_3, A_1A_4, A_3A_4, A_2A_3, A_2A_4), proťala by rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$, a tudíž by se dotýkala přímky A_1A_2 ve vnitřním bodě hrany A_1A_2, což odporuje předpokladu. Také žádná z uvedených kulových ploch nemůže obsahovat obě kružnice h_1, h_2, neboť v tomto případě by se dotýkala obou přímek A_1A_3, A_2A_3 v bodech ležících mimo úsečky A_1A_3, A_2A_3, proťala by rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici vně ve$_3$ psané trojúhelníku A_1A_2A- ke straně A_1A_2, a tudíž by opět obsahovala vnitřní bod úsečky A_1A_2.



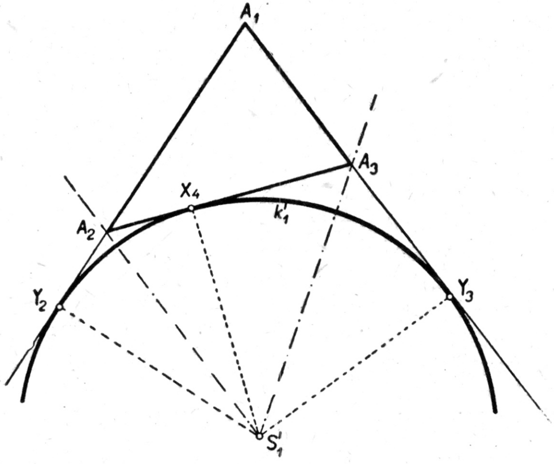
Obr. 4

Naše kulové plochy obsahují tedy kružnice k_1, h_2 (plocha $\varkappa_1$) a kružnice k_2, h_1 (plocha $\varkappa_2$). Plocha $\varkappa_1$ protíná tedy rovinu $A_2A_3A_4$ v kružnici k_1 vepsané trojúhelníku $A_2A_3A_4$ (obr. 4); body dotyku označme X_2, X_3, X_4. Dále označme a_{ik} délku hrany A_iA_k (indexy uspořádáme tak, aby bylo $i < k$). Podle známého planimetrického vzorce platí

$$A_2X_3 = A_2X_4 = \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{24} - a_{34})\,. \qquad (1)$$

Plocha $\varkappa_1$ protíná dále rovinu $A_1A_2A_3$ v kružnici k_1' vně vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ ke straně A_2A_3; body dotyku na přímkách A_1A_2, A_1A_3 označíme Y_2, Y_3 podle obr. 5; bod dotyku s přímkou A_2A_3 je už výše zmíněný bod X_4. Podle známého planimetrického vzorce je

$$A_2Y_2 = A_2X_4 = \tfrac{1}{2}(a_{13} + a_{23} - a_{12}) \,. \tag{2}$$



Obr. 5

Spojením vzorců (1), (2) dostaneme po úpravě vztah

$$a_{24} + a_{12} = a_{34} + a_{13} \,. \tag{3}$$

Obdobný vztah dostaneme pro kulovou plochu $\varkappa_2$; odvodíme jej z rovnosti (3) jednoduše tím, že indexy

1, 2, 3, 4 nahradíme po řadě indexy 2, 3, 4, 1. Vyjde $a_{31} + a_{23} = a_{41} + a_{24}$ neboli po úpravě

$$a_{24} + a_{14} = a_{23} + a_{13} \,. \tag{4}$$

Spojením rovností (3), (4) dostaneme po úpravě

$$a_{12} - a_{34} = a_{14} - a_{23} \,. \tag{5}$$

Vyměníme-li v rovnosti (5) indexy 1, 2 (kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$) nebo indexy 3, 4 nebo oboje zároveň, dostaneme zřejmě opět platnou rovnost, kterou lze odvodit stejně jako rovnost (5); tím vyjdou tři další rovnosti

$$a_{12} - a_{34} = a_{24} - a_{13} \,, \tag{5a}$$
$$a_{12} - a_{34} = a_{13} - a_{24} \,, \tag{5b}$$
$$a_{12} - a_{34} = a_{23} - a_{14} \,. \tag{5c}$$

Spojením rovností (5), (5c) vyjde $a_{12} - a_{34} = 0$, $a_{23} - a_{14} = 0$; spojením rovností (5a), (5b) vyjde $a_{12} - a_{34} = 0$, $a_{13} - a_{24} = 0$, tj. úhrnem

$$a_{12} = a_{34} \,, \quad a_{23} = a_{14} \,, \quad a_{13} = a_{24} \,,$$

jak jsme měli dokázat.

2. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A*

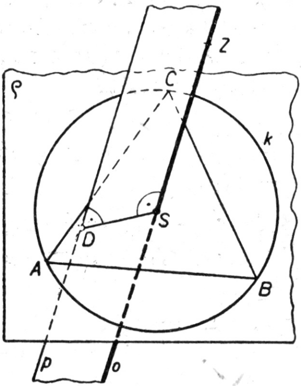
1. Ve čtyřstěnu *ABCX* je stěna *ABC* daný rovnostranný trojúhelník o straně délky *a*. Označme *Y* střed kulové plochy opsané čtyřstěnu *ABCX*.

Vyšetřte geometrické místo středů *Y*, jestliže bod *X* probíhá přímku *p* kolmou k rovině *ABC* s výjimkou průsečíku *D* přímky *p* s rovinou *ABC*.

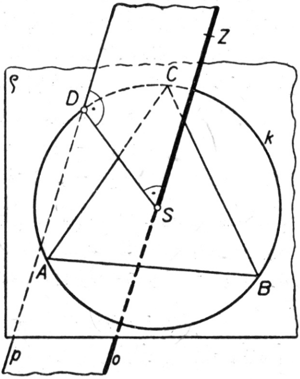
Proveďte diskusi vzhledem k vzdálenosti *d* bodu *D* od středu trojúhelníku *ABC*.

Řešení. Označme ϱ rovinu *ABC*. Všecky středy *Y* leží na kolmici *o* k rovině $\varrho \equiv ABC$, vedené středem *S* kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Je zřejmé, že kulová plocha, opsaná každému ze čtyřstěnů $ABCX$, obsahuje kružnici k. Nyní je třeba rozlišit 3 případy:

[1] bod D leží uvnitř kružnice k (obr. 6);
[2] bod D leží na kružnici k (obr. 7);
[3] bod D leží vně kružnice k (obr. 8).



Obr. 6

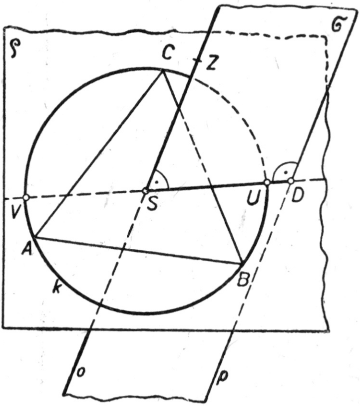


Obr. 7

V případě [1] je každý bod Z přímky o středem plochy kulové, která obsahuje kružnici k a protíná přímku p ve dvou bodech X_1, X_2, z nichž žádný neleží v rovině ϱ. Tato kulová plocha je tedy opsaná čtyřstěnům $ABCX_1$, $ABCX_2$. Hledaná množina bodů je přímka o.

V případě [2] zvolíme nejprve bod $Z \not\equiv S$; pak je přímka p sečnou kulové plochy; jeden z bodů X_1, X_2, např. bod X_1 leží mimo rovinu ϱ, kulová plocha je opsaná čtyřstěnu $ABCX_1$, tj. bod Z náleží hledané množině bodů. Je-li $Z \equiv S$, je přímka p tečnou příslušné kulové plochy, nevznikne čtyřstěn $ABCX$, tj. bod S nenáleží hledané množině bodů. V případě [2] je tedy hledaná množina bodů přímka o bez bodu S.

V případě [3] sestrojíme nejprve obě kulové plochy, které obsahují kružnici k a dotýkají se přímky p. Za tím účelem vedeme rovinu $\sigma \equiv Sp$ (obr. 9) a určíme její průsečíky U, V s kružnicí k. V rovině σ sestrojíme obě kružnice k_1, k_2, které procházejí body U, V a dotýkají se přímky p. Body dotyku označíme po řadě X_1, X_2, středy kružnic označíme Y_1, Y_2. V případě [3] je hledaná množina bodů přímka o bez vnitřku úsečky Y_1Y_2.

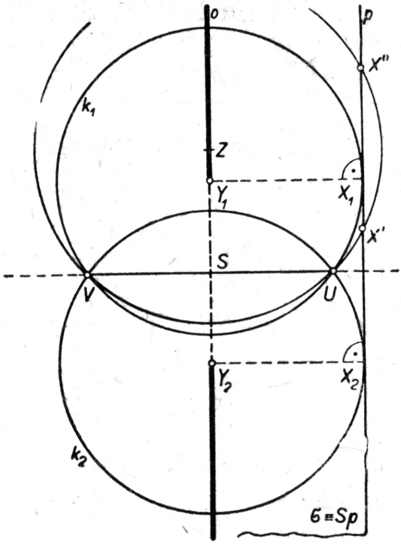


Obr. 8

Skutečně, body Y_1, Y_2 zřejmě náležejí hledané množině bodů.

Leží-li bod Z přímky o vně úsečky Y_1Y_2, pak kružnice k' se středem Z, procházející body U, V, protne přímku p, neboť má poloměr větší než kružnice k_1. Průsečíky přímky p s kružnicí k' leží mimo rovinu ϱ, vzniknou tedy dva čtyřstěny $ABCX$, pro něž je bod Z středem opsané kulové plochy. Je-li T bod uvnitř úsečky Y_1Y_2, má kružnice $(T; TU)$ menší poloměr než kružnice k_1; proto je přímka p její nesečnou, tj. bod T nenáleží hledané množině bodů.

Tím je úloha rozřešena.



Obr. 9

2. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \sin(x - y)\,, \\ \sin x - \sin y &= \sin 2x - \sin(x + y)\,. \end{aligned} \tag{S}$$

V rovině pravoúhlých souřadnic x, y pak zobrazte všechna řešení, pro která platí

$$0 \leqq x \leqq 2\pi\,, \quad 0 \leqq y \leqq 2\pi\,.$$

Řešení. Nechť je x, y řešení soustavy (S). Potom každou z rovnic upravíme, jak je dále uvedeno.

I. Úprava první rovnice (S). Postupně platí

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y) = 2\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,[\sin\tfrac{1}{2}(x+y) + \cos\tfrac{1}{2}(x-y)] = 0\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,\{\sin\tfrac{1}{2}(x+y) + \sin[\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(x-y)]\} = 0\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,\sin(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\pi)\cos(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\pi) = 0\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,\sin(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\pi)\sin(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi) = 0\,.$$

Nutně platí jedna z rovnic (písmena k, l, m, n apod. dále značí libovolné celé číslo):

a) $\tfrac{1}{2}(x-y) = k'\pi$ neboli
$$y = x - 2k'\pi = x + 2k\pi \text{ (kde } k = -k'\text{)}; \qquad (1)$$
b) $\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\pi = l\pi$ neboli
$$y = -\tfrac{1}{2}\pi + 2l\pi = \tfrac{3}{2}\pi + 2s\pi; \qquad (2)$$
c) $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi = m'\pi$ neboli
$$x = -\tfrac{1}{2}\pi + 2m'\pi = -\tfrac{1}{2}\pi + 2(m+1)\pi = $$
$$= \tfrac{3}{2}\pi + 2m\pi\,(m' = m+1)\,. \qquad (3)$$

Obráceně snadno zjistíme, že řešení rovnic (1) až (3) splňují první rovnici (S).

II. Úprava druhé rovnice (S). Postupně platí:
$$2\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\cos\tfrac{1}{2}(x+y) = 2\cos\tfrac{1}{2}(3x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,[\cos\tfrac{1}{2}(3x+y) - \cos\tfrac{1}{2}(x+y)] = 0\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y)\,\sin(x + \tfrac{1}{2}y)\sin\tfrac{1}{2}x = 0\,.$$

Nutně platí jedna z rovnic:

d) $\tfrac{1}{2}(x-y) = k'\pi$ neboli rovnice (1);

e) $x + \tfrac{1}{2}y = n\pi$ neboli
$$y = -2x + 2n\pi; \qquad (4)$$
f) $\tfrac{1}{2}x = p\pi$ neboli
$$x = 2p\pi\,. \qquad (5)$$

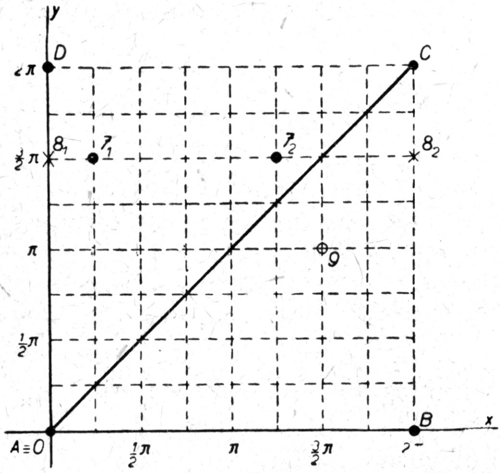
Obráceně výsledky (1), (4), (5) splňují druhou rovnici (S).

III. Nyní stanovíme řešení dané soustavy tím, že kombinujeme výsledky (1), (2), (3) a výsledky (1), (4), (5). Jsou tyto možnosti:

Případ [1]. Řešení

$$y = x + 2k\pi \tag{6}$$

vyhovuje oběma daným rovnicím. Jeho grafem je přímka; ve čtverci $ABCD$, kde $A \equiv [0, 0]$, $B \equiv [2\pi, 0]$, $C \equiv [2\pi, 2\pi]$, $D \equiv [0, 2\pi]$ dostáváme jako graf úsečku AC a body B, D (obr. 10). Tím je případ [1] vyřízen.



Obr. 10

Případ [2]. Výsledky (2), (4) vyžadují, aby $-2x + 2n\pi = -\frac{1}{2}\pi + 2l\pi$, neboli $x = \frac{1}{4}\pi + q\pi$, takže máme řešení

$$x = \tfrac{1}{4}\pi + q\pi\,, \quad y = \tfrac{3}{2}\pi + 2s\pi\,. \tag{7}$$

Viz body 7_1, 7_2 v grafu.

Případ [3]. Výsledky (2), (5) dávají

$$x = 2p\pi\,, \quad y = \tfrac{3}{2}\pi + 2s\pi\,. \tag{8}$$

Viz body 8_1, 8_2 v grafu.

Případ [4]. Výsledky (3), (4) dávají

$$x = \tfrac{3}{2}\pi + 2m\pi\,, \quad y = \pi + 2n\pi\,. \tag{9}$$

Viz bod 9 v grafu.

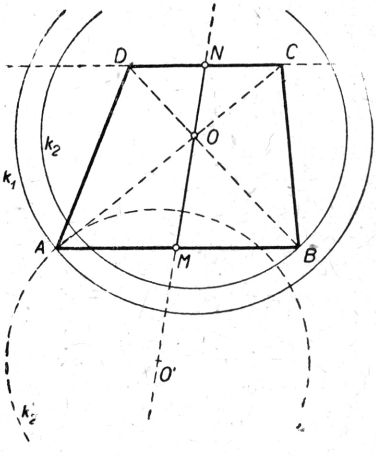
Případ [5]. Výsledky (3), (5) nedávají řešení soustavy.

Závěr. Řešení soustavy je dáno výsledky (6) až (9).

3. V rovině je dána úsečka MN délky d a uvnitř této úsečky je dán bod O tak, že platí $OM > ON$. Dále jsou dána kladná čísla p, q.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ takový, že bod M půlí jeho základnu AB, bod N půlí základnu CD a že bod O je průsečíkem úhlopříček AC, BD, jejichž délky po řadě jsou p, q.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům d, p, q.



Obr. 11

Řešení (obr. 11). Stejnolehlost se středem O, která převádí vrchol A ve vrchol C, převádí body B, M po řadě v body D, N. Je totiž $AB \parallel CD$ a spojnice středů obou základen lichoběžníku prochází — jak známo — průsečíkem obou úhlopříček.*)

Dovedeme tedy určit vzdálenosti OA, OB konstruktivně i početně tím, že rozdělíme úsečky délek p, q po řadě v poměru $OM : ON = k$. Protože je $OM + ON = d$, platí

$$OM = \frac{kd}{k+1}, \qquad ON = \frac{d}{k+1}, \tag{1}$$

$$OA = \frac{kp}{k+1}, \qquad OB = \frac{kq}{k+1}. \tag{2}$$

Bod A náleží tedy kružnici $k_1 \equiv \left(O; \frac{kp}{k+1}\right)$, bod B kružnici $k_2 \equiv \left(O; \frac{kq}{k+1}\right)$. Mimoto jsou body A, B souměrně sdruženy podle středu M; sestrojíme-li tedy obraz k_2' kružnice k_2 v souměrnosti se středem M, náleží bod A kružnicím k_1, k_2'. Mají-li tyto kružnice společný bod A mimo přímku MO, tj. protnou-li se, lze sestrojit další vrcholy B, C, D, tj. lichoběžník žádaných vlastností.

Kružnice k_2' má střed O' ležící na přímce OM, pro který platí $OO' = 2 . OM$, poloměry kružnic k_2, k_2' jsou si rovny. Je tedy podmínka pro to, aby se kružnice k_1, k_2' protľaly, dána podle (1), (2) nerovnostmi

$$\left|\frac{kp}{k+1} - \frac{kq}{k+1}\right| < \frac{2kd}{k+1} < \frac{kp}{k+1} + \frac{kq}{k+1}.$$

Uvedené nerovnosti lze dělit kladným číslem $\frac{k}{k+1}$;

---

*) Bod O je vnitřním středem stejnolehlosti kružnic sestrojených nad průměry AB, CD; tyto kružnice mají středy v bodech M, N.

dostaneme

$$|p-q| < 2d < p+q\,. \tag{3}$$

Z podmínky (3) je patrné, že řešitelnost úlohy nezávisí na čísle k, tj. na tom, v jakém poměru dělí bod O úsečku MN.

4. Nájdite všetky reálne čísla p, pre ktoré nerovnosť

$$x+\sqrt{1+px-2p} \leqq 1$$

má aspoň jedno reálne riešenie x.

Riešenie. Úpravami danej nerovnosti dostaneme postupne

$$\sqrt{px-2p+1} \leqq 1-x\,, \tag{1}$$

$$px-2p+1 \leqq 1-2x+x^2\,,$$

$$x^2-(p+2)x+2p \geqq 0\,. \tag{2}$$

Kvadratický trojčlen na ľavej strane (2) možno rozložiť:

$$x^2-(p+2)x+2p = (x-p)(x-2)\,.$$

Nerovnosť (2) nahradíme teda nerovnosťou

$$(x-p)(x-2) \geqq 0\,. \tag{3}$$

Riešenia nerovnosti (3) sú dané vzťahmi

$$x \geqq p\,, \quad x \geqq 2 \tag{4a}$$

alebo

$$x \leqq p\,, \quad x \leqq 2\,. \tag{4b}$$

Skúška. Ak majú byť čísla dané vzťahmi (4a), (4b) riešeniami danej nerovnosti, resp. nerovnosti (1), musí platiť

$$px-2p+1 \geqq 0\,, \quad 1-x \geqq 0$$

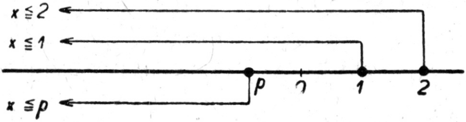
čiže

$$p(x-2)+1 \geqq 0\,, \tag{5a}$$

$$x \leqq 1\,. \tag{5b}$$

Za týchto predpokladov možno obrátiť predchádzajúci postup a odvodiť z nerovnosti (3) nerovnosť (1).

Druhá nerovnosť (4a) a nerovnosť (5b) sú v spore. Preto vzťahy (4a) nedávajú žiadne riešenie úlohy.



Obr. 12

Vyšetrujme čísla dané vzťahmi (4b) a (5b). Na číselnej osi sú znázornené bodmi troch súhlasných polpriamok (viď obr. 12). Tieto polpriamky majú vždy nekonečne mnoho spoločných bodov, teda nerovnosti (4b), (5b) majú nekonečne mnoho spoločných riešení. Záleží ešte na nerovnosti (5a).

Pre $p = 0$ je táto nerovnosť zrejme splnená pre každé x. Ak je $p < 0$, je nerovnosť (5a) ekvivalentná s nerovnosťou

$$x \leqq 2 - \frac{1}{p};$$

nerovnosti (4b), (5a), (5b) majú teda aspoň jedno spoločné riešenie. Ak je $p > 0$, je nerovnosť (5a) ekvivalentná s nerovnosťou

$$x \geqq 2 - \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Nerovnosť (6) má aspoň jedno spoločné riešenie s nerovnosťami (4b), (5b) práve vtedy, ak súčasne platí

$$2 - \frac{1}{p} \leqq p, \qquad 2 - \frac{1}{p} \leqq 1. \tag{7}$$

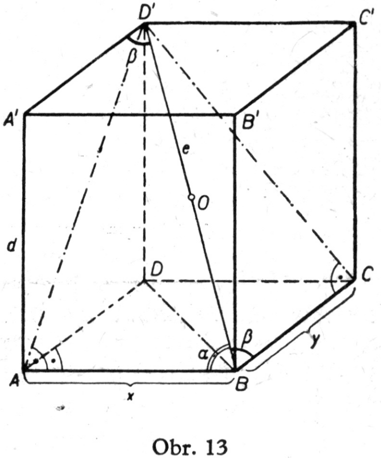
Prvá nerovnosť (7) je ekvivalentná s nerovnosťou $(p - 1)^2 \geqq 0$ a je splnená pre každé p. Druhá nerovnosť (7) má riešenie $p \leqq 1$.

Výsledok. Daná nerovnosť (resp. nerovnosť (1)) má aspoň jedno reálne riešenie práve pre všetky p, pre ktoré platí $p \leqq 1$.

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je obdélník a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) je $AA' = d$, $\sphericalangle ABD' = \alpha$, $\sphericalangle A'D'B = \beta$.

Vypočtěte oba zbývající rozměry kvádru, jestliže je dáno číslo d a oba ostré úhly α, β. Stanovte podmínky řešitelnosti.



Obr. 13

Řešení (viz označení v obr. 13). Předpokládejme, že kvádr daných vlastností existuje. Všimněme si, že oba dané úhly α, β jsou úhly pravoúhlých trojúhelníků $BD'A$, $BD'C$, a proto tedy ostré (je $\sphericalangle BAD' = \sphericalangle BCD' = 90°$).

Označme O střed kvádru, tj. střed úsečky BD'. Úsečky BC, $D'A'$ jsou souměrně sdružené podle středu O, a proto je $\sphericalangle CBD' = \beta$.

Označme $BD' = e$; z pravoúhlých trojúhelníků $BD'A$, $BD'C$ pro délky $x = AB$, $y = BC$ dostaneme vztahy

$$x = e\cos\alpha\,, \quad y = e\cos\beta\,. \tag{1}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku ABD, kde $\sphericalangle A = 90°$, dostaneme pomocí Pythagorovy věty

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + y^2 = e^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $BD'D$, kde $\sphericalangle D = 90°$, dostaneme pomocí Pythagorovy věty $BD'^2 = BD^2 + DD'^2$. Dosaďme sem z předchozího vztahu a položme $BD' = e$, $DD' = d$; obdržíme

$$e^2 = e^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + d^2$$

neboli

$$e = \frac{d}{\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}\,.$$

Po dosazení za e do (1) zjistíme, že o číslech x, y platí

$$\begin{aligned} x &= \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}\,, \\ y &= \frac{d\cos\beta}{\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Tyto vzorce mají smysl jedině v případě, že čísla x, y jsou kladná. Vzhledem k tomu, že α, β jsou ostré úhly, je $d\cos\alpha > 0$, $d\cos\beta > 0$; jmenovatelé zlomků ve (2) mají smysl jedině pro $1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) > 0$. Lze však psát

$$\begin{aligned} 1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) &= (1 - \cos^2\alpha) - \cos^2\beta = \\ &= \sin^2\alpha - \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi - \beta)\,. \end{aligned}$$

Musí tedy platit $\sin^2\alpha > \sin^2(\frac{1}{2}\pi - \beta)$; protože α, β jsou ostré úhly, je $\sin\alpha > 0$, $\sin(\frac{1}{2}\pi - \beta) > 0$, takže z předchozího vztahu dostáváme, že nutně platí

$$\sin\alpha > \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta),$$

neboli

$$\alpha > \tfrac{1}{2}\pi - \beta\,,$$

tj.

$$\alpha + \beta > \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{3}$$

Tento fakt je patrný i geometricky z trojhranu o hranách BA, BC, BD'.

Obráceně, platí-li o číslech d, α, β, kde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$, vztah (3), dospějeme obráceným postupem od (3) k závěru, že existují kladná čísla x, y daná vzorci (2). Potom kvádr o rozměrech $AB = x$, $BC = y$, $AA' = d$ [kde x, y je dáno vzorci (2) za předpokladu, že o ostrých úhlech α, β platí (3)] skutečně splňuje požadavek, že $\sphericalangle ABD' = \alpha$, $\sphericalangle A'D'B = \beta$.

Důkaz. Podle vzorce pro délku úhlopříčky BD' kvádru je totiž

$$BD'^2 = AB^2 + BC^2 + AA'^2 =$$

$$= \frac{d^2}{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}\,[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 1 -$$

$$- (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)] = \frac{d^2}{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}\,,$$

takže

$$BD' = \frac{d}{\sqrt{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}}\,. \tag{4}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $BD'A$ plyne, že

$$\cos\sphericalangle ABD' = \frac{AB}{BD'}$$

a po dosazení za $AB = x$ ze vztahu (2) a za BD' ze vztahu (4) máme

$$\cos\sphericalangle ABD' = \cos\alpha\,.$$

Protože jde o kosiny ostrých úhlů, je $\sphericalangle ABD' = \alpha$; podobně je $\sphericalangle CBD' = \beta$.

Tím je řešení provedeno.

2. Dané párne prirodzené číslo $2k$ rozložte na súčet dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel x, y tak, aby súčin xy bol čo nejväčší.

Riešenie. Dané párne prirodzené číslo $2k$ (kde k je nejaké dané prirodzené číslo) rozložme na súčet prirodzených čísel x, $y = 2k - x$. Označenie zvoľme tak, aby platilo $x \leqq y$. Potom je

$$xy = x(2k - x) = k^2 - (k - x)^2 .$$

Prirodzené číslo x je najväčšie práve vtedy, ak je $k - x = 0$ čiže $x = k$, takže máme rozklad k, k.

Tento rozklad vyhovuje ďalšej požiadavke úlohy jedine pre $k = 1$, pretože vtedy sú čísla 1, 1 nesúdeliteľné.

Vyšetrujme teraz prípady, keď je $k > 1$. Označme $k - x = p$ (p prirodzené); súčin $xy = k^2 - p^2$ je tým väčší, čím je p menšie. Rozlišujme prípady, keď k je párne, resp. nepárne.

Nech je k párne. Potom pre $p = 1$ sú $k - 1$, $k + 1$ nepárne čísla s rozdielom 2. Z toho vyplýva, že majú len spoločného deliteľa 1 čiže sú nesúdeliteľné. Tento rozklad vyhovuje teda požiadavkám úlohy.

Nech je $k > 1$ číslo nepárne. Čísla $k - 1$, $k + 1$ sú párne a teda nevyhovujú požiadavkám úlohy. No, čísla $k - 2$, $k + 2$ sú nepárne, majú rozdiel 4, pričom čísla 2, 4 nie sú ich deliteľmi. Čísla $k - 2$, $k + 2$ sú teda nesúdeliteľné a vyhovujú požiadavkám úlohy.

Záver. Pri párnom k je hľadaný rozklad

$$(k - 1) + (k + 1) .$$

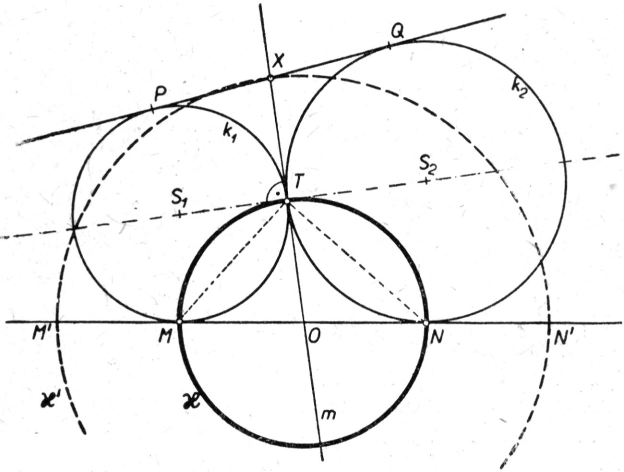
Pre $k = 1$ je hľadaný rozklad $1 + 1$.

Pre nepárne $k > 1$ je hľadaný rozklad

$$(k-2)+(k+2).$$

3. V rovině je dána přímka MN. Uvažujme dvojici kružnic k_1, k_2, které se dotýkají přímky MN po řadě v bodech M, N a přitom se navzájem dotýkají vně. Označme X střed úsečky PQ, kde P, Q jsou dotykové body druhé společné vnější tečny kružnic k_1, k_2.

Najděte geometrické místo bodů X pro všechny dvojice kružnic uvedených vlastností.



Obr. 14

Řešení (obr. 14). a) Označme S_1, S_2 středy kružnic k_1, k_2, T jejich bod dotyku. Souměrnost podle osy S_1S_2 převede body M, N po řadě v body P, Q. Společná (vnitřní) tečna m obou kružnic v bodě T je kolmá k přímce S_1S_2 a protne společnou tečnu MN v bodě O, z něhož lze vést ke kružnicím k_1, k_2 tečny téže délky OT; je tedy $OM = ON$, tj. bod O je středem úsečky MN. Souměrnost podle osy S_1S_2 převede bod O ve střed X úsečky PQ; přitom body O, T, X leží na přímce m a T je středem úsečky OX, tj. platí

$$OX = 2OT\,. \tag{1}$$

b) Z rovnoramenných trojúhelníků OMT, ONT dostaneme

$$\begin{aligned} \sphericalangle MTO &= 90° - \tfrac{1}{2} \sphericalangle MOT\,, \\ \sphericalangle NTO &= 90° - \tfrac{1}{2} \sphericalangle NOT\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Sečtením rovností (2) vyjde

$$\begin{gathered} \sphericalangle MTN = \sphericalangle MTO + \sphericalangle NTO = \\ = 180° - \tfrac{1}{2}(\sphericalangle MOT + \sphericalangle NOT) = \\ = 180° - 90° = 90°\,. \end{gathered}$$

Bod T leží tedy na kružnici $\varkappa$ sestrojené nad průměrem MN; kružnice $\varkappa$ má střed O.

Zvolíme-li obráceně libovolný bod $T \not\equiv M$, N na kružnici $\varkappa$, je $OM = ON = OT$. Lze tedy sestrojit kružnici k_1, která se dotýká přímek OM, OT po řadě v bodech M, T. Obdobně lze sestrojit kružnici k_2, která se dotýká přímek ON, OT po řadě v bodech N, T. Kružnice k_1, k_2 mají zřejmě v bodě T vnější dotyk (OT je společná tečna), jsou to tudíž dvě kružnice vyhovující podmínkám úlohy.

Zjistili jsme tedy, že geometrické místo bodů dotyku T vyšetřovaných dvojic kružnic k_1, k_2 je kružnice $\varkappa$ s vyloučením bodů M, N.

c) Vzhledem k rovnosti (1) dostaneme každý bod X z příslušného bodu T stejnolehlostí o středu O a koeficientu 2. Tato stejnolehlost převede kružnici $\varkappa$ v kružnici $\varkappa' \equiv (O; MN)$; protože z kružnice $\varkappa$ byly vyloučeny body M, N, je hledané geometrické místo bodů kružnice $\varkappa'$ bez bodů M', N' (viz obr. 14).

4. Jsou dány dvě kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0 ,$$
$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnými koeficienty.

Najděte nutné a postačující podmínky mezi koeficienty daných rovnic pro to, aby obě rovnice měly jeden společný kladný kořen a aby zbývající kořen první rovnice byl větší než zbývající kořen druhé rovnice.

Řešení. Nechť dané rovnice splňují podmínky úlohy; pak jejich společný kladný kořen x vyhovuje rovnici

$$x^2 + ax + b - (x^2 + cx + d) = 0$$

neboli

$$(a - c)x + (b - d) = 0 . \tag{1}$$

Z toho vyplývá, že buď

I. čísla $a - c$, $b - d$ jsou obě rovna nule, nebo

II. obě čísla $a - c$, $b - d$ jsou různá od nuly a mají opačná znamení.

Zbývající kořen první rovnice je $x_1 = \dfrac{b}{x}$, zbývající kořen druhé rovnice je $x_2 = \dfrac{d}{x}$. Protože platí $x_1 > x_2$, je $\dfrac{b - d}{x} > 0$; protože je $x > 0$, je

$$b > d . \tag{2}$$

Z toho vyplývá, že případ I nenastane; nastane tedy případ II a je

$$a < c . \tag{3}$$

Společný kladný kořen je pak podle (1) dán vzorcem

$$x = \frac{b - d}{c - a}. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do kterékoli z daných rovnic, dostaneme po úpravě rovnost

$$(b - d)^2 = (c - a)(ad - bc). \tag{5}$$

Vztahy (2), (3), (5) udávají hledané nutné podmínky pro koeficienty daných rovnic. Tyto podmínky jsou však také postačující. Platí-li totiž (2) a (3), pak kladné číslo x dané vzorcem (4) je podle (5) kořenem každé z daných rovnic. Zbývající kořeny jsou $x_1 = \frac{b}{x}$, $x_2 = \frac{d}{x}$ a platí podle (4), (2)

$$x_1 - x_2 = \frac{b - d}{x} = c - a > 0,$$

neboli $x_1 > x_2$.

4. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B*

1. Najděte všechna alespoň trojciferná přirozená čísla x, která mají tuto vlastnost: Číslo x a jeho druhá mocnina x^2 končí (v desítkové soustavě) stejným posledním trojčíslím.

Řešení. Hledané číslo x lze napsat v tvaru

$$x = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c, \tag{1}$$

kde celá čísla a, b, c splňují nerovnosti

$$1 \leqq a, \quad 0 \leqq b \leqq 9, \quad 0 \leqq c \leqq 9.$$

Z (1) vypočteme x^2:

$$x^2 = a^2 . 10^4 + 2ab . 10^3 + (2ac + b^2) . 10^2 + \\ + 2bc . 10 + c^2 . \qquad (2)$$

Podle požadavku úlohy je číslo $x^2 - x$ dělitelné tisícem; použijeme-li vztahů (1), (2), vyjde, že číslo

$$a^2 . 10^4 + 2ab . 10^3 + (2ac + b^2 - a)10^2 + \\ + (2bc - b) 10 + c^2 - c$$

je dělitelné tisícem. Odtud plyne

$$(2ac + b^2 - a) . 10^2 + (2bc - b) . 10 + c^2 - c = \\ = k . 10^3 , \qquad (3)$$

kde k je nezáporné celé číslo.

Z rovnosti (3) vyplývá, že $c^2 - c$ je dělitelné deseti; z podmínky $0 \leqq c \leqq 9$ dostaneme pro c čtyři možnosti:

$$c = 0, 1, 5, 6 .$$

Probereme nyní jednotlivé případy:

1. Pro $c = 0$ dá vztah (3)

$$(b^2 - a)10^2 - b . 10 = k . 10^3$$

neboli

$$(b^2 - a) . 10 - b = k . 10^2 .$$

Odtud plyne, že b je dělitelné deseti, tj. $b = 0$ a dále $a = 10 . \lambda$ (λ přirozené číslo). Máme tedy první možné řešení .... 000, tj. čísla (aspoň čtyřciferná) končící třemi nulami.

2. Pro $c = 1$ dá vztah (3) po úpravě

$$(b^2 + a)10 + b = k . 10^2 .$$

Jako v případě 1 odtud dostaneme $b = 0$, $a = 10\lambda$ (λ přirozené číslo). Druhé možné řešení je tedy ... 001, tj. čísla (aspoň čtyřciferná) končící trojčíslím 001.

3. Pro $c = 5$ dá vztah (3) po úpravě

$$(b^2 + 9a)10 + (9b + 2) = k \,.\, 10^2 \,. \qquad (4)$$

Číslo $9b + 2$ je tedy dělitelné deseti, $9b$ končí cifrou 8. Jediný možný násobek čísla 9 je $9 \,.\, 2 = 18$, tj. $b = 2$. Ze vztahu (4) pak vyjde $6 + 9a = k \,.\, 10$. Číslo $2 + 3a$ je tedy dělitelné deseti, $3a$ končí cifrou 8. Přípustné násobky čísla 3 jsou 18, 48, ..., tj. $a = 6 + 10\lambda$ (λ celé nezáporné číslo). Třetí možná skupina řešení jsou aspoň trojciferná čísla končící trojčíslím 625.

4. Pro $c = 6$ dostaneme jako v případě 3

$$(b^2 + 11a) \,.\, 10 + (11b + 3) = k.10^2 \,.$$

Odtud plyne $b = 7$, $57 + 11a = k.10$ a dále $a = 3 + 10\lambda$ (λ nezáporné celé číslo). Čtvrtá možná skupina řešení jsou aspoň trojciferná čísla končící trojčíslím 376.

Zkouška ukáže, že všechna čtyři možná řešení vyhovují podmínce úlohy.

2. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a uvnitř tohoto úhlu bod P; dále je dána úsečka velikosti r.

Sestrojte trojúhelník ABC, který má tyto vlastnosti:

(1) Body A, B, C leží po řadě uvnitř polopřímek OM, ON, OP.

(2) Kružnice, která se dotýká přímky AB a je trojúhelníku ABC vně vepsaná, má střed O a poloměr r.

Řešení (obr. 15). a) Označíme $\sphericalangle MOP = \omega$, $\sphericalangle NOP = \varepsilon$.

Úhly hledaného trojúhelníku označme obvyklým způsobem α, β, γ. Protože O je střed kružnice k vně vepsané ke straně AB, je

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \tfrac{1}{2}\gamma \,. \qquad (1)$$

Polopřímky AO, BO jsou osy vnějších úhlů trojúhelníku

ABC, proto platí

$$\sphericalangle OAB = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha\,, \quad \sphericalangle OBA = 90° - \tfrac{1}{2}\beta\,,$$

a odtud dále

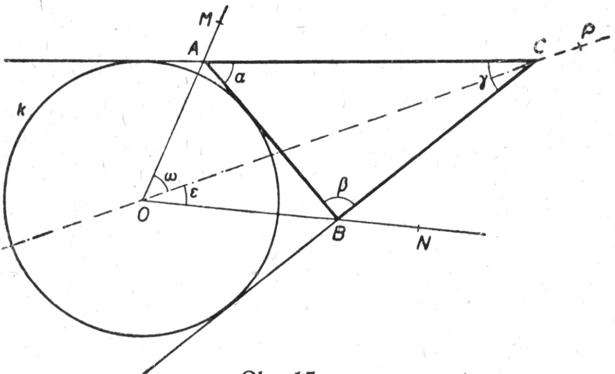
$$\sphericalangle OAC = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha\,, \quad \sphericalangle OBC = 90° + \tfrac{1}{2}\beta\,. \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) vypočteme snadno

$$\omega = 180° - (90° + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma) = \tfrac{1}{2}\beta\,,$$
$$\varepsilon = 180° - (90° + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha\,,$$

tj.

$$\alpha = 2\varepsilon\,, \quad \beta = 2\omega\,. \tag{3}$$



Obr. 15

b) Rovnosti (3) jsou výsledkem rozboru úlohy; z nich odvodíme konstrukční předpis. Sestrojíme libovolný trojúhelník $A_0B_0C_0$ (obr. 16)*) tak, aby jeho vnitřní úhly měly velikosti α, β dané vztahy (3) a aby kružnice k_0 se středem O_0, vně vepsaná ke straně A_0B_0, měla poloměr r.

Použijeme-li předchozího postupu na trojúhelníky $A_0C_0O_0$, $B_0C_0O_0$, dostaneme

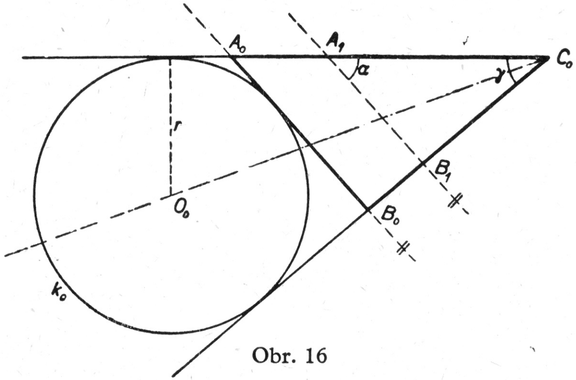
*) Obr. 16 je na str. 66.

$$\sphericalangle A_0O_0C_0 = \tfrac{1}{2}\beta = \omega\,, \qquad \sphericalangle B_0O_0C_0 = \tfrac{1}{2}\alpha = \varepsilon\,.$$

Stačí nyní přenést narýsovaný obrazec tak, aby polopřímky O_0A_0, O_0B_0, O_0C_0 splynuly po řadě s polopřímkami OM, ON, OP a úloha je rozřešena.

c) Konstrukce trojúhelníku $A_0B_0C_0$ se provede takto: Do úhlu velikosti $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, jehož vrchol označíme C_0, vepíšeme kružnici k_0 o daném poloměru r. Sestrojíme trojúhelník $C_0A_1B_1$ (viz obr. 16), jehož vnitřní úhly mají velikosti γ, α, β, a vedeme tečnu A_0B_0 kružnice k_0 rovnoběžnou s přímkou A_1B_1 tak, aby k_0 byla kružnicí vně vepsanou trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

d) Úloha je zřejmě řešitelná právě tehdy, jsou-li oba úhly ω, ε ostré (viz obr. 15), a má pak jediné řešení.



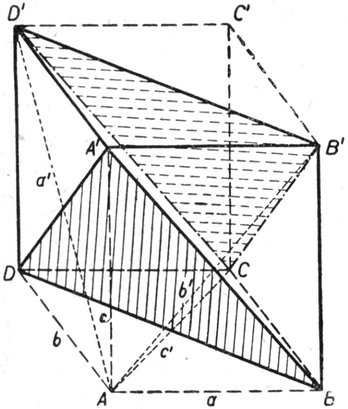
Obr. 16

3. Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ je jedna jeho stena a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) s rozmermi $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$. Roviny BDA' a $CB'D'$ oddeľujú od kvádra dva štvorsteny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

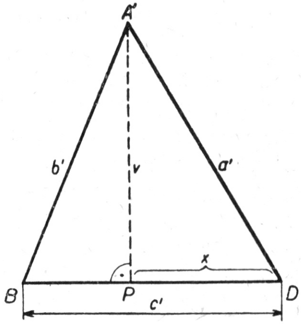
Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré zostalo, pomocou čísel a, b, c.

Riešenie. Označme (obr. 17)

$$a' = AD' = \sqrt{b^2 + c^2}\,, \quad b' = AB' = \sqrt{c^2 + a^2}\,,$$
$$c' = AC = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$



Obr. 17



Obr. 18

Štvorsteny $ABDA'$, $C'CB'D'$ sú zhodné (vyplýva to napr. zo stredovej súmernosti daného kvádra podľa jeho stredu). Označme P povrch a V objem každého z nich a P', V' povrch a objem telesa, ktoré dostaneme odňatím oboch čtvorstenov.

Je $V = \frac{1}{3}Zv$, kde Z je obsah trojuholníka ABA' a $v = AD = b$; no $Z = \frac{1}{2}\cdot AB.AA' = \frac{1}{2}ac$, takže $V = \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}ac)b = \frac{1}{6}abc$.

Teda je

$$V' = \tfrac{2}{3}abc\,.$$

Povrch P' skúmaného telesa vypočítame, keď k povrchu P_1 daného kvádra pripočítame dvojnásobný obsah P_2 trojuholníka $A'BD$ a odčítame dvojnásobný „plášť" P_3 štvorstena $AA'BD$, t. j. číslo

$$P_3 = \triangle ABA' + \triangle ABD + \triangle ADA' = \\ = \tfrac{1}{2}(ab + bc + ca)\,. \qquad (1)$$

Pretože $P_1 = 2(ab + bc + ca)$, stačí vypočítať P_2.

Označme strany trojuholníka $A'BD$ (obr. 18) $a' = DA'$, $b' = A'B$, $c' = BD$; potom platí

$$a'^2 = b^2 + c^2\,, \quad b'^2 = c^2 + a^2\,, \quad c'^2 = a^2 + b^2\,, \qquad (2)$$

pretože úsečky a', b', c' sú stenové uhlopriečky kvádra. Trojuholník $A'BD$ má aspoň dva ostré vnútorné uhly. Nech sú to napr. uhly $\sphericalangle A'BD$, $\sphericalangle A'DB$. Potom päta P výšky v spustenej z vrcholu A' na stranu BD leží medzi bodmi B, D. Označíme $DP = x$; potom je $BP = c' - x$ a podľa Pythagorovej vety platí:

$$v^2 = a'^2 - x^2 = b'^2 - (c' - x)^2\,. \qquad (3)$$

Po dosadení z (2) dostaneme po úprave

$$x = \frac{b^2}{c'}\,. \qquad (4)$$

Z rovnosti (3) vypočítame v^2 dosadením z (2) a (4). Vyjde

$$v^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2}\,. \qquad (5)$$

Pretože je $2P_2 = c'v = v\sqrt{a^2 + b^2}$, vyplýva z (5)

$$2P_2 = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \qquad (6)$$

a konečne podľa vzorca $P' = P_1 + 2P_2 - 2P_3$ a podľa (1), (6)

$$P' = ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\,.$$

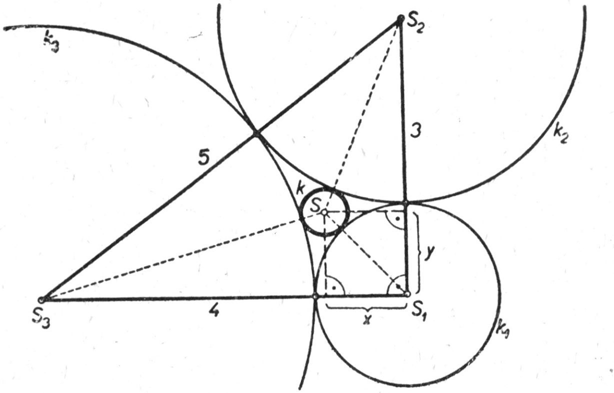
4. V rovině jsou dány tři kružnice o poloměrech délek 1, 2, 3; každé dvě z těchto kružnic mají vnější dotyk.

Určete, kolik kružnic se zároveň dotýká vně každé ze tří daných kružnic, a vypočtěte jejich poloměry.

Řešení (obr. 19). Pro vzdálenosti středů S_1, S_2, S_3 kružnic k_1, k_2, k_3 platí při vhodném označení $S_1S_2 = 3$, $S_2S_3 = 5$, $S_3S_1 = 4$.

Označme S střed hledané kružnice k, ϱ její poloměr; pak platí

$$\begin{aligned} S_1S &= 1 + \varrho\,, \\ S_2S &= 2 + \varrho\,, \\ S_3S &= 3 + \varrho\,. \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 19

Dále označme x, y vzdálenosti bodu S od přímek S_1S_2, S_1S_3. Pak dostaneme z pravoúhlých trojúhelníků

$$\begin{aligned} SS_1^2 &= x^2 + y^2\,, \\ SS_2^2 &= x^2 + (3 - y)^2\,, \\ SS_3^2 &= (4 - x)^2 + y^2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Spojením (1), (2) vyjde

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 1 + 2\varrho\,, \\ x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 6y + 4\varrho - 5\,, \\ x^2 + y^2 - \varrho^2 &= 8x + 6\varrho - 7\,; \end{aligned} \tag{3}$$

z první a třetí rovnosti (3) vyjde $8x = 8 - 4\varrho$, tj.

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}\varrho\,. \tag{4}$$

Z první a druhé rovnosti (3) vyjde $6y = 6 - 2\varrho$, tj.

$$y = 1 - \tfrac{1}{3}\varrho\,. \tag{5}$$

Dosazením za x, y z (4), (5) do první rovnice (3) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$23\varrho^2 + 132\varrho - 36 = 0\,,$$

která má jediný kladný kořen $\varrho = \frac{6}{23}$. Existuje tedy jediná kružnice žádaných vlastností.

5. V rovině leží čtyři body. Pět z jejich šesti vzájemných vzdáleností (v cm) je rovno číslům 1, 2, 3, 4, 5. Načrtněte všechny možné případy vzájemné polohy těchto čtyř bodů a vyložte jejich odvození.

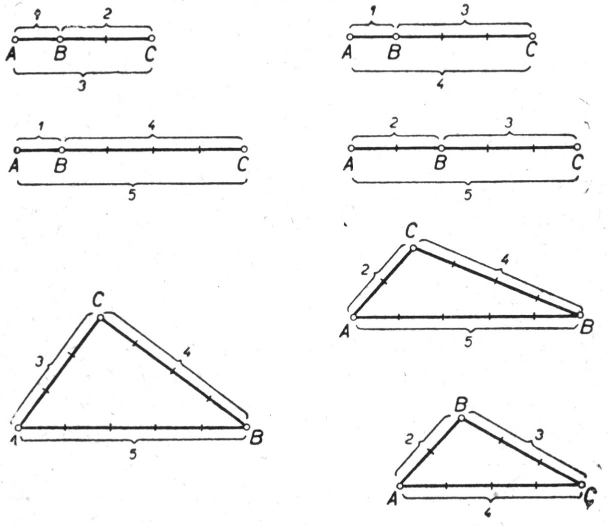
Řešení. a) Při sestrojování hledaných skupin čtyř bodů budeme užívat stále této známé věty:

Tři kladná čísla x, y, z jsou vzdálenosti tří dvojic, utvořených z tří bodů právě tehdy, když největší z čísel x, y, z je menší nebo rovno součtu obou ostatních.

b) Hledané čtyři body A, B, C, D určují celkem šest vzdáleností, z nichž jedna je neznámá. Bod, jehož jedna vzdálenost od ostatních je neznámá, označme D. Pak všecky tři vzdálenosti AB, BC, CA jsou daná čísla a máme pro ně těchto 10 možností:

$$\left.\begin{matrix} 123\,, & (124)\,, & (125)\,, & 134\,, & (135)\,, \\ 145\,, & 234\,, & 235\,, & 245\,, & 345\,. \end{matrix}\right\} \tag{1}$$

Případy 124, 125, 135 nemohou podle odstavce a) nastat. Zbývajících sedm případů je znázorněno na obr. 20.



Obr. 20

Přitom je třeba připomenout, že označení bodů A, B, C můžeme volit libovolně a dále, že trojice ABC v případech 123, 134, 145 a 235 leží v přímce.

c) Nyní budeme postupně vyšetřovat všecky možné případy (1). Ze vzdáleností AD, BD, CD jsou vždy dvě známy, třetí hledáme. Tyto dvě známé vzdálenosti spolu s jedním z čísel AB, BC, CA budou splňovat podmínku z odstavce a); tak určíme možné polohy bodu D.

Začneme s posledním případem (1), tj. s trojicí 345. Zbývající známé vzdálenosti jsou 1, 2: připojíme-li k nim jedno z čísel 3, 4, 5, dostaneme trojice

$$123\,, \quad 124\,, \quad 125\,. \tag{2a}$$

Poslední dva případy (2a) jsou podle odst. a) nemožné. Zbývá tedy jen případ 123, který nám dá dvě různá řešení znázorněná obrázky 21. Různost obou řešení vyplývá z toho, že neznámá vzdálenost (BD) je při prvním řešení $BD = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, kdežto při druhém řešení je $BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

d) Obdobně nyní vyšetříme další případy (1). V případě 245 jsou zbývající vzdálenosti 1, 3 a dostaneme tedy trojice

$$132\,, \quad 134\,, \quad 135\,. \tag{3a}$$

Z těchto případů je poslední nemožný, první a druhý dají po dvou řešeních zachycených na obr. 22. Všechna tato řešení jsou zřejmě navzájem různá a odlišná i od obou řešení z obr. 21.

V případě 235 jsou zbývající známé vzdálenosti 1,4. Dostaneme tedy trojice

$$142\,, \quad 143\,, \quad 145\,. \tag{4a}$$

Z nich první je nepřípustná, další dvě dají po dvou řešeních znázorněných na obr. 23.

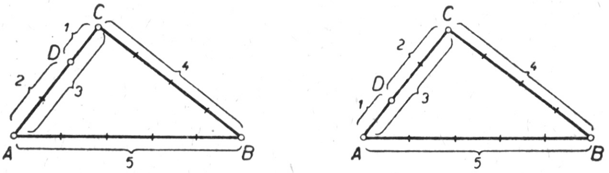
Z těchto řešení jsou však jen tři různá; jinak jsou všecka tři řešení z obr. 23 odlišná od předchozích šesti řešení.

V případě 234 jsou zbývající známé vzdálenosti 1, 5; dostaneme tedy trojice

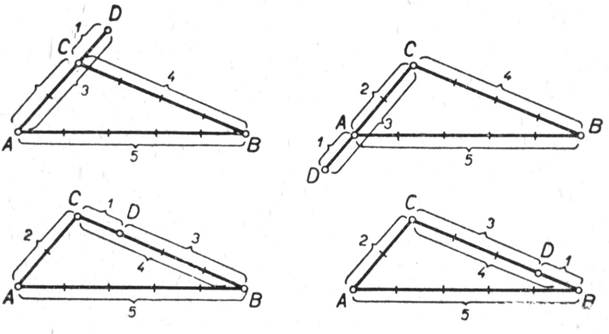
$$152\,, \quad 153\,, \quad 154\,. \tag{5a}$$

První dvě trojice jsou nepřípustné, poslední dá dvě řešení znázorněná na obr. 24.

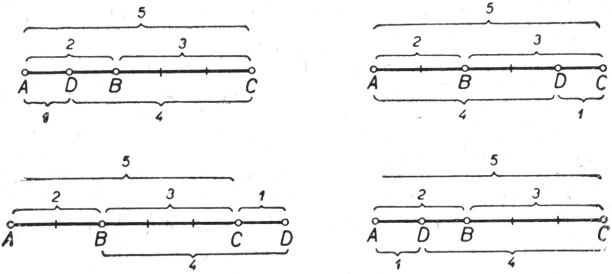
Je zřejmé, že obě tato řešení jsou navzájem různá a liší se i od řešení z obr. 21 i od řešení z obr. 22 a 23.



Obr. 21



Obr. 22

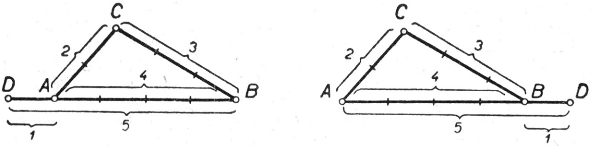


Obr. 23

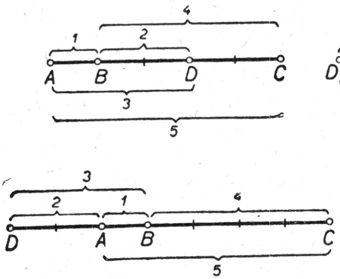
e) V případě 145 jsou další známé vzdálenosti 2,3. Možné trojice jsou tedy

$$231\,,\quad 234\,,\quad 235\,. \qquad \text{(6a)}$$

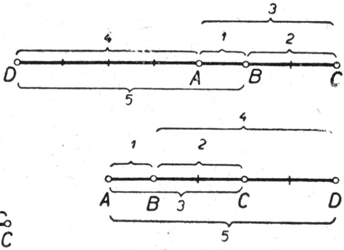
Trojice 234, 235 byly již vyšetřeny v odst. d). Trojice 231 dá dvě řešení zachycená na obr. 25. Z nich první se však shoduje s jedním řešením z obr. 23; zbývá tedy jediné další řešení.



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

V případě 134 jsou další známé vzdálenosti 2, 5. Možné trojice jsou tedy

$$251\,,\quad 253\,,\quad 254\,.$$

První trojice je však podle odst. a) nepřípustná, ostatní dvě byly vyšetřeny v odst. d) jako trojice 235, 245.

f) Ze všech případů (1) zbývá tedy případ 123. Ostatní dvě známé vzdálenosti jsou 4, 5; dostaneme tedy trojice

$$451\,,\quad 452\,,\quad 453\,.$$

Trojice 452, 453 byly již vyšetřeny v odst. c), d) jako trojice 245, 345. Trojice 451 dá dvě řešení naznačená na obr. 26. Obě se však shodují s dvěma řešeními z obr. 23. Nedostáváme tedy žádné další řešení.

Celkem máme tedy 12 různých řešení; přitom za různá pokládáme taková dvě řešení (čtveřice bodů), která se liší aspoň v jedné vzdálenosti. Z těchto 12 řešení jsou čtyři taková, že všecky čtyři body A, B, C, D leží v přímce.

6. Sú dané tri kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= 0\,, \\ x^2 + bx + a &= 0\,, \\ x^2 + x - a + b + 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

kde x je neznáma.

Reálne čísla a, b určite tak, aby každé dve z týchto rovníc mali spoločný aspoň jeden reálny koreň.

Riešenie. Odčítaním prvej a druhej rovnice dostaneme

$$(a - b)x = a - b\,.$$

Rozlišujme dve možnosti [1] a [2].

[1] Nech je $a \neq b$. Potom z tejto rovnice vyplýva $x = 1$. Prvá rovnica má potom korene 1, $-a - 1$; druhá rovnica má korene 1, $-b - 1$.

Keď dosadime $x = 1$ do ktorejkoľvek z prvních dvôch daných rovníc, obdržíme

$$a + b + 1 = 0\,. \tag{1}$$

Odčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme

$$(a - 1)x + (a - 1) = 0\,. \tag{2}$$

Ďalej rozlišujme dva prípady a), b):

a) Nech je $a \neq 1$. Potom je $x = -1$, prvá a tretia rovnica majú teda koreň -1. Prvá rovnica má korene $1, -1$ a platí $-a - 1 = -1$ čiže $a = 0$. Z (1) potom dostaneme $b = -1$; druhá rovnica má teda korene $1, 0$. Tretia rovnica znie $x^2 + x = 0$; má teda korene $-1, 0$. Daná sústava má v tomto prípade tvar:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0\,, \\ x^2 - x &= 0\,, \\ x^2 + x &= 0\,. \end{aligned}$$

Požiadavka, aby každé dve z týchto rovníc mali spoločný aspoň jeden reálny koreň, je v tomto prípade splnená.

b) Nech je $a = 1$; potom z (1) vyplýva $b = -2$ a daná sústava má tvar:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0\,, \\ x^2 - 2x + 1 &= 0\,, \\ x^2 + x - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Prvá a tretia rovnica sú totožné; obe majú korene $1, -2$. Druhá rovnica má dvojnásobný koreň 1. Všetky tri rovnice majú teda spoločný koreň $x = 1$.

[2] Nech je $a = b$. Potom má daná sústava tvar

$$\begin{aligned} x^2 + ax + a &= 0\,, \\ x^2 + ax + a &= 0\,, \\ x^2 + x + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Pretože posledná rovnica nemá žiadny reálny koreň, je úloha v tomto prípade neriešiteľná.

Celkem má teda úloha riešenie jedine v dvoch prípadoch:

a) Pre $a = 0$, $b = -1$;
b) pre $a = 1$, $b = -2$.

5. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B*

1. Součet více než dvou bezprostředně za sebou následujících přirozených čísel není nikdy prvočíslo. Dokažte.

Řešení. První z čísel označme a, přičemž je

$$a \geqq 1 . \tag{1}$$

Další čísla jsou (přitom $n > 2$)

$$a + 1 , \quad a + 2, \ldots, a + n - 1 .$$

Součet s všech n čísel je

$$s = \tfrac{1}{2}[a + (a + n - 1)]n = \tfrac{1}{2}(2a + n - 1)n ;$$

přitom je s přirozené číslo. Proto je nutně jedno z čísel $2a + n - 1$, n sudé; potom však je druhé liché. Jsou dvě možnosti:

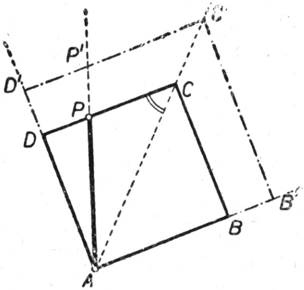
[1] Je-li n sudé, je $\frac{1}{2}n > 1$ (viz text úlohy); avšak i $2a + n - 1 > 1$, neboť $2a > 1$ a $n - 1 > 1$. Je tedy s součinem dvou přirozených čísel, z nichž každé je větší než 1; tj. s je číslo složené.

[2] Je-li n liché, je $2a + (n - 1)$ sudé a větší než dvě; jeho polovina je větší než 1; zároveň je $n \geqq 3$. Je tedy s opět číslo složené.

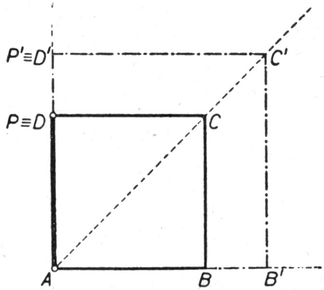
Tím je důkaz proveden.

2. V rovině jsou dány dva různé body A, P. Najděte geometrické místo vrcholů C všech čtverců $ABCD$, které obsahují bod P (uvnitř anebo na obvodu).

Řešení. I. Označme γ, σ obě opačné poloroviny s hranicí $p \equiv AP$ (obr. 30 na str. 79). Ihned nahlédneme, že se při dalším vyšetřování můžeme omezit na ty čtverce $ABCD$ z naší úlohy, v nichž bod P padne na úsečku CB nebo CD: Jestliže totiž bod P leží uvnitř čtverce $AB'C'D'$ z naší úlohy, popř. uvnitř některé ze stran AD' nebo AB', potom polopřímka AP má s jednou ze stran $C'B'$, $C'D'$ společný bod P' (obr. 27 až 29);

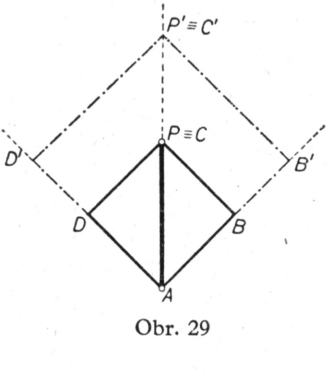


Obr. 27



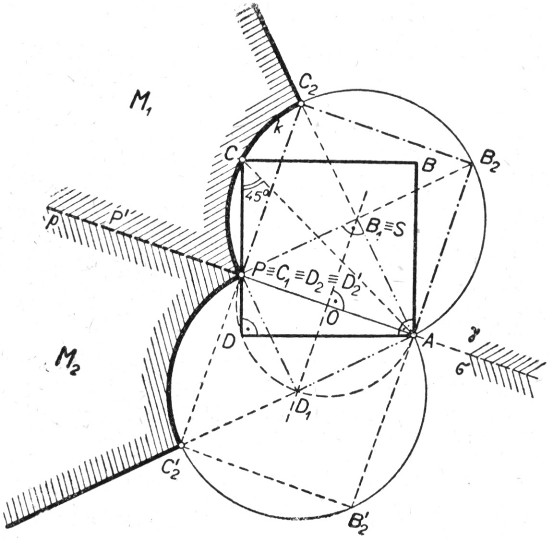
Obr. 28

stejnolehlost o středu A a koeficientu $\dfrac{AP}{AP'} \leqq 1$ převádí bod P' v bod P a čtverec $AB'C'D'$ ve čtverec $ABCD$, v němž bod P leží na některé z úseček CB, CD. Tím je tvrzení dokázáno.



Obr. 29

Dále se můžeme omezit na čtverce $ABCD$ s bodem P na úsečce CD, neboť leží-li bod P na úsečce CB, vyměníme názvy bodů B, D. Přitom stačí vyšetřovat případy, že bod C padne do poloroviny γ, neboť souměrnost o ose p převede takový čtverec, v němž bod C leží v polorovině σ, ve čtverec z naší úlohy, ale v němž obraz bodu C padne do poloroviny γ. Všimněme si zvláště dvou případů takových čtverců: čtverec $AB_1C\,D_1$, kde $C_1 \equiv P$ a čtverec



Obr. 30

$AB_2C_2D_2$, kde $D_2 \equiv P$ (obr. 30). V každém jiném případě padne bod P dovnitř strany CD hledaného čtverce $ABCD$ s bodem C v γ; na tyto čtverce se nyní omezíme.

Všimněme si, že v trojúhelníku APC je

$$\sphericalangle ACP = 45^\circ\,, \tag{1}$$

$\sphericalangle APC > 90°$ (neboť vedlejší úhel $\sphericalangle APD < 90°$ je totiž ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníku APD, kde $\sphericalangle D = 90°$); proto je úhel

$$\sphericalangle PAC < 45° . \qquad (2)$$

Množinou všech bodů C v polorovině γ, o nichž platí (1), je kruhový oblouk $\widehat{AP}$ se středovým úhlem $ASP = 270°$, kde $S \equiv B_1$; vzhledem ke vztahu (2) se však uplatní z tohoto oblouku $\widehat{AP}$ jen vnitřek oblouku $\widehat{PC_2}$. Avšak i krajní body C_2, P k tomu musíme přibrat vzhledem k oběma čtvercům $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$.

II. Nyní již snadno usoudíme, že hledané geometrické místo $\mathbf{N}$ bodů C uvedených v textu úlohy (tedy bez našich pomocných omezení) se skládá ze dvou množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ navzájem souměrně sdružených podle přímky p, přičemž body množiny $\mathbf{M}_1$ leží v polorovině γ a množina $\mathbf{M}_1$ se skládá z bodů úhlu $\sphericalangle PAC_2$, od něhož musíme odejmout jednak body trojúhelníku AC_2P (kde $\sphericalangle P =$ $= 90°$), s výjimkou vrcholů C_2, P, jednak body kruhové výseče o středu S, poloměru SP a středovém úhlu $\sphericalangle PSC_2$ ($= 90°$), přičemž však body výseč omezujícího kruhového oblouku $\widehat{PC_2}$ k množině $\mathbf{M}_1$ patří. Hranici množiny $\mathbf{M}$ tedy tvoří souměrně sdružené kruhové oblouky $\widehat{PC_2}$, $\widehat{PC'_2}$ a souměrně sdružené polopřímky opačné k polopřímkám C_2A, C'_2A.

Obráceně, je-li C' libovolný bod právě popsané množiny $\mathbf{M}$, dovedeme sestrojit čtverec $AB'C'D'$, který obsahuje bod P. Úvaha je podobná jako na počátku řešení, stačí se omezit na bod C' z poloroviny γ. Úsečka AC' má jistě s obloukem PC_2 z předchozích úvah společný jediný bod C a k němu snadno sestrojíme čtverec $ABCD$, na jehož straně CD leží bod P. Stejnolehlost o středu A a koeficientu $\frac{AC'}{AC} \geqq 1$ převede čtverec $ABCD$ v hledaný čtverec $AB'C'D'$.

Tím je řešení provedeno.

3. Je daná sústava rovníc

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d\,, \\ bx + cy + az &= d\,, \\ cx + ay + bz &= d \end{aligned} \tag{1}$$

s neznámými x, y, z, v ktorej sú a, b, c, d dané reálne čísla také, že $a + b + c = 0$.

Určite všetky riešenia danej sústavy.

Riešenie. Sčítame všetky tri rovnice. Dostaneme

$$(a + b + c)x + (a + b + c)y + (a + b + c)z = 3d$$

čiže

$$0 = 3d\,.$$

Ak je $d \neq 0$, je sústava (1) neriešiteľná.

Ak je $d = 0$, dosadíme za c do prvých dvoch rovníc $c = -a - b$ (pretože $a + b + c = 0$); dostaneme

$$\begin{aligned} ax + by - (a + b)z &= 0\,, \\ bx - (a + b)y + az &= 0\,. \end{aligned}$$

Elimináciou z z týchto dvoch rovníc vyjde

$$x(a^2 + b^2 + ab) - y(a^2 + b^2 + ab) = 0\,. \tag{2}$$

Ak je $a = b = 0$, a teda tiež $c = 0$, vyhovujú rovniciam (1) všetky trojice čísel x, y, z. Ak je aspoň jedno z čísel a, b rôzne od nuly, je $a^2 + b^2 + ab \neq 0$. Ak je totiž $a = b$ $(\neq 0)$, je $a^2 + b^2 + ab = 3a^2 \neq 0$; ak je $a \neq b$, potom je $a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3 - b^3}{a - b} \neq 0$.

V rovnici (2) krátime koeficientom a^2+b^2+ab a vyjde $x = y$. Analogicky dostaneme $y = z$, $z = x$. V tomto prípade sú riešeniami sústavy (1) všetky trojice sebe rovných čísel.

Výsledok:

Prípad	Podmienka	Riešenie x, y, z
1	$a + b + c = 0$, $a = b = c = 0$, $d = 0$	ľubovoľná trojica čísel
2	$a + b + c = 0$, $d = 0$; aspoň jedno z čísel a, b, c je rôzne od nuly	ľubovoľná trojica sebe rovných čísel
3	$a + b + c = 0$, $d \neq 0$	žiadne

4. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník PQR o straně délky p. Dále je dána úsečka délky d.

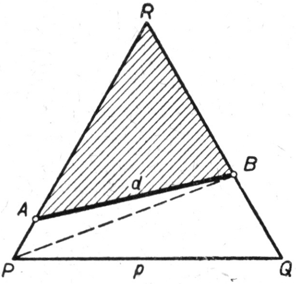
Na obvodu trojúhelníku PQR sestrojte body A, Btakové, že platí $AB = d$ a že body A, B půlí obvod daného trojúhelníku PQR.

Vyšetřte podmínky řešitelnosti vzhledem k daným číslům d, p. (Pro konstrukci lze užít výpočtu.)

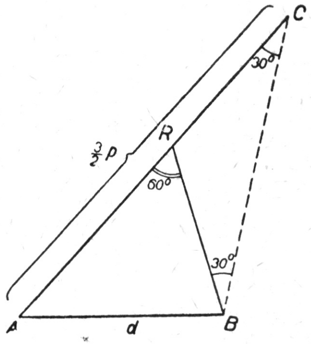
Řešení. Budiž AB úsečka žádaných vlastností; zvolme označení vrcholů daného trojúhelníku tak, aby bod A ležel na straně RP, bod B na straně RQ a aby bylo $RA \geqq RB$ (obr. 31). Pak plyne z trojúhelníku PQR, že $PB \leqq p$; dále plyne z trojúhelníku PRB, že $AB \leqq p$ neboli

$$d \leqq p\,. \tag{1}$$

Máme-li sestrojit body A, B, musíme sestrojit trojúhelník RAB, v němž je znám úhel $\sphericalangle ARB = 60°$, protější strana $AB = d$ a součet obou zbývajících stran $AR + BR = \frac{3}{2}p$ (podle podmínky úlohy). Pro konstrukci



Obr. 31



Obr. 32

použijeme přenesení úsečky RB na polopřímku opačnou k polopřímce RA (viz obr. 32); tak dostaneme bod C, pro který platí $RC = RB$. Je tedy

$$AC = AR + RC = AR + BR = \tfrac{3}{2}p\,.$$

Protože je $RA \geqq RB$, vyplývá z trojúhelníku ARB vztah pro úhly

$$\sphericalangle RBA \geqq \sphericalangle RAB\,, \qquad (2)$$

dále pak pro čtyřúhelník $ABQP$ dostaneme (viz obr. 31):

$$60° + 60° + 180° - \sphericalangle RBA + 180° - \sphericalangle RAB = 360°\,,$$

$$\sphericalangle RAB + \sphericalangle RBA = 120°\text{*)}$$

---

*) Tato rovnost platí, i když čtyřúhelník $ABQP$ přejde v trojúhelník.

a vzhledem k (2)

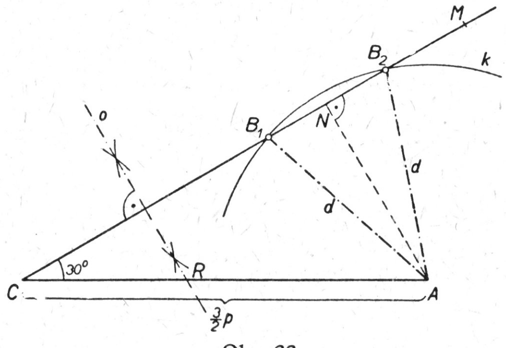
$$\sphericalangle RBA \geqq 60^\circ\,. \tag{3}$$

V trojúhelníku ABC pak platí vzhledem k (3)

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABR + \sphericalangle RBC \geqq 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ. \tag{4}$$

Konstrukce trojúhelníku ABC ze dvou stran a úhlu proti menší z nich ležícího je známa [skutečně je $AB < AC$, neboť platí (1)]. Kružnice $k \equiv (A; d)$ má s ramenem CM úhlu $\sphericalangle ACM = 30^\circ$ (viz obr. 33) společný bod jen v případě, že je

$$d \geqq AN = \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{3}{4}p; \tag{5}$$



Obr. 33

přitom N značí patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku CM. Protne-li kružnice k polopřímku CM ve dvou bodech B_1, B_2, má pro řešení význam jen jeden z nich (na obr. 33 bod B_1, pro který platí $CB_1 < CB_2$), neboť podle (4) musí být $\sphericalangle ABC$ tupý nebo pravý.

Při pokračování konstrukce sestrojíme osu o úsečky CB_1 a určíme její průsečík R s polopřímkou CA. Bod R leží zřejmě vždy mezi body A, C. Aby bylo možné doplnit trojúhelník RPQ, je nutné a stačí, aby platil vztah

$$AR \leqq p$$

neboli

$$CR \geqq \tfrac{1}{2}p\,. \qquad (6)$$

Upravíme nerovnost (6) tím, že vyjádříme CR; zřejmě je

$$CB_1 = 2CR.\cos 30^\circ \qquad (7)$$

a dále z trojúhelníků ACN, AB_1N je

$$CB_1 = CN - B_1N = \tfrac{3}{2}p\cos 30^\circ - \sqrt{d^2 - (\tfrac{3}{4}p)^2}. \qquad (8)$$

Spojíme-li (6), (7), (8), dostaneme

$$\tfrac{3}{2}p\cos 30^\circ - \sqrt{d^2 - (\tfrac{3}{4}p)^2} \geqq p\cos 30^\circ$$

neboli

$$\sqrt{d^2 - (\tfrac{3}{4}p)^2} \leqq \tfrac{1}{2}p\cos 30^\circ = \tfrac{1}{4}p\sqrt{3}\,. \qquad (9)$$

Po umocnění a úpravě dostaneme z (9) vztah $d^2 \leqq \frac{3}{4}p^2$ neboli

$$d \leqq \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\,. \qquad (10)$$

Spojením (5) a (10) vyjde podmínka řešitelnosti úlohy:

$$\tfrac{3}{4}p \leqq d \leqq \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\,.$$

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Jestliže přirozené číslo n je druhou mocninou přirozeného čísla, potom součin dvou posledních cifer (dekadického zápisu) čísla n je číslo sudé. Dokažte.

Řešení. Položme $n = (10a + b)^2$, kde $a \geqq 0$, $0 \leqq b \leqq 9$, a, b jsou celá čísla. Číslo a a předposlední cifra čísla n jsou buď obě lichá, nebo obě sudá. Potom platí

$$n = 100a^2 + 20ab + b^2 . \tag{1}$$

Je-li b sudé číslo, je věta správná. Je-li b liché ($b = 1$ nebo 3 nebo 5 nebo 7 nebo 9), končí b^2 lichou cifrou, počet d desítek čísla b^2 je sudý (0 nebo 2 nebo 4 nebo 8). Protože $20ab = (2ab) . 10$, je podle (1)

$$n = 100a^2 + (2ab).10 + (10d + l)$$

neboli

$$n = 100a^2 + (2ab + d).10 + l ,$$

kde l je liché, $2ab + d$ sudé. Tím je věta dokázána.

2. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Označme M pätu kolmice spustenej z bodu B na priamku AC.

a) Vypočítajte vzdialenosti AM, BM, CM, DM pomocou rozmerov $a = AB$, $b = AD$ daného obdĺžnika.

b) Rozhodnite, či existuje taký obdĺžnik $ABCD$, v ktorom platí $DM = 3BM$.

Riešenie (obr. 34). a) Označme rozmery obdĺžnika $AB = a$, $BC = b$; ďalej označme body P, Q, R podľa obrázka. Podľa Euklidovej vety potom platí

$$AM = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

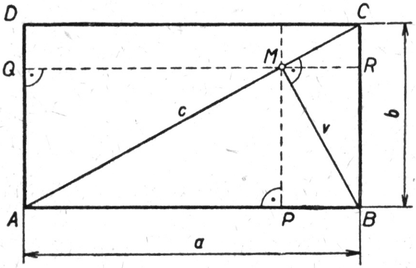
$$CM = \frac{BC^2}{AC} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zo vzorcov pre obsah trojuholníka ABC ďalej vyplýva

$$BM = \frac{AB . BC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Zostáva ešte určiť vzdialenosť DM. K tomu použijeme trojuholník DMQ. Určíme

$$MP = \frac{AM \,.\, BM}{AB} = \frac{a^3b}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}.$$



Obr. 34

Ďalej je

$$DQ = AD - AQ = AD - MP =$$
$$= b - \frac{a^2b}{a^2 + b^2} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}.$$

Ďalej vypočítame z pravouhlého trojuholníka ABM

$$MQ = AP = \frac{AM^2}{AB} = \frac{a^4}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2}.$$

Podľa Pythagorovej vety je

$$DM^2 = DQ^2 + MQ^2 =$$
$$= \frac{a^6 + b^6}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2} =$$
$$= \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Ak zavedieme označenie $AC = c$, $BM = v$, je $c^2 = a^2 + b^2$, $v = \frac{ab}{c}$; platí teda

$$DM^2 = c^2 - 3\,\frac{a^2b^2}{c^2} = c^2 - 3v^2\,.$$

b) Ak je $DM = 3BM$, je $\sqrt{c^2 - 3v^2} = 3v$ a obrátene. Umocnením tejto rovnosti dostaneme $c^2 = 12v^2$, $c = 2v\sqrt{3}$, čiže $c = \frac{2ab\sqrt{3}}{c}$, skadiaľ $c^2 = 2ab\sqrt{3}$ čiže

$a^2 - 2ab\sqrt{3} + b^2 = 0$. Položme $\frac{a}{b} = x$; potom pre pomer x rozmerov a, b dostaneme rovnicu

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0\,,$$

ktorú upravíme takto:

$$(x - \sqrt{3})^2 - 3 + 1 = 0 \text{ čiže } (x - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 0.$$

Z toho použitím vzorca pre rozdiel štvorcov dostaneme

$$(x - \sqrt{3} + \sqrt{2})\,(x - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0\,.$$

Tomuto vzťahu vyhovujú čísla:

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \qquad x = \sqrt{3} + \sqrt{2}\,,$$

ktoré sú kladné. Máme teda dva typy obdĺžnikov. Jeden typ má pomer $\frac{a}{b}$ rozmerov rovný číslu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, druhý číslu $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Tieto čísla skutočne vyhovujú požiadavkám úlohy, ako sa ľahko presvedčíme skúškou.

3. Jsou dány tři lineární rovnice

$$\begin{aligned} px - 2y &= 2p - 1\,, \\ 2x + py &= p - 1\,, \\ (p - 1)x + y &= p + 1 \end{aligned}$$

s neznámými x, y.

Najděte všechna reálná čísla p, pro něž mají uvedené tři rovnice společné řešení; vypočtěte tato řešení.

Řešení. a) Je-li x, y dvojice čísel, která jsou řešením všech tří rovnic, pak číslo x vyhovuje oběma rovnicím, které dostaneme, dosadíme-li za y z třetí rovnice do prvních dvou. Vyjde po úpravě

$$\begin{aligned}(3p-2)x &= 4p+1\,,\\ (p^2-p-2)x &= p^2+1\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Znásobíme-li obě strany první rovnice (1) číslem $p^2 - - p - 2$ a obě strany druhé rovnice číslem $3p - 2$, budou levé strany totožné; dostaneme tedy rovnost

$$(4p+1)(p^2-p-2) = (p^2+1)(3p-2)\,.$$

Po vynásobení a úpravě vyjde

$$p^3 - p^2 - 12p = 0$$

neboli

$$p(p^2 - p - 12) = 0\,. \tag{2}$$

Trojčlen $p^2 - p - 12$ lze rozložit v součin dvojčlenů $p - 4$, $p + 3$. Užijeme-li tohoto rozkladu, uvedeme podmínku (2) na tvar

$$p(p-4)(p+3) = 0\,. \tag{3}$$

Dokázali jsme: Mají-li dané tři rovnice společné řešení, vyhovuje parametr p podmínce (3). Rovnici (3) však vyhovují jedině tři čísla: $p = 0$, $p = 4$ a $p = -3$. Jsou tedy možné nejvýše tři hodnoty parametru žádané vlastnosti.

b) Pro $p = 0$ dostaneme rovnice

$$-2y = -1\,,\quad 2x = -1\,,\quad -x + y = 1\,,$$

které mají skutečně společné řešení $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Pro $p = 4$ mají dané rovnice tvar

$$4x - 2y = 7\,,\quad 2x + 4y = 3\,,\quad 3x + y = 5\,.$$

Řešením prvních dvou rovnic dostaneme $x = 1{,}7$, $y = -0{,}1$; toto řešení skutečně vyhovuje i třetí rovnici.

Pro $p = -3$ mají dané rovnice tvar

$$-3x - 2y = -7\,, \quad 2x - 3y = -4\,, \quad -4x + y = -2\,.$$

Řešením druhé a třetí rovnice dostaneme $x = 1$, $y = 2$; toto řešení skutečně vyhovuje i první rovnici.

4. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel, ktorých súčet sa rovná ich súčinu.

Riešenie. Ak označíme hľadané čísla x, y, z, môžeme podmienku úlohy vyjadriť takto:

$$x + y + z = xyz\,. \tag{1}$$

Označenie hľadaných troch prirodzených čísel môžeme zvoliť tak, že platí

$$0 < x \leqq y \leqq z\,. \tag{2}$$

Potom je $x + y + z \leqq 3z$. Z danej rovnice (1) potom vyplýva podmienka $xyz \leqq 3z$ čiže

$$xy \leqq 3\,. \tag{3}$$

Podmienky (3) a (2) možno splniť len troma spôsobmi:

a) $x = 1$, $y = 1$; b) $x = 1$, $y = 2$; c) $x = 1$, $y = 3$.

V prípade a) má rovnica (1) tvar $2 + z = z$ a je neriešiteľná.

V prípade b) má rovnica (1) tvar $3 + z = 2z$ a má koreň $z = 3$. Stadiaľ dostávame jedno riešenie úlohy

$$x = 1\,, \quad y = 2\,, \quad z = 3\,. \tag{4}$$

V prípade c) má rovnica (1) tvar $4 + z = 3z$ a má koreň $z = 2$, ktorý však nevyhovuje podmienke (2).

Úloha má teda jediné riešenie (4).

Všimnite si, že podstatné zjednodušenie pri riešení úlohy vyplynulo z toho, že sme ohraničili neznáme x, y zhora podmienkou (3).

5. V rovině je dán trojúhelník ABC; vně tohoto trojúhelníku jsou sestrojeny čtverce $ABMN$, $BCPQ$ se středy O_1, O_2.

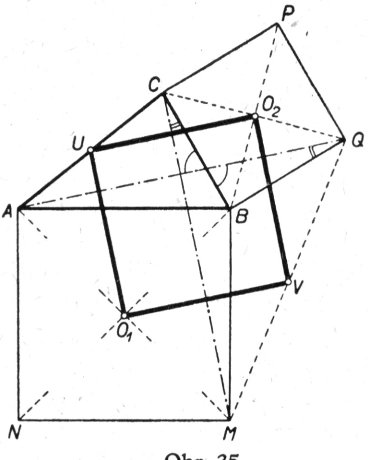
Dokažte, že středy úseček AC, MQ a body O_1, O_2 jsou vrcholy jistého čtverce.

Řešení (obr. 35). a) Předpokládejme, že je $\sphericalangle CBA < 90°$. Označme U střed strany AC, V střed úsečky MQ. Úsečka UO_1 je střední příčkou trojúhelníku ACM, proto je

$$UO_1 \parallel CM\,, \quad UO_1 = \tfrac{1}{2}CM\,. \tag{1}$$

Obdobně je úsečka UO_2 střední příčkou trojúhelníku ACQ, proto je

$$UO_2 \parallel AQ\,, \quad UO_2 = \tfrac{1}{2}AQ\,. \tag{2}$$



Obr. 35

Podle věty *sus* plyne

$$\triangle ABQ \cong \triangle MBC\,. \tag{3}$$

Skutečně je $AB = BM$, $BQ = BC$, $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle MBC = \sphericalangle ABC + 90°$. Podle (3) je dále $AQ = CM$, tudíž též

$$UO_1 = UO_2\,. \tag{4}$$

Obdobně jako dříve dokážeme z vlastností střední příčky, že platí

$$\begin{aligned} VO_2 &\parallel CM\,, \quad & VO_2 &= \tfrac{1}{2}CM\,, \\ VO_1 &\parallel AQ\,, \quad & VO_1 &= \tfrac{1}{2}AQ\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Spojením vztahů (1), (2), (4), (5) dostaneme

$$UO_1 \parallel VO_2,\quad UO_2 \parallel VO_1,\quad UO_1 = UO_2 = VO_1 = VO_2,$$

tj. obrazec UO_1VO_2 je kosočtverec.

Protože trojúhelník BCM vznikne otočením trojúhelníku BQA o pravý úhel,*) je $AQ \perp CM$, tudíž také $UO_1 \perp UO_2$, tj. rovnoběžník UO_1VO_2 je čtverec.

b) Je-li $\sphericalangle CBA > 90°$, provede se důkaz jako v případě a).

c) Je-li $\sphericalangle CBA = 90°$, je tvrzení zřejmě platné.

Tím je řešení provedeno.

6. V rovině je dán kruhový oblouk s krajními body A a B.

Vyšetřte geometrická místa středů kružnic vepsaných a vně vepsaných trojúhelníku ABC, jestliže bod C probíhá vnitřek daného oblouku.

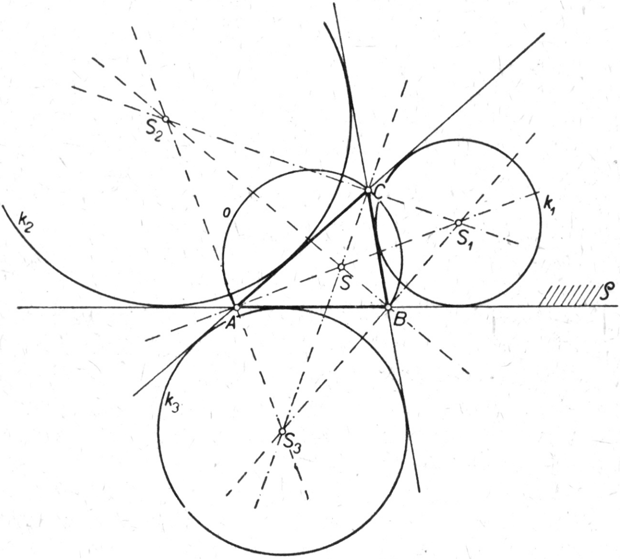
Řešení (obr. 36). I. Budiž o daný oblouk $\widehat{AB}$, ϱ polorovina s hranicí AB, v níž leží oblouk o, C jeden jeho bod různý od A, B, dále bod S střed kružnice vepsané

---

*) Odtud přímo plyne shodnost obou trojúhelníků.

trojúhelníku ABC a S_1, S_2, S_3 středy kružnic vně vepsaných tomuto trojúhelníku po řadě k stranám BC, CA, AB. Je zřejmé, že body S, S_1, S_2 leží v polorovině ϱ, bod S_3 v polorovině opačné k ϱ. Označíme-li vnitřní úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ, je

$$\sphericalangle SAB = \tfrac{1}{2}\alpha\,, \quad \sphericalangle SBA = \tfrac{1}{2}\beta;$$



Obr. 36

z trojúhelníku SAB pak plyne, že je

$$\sphericalangle ASB = 90° + \tfrac{1}{2}\gamma\,. \tag{1}$$

Dále je

$$\sphericalangle S_2AC = \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha;$$

proto platí

$$\sphericalangle S_2AB = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha + \alpha = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha\,.$$

Protože je $\sphericalangle S_2BA = \frac{1}{2}\beta$, dostaneme z trojúhelníku S_2AB vztah

$$\sphericalangle AS_2B = \tfrac{1}{2}\gamma\,. \tag{2}$$

Výměnou vrcholů A, B vyplývá z (2) vztah

$$\sphericalangle BS_1A = \tfrac{1}{2}\gamma\,. \tag{3}$$

Protože polopřímka AS_3 je osou vnějšího úhlu trojúhelníku ABC, je

$$\sphericalangle S_3AB = \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha$$

a obdobně

$$\sphericalangle S_3BA = 90° - \tfrac{1}{2}\beta\,.$$

Z trojúhelníku S_3AB pak dostaneme

$$\sphericalangle AS_3B = 90° - \tfrac{1}{2}\gamma\,. \tag{4}$$

Probíhá-li bod C oblouk o, je — podle věty o obvodovém úhlu — velikost úhlu γ konstantní. Podle (1), (2), (3), (4) leží tedy

a) bod S na jistém oblouku o_0 sestrojeném nad tětivou AB v polorovině ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $90° + \frac{1}{2}\gamma$;

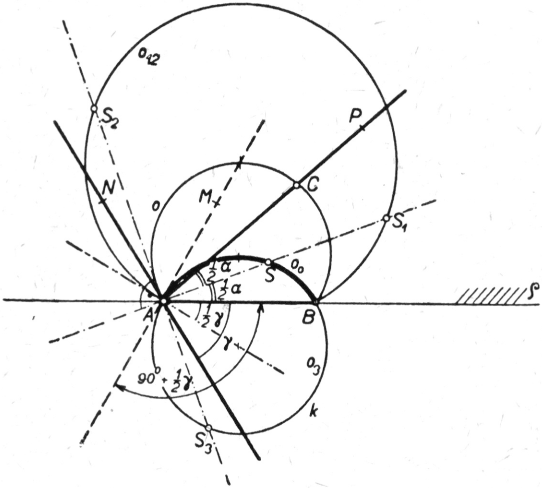
b) body S_1, S_2 na jistém oblouku o_{12} sestrojeném nad tětivou AB v polorovině ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $\frac{1}{2}\gamma$;

c) bod S_3 na jistém oblouku o_3 sestrojeném nad tětivou AB v polorovině opačné k ϱ a daném velikostí obvodového úhlu $90° - \frac{1}{2}\gamma$.

Hledaná geometrická místa bodů náleží tedy uvedeným třem obloukům o_0, o_{12}, o_3 (viz obr. 37).

Poznámka. Je bezprostředně patrno, že oblouky o_0, o_3 tvoří dohromady kružnici k.

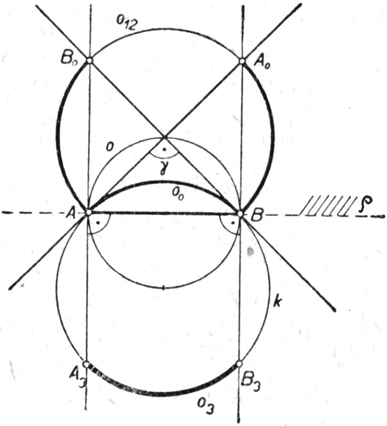
II. Zbývá zjistit, zda hledaná geometrická místa bodů jsou celé oblouky o_0, o_{12}, o_3 (bez krajních bodů A, B) nebo jen jejich části, a které.



Obr. 37

Sestrojme v bodě A tečnu ke kružnici k a na této tečně zvolme v polorovině ϱ bod M. Pak je — jak známo — $\sphericalangle MAB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma < 90.^\circ$ Je-li S libovolný bod oblouku o_0 různý od A, B, je $\sphericalangle SAB <$ $< \sphericalangle MAB < 90^\circ$; označíme $\alpha = 2\sphericalangle SAB$.

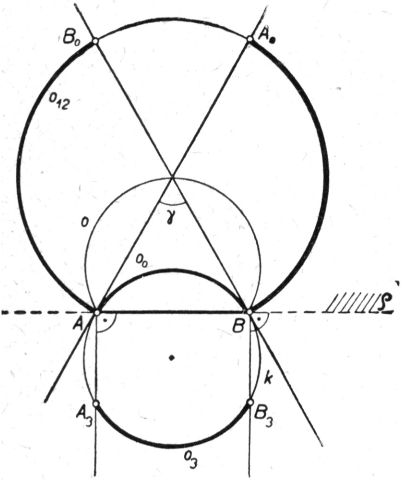
Dále sestrojíme v bodě A tečnu ke kružnici obsahující daný oblouk o a na této tečně zvolíme bod N uvnitř poloroviny ϱ; snadno odvodíme, že je $\sphericalangle NAB = 180^\circ -$ $- \gamma$. Vedeme-li tedy v polorovině ϱ bodem A polopřímku AP tak, aby platilo $\sphericalangle PAB = \alpha$, protne polopřímka AP oblouk o v jistém bodě C různém od A, B. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC má pak střed S (odůvodněte podrobně). To znamená, že celý oblouk o_0 (mimo body A, B) náleží hledanému geometrickému místu.



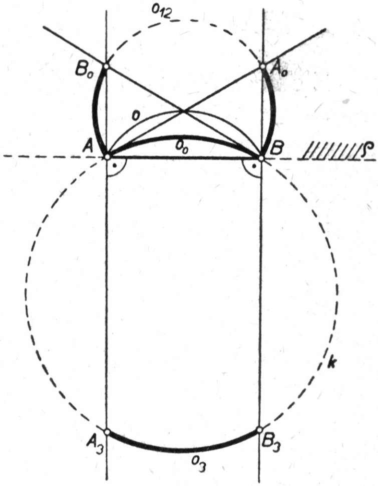
Obr. 38

Středy S_1, S_2 kružnic vně vepsaných dostaneme jako průsečíky oblouku o_{12} s polopřímkami AS, BS. Hledané geometrické místo bodů obsahuje tedy jen ty části oblouku o_{12}, které jsou omezeny tečnami vedenými ke kružnici k v bodech A, B; jsou to vnitřky oblouků AB_0, BA_0 (viz obr. 38).

Konečně bod S_3 dostaneme, vedeme-li bodem A kolmici k přímce AS a určíme její zbývající průsečík s kružnicí k. Hledané geometrické místo se skládá tedy z té části $\widehat{A_3B_3}$ oblouku o_3, která je omezena kolmicemi vedenými k přímce AB body A, B (body A_3, B_3 ke geometrickému místu nenáleží).



Obr. 39



Obr. 40

Na obr. 38 až 40 je sestrojeno geometrické místo pro $\gamma < 90°$, $\gamma = 90°$ a $\gamma > 90°$.

7. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C*

1. Řešte rovnici

$$\left| \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20} \right| = 10 .$$

Řešení. Platí $x^2 + 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$, $x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$. Je-li x řešením dané rovnice, potom platí

$$\left|\frac{(x + 6)(x - 4)}{(x - 5)(x - 4)}\right| = 10. \tag{1}$$

Zlomek na levé straně (1) zkrátíme číslem $x - 4$ a dostaneme

$$\left|\frac{x + 6}{x - 5}\right| = 10\,. \tag{2}$$

Z rovnice (2) plyne $|x + 6| = 10|x - 5|$, neboli buď

$$x + 6 = 10(x - 5) \tag{3a}$$

nebo

$$x + 6 = 10(5 - x)\,. \tag{3b}$$

Řešením rovnice (3a) dostaneme

$$x = \tfrac{56}{9}; \tag{4a}$$

řešením rovnice (3b) dostaneme

$$x = 4\,. \tag{4b}$$

Zkouška. Dosadíme kořen (4a) do rovnice (1) a zjistíme, že je splněna. Kořen (4b) nelze do (1) dosadit, neboť je $x - 4 = 0$. Daná rovnice má tedy jediné řešení (4a).

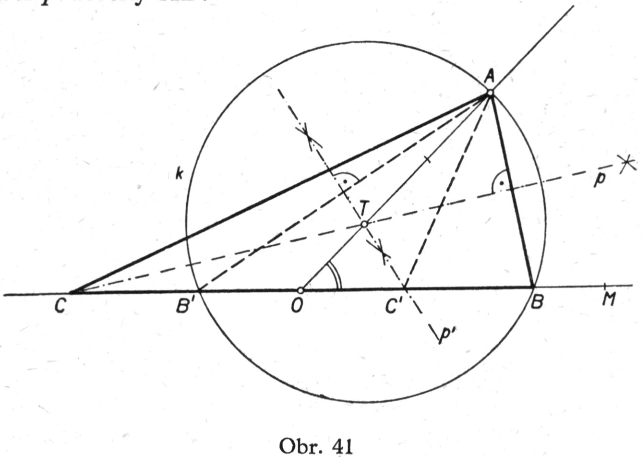
2. V rovine je daný uhol $\sphericalangle AOM$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB taký, že úsečka AO je jeho ťažnica a body B,C ležia na priamke OM.

Riešenie (obr. 41). *Rozbor.* Nech je zostrojený hľadaný rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Úsečka AO je jeho ťažnica, takže na nej nutne leží ťažisko T trojuholníka. Platí o ňom

$$AT = 2.TO\,. \tag{1}$$

Bodom T prechádza ťažnica CT, ktorá je podľa známej vety osou súmernosti hľadaného trojuholníka ABC. Pritom sú úsečky TA, TB súmerne združené podľa osi CT a platí o nich $AT = BT$. Z toho vyplýva *konštrukcia*:

Úsečku OA rozdeľme na tri zhodné úsečky a vyznačme hľadané ťažisko T. Opíšme kružnicu $k \equiv (T, TA)$ a označme B jeden z priesečníkov kružnice k s priamkou OM. Bod C je priesečníkom priamky OM a osi p úsečky AB.



Obr. 41

Správnosť konštrukcie vyplýva z vety, že ťažisko T trojuholníka ABC delí jeho ťažnicu AO tak, že platí vzťah (1). Trojuholník ABC je skutočne rovnoramenný, pretože bod C leží na osi strany AB, ale neleží na priamke AB.

Diskusia. Dokážeme, že kružnica k má s priamkou OM dva rôzne spoločné body.

Dôkaz. Polomer TA kružnice k je dvojnásobkom úsečky TO, ktorá je väčšia alebo rovná vzdialenosti bodu T od priamky OM. Preto priamka OM pretína kružnicu k a dostávame dva rôzne priesečníky B, B' kružnice k a priamky OM. Pretože je $OT < OB$, $OT < < OB'$, leží bod O vo vnútri úsečky BB'. Bod O oddeľuje teda body B, B' a tým aj body C, C'. Ak napr. bod B leží na polpriamke OM, leží tam aj bod C', zatiaľ čo body B', C ležia na polpriamke opačnej. Ak je napr. $B \equiv C'$, je $TB' = TB$ a bod O je stredom úsečky BB', t. j. $TO \perp BB'$ čiže daný uhol $\sphericalangle AOM$ je pravý. Potom je v pravouhlom trojuholníku TCO prepona $TC = 2.TO$, a preto je $\sphericalangle OCT = 30°$, takže uhol $\sphericalangle ACB = 60°$ a trojuholník ABC je rovnostranný. Pritom trojuholník $AB'C'$ s ním splýva. Ak daný uhol $\sphericalangle AOM$ nie je pravý, dostaneme dva rôzne trojuholníky ABC, $AB'C'$.

3. Žák měl vypočítat aritmetický průměr daných čísel a, b, c, d. Počítal jej tímto způsobem: Nejprve našel aritmetický průměr p čísel a, b, potom aritmetický průměr q čísel p, c a nakonec aritmetický průměr čísel q, d.

a) Ukažte, že způsob, kterého žák použil, není správný.

b) Jestliže však žák přesto dostal správný výsledek, splňovala čísla a, b, c, d nutně určitý vztah. Najděte jej.

Řešení. Označme

$$r = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d) \tag{1}$$

hledaný aritmetický průměr čísel a, b, c, d a r' průměr, který vypočítal žák. Platí $p = \frac{1}{2}(a + b)$, $q = \frac{1}{2}(p + c) = = \frac{1}{4}(a + b + 2c)$,

$$r' = \tfrac{1}{2}(d + q) = \tfrac{1}{8}(a + b + 2c + 4d)\,. \tag{2}$$

Budiž

$$r' = r$$

neboli

$$\tfrac{1}{8}(a + b + 2c + 4d) = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d)\,,$$

tj.

$$a + b + 2c + 4d = 2a + 2b + 2c + 2d\,,$$

tj.

$$d = \tfrac{1}{2}(a + b)\,. \tag{3}$$

Žák mohl tedy dostat správný výsledek jen za předpokladu, že daná čísla splňovala rovnost (3); jinak by dostal výsledek nesprávný. Proto postup výpočtu není správný.

Zkouška. Ze vztahu (2) po dosazení za d ze (3) dostaneme $r' = \frac{1}{8}[a + b + 2c + 2(a + b)] = \frac{1}{8}[3(a + b) + + 2c]$. Ze vztahu (1) po dosazení za d ze (3) dostaneme $r = \frac{1}{4}[a + b + c + \frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{8}[2(a + b) + 2c + + (a + b)] = \frac{1}{8}[3(a + b) + 2c]$, takže žák skutečně za předpokladu, že platí (3), dostal správný výsledek.

4. V rovině je dána polokružnice s krajními body A, B. Dále je dáno kladné číslo $c < AB$.

Najděte geometrické místo průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž zbylé dva vrcholy C, D leží na dané polokružnici, a to tak, že strana CD má stálou velikost c.

Řešení (obr. 42). a) Označme S střed polokružnice o. Pro každou polohu tětivy CD konstantní délky je velikost 2φ středového úhlu $\sphericalangle CSD$ příslušného k menšímu oblouku CD táž; je tedy i

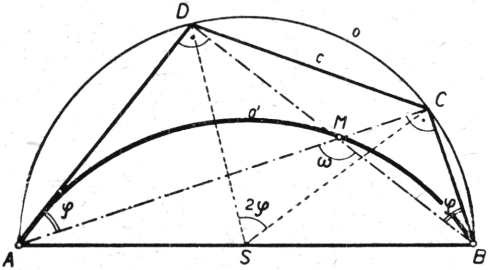
$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \varphi < 90° \tag{1}$$

(obvodové úhly nad menším obloukem CD). Dále je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 90° \tag{2}$$

(věta Thaletova).

V trojúhelníku ABM označme ω velikost úhlu $\sphericalangle AMB$. Tento úhel je vnějším úhlem trojúhelníku ADM, a je roven součtu jeho vnitřních úhlů $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle CAD$ [viz (1)] a $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle ADB$ o velikostech φ a $90°$; je tedy $\omega = \varphi + 90° < 180°$ (úhel φ je totiž ostrý).



Obr. 42

Hledáme tedy, jaký útvar vyplní bod M, z něhož je vidět danou (pevnou) úsečku AB pod konstantním úhlem $\varphi + 90°$. Podle známé věty je to kruhový oblouk o' o krajních bodech A, B (tyto body k nalezenému geometrickému místu bodů nepatří), přičemž leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB jako daná polokružnice; oblouk přísluší k obvodovému úhlu velikosti $\varphi + 90° > 90°$, což je úhel tupý. Vyšetřovaný oblouk AB je tedy menší oblouk příslušné kružnice.

b) Zbývá zjistit, zda každý bod oblouku o' (mimo body A, B) náleží hledanému geometrickému místu.

Oblouk o' náleží jisté kružnici k', jejíž střed leží v polorovině opačné k ABC. Středový úhel nad tětivou AB v kružnici k' má velikost $180° - 2\varphi$. Z toho snadno odvodíme, že tečna ke kružnici k' v bodě A svírá s přímkou AB ostrý úhel velikosti $90° - \varphi$.

Zvolme nyní libovolný bod $M \not\equiv A, B$ oblouku o' a označme C průsečík polokružnice o s polopřímkou AM. Podle předcházejícího je $\sphericalangle MAB < 90° - \varphi$.

Z rovnoramenného trojúhelníku ACS dostaneme

$$\sphericalangle ASC = 180° - 2 . \sphericalangle MAB > 2\varphi .$$

Lze tedy sestrojit na polokružnici o mezi body C, A bod D tak, aby bylo $CD = c$, a zvolený bod M je průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

8. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D*

1. Je daná kružnica $k \equiv (S, r = 5 \text{ cm})$ a v nej tetiva AC dĺžky 9 cm. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD tak, aby body B, D ležali na kružnici k a aby uhlopriečka AC rozpolovala jeden z uhlov lichobežníka $ABCD$.

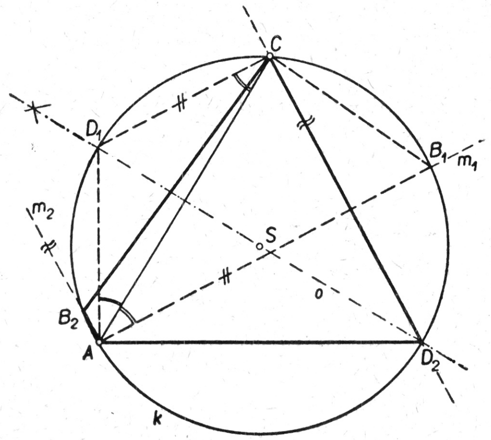
Riešenie. a) *Rozbor.* Predpokladajme, že je zostrojený taký lichobežník (napr. AB_1CD_1), ktorého uhlopriečka AC rozpoluje vnútorný uhol $\sphericalangle B_1AD_1$. Pretože je $AB_1 \parallel CD_1$ a body B_1, D_1 ležia v opačných polrovinách s hranicou AC, sú striedavé uhly $\sphericalangle B_1AC$, $\sphericalangle D_1CA$ zhodné. Okrem toho je podľa predpokladu

$$\sphericalangle B_1AC = \sphericalangle D_1AC .$$

Platí teda $\sphericalangle D_1AC = \sphericalangle B_1AC = \sphericalangle D_1CA$ a trojuholník ACD_1 je rovnoramenný so základňou AC. Vrchol D_1 leží teda na osi o úsečky AC.

b) *Konštrukcia a skúška* (obr. 43). Zostrojíme priesečníky D_1, D_2 osi o s kružnicou k a bodom A vedieme priamky $m_1 \parallel CD_1$, $m_2 \parallel CD_2$. Zistíme, že priamky m_1, m_2

pretínajú kružnicu k mimo bodu A po rade v bodoch B_1, B_2. Pritom sú body B_1, D_1 a body B_2, D_2 oddelené priamkou AC. Pretože trojuholník ACD_1 je rovnoramenný, je $\sphericalangle D_1AC = \sphericalangle D_1CA$. Pretože uhly $\sphericalangle D_1CA$



Obr. 43

a $\sphericalangle B_1AC$ sú striedavé a pretože platí $CD_1 \parallel AB_1$, je $\sphericalangle D_1CA = \sphericalangle B_1AC$. Polpriamka AC rozpoluje teda skutočne uhol $\sphericalangle B_1AD_1$, t. j. lichobežník AB_1CD_1 vyhovuje podmienkam úlohy. Analogický dôkaz platí aj pre lichobežník AB_2CD_2.

c) Zostáva ešte rovnakým spôsobom zostrojiť tie lichobežníky, ktorých uhlopriečka AC rozpoluje uhol $\sphericalangle BCD$. Tie dostaneme zrejme predchádzajúcou konštrukciou, ak vymeníme body A, C (a potom ovšem aj body B, D). Zostrojíme ich teda ako lichobežníky súmerne združené podľa osi o s obidvoma lichobežníkmi AB_1CD_1, AB_2CD_2. Úloha má teda štyri rôzne riešenia.

2. Najděte všechna trojciferná (přirozená) čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřciferné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

Řešení. Trojciferné číslo v dekadickém vyjádření lze symbolicky zapsat (xyz), kde o celých číslech x, y, z platí $0 < x \leqq 9$ (dané číslo je trojciferné), $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq \leqq z \leqq 9$. Číslo (xyz) zapíšeme jako trojčlen

$$100x + 10y + z\,.$$

Nové číslo lze symbolicky psát $(zxyz)$ nebo jako čtyřčlen

$$1000z + 100x + 10y + z\,,$$

po úpravě

$$100x + 10y + 1001z\,. \tag{1}$$

Sedminásobek hledaného čísla je $700x + 70y + 7z$; odečteme-li od něho číslo 18, dostaneme číslo dané výrazem (1), tj. platí

$$700x + 70y + 7z - 18 = 100x + 10y + 1001z$$

neboli

$$600x + 60y = 994z + 18\,. \tag{2}$$

Pomocí této rovnice a vztahů

$$0 < x \leqq 9\,, \quad 0 \leqq y \leqq 9\,, \quad 0 \leqq z \leqq 9$$

určíme v několika krocích čísla x, y, z.

[1] Levá strana rovnice (2) je dělitelná deseti, proto i pravá strana $994z + 18$ je tímto číslem dělitelná. Ale $994z + 18 = (990z + 10) + (4z + 8)$; proto číslo $4z + 8$ musí končit nulou. Dosazujme do výrazu $4z + 8$

za z postupně čísla 0, 1, . . ., 9; číslo $4z + 8$ končí nulou jen pro $z = 3$ nebo $z = 8$. Pro $z = 8$ však dostaneme z (2)

$$60x + 6y = 797;$$

této rovnici nevyhovují žádná nezáporná celá čísla x, y menší než 10. Je tedy nutně $z = 3$.

[2] Do (2) dosaďme $z = 3$, takže napravo dostaneme 3000 a obě strany rovnice znásobme číslem $\frac{1}{60}$; dostaneme rovnici

$$10x + y = 50\,. \qquad (3)$$

[3] Čísla $10x$, 50 jsou dělitelná deseti; proto jednociferné číslo y musí být též dělitelné deseti neboli je nutně $y = 0$. Pak (3) zní

$$10x = 50;$$

odtud plyne $x = 5$.

Hledané číslo (když vůbec existuje) musí být rovno 503. Číslo, které z něho vznikne, je 3503 a skutečně platí $503 \,.\, 7 = 3521 = 3503 + 18$.

Tím je řešení provedeno.

3. Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ (o stěně $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) má dané rozměry $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kvádru dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí a, b, c. Narýsujte jeho síť pro $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Řešení (obr. 44). a) Objem čtyřstěnu vypočítáme podle vzorce pro objem V jehlanu, tj. $V = \frac{1}{3}Pv$, kde P je obsah podstavy a v velikost příslušné výšky. Považujme ve čtyřstěnu $ABDA'$ trojúhelník ABD za podstavu, pak ve $v = AA' = c$. Obsah pravoúhlého trojúhelníku ABD

o odvěsnách a, b je $P = \frac{1}{2}ab$. Proto je

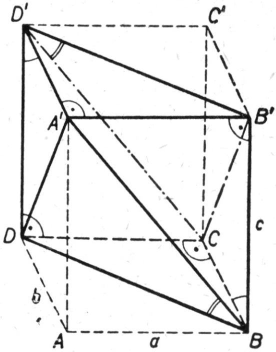
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \, . \, c = \frac{1}{6}abc \, .$$

I čtyřstěn $C'CB'D'$ má objem $\frac{1}{6}abc$, takže součet obou objemů je $\frac{1}{3}abc$. Protože objem daného kvádru je abc, je objem zbylého tělesa

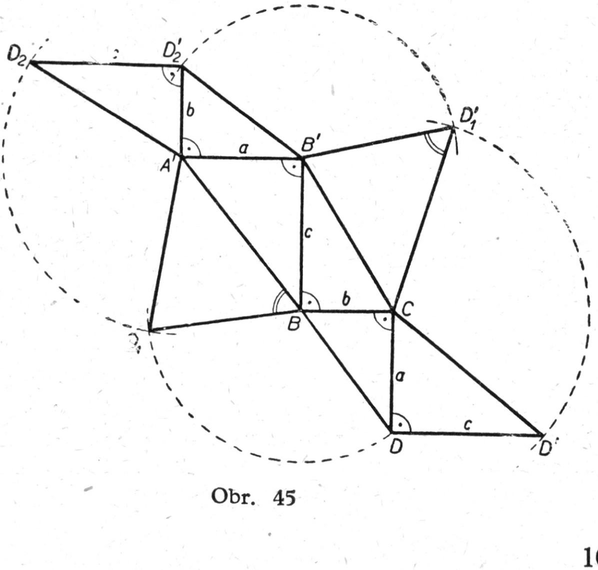
$$abc - \frac{1}{3}abc = \frac{2}{3}abc \, .$$

Výsledek: Objem zbylého tělesa je $\frac{2}{3}abc$.

b) Síť zbylého tělesa je v obr. 45.



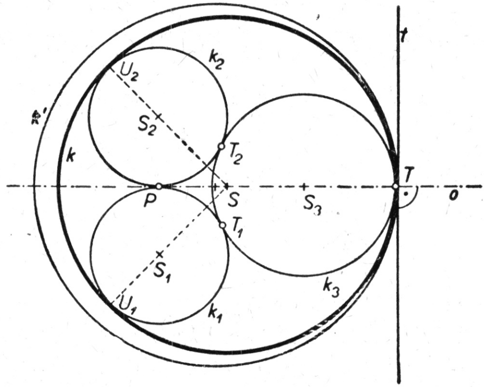
Obr. 44



Obr. 45

4. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1, 4\,\text{cm})$, $k_2 \equiv (S_2, 4\,\text{cm})$, $k_3 \equiv (S_3,\ r)$, z nichž každá se dotýká vně obou zbývajících kružnic.

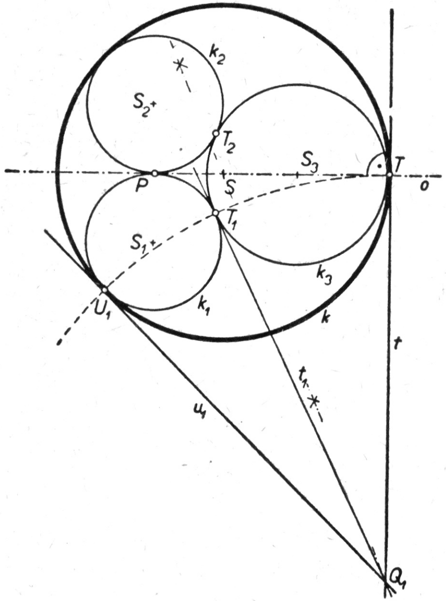
Sestrojte všechny kružnice, které mají s každou z daných kružnic vnitřní dotyk. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k poloměru r.



Obr. 46

Řešení (obr. 46). a) Označme P bod dotyku kružnic k_1, k_2, o jejich společnou tečnu. Protože pro střed S_3 kružnice k_3 platí $S_1S_3 = S_2S_3 = r + 4$, leží bod S_3 na přímce o. Budiž $k \equiv (S;\ x)$ hledaná kružnice; pro její střed platí $S_1S = S_2S = x - 4$ (kružnice k_1, k_2 se totiž dotýkají zevnitř kružnice k). Oba středy S_3, S leží tedy na přímce o a na ní leží i bod dotyku T kružnic k, k_3; je to ten z průsečíků přímky o a kružnice k_3, který má větší vzdálenost od bodu P. Tečna t kružnice k_3 v bodě T je společnou tečnou kružnic k, k_3.

b) Názor napovídá, že existuje-li řešení úlohy, je jen jediné; to snadno dokážeme. Nechť jsou k, k' dvě různá řešení (viz obr. 46) a nechť kružnice k má menší poloměr



Obr. 47

než k'. Kružnice k, k' se dotýkají obě v bodě T kružnice k_3 i navzájem; leží tedy kružnice k (až na bod T) uvnitř k'. Protože obě kružnice k_1, k_2 leží (až na dotykové body U_1, U_2, které nesplynou s T) uvnitř k, leží celé uvnitř k'

a tedy žádná z nich se nemůže dotýkat kružnice k'. Kružnice k' není proto řešením úlohy.

c) Nyní sestrojíme řešení úlohy (obr. 47). V bodě dotyku T_1 kružnic k_1, k_3 vedeme jejich společnou tečnu t_1 a najdeme její průsečík Q_1 s tečnou t. Bod Q_1 vždy vznikne, protože bod T_1 neleží na přímce o, a není tudíž $t_1 \parallel t$. Z bodu Q_1 vedeme zbývající tečnu u_1 ke kružnici k_1 a označíme U_1 její bod dotyku.

Nyní sestrojíme kružnici k, která se dotýká v bodě T přímky t a prochází bodem U_1. Kružnice k se dotýká zřejmě kružnice k_3 v bodě T. Mimo bod T existuje na kružnici k jediný bod, jehož vzdálenost od bodu Q_1 je rovna Q_1T; je to bod dotyku druhé tečny vedené z Q_1 ke kružnici k. Tento bod je však U_1; přímka $Q_1U_1 \equiv u_1$ je tedy tečnou kružnice k, tj. kružnice k_1, k se dotýkají v bodě U_1. Protože útvar složený z kružnic k, k_1, k_2, k_3 je souměrný podle přímky o, dotýká se k také kružnice k_2. Je tedy kružnice k řešením úlohy.

d) Úloha má řešení právě tehdy, je-li úhel TQ_1U_1, obsahující bod S_1, dutý. To nastane právě tehdy, je-li vzdálenost přímky t od bodu P menší než 4 neboli platí-li

$$PT > 4\,.$$

5. Výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

rozložte na súčiniteľov a potom určite všetky trojice čísel x, y, z, pre ktoré $V = 0$.

Riešenie. Platí postupne

$$\left.\begin{aligned} V = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \\ + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + \\ + z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Stadiaľ vypočítame

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}V &= -xy(x-y) + z(x^2-y^2) - z^2(x-y) = \\ &= (x-y)\,[-xy + (xz+yz) - z^2] = \\ &= (x-y)\,[y(z-x) - z(z-x)] = \\ &= (x-y)(y-z)(z-x)\,.\end{aligned}$$

Je teda

$$V = 3(x-y)(y-z)(z-x)\,,$$

čo po vynásobení súhlasí s výrazom V [viď (1)].

$V = 0$ práve vtedy, keď platí aspoň jedna z rovností:

$$x - y = 0\,, \quad y - z = 0\,, \quad z - x = 0$$

čiže

$$x = y \quad \text{alebo} \quad y = z \quad \text{alebo} \quad z = x\,.$$

Výsledok: $V = 0$ práve vtedy, keď sú hoci dve z čísel x, y, z sebe rovné.

6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami velikostí $a = BC$, $b = AC$. Označme D bod, ve kterém se přímky AB dotýká kružnice trojúhelníku ABC vepsaná.

a) Vypočtěte pomocí čísel a, b velikost poloměru kružnice danému trojúhelníku ABC vepsané.

b) Dokažte, že obsah trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku o rozměrech DA, DB.

Řešení (viz obr. 48). O délkách tečen vedených ke kružnici $k \equiv (S, r)$, vepsané danému trojúhelníku ABC, platí (přitom x je délka tečen vedených z bodu C ke k a zároveň poloměr vepsané kružnice):

$$AD = b - x = AC - x\,, \tag{1}$$
$$BD = a - x = BC - x\,. \tag{2}$$

a) Přitom o délce c přepony AB platí

$$c = BD + AD,$$

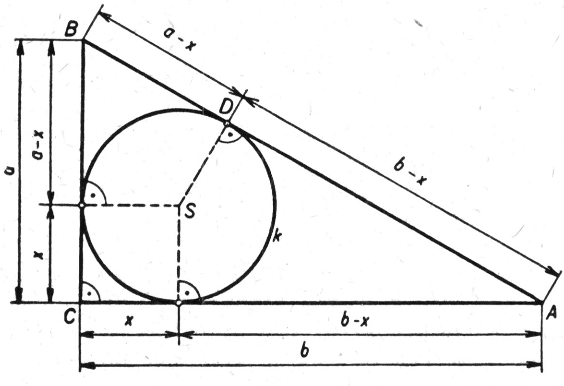
neboli

$$c = a - x + b - x;$$

odtud vypočteme číslo x:

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}), \qquad (3)$$

což jsme měli vypočítat.



Obr. 48

b) Ze vztahů (1), (2) dostaneme

$$AD = b - x = b - \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}(-a + b + c), \qquad (3)$$
$$BD = a - x = a - \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}(a - b + c); \qquad (4)$$

vedle toho podle věty Pythagorovy platí

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (5)$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} AD\,.\,BD &= \tfrac{1}{4}[c - (a - b)]\,[c + (a - b)] = \\ &= \tfrac{1}{4}[c^2 - (a - b)^2] = \\ &= \tfrac{1}{4}[a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)] = \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 2ab = \tfrac{1}{2}ab\,, \end{aligned}$$

což je skutečně obsah daného trojúhelníku.

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Při omezování odběru elektrického proudu v době špiček se 35 závodů zavázalo k snížení spotřeby. Celkem byly tři skupiny těchto závodů: V první skupině dosáhl každý závod snížení na 50 % svého pravidelného odběru, ve druhé skupině snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$ a ve třetí skupině o $\frac{1}{4}$ pravidelného odběru.

Tím se dosáhlo úspory 40 % celkové pravidelné spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než ve druhé. Kolik závodů bylo v každé skupině, jestliže každý z těchto 35 závodů měl původně stejnou pravidelnou spotřebu proudu?

Řešení. Označme $m \neq 0$ (v kWh) množství elektrického proudu, odbírané pravidelně každým z uvedených 35 závodů v době špičky. Dále označme $2x$, x, y počet závodů v jednotlivých skupinách, takže platí

$$3x + y = 35\,. \tag{1}$$

Spotřeba závodů v době špičky pak v jednotlivých skupinách je:

$$m \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2x = mx\,; \quad \tfrac{2}{3}mx\,; \quad \tfrac{3}{4}my\,.$$

Celková spotřeba v době špičky je $\frac{3}{5}m(2x + x + y) = \frac{3}{5}m(3x + y)$. Přitom podle textu platí

$$mx + \tfrac{2}{3}mx + \tfrac{3}{4}my = \tfrac{3}{5}m(3x + y)\,.$$

Po znásobení obou stran této rovnice číslem $\frac{60}{m}$ dostáváme postupně

$$60x + 40x + 45y = 36(3x + y),$$
$$9y = 8x,$$
$$y = \tfrac{8}{9}x. \qquad (2)$$

Po dosazení výsledku (2) do (1) dostáváme postupně

$$3x + \tfrac{8}{9}x = 35,$$
$$x = 9;$$

odtud a ze (2) obdržíme

$$y = 8.$$

Odpověď. V první skupině bylo 18, ve druhé 9 a ve třetí 8 závodů.

Zkouška. V době špičky závody jednotlivých skupin spotřebovaly:

$$m \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 18 = 9m; \quad \tfrac{2}{3}m . 9 = 6m; \quad \tfrac{3}{4}m . 8 = 6m,$$

takže celková spotřeba v době špičky podle toho byla $(9 + 6 + 6)m = 21m$. Na druhé straně podle textu úlohy celková spotřeba byla $\frac{3}{5}m . (18 + 9 + 8) = 21m$, což souhlasí.

2. V rovině je dána úsečka AM a uvnitř této úsečky bod V.

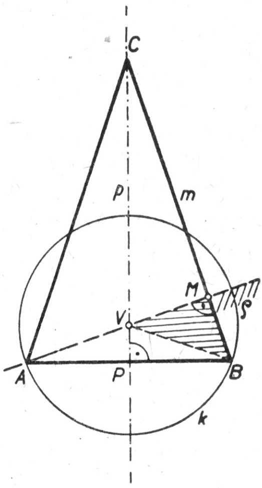
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby úsečka AM byla jeho výškou a bod V průsečíkem výšek. Stanovte podmínku řešitelnosti.

Narýsujte, je-li $AM = 82$ mm, $AV = 45$ mm.

Řešení (obr. 49). *Rozbor.* Označme M, N, P paty výšek vedených body A, B, C v hledaném trojúhelníku. Přímka $CP \equiv p$ je osou souměrnosti tohoto trojúhelníku, a proto je $VB = VA$. V pravoúhlém trojúhelníku VBM (je $\sphericalangle M = 90°$) tedy známe odvěsnu VM a přeponu VB. Odtud *konstrukce*:

Označme ϱ jednu z polorovin vyťatých přímkou AM a v ní nad úsečkou VM jako odvěsnou sestrojíme pravoúhlý trojúhelník VBM, kde $\sphericalangle M = 90°$ a $VB = VA$. Bod C je průsečík přímek m, p, kde $m \equiv MB$, p je osa úsečky AB. Tím je sestrojen hledaný trojúhelník ABC, který splňuje požadavky úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce je VAB rovnoramenný trojúhelník o základně AB a o ose p, která prochází bodem V. Bod C podle konstrukce leží na ose p úsečky AB a na přímce m, kde $m \not\equiv p$, a proto trojúhelník ABC existuje a je rovnoramenný. Podle konstrukce je $AM \perp BC$, $CP \perp AB$, takže bod V je v trojúhelníku ABC průsečíkem výšek. Tím je důkaz proveden.



Obr. 49

Diskuse. Řešitelnost úlohy zřejmě závisí na možnosti sestrojení pravoúhlého trojúhelníku VBM s přeponou VB, která je v pravoúhlém trojúhelníku největší stranou, takže nutně musí být $VB > VM$ neboli $VA > VM$. Jestliže tento vztah platí, dovedeme trojúhelník VBM sestrojit, neboť pak je přímka m sečnou kružnice $k \equiv (V; VA)$. V pravoúhlém trojúhelníku ABM (kde $\sphericalangle M = 90°$) je úhel $\sphericalangle B$ ostrý, a proto je $\sphericalangle VPB + \sphericalangle PBM < 180°$, takže podle Euklidova axiómu se přímky p, m protínají v bodě C.

Při umluvené volbě poloroviny ϱ dostaneme jediný trojúhelník ABC; jeho obraz v souměrnosti o ose AM je druhé řešení. Tyto trojúhelníky splynou, jestliže je AM osa úsečky BC neboli je-li ABC rovnostranný trojúhelník; to zřejmě nastane právě tehdy, je-li $AV = 2.VM$.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné ôsmimi, ktorých ciferný súčet v desiatkovej sústave je sedem a súčin ich číslic je šesť.

Riešenie. Hľadané číslo je deliteľné ôsmimi, a preto je nutne párne. Na konci môže mať len cifru 2 alebo 6 (pri cifrách 0, 4, 8 by bol súčin cifier iný ako 6). Vytvárajme súčiny hľadaných cifier tak, aby boli rovné číslu 6 a aby ich súčet bol 7 (buď je jedna cifra 6; ak nie, je nutne jedna cifra 2):

Prípad [1]: Platí $6 = 6 . 1$; prípad [2]: Platí $6 = 2 . 3 . 1 . 1$.

Iné prípady nie sú možné. Zostavujme z cifier, ktoré sme tu dostali, príslušné čísla:

Prípad [1]. Číslo 16 vyhovuje požiadavkám úlohy; číslo 61 nie.

Prípad [2]. Máme zostaviť všetky štvorciferné čísla z cifier 1, 1, 2, 3, pričom na mieste jednotiek musí byť cifra 2 a čísla majú byť deliteľné ôsmimi. Stačí teda uvažovať o tých posledných trojčísliach, ktoré končia dvojkou a sú deliteľné ôsmimi.

Nech na mieste desaťtisíciek je cifra:

a) 3; potom máme jediné posledné trojčíslie: 112. Hľadané číslo je 3112 a vyhovuje požiadavkám úlohy:

je deliteľné ôsmimi a platí:

$$3 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 2 = 6, \quad 3 + 1 + 1 + 2 = 7 \,.$$

b) 1; potom máme tieto posledné trojčíslia: 132, 312. Z nich vyhovuje 312 a číslo 1312 vyhovuje požiadavkám úlohy, pretože je deliteľné ôsmimi a platí $1 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2 = 6$, $1 + 3 + 1 + 2 = 7$.

Výsledok: Požiadavkám úlohy vyhovujú práve tri čísla, a to: 16; 1312; 3112.

4. V rovine sú dané dve kružnice $k_1 \equiv (S_1;\ 25\ \mathrm{mm})$, $k_2 \equiv (S_2;\ 25\ \mathrm{mm})$; pričom vzdialenosť $S_1S_2 = 120\ \mathrm{mm}$. Narysujte všetky kružnice, ktoré majú s každou z daných kružníc k_1, k_2 vonkajší dotyk a zároveň sa dotýkajú priamky S_1S_2. Vypočítajte polomery zostrojených kružníc.

Riešenie (obr. 50). Nech je $k \equiv (S;\ r)$ hľadaná kružnica. Podľa podmienok úlohy je $S_1S = S_2S = r + 25$; preto bod S leží na osi m úsečky S_1S_2. Os m prechádza stredom M úsečky S_1S_2. Tento bod je bodom dotyku kružnice k a priamky S_1S_2, pretože je $S_1S_2 \perp SM$. Vypočítajme polomer r kružnice k. Z pravouhlého trojuholníka S_1MS vyplýva podľa Pythagorovej vety $S_1S^2 = S_1M^2 + SM^2$ čiže

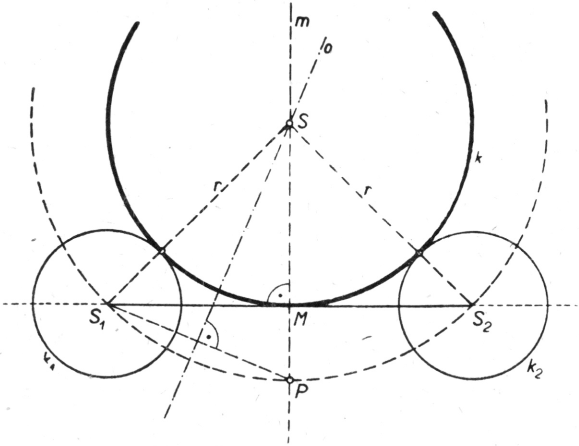
$$(r + 25)^2 = 60^2 + r^2 \,, \tag{1}$$

pretože $S_1M = 60$ (mm). Z rovnice (1) vypočítame

$$r = 59{,}5\ (\mathrm{mm}) \,.$$

Konštrukciu prevedieme na základe výpočtu: Na priamke m zostrojíme oba body S, S', pre ktoré platí $MS = MS' = r$. Kružnice $k \equiv (S;\ r)$, $k' \equiv (S';\ r)$ sú riešením úlohy, pretože sa dotýkajú priamky S_1S_2 (v bode M) a každej z kružníc k_1, k_2. Z (1) totiž vyplýva, že $S_1S = S_2S = S_1S' = S_2S' = r + 25$.

Bod S (S') môžeme skonštruovať bez výpočtu pomocou pravouhlého trojuholníka S_1MS. Je to pravouhlý trojuholník, v ktorom je známa dĺžka odvesny $S_1M = 60$ mm a rozdiel dĺžky prepony a druhej odvesny, ktorý je 25 mm. Ak zostrojíme na polpriamke SM úsečku



Obr. 50

SP tak, aby platilo $SP = SS_1$, vznikne rovnoramenný trojuholník S_1PS so základňou S_1P. Vrchol S je priesečníkom priamky m a osi o úsečky S_1P. Os o vieme zostrojiť, pretože vieme zostrojiť bod P. Je to bod polpriamky opačnej k MS, pre ktorý platí $MP = 25$ mm.