IV. Čtvrtá Mezinárodní matematická olympiáda

1. O PRŮBĚHU SOUTĚŽE

Mezinárodní matematická soutěž pro žáky středních všeobecně vzdělávacích a středních odborných škol vznikla v r. 1959 na popud rumunských matematiků. Již tehdy čs. zástupce v mezinárodní komisi I. mezinárodní matematické olympiády měl zmocnění ministerstva školství a kultury i Jednoty čs. matematiků a fyziků k předběžnému příslibu, že by tato každoročně proponovaná soutěž mohla být uspořádána v r. 1962 v Československu, a to v rámci oslav 100. výročí založení Jednoty čs. matematiků a fyziků. A tak skutečně v první polovině července 1962 byla v ČSSR uspořádána *Jednotou čs. matematiků a fyziků* (JČMF) a pod záštitou *ministerstva školství a kultury* (MŠK) *IV. mezinárodní matematická olympiáda* (MMO).

Soutěž připravoval od podzimu 1961 *organizační komitét* MMO (zkratkou OK). Jeho předsedou byl akademik *Josef Novák*, místopředsedy *doc. Jan Vyšín* a *Rud. Zelinka* a sekretářem *dr. Miroslav Fiedler DrSc.*; dalšími členy byli *Miloš Jelínek*, ústřední inspektor MŠK jako zástupce ministerstva školství a kultury a *František Vejsada* jako zástupce pobočky JČMF v Českých Budějovicích a jako jednatel *Organizačního výboru* MMO, který se pro potřeby soutěže ustavil v Českých Budějovicích.

Vedle organizačního zajištění a řízení celé akce připravil OK návrh statutu, kterým by se mezinárodní soutěž měla řídit. Ve statutu jsou shrnuty dosavadní zkušenosti ze soutěží. Statut vstoupí v platnost po projednání v ministerstvech školství (osvěty) jednotlivých zúčastněných zemí; IV. MMO se v podstatě jeho zásadami již řídila.

Vlastním řídícím orgánem soutěže byla *mezinárodní komise* (MK), ve které byla každá zúčastněná země zastoupena svým vedoucím delegace; komisi předsedal akademik *Josef Novák.*

Každá zúčastněná země vyslala na soutěž osmičlenné družstvo (viz přílohu 2), dále vedoucího delegace a pedagogického průvodce družstva; oba tito delegáti byli povinni opravovat žákovská řešení a pracovat v organizačních intencích mezinárodní komise. IV. mezinárodní matematické olympiády se účastnilo 7 zemí socialistického tábora, jak je patrno z příloh 1 a 2 (jmenný seznam delegátů a jmenný seznam zúčastněných žáků).

Vedoucí delegací se sjeli do Prahy ještě před příjezdem žáků, aby ve dnech 5.—6. července 1962 zajistili nejzávažnější záležitosti soutěže, především volbu soutěžních úloh. Podle předběžné dohody zaslala do května 1962 každá zúčastněná země organizačnímu komitétu několik návrhů soutěžních úloh, včetně náčrtu řešení. Trojčlenná komise při OK (oba místopředsedové a sekretář) provedla analýzu došlých úloh, navrhla úpravy některých z došlých úloh, připravila výběr z těchto úloh a dala je přeložit do světových jazyků a rozmnožit tak, aby je mohli členové MK předem řádně prostudovat; tato práce byla přísně důvěrná, takže jen 4 čs. pracovníci byli seznámeni před zahájením soutěže s texty úloh. Tuto práci velmi uvážlivě řídil doc. Jan Vyšín. Překladatelské a další práce obětavě konali pracovníci Matematického ústavu ČSAV. Z takto připraveného materiálu byl po dvoudenním detailním jednání proveden výběr úloh pro dvě soutěžní písemné práce žáků (texty úloh a jejich řešení jsou na str. 138); pro 1. den soutěže byly zvoleny 3 úlohy na 4 hodiny čistého času, na 2. den 4 úlohy na 5 hodin čistého času. Překlad textů úloh do mateřských jazyků zúčastněných zemí provedli vedoucí delegací v rámci prací MK; texty byly rozmnoženy, takže každý žák obdržel od předsedy MK vlastní text v zapečetěné obálce na počátku každého soutěžního dne.

Dále byly v MK stanoveny některé zásady pro posuzování žákovských prací, i když krátký čas, který byl k dispozici, nedovolil stanovit přesnější požadavky; ty pak byly určovány až v průběhu provádění oprav a hodnocení soutěžních prací. Jmenovitě však MK stanovila předem maximální počet bodů za dokonalá řešení jednotlivých úloh.

Žákovské delegace se svými pedagogickými průvodci se sjely do Prahy v sobotu 7. července 1962 a po krátké prohlídce Prahy odjely příštího dne v neděli odpoledne do Českých Budějovic, kde byly slavnostně uvítány budějovickými pracovníky v čele s *Josefem Vodákem*, předsedou školské a kulturní komise *Jihočeského krajského národního výboru* (JK NV); při uvítání byli přítomni zvláště zástupci KSČ, ČSM a pobočky JČMF v Českých Budějovicích. Po dobu pobytu hostí v Jihočeském kraji pečoval o ně tamější *organizační výbor* MMO. Tento výbor se ustavil již v lednu 1962 na základě dohody organizačního komitétu MMO s pracovníky Jihočeského kraje, reprezentovanými odborem školství a kultury JKNV, stranickými pracovníky, ČSM a pobočkou JČMF v Českých Budějovicích. Žáci byli ubytováni v pěkném žákovském internátě v Holečkově ulici a delegáti v hotelích.

V pondělí 9. července 1962 navštívili hosté tužkárnu Koh-i-noor, n. p., v Českých Budějovicích a odpoledne si prohlédli památky zámku Hluboká i umělecké poklady tamější Alšovy galerie, aby se tu předem seznámili s prostředím, ve kterém budou po oba soutěžní dny žáci pracovat.

V úterý 10. července 1962 předseda MK akademik Josef Novák v sále Alšovy galerie na Hluboké slavnostně zahájil soutěž; první písemná práce trvala od 8.30 hod. do 12.30 hod. Ve středu 11. července 1962 byla na témže místě v době od 8 do 13 hodin provedena druhá písemná práce.

Jinak všechen volný čas žáků byl věnován rekreaci a prohlídkám historických, kulturních a přírodních památek Jihočeského kraje, exkurzím do závodů atd.

Po celou dobu od 10. do 14. července 1962 zajišťovala mezinárodní komise se štábem spolupracovníků opravy a hodnocení žákovských řešení. Žákovo řešení o p r a v o v a l i o b a p ř í s l u š n í d e l e g á t i za spolupráce s č s. k o o r d i n á t o r e m; byl to vysokoškolský pracovník v matematice a jeho úkolem bylo zajistit jednotné oceňování vždy jedné ze sedmi zadaných úloh. Pro hodnocení řešení čs. žáků určila mezinárodní komise pro každou úlohu oba členy jedné z delegací jako kontrolory správného hodnocení; byli to právě ti dva členové, jejichž země úlohu zaslala (pro čs. úlohu pak to byli oba delegáti NDR). Instituce koordinátorů měla zajistit mezinárodní úroveň hodnocení žákovských řešení a celkem úspěšně splnila své poslání, i když v konečné fázi měla MK řadu svízelných jednání; přitom zvláště sekretář OK jako vedoucí skupiny koordinátorů vždy delikátně, ale důsledně se snažil plně zajistit mezinárodní úroveň hodnocení, což se celkem podařilo provést.

V úterý 14. července 1962 odpoledne přijal členy MK předseda JKNV s. *Jindřich Kouba*. Pohovořil s nimi o jejich úkolech, seznámil je s některými otázkami, které se snaží v kraji řešit, a přál jim hodně pracovních úspěchů; vyslovil potěšení, že se jim v jižních Čechách skutečně líbí.

Ve středu 15. července 1962 uspořádal ministr školství a kultury *dr. František Kahuda* v Českých Budějovicích pro účastníky soutěže slavnostní večeři, na níž k nim promluvil. Ocenil důležitost matematiky pro rozvoj socialistické společnosti a vyslovil radost z tohoto setkání mládeže zemí socialistického tábora, přičemž zvláště uvítal, že může mezi zahraničními hosty uvítat také naše milé sovětské přátele.

Po provedeném hodnocení žákovských řešení rozhodla dne 13. července 1962 MK o udělení cen nejúspěšnějším řešitelům. Na návrh předsedy MK udělila 4 první, 12 druhých a 15 třetích cen, a to vzhledem k počtu bodů, které žák získal celkem svými řešeními sedmi soutěžních úloh; celkem bylo uděleno 31 cen.

Absolutním vítězem soutěže se stal *Josif Bernštejn*, žák střední školy v Moskvě, který jediný získal maximální počet bodů (46). Mezi těmi, kteří získali jednu ze čtyř prvních cen, je tentokráte i dívka *Lidija Gončarovová*, žákyně střední školy v Moskvě. I když jde o soutěž jednotlivců, musíme konstatovat, že největšího úspěchu dosáhli žáci maďarští a těsně za nimi žáci sovětští, avšak i žáci rumunští mají pěkné umístění. Z našich žáků byl nejlepším *Peter Hatala*, žák střední všeobecně vzdělávací školy v Bratislavě; získal druhou cenu. Přehled o výsledcích jednotlivých žáků a zvláště pak našich je v přílohách č. 3a,b, 4 a 5. Není pochyb o tom, že se pracovníci školští i vědečtí budou nad těmito výsledky zamýšlet a že budou hledány cesty, jak nynější naši situaci v této otázce uvést na příznivější stupeň. To bude v nejbližších letech úkolem organizátorů nejen našeho školství, ale i naší celostátní Matematické olympiády.

Slavnostní rozdílení cen provedl předseda MK akademik Josef Novák opět v sále Alšovy galerie na Hluboké v sobotu 14. července 1962 o 10. hod. dopoledne. Přítomni byli náměstek ministra školství a kultury *Václav Hendrych* se svými spolupracovníky, straničtí a školští pracovníci Jihočeského kraje, předseda školské a kulturní komise JKNV Josef Vodák a řada veřejných a kulturních pracovníků. Slavnostní projev předsedy MK tlumočili vedoucí delegací do svých mateřských jazyků. Jménem ministerstva školství a kultury promluvil Václav Hendrych, náměstek ministra školství a kultury. Za odměněné žáky, kteří vedle uměleckých a památkových předmětů dostali diplom podepsaný ministrem školství a kultury a předsedou OK, poděkovala sovětská žákyně Lidija Gončarovová. Jménem zahraničních delegátů pořadatelům soutěže vřele poděkoval jeden z jejích zakladatelů, *prof. Gh. D. Simionescu* z Bukurešti. Slavnostní oběd na ukončení olympiády se konal v internátu v Holečkově ulici v Českých Budějovicích za přítomnosti náměstka Václava Hendrycha a pracovníků Jihočeského kraje.

Účastníci soutěže a mezinárodní hosté mimo jiné navštívili Krumlov, Lipno, Rožmberk a jiná pamětihodná místa jižních Čech.

V neděli 15. července 1962 dopoledne se celá výprava vrátila autobusy přes Tábor do Prahy a večer zhlédla v Národním divadle Smetanovu Libuši.

V pondělí 16. července si zahraniční hosté prohlédli Prahu a odpoledne a večer se rozjížděli do svých vlastí; zdržela se jedině rumunská delegace, která odcestovala ve čtvrtek 19. července.

Organizátoři věnovali hladkému průběhu všech akcí velkou pozornost. To platí zvláště o pracovnících OV v Českých Budějovicích, který se svých úkolů zhostil k mimořádné spokojenosti všech zahraničních hostí, kteří odjížděli s radostnou náladou; tu dlužno ocenit obětavou činnost jak předsedy OV Josefa Vodáka, tak jednatele OV i pobočky JČMF v Českých Budějovicích; za zmínku stojí i nevšední ochota, s níž nám všichni zaměstnanci různých podniků Jihočeského kraje vycházeli vstříc. Rovněž ústředí JČMF a pracovníci Matematického ústavu ČSAV vykonali pro zdar akce vše, co mohli. Ministerstvo školství a kultury se zasloužilo o realizaci a soustavné sledování průběhu přípravných prací i vlastní soutěže a o to, že se akci podařilo tak úspěšně dovést až do konce. Nejlepším vyjádřením této péče je přijetí členů MK ministrem školství a kultury a jeho návštěva v Českých Budějovicích v průběhu soutěže, jakož i účast náměstka ministra školství a kultury na slavnostním rozdílení cen. Tato fakta všichni zahraniční delegáti také vysoce ocenili a netajili se tím, že je budou ve svých vlastech s patřičnou váhou konstatovat.

Pokud jde o politický dosah mezi mládeží, lze říci, že se všichni žáci záhy velmi sblížili, a to tím spíše, že jim budějovičtí svazáci připravili na tamějších závodech družbu, která vyvrcholila ve veselicích, konaných v sobotu 14. července odpoledne a večer na několika místech.

Po stránce odborné nám umožnila IV. MMO porovnávat výkony nejlepších žáků jednotlivých zemí i konstatovat, že se dnes všude těmto žákům a výuce matematice věnuje nejen pozornost, ale přímo mimořádná a trvalá péče. Rovněž jsme měli příležitost porovnávat zaměření vyučování matematice v těchto zemích a důraz, který se klade na určité partie nebo na některé matematické metody. Rok od roku lze pozorovat i ve vlastní soutěži zvyšování nároků, zvláště pokud jde o přesnost a úplnost řešení; je zajímavé, že názory, které se při hodnocení žákovských řešení při I. MMO v této otázce jen těžko probojovávaly, jsou dnes již samozřejmým požadavkem.

Pro informaci čtenářů uvádíme i texty a stručná řešení všech sedmi soutěžních úloh (viz článek 2 na str. 138).

Příloha č. 1

Jmenný seznam vedoucích delegátů

Země (zkratka)	Vedoucí delegace (členové mezinárodní komise)	Pedagogický vedoucí
Bulharsko (BLR)	Alipi Mateev, profesor university v Sofii	Stojan Budurov, inspektor ministerstva osvěty BLR, Sofie
ČSSR	Rudolf Zelinka, pracovník MÚ ČSAV, Praha	Jan Vyšín, docent matematicko-fyzikální fakulty KU, Praha
Maďarsko (MLR)	Endré Hódi, vědecký pracovník Ústavu optiky, Budapešť	Ferenc Késedi, ústřední inspektor ministerstva kultury MLR, Budapešť
Německá demokratická republika (NDR)	Doc. Herbert Titze, vědecký pracovník pedagogického ústavu, Berlín	Johannes Gronitz, učitel střední školy, Karl-Marx-Stadt
Polsko (PLR)	Dr. Edward Otto, profesor polytechniky, Varšava	Andrzej Mąkowski, odborný asistent, Varšava
Rumunsko (RLR)	Gheorghe D. Simionescu, profesor polytechniky v Bukurešti	Petrisor Mihailescu, inspektor matematiky ministerstva osvěty RLR, Bukurešť
SSSR	Jelena Aleksandrovna Morozovová CSc., docentka Lomonosovovy státní university v Moskvě	Ivan Semjonovič Petrjakov, učitel střední školy v Moskvě

Příloha č. 2

Jmenný seznam zúčastněných žáků

Bulharská lidově demokratická republika

Танушев Мирослав Светлославов; Бонев Боян Маринов; Кацаров Божидар Димитров; Велелев Никола Иванов; Иванова Миленка Младенова; Минасян Гарабел Ардашец; Касабов Димитьр Захариев; Димитров Димо Белчев.

Československá socialistická republika

Daneš Josef, Dolní Počernice; Fučík Svatopluk, Hradec Králové; Hatala Peter, Bratislava; Ježek Jaroslav, Praha; Mešina Marián, Nováky; Novotný Jan, Olomouc; Veselý Karel, Praha; Voda Pavol, Bratislava.

Maďarská lidově demokratická republika

Kéry Gerzson, Sopron; Kóta Jószef, Tatabánya; Gálfi László, Budapest; Siminovits Miklós, Budapest; Benczur András, Budapest; Gyárfás András, Budapest; Sebestyén Zoltán, Gelldömölk; Szidarovszky Ferenc, Budapest.

Německá demokratická republika

Görke Katharina, Berlin; Bölling Reinhard, Berlin; Goize Friedrich, Klettwitz/Niederlausitz; Görgens Walter, Schönebeck/Elbe; Lehman Wolfgang, Leipzig; Michel Claus, Bautzen; Tetsch Karl-Heinz, Sonneberg; Weller Stefan, Berlin.

Polská lidově demokratická republika

Gabryjanczyk Paweł, Lódź; Hensz Ewa, Lódź; Kuczma Marcin, Katowice; Rempała Jan, Warszawa; Sztachelski Jęrzy, Warszawa; Urbański Paweł, Lublin; Wołejszo Jacek, Toruň; Żytkow Jan, Warszawa.

Rumunská lidově demokratická republika

Badescu Lucian; Buimovici Alexandru; Eckstein Gheorghe; Giergea Viorel; Hantila Florea; Lustig Gheorghe; Puha Radu; Zsido László.

Svaz sovětských socialistických republik

Бернштейн Иосиф, Москва; Гончарова Лидия, Москва; Куранов Геннадий, Москва; Маргулис Григорий, Москва; Муштари Дания, Казань; Панкрашьев Евгений, Н. Тура, Свердловская область; Потепун Алексей, Ленинигград; Перменев Александр, Москва.

Příloha č. 3a

Celkový počet bodů, které získali žáci jednotlivých zemí

BLR	ČSSR	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR
33	30	45	14	20	32	46
37	19	39	21	30	38	42
32	35	39	18	39	39	31
26	33	32	18	32	28	36
25	20	32	21	11	32	30
13	23	23	21	19	35	22
15	29	41	34	33	30	37
15	23	38	6	28	23	19

Příloha č. 3b

Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků

Úloha číslo	1	2	3	4	5	6	7	Žák získal celkem bodů
V řádku je klasifikace jednotlivého žáka	6	6	8	4	0	0	6	30
	6	5	3	1	4	0	0	19
	6	6	8	4	7	4	0	35
	6	6	8	5	4	4	0	33
	1	4	6	4	5	0	0	20
	6	4	7	2	4	0	0	23
	2	6	7	5	6	2	1	29
	5	5	8	5	0	0	0	23
Maximální počet bodů za řešení	6	6	8	5	7	6	8	46

Příloha č. 4

Počet cen, které získali žáci jednotlivých zemí

Cena	BLR	ČSSR	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR	Celkem
první	0	0	2	0	0	0	2	4
druhá	1	1	3	1	1	3	2	12
třetí	2	3	2	0	3	3	2	15
Počet cen družstva	3	4	7	1	4	6	6	31

Příloha č. 5

Jmenný seznam žáků odměněných cenami na IV. Mezinárodní matematické olympiádě

I. cena

Josif Bernštejn (SSSR); *Kéry Gerzson* (MLR); *Lidija Gončarovová* (SSSR); *Sebestyén Zoltán* (MLR).

II. cena

Köta József (MLR); *Gálfi Lászlo* (MLR); *Marcin Kuczma* (PLR); *Gheorghe Eckstein* (RLR); *Szidarovszky Ferenc* (MLR); *Alexandru Buimovici* (RLR); *Bojan Marinov Bonev* (BLR); *Alexej Potěpun* (SSSR); *Grigorij Margulis* (SSSR); *Peter Hatala* (ČSSR); *Gheorghe Lustig* (RLR); *Karl-Heinz-Tetsch* (NDR).

III. cena

Miroslav Světloslavov Tanušev (BLR); *Jaroslav Ježek* (ČSSR); *Jacek Wołejszo* (PLR); *Božidar Dimitrov Kacarov* (BLR); *Benczur András* (MLR); *Siminovits Miklós* (MLR); *Jan Rampała* (PLR); *Lucian Badescu* (RLR); *Florea Hantila* (RLR); *Gennadij Kuranov* (SSSR); *Josef Daneš* (ČSSR); *Eva Hensz* (PLR); *Radu Puha* (RLR); *Danijar Muštari* (SSSR); *Karel Veselý* (ČSSR).

2. *SOUTĚŽNÍ ÚLOHY IV. MMO*

Určete (Texty a nástin řešení.)

1. Vypočtěte nejmenší přirozené číslo n, které má tyto vlastnosti:

číslicí

(1) jeho vyjádření v desítkové soustavě končí cifrou 6;

číslicí

(2) jestliže před číslo n napíšeme cifru 6 a poslední číslici cifru 6 škrtneme, dostaneme čtyřnásobek hledaného čísla n.

(Úlohu navrhlo Polsko a správné řešení bylo hodnoceno 6 body.)

Řešení. Položme $n = 10x + 6$ (x celé nezáporné); označme y počet cifer čísla n. Pak platí

$$4(10x + 6) = 6 \,.\, 10^{y-1} + x\,,$$

tj. po úpravě

$$13x = 2 \,.\, (10^{y-1} - 4)\,. \qquad (1)$$

Je tedy třeba vyšetřovat celá čísla 6, 96, 996, 9 996, . . . , která mají tvar $10^{y-1} - 4$, a najít mezi nimi první číslo dělitelné třinácti. Zkusmo určíme, že je to číslo

$$99\,996 = 13 \,.\, 7\,692\,.$$

Je tedy $y - 1 = 5$, $y = 6$; ze vztahu (1) dostaneme $x = 15\,384$. Hledané číslo je $n = 153\,846$; zkouška skutečně dává $4.153\,846 = 615\,384$.

Jiné řešení. Končí-li hledané číslo n cifrou 6, končí číslo $k = 4n$ cifrou 4 (je $6 \,.\, 4 = 24$), končí tedy n dvojčíslím 46. Avšak $46 \,.\, 4 = 184$, proto končí k dvojčíslím 84 a číslo n trojčíslím 846; takto postupujme dále, přehled posledních cifer dekadického zápisu zachycuje tabulka:

Číslo $k = 4n$	Číslo n
.... 4	 6
.........84	46
........384	846
...... 5 384	...... 3 846
..... 15 384	..... 53 846
.... 615 384	.... 153 846

Dokažme, že číslo 153 846 splňuje požadavky úlohy: Především platí 153 846 . 4 = 615 384. Z tabulky a z naznačeného postupu je patrné, že číslo 153 846 je nejmenší číslo toho druhu. Tím je řešení provedeno.

2. Určete všecka reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \tfrac{1}{2} . \qquad (2)$$

(Úlohu navrhlo Maďarsko; její správné řešení bylo hodnoceno 6 body.)

Řešení. Budiž x kořenem nerovnosti (2); nerovnost upravíme na tvar

$$\sqrt{3 - x} > \tfrac{1}{2} + \sqrt{x + 1} .$$

Protože na obou stranách této nerovnosti jsou kladná čísla, dostaneme po umocnění a úpravě

$$\tfrac{7}{4} - 2x > \sqrt{x + 1} .$$

Nové umocnění a úprava dá nerovnost

$$64x^2 - 128x + 33 > 0 . \qquad (3)$$

Rovnice $64x^2 - 128x + 33 = 0$ má reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{31}}{8};$$

proto můžeme rozložit trojčlen na levé straně (3) v součin kořenových činitelů a dostaneme

$$(8x - 8 + \sqrt{31})(8x - 8 - \sqrt{31}) > 0\,. \tag{4}$$

Součin obou činitelů je kladný jedině v tom případě, je-li menší z obou činitelů, tj. $8x - 8 - \sqrt{31}$, kladný nebo je-li větší z obou činitelů, tj. $8x - 8 + \sqrt{31}$, záporný.

Odtud dostaneme dvě skupiny možných řešení:

$$x < 1 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}\,, \tag{5}$$

$$x > 1 + \tfrac{1}{8}\sqrt{31}\,. \tag{6}$$

Nyní provedeme *zkoušku.* a) Z (5) dostaneme

$$3 - x > 2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{31} > 0, \quad x + 1 < 2 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}\,. \tag{7}$$

Aby odmocnina $\sqrt{x+1}$ měla smysl, musí být $x + 1 \geqq 0$; proto musí platit $x \geqq -1$, tedy celkem musí být

$$-1 \leqq x < 1 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}\,. \tag{8}$$

Umocněním na druhou si ověříme snadno rovnost

$$\sqrt{2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{31}} - \sqrt{2 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}} = \tfrac{1}{2}; \tag{9}$$

vzhledem k (7), (9) je tedy

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \tfrac{1}{2}\,,$$

což je nerovnost (2).

Z (6) dostaneme

$$\sqrt{3 - x} > \sqrt{2 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}}\,,$$

$$\sqrt{x + 1} + \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2} + \sqrt{2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{31}}\,.$$

Protože je zřejmě

$$\sqrt{2 - \tfrac{1}{8}\sqrt{31}} < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2 + \tfrac{7}{8}\sqrt{31}}\,,$$

nedává vztah (6) žádné řešení úlohy.

Všecka řešení nerovnosti (2) jsou tedy dána nerovnostmi (8).

Poznámka. Uvedené řešení neužívá metody ekvivalence, zkouška se vykonala bez obrácení postupu z rozboru. Většina účastníků však řešila nerovnost (2) pomocí ekvivalentních úprav.

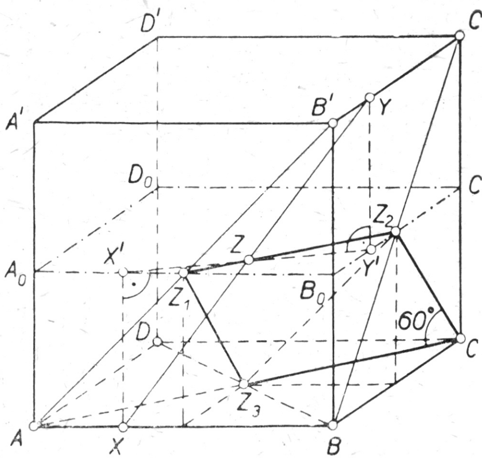
3. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (protější stěny jsou $ABCD$, $A'B'C'D'$ a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Proměnný bod X probíhá stálou rychlostí obvod čtverce $ABCD$ (v tomto směru ~~napsaném pořádku~~), proměnný bod Y probíhá touž te rychlostí obvod čtverce $B'C'CB$ (v tomto směru ~~napsaném pořádku~~). Oba body X, Y se počnou pohybovat ~~v témž okamžiku, přičemž~~ současně z výchozí ch polohy ~~jsou~~ A a B'. toutéž

~~Vyšetřte geometrické místo~~ Určete množinu všech středů Z úseček XY a sestrojte náčrtek.

(Úlohu navrhlo Československo a její správné řešení bylo hodnoceno 8 body.)

Řešení (obr. 37). Označme σ rovinu souměrnosti hrany AA'; rovina σ je rovnoběžná s rovinou ABC a protne danou krychli ve čtverci $A_0B_0C_0D_0$ (A_0 je střed úsečky AA' atd.). Označme po řadě Z_1, Z_2 středy úseček A_0B_0, B_0C_0.

a) Když bod X probíhá úsečku AB, probíhá bod Y touž rychlostí úsečku $B'C'$; střed Z úsečky XY leží podle známé věty v rovině σ. Bod Z je tedy také středem úsečky $X'Y'$, která je pravoúhlým průmětem



Obr. 37

úsečky XY do roviny σ. Geometrickým místem středů Z je v tomto případě zřejmě úsečka Z_1Z_2.

b) Když bod X probíhá úsečku BC a bod Y úsečku $C'C$, jsou přímky XY rovnoběžné s úhlopříčkou BC'. Geometrickým místem bodů Z je v tomto případě zřejmě úsečka Z_2C.

c) Když bod X probíhá úsečku CD a současně bod Y úsečku CB, jsou přímky XY rovnoběžné s úhlopříčkou BD a body Z vyplní úsečku CZ_3, kde Z_3 je střed čtverce $ABCD$ (úhlopříčky BD).

d) Když se konečně bod X vrací do bodu A po úsečce DA a současně bod Y se vrací do bodu B' po úsečce $B'B$, je situace obdobná jako v případě a): bod Z pak probíhá úsečku Z_3Z_1, jak snadno dokážeme vhodnou výměnou hran krychle.

Patrně je $Z_1Z_2 = Z_2C = CZ_3$ (každá z těchto úseček je shodná s polovinou stěnové úhlopříčky dané krychle); mimo to je $Z_1Z_2 \parallel CZ_3$. Čtyřúhelník $Z_1Z_2CZ_3$ je tedy rovnoběžník, a to kosočtverec.

Tím je úloha rozřešena.

4. Řešte rovnici

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1\,. \qquad (10)$$

(Úloha byla navržena Rumunskem; správné řešení bylo hodnoceno 5 body.)

Řešení. Užijeme známých vzorců

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

a dosadíme do prvních dvou členů rovnice (10); po úpravě vyjde

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0\,. \qquad (11)$$

Na první dva členy rovnice (11) užijeme vzorce pro součet $\cos\alpha + \cos\beta$; dostaneme

$$2\cos 3x \cos x + 2\cos^2 3x = 0,$$

neboli

$$2\cos 3x\,(\cos x + \cos 3x) = 0\,.$$

Na dvojčlen v závorkách užijeme znovu vzorce pro $\cos\alpha + \cos\beta$; vyjde

$$4\cos x \cos 2x \cos 3x = 0\,. \qquad (12)$$

Všecka řešení rovnice (12) jsou

$$x = 90^\circ + k\,.\,360^\circ, \qquad 2x = 90^\circ + k\,.\,360^\circ,$$
$$3x = 90^\circ + k\,.\,360^\circ,$$

neboli

$$x = 90^\circ + k \,.\, 360^\circ, \qquad x = 45^\circ + k \,.\, 180^\circ,$$
$$x = 30^\circ + k \,.\, 120^\circ,$$

kde k je libovolné celé číslo.

Zkouškou snadno zjistíme, že tyto tři soustavy čísel skutečně vyhovují rovnici (10).

5. Je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, C. Sestrojte (pravítkem a kružítkem) na kružnici k další bod D tak, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici.

(Úlohu navrhlo Bulharsko; nejvyšší možný počet bodů za správné řešení byl 7.)

Řešení. Pro hledaný tečnový čtyřúhelník platí podle známé věty

$$AD + BC = AB + CD \,. \tag{13}$$

Zvolme označení bodů A, B, C tak, aby platilo $BC \geqq AB$ (je-li $BC < AB$, vyměníme označení bodů A, C). Vztah (13) upravíme na tvar

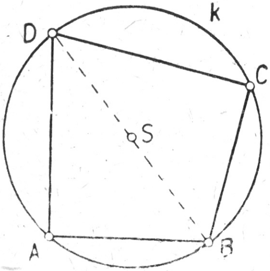
$$BC - AB = CD - AD \,. \tag{14}$$

Hledaný vrchol D náleží tedy jednak kružnici k, jednak hyperbole, která má ohniska A, C a jejíž hlavní osa má délku $BC - AB$. Jde tedy o sestrojení společných bodů obou křivek euklidovskou konstrukcí.

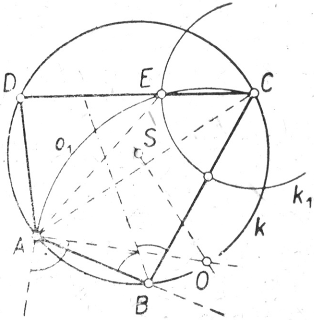
a) Je-li $AB = BC$, musí podle (14) být $AD = CD$; bod D leží na ose úsečky AC, která protne kružnici k mimo bod B v jediném dalším bodě. Vznikne konvexní čtyřúhelník $ABCD$, který je deltoidem a jemuž lze tedy skutečně vepsat kružnici (obr. 38).

b) Je-li $AB < BC$, tu podle (14) je $AD < CD$ (obr. 39). Na úsečce CD sestrojíme v tomto případě pomocný bod E, pro který platí $DE = AD$. Pro vzdálenost CE platí podle (14)

$$CE = CD - DE = CD - AD = BC - AB. \quad (15)$$



Obr. 38



Obr. 39

Mimo to je

$$\sphericalangle AEC = 180° - \sphericalangle AED =$$
$$= 180° - (90° - \tfrac{1}{2} \sphericalangle ADC) = 90° + \tfrac{1}{2} \sphericalangle ADC =$$
$$= 90° + \tfrac{1}{2}(180° - \sphericalangle ABC) = 180° - \tfrac{1}{2} \sphericalangle ABC. \quad (16)$$

Je totiž $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$, neboť čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Pro pomocný bod E máme tedy dvě geometrická místa bodů: předně podle (15) je to kružnice $k_1 \equiv (C; BC - AB)$, za druhé podle (16) je to oblouk o_1, který leží v polorovině opačné k ACB a z jehož bodů je vidět úsečku AC pod úhlem velikosti $180° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$.

Když oblouk o_1 protne kružnici k_1 v bodě E, který leží uvnitř kružnice k, pak polopřímka CE protne oblouk $\widehat{AC}$ kružnice k, který neobsahuje bod B, v bodech $D \neq A, C$. Pro čtyřúhelník $ABCD$ platí podle jeho sestrojení $\sphericalangle DEA = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$ a dále $\sphericalangle EDA = 180° - \sphericalangle ABC$, tudíž $\sphericalangle DAE = 180° - \sphericalangle DEA - \sphericalangle EDA = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Trojúhelník AED je tedy rovnoramenný se základnou AE, tj. platí $AD = DE$. Je tedy

$$CD - AD = DE + CE - AD = CE = BC - AB\,,$$

neboli pro čtyřúhelník $ABCD$ platí vztahy (14), (13); protože je tento čtyřúhelník konvexní, je tečnový. Tím je provedena zkouška řešení.

Diskuse. Protože platí $180° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC > 180° - \sphericalangle ABC$, leží oblouk o_1 uvnitř kružnice k (s výjimkou bodů A, C). Průsečík E křivek k_1, o_1 vznikne jen v případě, je-li $CE < AC$, tj. když platí

$$BC - AB < AC\,.$$

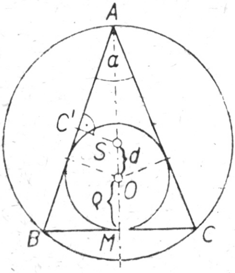
Tato nerovnost (trojúhelníková) je splněna pro každou trojici bodů A, B, C kružnice k; úloha má tedy vždy jediné řešení.

6. Je dán rovnoramenný trojúhelník. Kružnice jemu opsaná má poloměr r, kružnice vepsaná má poloměr ϱ. Dokažte, že vzdálenost d středů obou těchto kružnic je

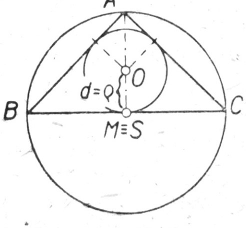
$$d = \sqrt{r\,(r - 2\varrho)}\,.$$

(Úloha byla navržena Německou demokratickou republikou a správné řešení hodnoceno 6 body.)

Řešení. Budiž ABC daný rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. Střed O kružnice jemu vepsané leží v polorovině BCA a jeho vzdálenost od přímky BC je ϱ (obr. 40 až 42).



Obr. 40



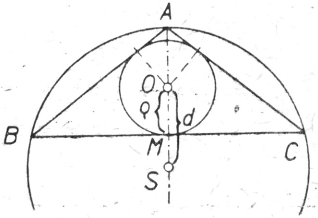
Obr. 41

Je-li úhel $\alpha = \sphericalangle BAC$ ostrý, leží střed S opsané kružnice také v polorovině BCA a jeho vzdálenost od přímky BC je $r \cos\alpha$; je tedy v tomto případě

$$d = SO = |\varrho - r\cos\alpha|\,.$$

Je-li $\alpha = 90°$, splyne bod S se středem M úsečky BC a platí

$$d = SO = \varrho = |\varrho - r\cos\alpha|\,.$$



Obr. 42

Je-li úhel α tupý, leží střed S v polorovině opačné k BCA; jeho vzdálenost od přímky BC je $-r\cos\alpha$ a platí opět

$$d = SO = \varrho - r\cos\alpha = |\varrho - r\cos\alpha|\,.$$

Ve všech případech je tedy

$$d = |\varrho - r\cos\alpha| . \tag{17}$$

Zbývá vypočítat $\cos\alpha$ pomocí r, ϱ; označme M střed úsečky BC a vyjádřeme délku úsečky BM dvojím způsobem. Předně platí

$$BM = r\sin\alpha , \tag{18}$$

ať je úhel α ostrý, pravý nebo tupý. Za druhé vyplývá z trojúhelníka BMO vztah

$$BM = \varrho \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right), \tag{19}$$

neboť $\sphericalangle BOM = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= 45^\circ + \frac{\alpha}{4} .$$

Porovnáním (18) a (19) dostaneme

$$r\sin\alpha = \varrho\,\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}} = \varrho\,\frac{\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}} .$$

Rozšíříme-li poslední zlomek číslem $\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}$, vyjde

$$r\sin\alpha = \varrho\,\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} ,$$

neboli

$$2r \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \varrho \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Nahradíme-li $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ a dělíme-li kladným číslem $1 + \sin \frac{\alpha}{2}$, dostaneme

$$2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2r \sin \frac{\alpha}{2} + \varrho = 0. \qquad (20)$$

Ježto $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, je podle (20)

$$\varrho - r \cos\alpha = \varrho - r + 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \varrho - r + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - \varrho = r \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

a dále podle (17), (20)

$$d^2 = r^2 \left(4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} + 1\right) =$$

$$= r^2 \left(4 \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{2\varrho}{r} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} + 1\right) = r^2 - 2r\varrho,$$

což jsme měli dokázat.

7. Je dán čtyřstěn $SABC$. K tomuto čtyřstěnu existuje pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek SA, SB, SC, AB, BC, CA. Tento čtyřstěn je pravidelný. Obráceně ke každému pravidel-

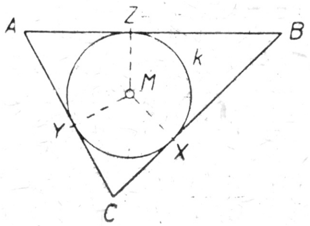
viz papír

nému čtyřstěnu lze sestrojit pět takových kulových ploch.

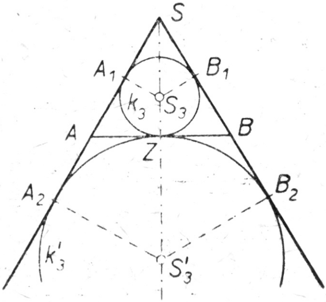
Dokažte obě tyto věty a sestrojte náčrtek.

(Úloha byla navržena z SSSR a správné řešení bylo hodnoceno nejvýše 8 body.)

Řešení. I. Předně je třeba zjistit, v kterých bodech se dotýkají kulové plochy prodloužených hran čtyřstěnu $SABC$. Každá z 5 kulových ploch protne rovinu ABC v kružnici, která je trojúhelníku ABC buď vepsaná, nebo vně vepsaná.



Obr. 43



Obr. 44

a) Předpokládejme nejprve, že kulová plocha K protne rovinu ABC v kružnici k vepsané trojúhelníku ABC (obr. 43). Táž plocha K protne rovinu SAB buď v kružnici k_3 vepsané trojúhelníku SAB, nebo v kružnici k_3', která je trojúhelníku SAB vně vepsaná ke straně AB (obr. 44). V prvním případě protne plocha K rovinu SBC v kružnici, která se dotýká dvou stran trojúhelníka SBC ve vnitřních bodech (totiž stran SB, BC); proto je tato kružnice vepsána trojúhelníku SBC a dotýká se i strany SC v jejím vnitřním bodě. Kulová plocha K se tedy dotýká všech hran čtyřstěnu ve vnitřních bodech; označíme ji K_0 a nazveme ji *vepsanou* kulovou plochou.

V druhém případě plocha K protíná rovinu SBC v kružnici, která se dotýká strany BC ve vnitřním bodě a prodloužené strany SB ve vnějším bodě; tato kružnice je tedy vně vepsána trojúhelníku SBC ke straně BC a dotýká se prodloužené strany SC v jejím vnějším bodě. Tuto kulovou plochu označíme K_S a nazveme ji *vně vepsanou*.

b) Protíná-li kulová plocha K rovinu ABC v kružnici k_1 vně vepsané trojúhelníku ABC např. ke straně BC, protíná SAB v kružnici vně vepsané trojúhelníku SAB, a to zřejmě ke straně SB. Rovinu SBC protíná plocha K v kružnici, která se dotýká stran SB a BC ve vnitřních bodech; je to tedy kružnice vepsaná trojúhelníku SBC. Tím je tento případ převeden na případ a), přičemž jsou vrcholy S, A, B, C nahrazeny postupně vrcholy A, B, C, S.

II. Kulová plocha K_0 se dotýká přímek SA, SB, SC po řadě v bodech A_1, B_1, C_1, kulová plocha K_S se dotýká týchž přímek po řadě v bodech A_2, B_2, C_2. Obě plochy protínají rovinu ABC v téže kružnici k vepsané trojúhelníku ABC; proto se obě dotýkají přímek (hran) AB, BC, CA po řadě v týchž bodech Z, X, Y. Podle vlastností tečen kulové plochy platí

$$AA_1 = AA_2 = AZ = AY; \; BB_1 = BB_2 = BZ = BX; \; CC_1 = CC_2 = CX = CY \,. \tag{21}$$

Mimoto platí (opět podle vlastností tečen kulové plochy)

$$SA_1 = SB_1 = SC_1; \quad SA_2 = SB_2 = SC_2\,. \qquad (22)$$

Protože je $SA_2 = SA_1 + AA_1 + AA_2$ a obdobně $SB_2 = SB_1 + BB_1 + BB_2$, $SC_2 = SC_1 + CC_1 + + CC_2$, platí podle (21), (22)

$$AA_1 = BB_1 = CC_1; \qquad (23)$$

protože je $SA = SA_1 + AA_1$, $SB = SB_1 + BB_1$, $SC = SC_1 + CC_1$, je podle (22), (23)

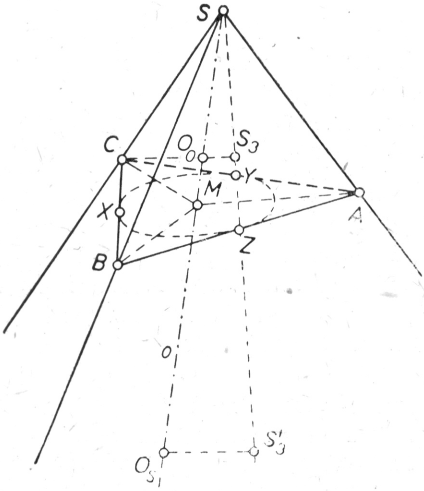
$$SA = SB = SC\,. \qquad (24)$$

Výměnou vrcholů zjistíme z (24), že všecky tři hrany vycházející z kteréhokoli vrcholu daného čtyřstěnu mají touž délku; proto mají všechny hrany čtyřstěnu $SABC$ touž délku a čtyřstěn je pravidelný.

Tím je dokázána první věta z úlohy 7.

III. Budiž $SABC$ pravidelný čtyřstěn, M střed kružnice opsané i vepsané trojúhelníku ABC (obr. 45). Otočení o 120° kolem přímky $o \equiv SM$ převedou rovinu SAB v roviny SBC a SAC. Označme opět k_3 kružnici vepsanou trojúhelníku SAB, S_3 její střed, dále označme k_3' kružnici vně vepsanou trojúhelníku SAB, a to ke straně AB; její střed označme S_3'. Protože rovina SAB obsahuje přímku AB kolmou k CM i SM, je $SAB \perp SCM$; proto kolmice vztyčená v bodě S_3' k rovině SAB protne přímku o v jistém bodě O_0. Obdobně protne kolmice vztyčená k rovině SAB v bodě S_3' přímku o v jistém bodě O_S. Kulová plocha K_0, která má střed v bodě O_0 a obsahuje kružnice k_3, obsahuje i kružnice vepsané trojúhelníkům

SBC, *SCA*, jak zjistíme otáčením roviny *SAB* kolem osy *o* o 120°. Kulová plocha K_0 je tedy jednou z uvedených pěti kulových ploch.



Obr. 45

Obdobně kulová plocha K_S se středem O_S, která obsahuje kružnici k_3', protíná roviny *SBC*, *SCA* v kružnicích vně vepsaných trojúhelníkům *SBC*, *SCA*, jak zjistíme opět otočením kolem osy *o*. Plocha K_S je tedy druhá z uvedených pěti ploch. Nahradíme-li bod *S* postupně body *A*, *B*, *C*, dostaneme další tři plochy.

Tím bude dokázána i druhá věta z úlohy 7.

Závěrečná poznámka k řešení úloh IV. MMO. Předcházející řešení soutěžních úloh nejsou všude provedena do podrobností; také neukazují všude, jak se přijde na metodu řešení úlohy; o tom nechť uvažuje čtenář sám.

Připomínáme jen, že účastníci MMO, zejména z některých států, řešili mnohé soutěžní úlohy několika způsoby, že si úlohy sami zobecňovali (např. úlohu 6 řešili pro libovolný trojúhelník) a řešili tyto zobecněné úlohy.

Tyto zkušenosti jsou pro nás velmi poučné. Ukázalo se totiž, že účastníci z některých států byli více vedeni k řešení tzv. otevřených problémů, které jsou první etapou v samostatné tvořivé práci v matematice. V tomto směru máme ještě mnoho co dohánět v našich domácích soutěžích. Proto jsme zařadili ve XII. ročníku čs. celostátní matematické olympiády zatím pokusně mimo rámec soutěže několik takových problémů; chceme věnovat takovýmto úlohám více pozornosti i v seminářích pro účastníky MO a v soustředěních olympioniků. Je třeba vynaložit všecko úsilí, aby se zvýšila úroveň žáků nadaných pro matematiku a aby si naši žáci vybojovali v příštích mezinárodních matematických olympiádách lepší umístění, než tomu bylo dosud; tento i politicky závažný úkol jistě pomohou řešit učitelé matematiky všech typů našich škol.