11. ročník matematické olympiády

III. Texty a řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 11. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1961-1962. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1963. pp. 26–124.

III. Texty a řešení úloh ze soutěže

1. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A*

1. Jsou dány dvě kolmé roviny ϱ_1, ϱ_2 o průsečnici O_1O_2. V rovině ϱ_1 je sestrojena polokružnice k_1 se středem O_1 a krajním bodem O_2. V rovině ϱ_2 je sestrojena polokružnice k_2 se středem O_2 a krajním bodem O_1.

Po polokružnici k_1 se pohybuje bod X_1 a po polokružnici k_2 se pohybuje bod X_2 tak, že pro vzdálenosti platí vztah $O_2X_1 = O_1X_2$.

Vyšetřte geometrické místo středů úseček X_1X_2.

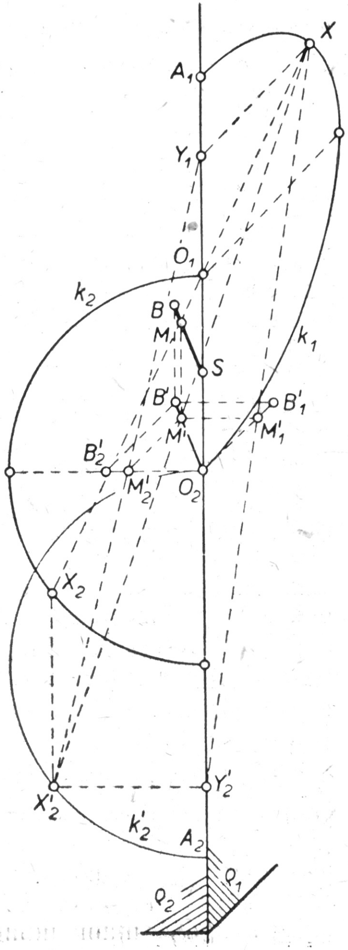
Řešení. Je zcela přirozené zkoumat nejdříve jednodušší případ vzájemné polohy polokružnic k_1, k_2, než je uvedeno v textu úlohy, a z něho pak odvodit řešení dané úlohy. Takový jednodušší případ je situace, kdy obě polokružnice náleží téže kulové ploše nebo kdy mají společný krajní bod. Vyšetřujme např. druhou situaci (viz obr. 1).

a) Posuneme polokružnici k_2 o vektor $\overrightarrow{O_1O_2}$ do polohy k_2'; polokružnice k_1, k_2' mají pak společný krajní bod O_2, jejich zbývající krajní body označíme A_1, A_2 podle obr. 1. Při posunutí $\overrightarrow{O_1O_2}$ přejde proměnný bod X_2 polokružnice k_2 v bod X_2' polokružnice k_2' a podle podmínky z textu úlohy je $O_2X_1 = O_2X_2'$. Označíme dále Y_1, Y_2' pravoúhlé průměty bodů X_1, X_2' na přímku O_1O_2; názor ukazuje, že je $O_2Y_1 = O_2Y_2'$.

Skutečně z věty Ssu plyne vztah $\triangle O_2X_1Y_1 \cong \triangle O_2X_2'Y_2'$ a z něho $O_2Y_1 = O_2Y_2'$.

Označme M' střed úsečky X_1X_2' (která může být též nulová, je-li $X_1 \equiv X_2' \equiv O_2$), M_1' jeho pravoúhlý průmět do roviny ϱ_1, M_2' jeho pravoúhlý průmět do roviny ϱ_2. Bod M_1' je zřejmě středem úsečky X_1Y_2'; je tedy (pokud je $M_1' \not\equiv O_2$) $M_1'O_2 \perp O_1O_2$, $M_1'O_2 = \frac{1}{2} X_1Y_1$. Všechny body M_1' náleží tedy jisté úsečce O_2B_1', která leží v rovině ϱ_1, je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r$ ($r = O_1O_2$ je společný poloměr obou polokružnic k_1, k_2). Snadno se dokáže, že každý bod úsečky O_2B_1' je jedním z bodů M_1'.

Geometrické místo bodů M_2' je obdobně jistá úsečka O_2B_2', která



Obr. 1

leží v rovině ϱ_2, je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r$. Geometrické místo bodů M' je jistá úsečka O_2B', která leží v jedné rovině souměrnosti rovin ϱ_1, ϱ_2, je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

b) Nyní snadno odvodíme geometrické místo středů M úseček X_1X_2. V trojúhelníku $X_1X_2X_2'$ (který vznikne vždy, když je $X_1 \neq A_1, O_2$) je úsečka MM' střední příčkou. Proto platí pro posunutí (vektory) $\overrightarrow{M'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{X_2'X_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_2O_1}$. Geometrickým místem bodů M je tedy úsečka SB, v niž převede posunutí $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_2O_1}$ úsečku O_2B'; úsečka SB leží v jedné rovině souměrnosti rovin ϱ_1, ϱ_2, obsahuje střed S úsečky O_1O_2, je kolmá k přímce O_1O_2 a má délku $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$.

2. Dané sú veľkosti a, b súsedných strán rovnobežníka a veľkosť ω uhla zovretého jeho uhlopriečkami. Zostrojte tento rovnobežník a zistite podmienky riešiteľnosti vzhľadom na dané čísla a, b, ω.

Řešení (obr. 2). Buď $ABCD$ hledaný rovnoběžník o středu S, ve kterém je $a \geqq b$, kde $a = AB$, $b = AD$.

[1] Pro $a = b$ je $AS \perp BS$, tj. nutně $\omega = 90°$ (jinak úloha nemá řešení); rovnoběžník je tedy v tomto případě rovnostranný (tj. kosočtverec anebo čtverec). Úloha pak má nekonečně mnoho řešení; při konstrukci zvolíme polohu úsečky AB délky a, nad ní jako průměrem sestrojíme Thaletovu polokružnici k, na ní zvolíme bod S (je $B \neq S \neq A$) a určíme po řadě obrazy C, D bodů A, B v souměrnosti o středu S. Potom $ABCD$ je hledaný rovnoběžník.

[2] V dalším nechť je $a > b$. Trojúhelníky SAD, SAB se shodují ve dvou dvojicích stran (SA je jim

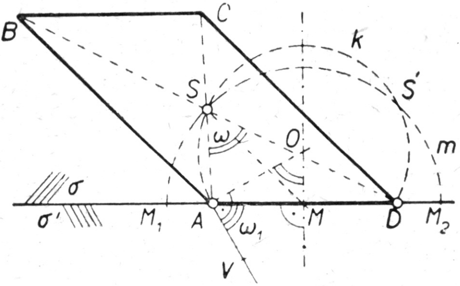
společná, dále je $SD = SB$); protože však $AD < AB$ (neboli $b < a$), vyplývá z toho $\sphericalangle ASD < \sphericalangle ASB$ (známá poučka). Z této nerovnosti vyplývá $\sphericalangle ASD < 180° - \sphericalangle ASD$, neboli

$$\sphericalangle ASD < 90°.$$

Zvolme označení tak, aby bylo $\sphericalangle ASD = \omega$; pak je

$$\sphericalangle ASD = \omega < 90°. \qquad (1)$$

Sestrojíme tedy trojúhelník ASD z těchto prvků: z délky strany $AD = b$, z délky těžnice $MS = \frac{1}{2}a$, kde M je střed strany AD, a z velikosti ostrého úhlu $\sphericalangle ASD = \omega$; potom snadno trojúhelník ASD doplníme s jediným výsledkem na rovnoběžník $ABCD$, čímž bude úloha rozřešena.



Obr. 2

Konstrukce (obr. 2). Zvolme polohu úsečky AD velikosti b; dále zvolme polorovinu σ vyťatou přímkou AD (v ní bude ležet střed S hledaného rovnoběžníka $ABCD$ a tím i tento rovnoběžník). Provedeme v σ známou konstrukci geometrického místa bodů, z nichž je úsečku AD vidět pod daným úhlem ω. Je to větší oblouk $k \equiv \widehat{AD}$ kružnice o středu O, přičemž bod O leží uvnitř poloroviny σ, neboť je $\omega < 90°$ (pomocný úhel $\sphericalangle\, DAV \equiv \omega_1 = \omega$ leží v σ' a je $AV \perp AO$); přitom MO je osa úsečky AD a M střed této úsečky. Body A, D k tomuto geometrickému místu nepatří.

Dále sestrojíme v polorovině σ oblouk $m \equiv \widehat{M_1M_2}$ kružnice o středu M a o poloměru $\frac{1}{2}a$ (neboť má být $2 \,.\, MS = AB$).

Je-li S společný bod oblouků k, m (nutně leží uvnitř poloroviny σ), je úloha rozřešena.

Důkaz správnosti konstrukce vyplývá z předchozího.

Diskuse. Úloha je řešitelná právě tehdy, když polokružnice m má s obloukem k společný aspoň jeden bod ležící mimo přímku AD. Je-li $a > b$, nemají obě křivky žádný společný bod na přímce AD; v tomto případě stačí hledat podmínku, aby obě příslušné kružnice měly společný aspoň jeden bod. Nechť pro takový společný bod S platí $90° = \sphericalangle\, M_1SM_2 > > \sphericalangle\, ASD$; úhel $\sphericalangle\, ASD$ je tedy ostrý, tj. bod S náleží většímu oblouku nad tětivou AD a tím je oblouk k.

Středy O, M obou kružnic mají vzdálenost $OM = = \dfrac{b}{2} \operatorname{cotg} \omega$ (plyne z $\triangle AMO$) a jejich poloměry jsou $\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{b}{2 \sin \omega}$. Podmínka pro existenci aspoň jednoho společného bodu zní

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2 \sin \omega} \geqq \tfrac{1}{2} b \operatorname{cotg} \omega \geqq \left| \frac{a}{2} - \frac{b}{2 \sin \omega} \right|,$$

po úpravě

$$a\sin\omega + b \geqq b\cos\omega \geqq |\, a\sin\omega - b\,|\,.$$

Protože je $b \geqq b\cos\omega$, je levá nerovnost splněna vždy. Pravá nerovnost se dá nahradit dvěma nerovnostmi

$$\begin{aligned} b\cos\omega + b &\geqq a\sin\omega\,, \\ a\sin\omega &\geqq b - b\cos\omega \end{aligned}$$

neboli

$$2b\cos^2\frac{\omega}{2} \geqq 2a\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\,,$$

$$2a\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} \geqq 2b\sin^2\frac{\omega}{2}\,,$$

po úpravě

$$b\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \geqq a,\ a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \geqq b. \qquad (*)$$

Protože je $\frac{\omega}{2} \leqq \frac{R}{2}$, je $\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \geqq 1$, tj. $a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \geqq$ $\geqq a > b$; druhá nerovnost (*) je tedy splněna vždy a zbývá jen podmínka

$$b\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \geqq a\,.$$

Závěr. V případě $a = b$, $\omega \neq 90^\circ$ je úloha neřešitelná; v případě $a = b$, $\omega = 90^\circ$ má nekonečně mnoho řešení. V případě $a > b$, $\omega \geqq 90^\circ$ je úloha neřešitelná; v případě $a > b$, $\omega < 90^\circ$ má konečný počet řešení, a to jediné nebo dvě.

3. Je dána funkce

$$y = \frac{px}{x^2 + p^2 + 1}\,, \qquad (1)$$

kde p je reálný parametr. Dokažte, že tato funkce nabývá jen takových hodnot y, pro něž platí $|y| < \frac{1}{2}$. Zvolte parametr p tak, aby funkce měla největší hodnotu $\frac{1}{4}$; v tomto případě vyšetřte její průběh a načrtněte její graf.

Řešení. Pro všechna reálná x a p je $x^2 + p^2 + 1 > 0$, takže pro každé p ke zvolenému x obdržíme jisté reálné číslo y pomocí (1). Při dalším vyšetřování se omezíme na případ, že je $p \neq 0$. V případě $p = 0$ totiž je funkce $y = 0$, jejímž grafem je reálná osa x pravoúhlých souřadnic; druhá otázka pro tento případ nemá smysl.

Graf dané funkce (1) je souměrný podle počátku $O \equiv [0, 0]$ pravoúhlých souřadnic, jak ihned dokážeme: Nechť je bod $A = [x \geqq 0, y]$ bodem, který náleží grafu funkce (1); potom bod $A' = [x' = -x, y' = -y]$ je též bodem tohoto grafu, neboť k danému $x \geqq 0$ dostaneme z (1) hodnotu y, k danému $x' = -x$ dostaneme z (1) hodnotu $y' = \dfrac{-px}{x^2 + p^2 + 1} = -y$. Přitom body A, A' jsou souměrně sdružené podle bodu O.

Danou funkci (1) tedy stačí vyšetřovat jen pro $x \geqq 0$, kdy pro $p > 0$ je pak stále $y \geqq 0$, pro $p < 0$ je stále $y \leqq 0$; budeme tedy předpokládat, že je $x \geqq 0$.

[1] Nyní dokážeme, že je $|y| < \frac{1}{2}$. Důkaz: Máme dokázat, že platí

$$\left| \frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \right| < \frac{1}{2}$$

neboli

$$\frac{2\,|p|\,x}{x^2 + p^2 + 1} < 1\,,$$

kde $x^2 + p^2 + 1 > 0$. Tento vztah je proto ekvivalentní se vztahem

$$2\,|p|\,x < x^2 + p^2 + 1$$

neboli

$$0 < (x - |p|)^2 + 1\,.$$

Avšak na pravé straně této nerovnosti je součet nezáporného a kladného čísla, takže nerovnost platí pro všechna p a všechna x; obrácením postupu dojdeme k (1). Tím je důkaz proveden.

[2] Máme zvolit p tak, aby pro všechna x platilo $y \leqq \frac{1}{4}$ neboli

$$\frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \leqq \tfrac{1}{4}\,. \tag{2}$$

Protože je jmenovatel kladný, dostaneme ekvivalentními úpravami postupně

$$4px \leqq x^2 + p^2 + 1\,,$$
$$0 \leqq (x - 2p)^2 + 1 - 3p^2\,. \tag{3}$$

Tato nerovnost je splněna při libovolném x právě tehdy, jestliže platí $1 - 3p^2 \geqq 0$ neboli $|p| \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Přitom ve (3) nastane rovnost právě tehdy, je-li

$$x - 2p = 0,\quad 1 - 3p^2 = 0$$

neboli

$$p = \pm\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\quad x = \pm\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,$$

kde současně platí znaménka plus nebo minus.

Pro $p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ rovnice (1) zní $y = \frac{\pm \sqrt{3}x}{3x^2 + 4}$.
Vyšetřme jen průběh a graf první funkce. Graf funkce

$$y = \frac{-\sqrt{3}\,x}{3x^2 + 4}$$

dostaneme jako obraz grafu funkce

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4} \tag{4}$$

v souměrnosti podle osy x.

Nyní dokážeme, že pro

$$0 \leqq x \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{4'}$$

je funkce (4) rostoucí a že pro

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \tag{4''}$$

je funkce (4) klesající.

Důkaz. Označme y_1, y_2 hodnoty funkce (4), které příslusí po řadě k hodnotám x_1, x_2, pro něž platí

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{5}$$

Pak je

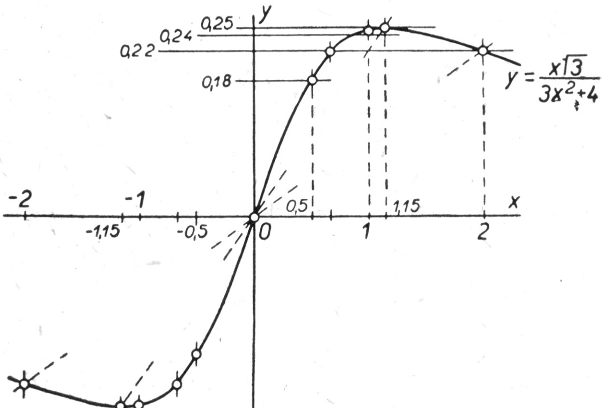
$$y_2 - y_1 = \frac{x_2\sqrt{3}}{3x_2^2 + 4} - \frac{x_1\sqrt{3}}{3x_1^2 + 4} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\sqrt{3}}{(3x_1^2 + 4)(3x_2^2 + 4)} \cdot (4 - 3x_1x_2)\,. \tag{6}$$

První činitel (zlomek) výrazu (6) je kladný. Z (5) plyne $x_1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2 \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$ a tedy $x_1x_2 < \frac{4}{3}$ neboli $4 - 3x_1x_2 > 0$; je tedy i druhý činitel výrazu (6) kladný a tím $y_2 - y_1 > 0$ neboli $y_2 > y_1$. Stejně se dokáže, že pro ta x, která splňují nerovnost (4″), je funkce (4) klesající. Tím je důkaz proveden. Graf funkce (4) sestrojíme užitím této tabulky:

x	0	0,5	1	$\frac{2}{3}$	2
y	0	$\frac{2\sqrt{3}}{19} \doteq 0{,}182$	$\frac{\sqrt{3}}{7} \doteq 0{,}247$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{\sqrt{3}}{8} \doteq 0{,}216$

Dále užijeme středové souměrnosti grafu vzhledem k bodu $O \equiv [0; 0]$; viz obr. 3.



Obr. 3

Výsledek. Existují právě dvě funkce:

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}x}{3x^2 + 4},$$

které splňují druhý požadavek úlohy. První z funkcí nabývá maxima $\frac{1}{4}$ pro $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, druhá pro $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; ostatní hodnoty těchto funkcí jsou menší než $\frac{1}{4}$.

Jiné myšlenky při řešení této úlohy užil jeden z žáků: Nerovnost $\frac{px}{x^2 + p^2 + 1} \leqq \frac{1}{4}$ upravil na tvar

$$x^2 - 4px + (p^2 + 1) \geqq 0 \tag{*}$$

a rozložil trojčlen na levé straně v součin kořenových činitelů:

$$[x - (2p + \sqrt{3p^2 - 1})]\,[x - (2p - \sqrt{3p^2 - 1})] \geqq 0\,. \tag{**}$$

Z nerovnosti (**) vyplývá, že buď oba činitelé jsou nezáporní, nebo oba nekladní. Pro každé x musí pak platit aspoň jeden ze vztahů

$$x \geqq 2p + \sqrt{3p^2 - 1}, \quad x \leqq 2p - \sqrt{3p^2 - 1}\,.$$

Pro $x = 2p$ plyne z prvního nebo druhého vztahu

$$\sqrt{3p^2 - 1} = 0 \text{ neboli } p = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Tento částečný výsledek je však nesprávně odvozen, neboť např. pro $p = \frac{1}{2}$ je splněna nerovnost (*) pro všechna x; platí totiž

$$x^2 - 2x + \tfrac{1}{4} + 1 = (x - 1)^2 + \tfrac{1}{4} > 0\,.$$

Čím je tato chyba způsobena? Řešitel neoprávněně předpokládal, že trojčlen na levé straně vztahu (*) lze rozložit v reálné kořenové činitele, jak ukazuje vztah (**); to však není pravda např. pro $p = \frac{1}{2}$, kdy je $3p^2 - 1 = -\frac{1}{4} < 0$. Proto také pro (2) nemohlo vyjít číslo $p = \frac{1}{2}$, ačkoli pro $p = \frac{1}{2}$ je také splněna nerovnost (*) pro všecka x.

4. Ak sú α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, potom platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq \tfrac{3}{4}; \tag{1}$$

dokážte.

Nájdite všetky trojuholníky, pre ktoré v predchádzajúcom vzťahu platí rovnosť.

Riešenie. O uvažovaných uhloch platí

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta),$$

a teda

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= -\cos(\alpha + \beta) = \\ &= -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Preto je ďalej

$$\begin{aligned}\cos^2\gamma = {} & \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \\ & - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Zo známeho vzorca vyplývajú vzťahy

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \ \sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta\,.$$

Po dosadení do (3) dostaneme

$$\begin{aligned}\cos^2\gamma = {} & 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \\ & - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned}& \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \\ & = 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Posledné dva členy pravej strany vzťahu (4) možno však upraviť takto:

$$2\cos^2\alpha \cos^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta =$$
$$= 2\cos\alpha \cos\beta (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) =$$
$$= 2\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= -2\cos\alpha \cos\beta \cos[2R - (\alpha + \beta)] =$$
$$= -2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Po dosadení tohto výsledku do vzťahu (4) dostávame

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma, \qquad (5)$$

čo platí pre každý trojuholník.

Pre tupouhlý alebo pravoúhlý trojuholník sú dve z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné a tretie je nekladné. Potom je však aj výraz $2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ číslo nekladné, a preto platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq 1\,. \qquad (5')$$

Uvažujme ďalej len o ostrouhlom trojuholníku. Označenie trojuholníka možno zvoliť tak, aby platilo

$$90° > \alpha \geqq \beta \geqq \gamma > 0°\,. \qquad (6)$$

V tomto prípade je každé z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné, ale menšie než jedna; špeciálne je

$$0 < \cos\gamma < 1\,. \qquad (6')$$

Všimnime si vzťahu

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta\,.$$

Pritom je $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$ [viď (2)], $90° > \alpha - \beta \geqq 0°$, a teda je $0 < \cos(\alpha - \beta) \leqq 1$ (kde rovnosť platí práve pre $\alpha = \beta$). Platí teda

$$2\cos\alpha \cos\beta \leqq 1 - \cos\gamma\,,$$

pričom rovnosť platí právé pre $\alpha = \beta$. Vynásobme obidve strany poslednej nerovnosti číslom $-\cos\gamma$, kde $-1 < -\cos\gamma < 0$ [podľa (6')]. Dostaneme

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geqq \cos^2\gamma - \cos\gamma\,.$$

Použitím tohto výsledku vo vzťahu (5) dostaneme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq 1 + \cos^2\gamma - \cos\gamma$$

čiže

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq (\cos\gamma - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\,. \qquad (7)$$

Pre ostrouhlý trojuholník je teda číslo $y = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ väčšie než $\frac{3}{4}$; iba vtedy, keď platí $\cos\gamma - \frac{1}{2} = 0$, je $y = \frac{3}{4}$. To však nastane jedine pre $\gamma = 60°$.

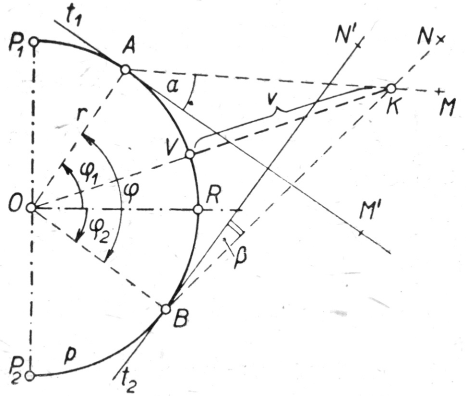
Ľahko sa zistí, že vzťah (5) pre $\gamma = 60°$ platí jedine pre $\alpha = \beta = \gamma$.

Tým je platnosť vzťahu (1) dokázaná. Rovnosť v ňom nastane jedine pre rovnostranný trojuholník.

5. Dvě místa A, B leží na témž zeměpisném poledníku p; místo A má severní zeměpisnou šířku φ_1 a místo B má jižní zeměpisnou šířku φ_2. Kosmická loď při přeletu nad poledníkem p byla z místa A pozorována na jižní straně ve výšce α stupňů nad obzorem; v témže okamžiku byla z místa B pozorována na severní straně ve výšce β stupňů nad obzorem. Jak daleko byla loď od povrchu země?

Řešení (obr. 4). Buďte P_1, P_2 severní a jižní pól, O střed země, $p \equiv \widehat{P_1P_2}$ uvažovaný zemský poledník míst A, B, t_1, t_2 po řadě jeho tečny v bodech A, B a $\varphi_1 \equiv \sphericalangle AOR$, $\varphi_2 \equiv \sphericalangle BOR$ zeměpisné šířky míst A, B, přičemž R je společný bod zemského rovníku a poledníku p; platí tedy pro dutý úhel $\sphericalangle AOB$ vztah

$$\varphi = \sphericalangle AOB = \varphi_1 + \varphi_2 \,. \qquad (1)$$



Obr. 4

V rovině poledníku p leží výškové úhly $\alpha = \sphericalangle M'AM$, $\beta = \sphericalangle N'BN$, pod nimiž je po řadě z bodů A, B vidět kosmickou loď K ve chvíli, kdy se nachází nad poledníkem p. Platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle OAK = 90° + \alpha, \quad \sphericalangle OBK &= 90° + \beta, \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

(kde α, β, φ_1, φ_2 jsou vesměs ostré úhly), takže jsou všechny tři uvedené úhly duté. Dále je

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 90° - \tfrac{1}{2}\varphi ; \qquad (3)$$

proto je [viz (2), (3)]:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAK &= \sphericalangle OAK - \sphericalangle OAB = \alpha + \tfrac{1}{2}\varphi \,, \\ \sphericalangle ABK &= \sphericalangle OBK - \sphericalangle OBA = \beta + \tfrac{1}{2}\varphi \,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Má-li nastat popsaná situace, musí existovat průsečík K polopřímek AM, BN v polorovině opačné k polorovině ABO; podle Euklidova axiómu to nutně vyžaduje, aby součet obou úhlů (4) byl menší než 180° neboli

$$0 < \alpha + \beta + \varphi < 180^\circ . \tag{5}$$

Pak nutně čtyřúhelník $BOAK$ je konvexní, neboť jeho úhel $\sphericalangle K = 180^\circ - (\alpha + \beta + \varphi)$ je dutý a zbývající jeho tři úhly jsou úhly (2). Dále v něm známe strany $OA = OB = r$ (zemský poloměr).

Hledáme výšku lodi (nad povrchem zemským — viz obr. 4). Označíme

$$\sphericalangle AOK = \omega_1, \quad \sphericalangle BOK = \omega_2,$$

přičemž

$$\omega_1 + \omega_2 = \varphi . \tag{6}$$

Platí

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OK}{OB} = \frac{r + v}{r};$$

pomocí sinové věty dostaneme postupně

$$\frac{r + v}{r} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(\alpha + \omega_1)} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\cos(\beta + \omega_2)}$$

neboli

$$\frac{r + v}{r} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + \omega_1)}, \qquad \frac{r + v}{r} = \frac{\cos\beta}{\cos(\beta + \omega_2)}$$

neboli

$$\cos\alpha \cos\omega_1 - \sin\alpha \sin\omega_1 = \frac{r\cos\alpha}{r + v}, \tag{7}$$

$$\cos\beta \cos\omega_2 - \sin\beta \sin\omega_2 = \frac{r\cos\beta}{r + v}. \tag{8}$$

Z rovnosti (6) plyne $\omega_2 = \varphi - \omega_1$ a po dosazení do levé strany (8) máme

$$\cos\beta \cos\varphi \cos\omega_1 + \cos\beta \sin\varphi \sin\omega_1 -$$
$$- \sin\beta \sin\varphi \cos\omega_1 + \sin\beta \cos\varphi \sin\omega_1$$

neboli (8) lze uvést na tvar

$$\cos \omega_1 \cos (\beta + \varphi) + \sin \omega_1 \sin (\beta + \varphi) =$$
$$= \frac{r \cos \beta}{r + v} . \qquad (9)$$

Rovnice (7), (9) tvoří soustavu lineárních rovnic pro neznámé $\cos\omega_1$, $\sin\omega_1$. Řešení této soustavy je

$$\begin{aligned} \cos\omega_1 &= \frac{Ar}{r + v} \cdot \frac{1}{\sin (\alpha + \beta + \varphi)} , \\ \sin\omega_1 &= \frac{Br}{r + v} \cdot \frac{1}{\sin (\alpha + \beta + \varphi)} , \end{aligned} \qquad (10)$$

kde

$$A = \cos \alpha \sin (\beta + \varphi) + \sin\alpha \cos\beta , \qquad (11)$$
$$B = \cos\alpha \cos\beta - \cos\alpha \cos(\beta + \varphi) . \qquad (12)$$

Přitom je

$$\sin (\alpha + \beta + \varphi) =$$
$$= \sin [4\mathrm{R} - (\mathrm{R} + \alpha) - (\mathrm{R} + \beta) - \varphi] = \sin\varkappa ,$$

kde

$$\varkappa = \sphericalangle AKB =$$
$$= 4\mathrm{R} - (\mathrm{R} + \alpha) - (\mathrm{R} + \beta) - \varphi . \qquad (13)$$

Z rovnic (10) vyloučíme ω_1 tím, že rovnice umocníme na druhou a sečteme; vyjde

$$(r + v)^2 . \sin^2 \varkappa = (A^2 + B^2)\, r^2 . \qquad (14)$$

Z (11), (12) dostaneme

$$\begin{aligned}A^2 + B^2 = \cos^2\beta\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) &+ \\ + \cos^2\alpha\,[\sin^2(\beta + \varphi) + \cos^2(\beta + \varphi)] &+ \\ + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin(\beta + \varphi) &- \\ - 2\cos^2\alpha\,\cos\beta\,\cos\,(\beta + \varphi) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta &- \\ - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta + \varphi)\,. \qquad (15)\end{aligned}$$

Dosaďme z (15) do (14); po úpravě dostaneme

$$(r + v)^2 = \\ = r^2 \cdot \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta + \varphi)}{\sin^2(\alpha + \beta + \varphi)}\,. \qquad (16)$$

Vzhledem k (5) je

$$\sin(\alpha + \beta + \varphi) > 0\,.$$

Čitatel zlomku na pravé straně v (16) lze psát ve tvaru $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\,[1 - \cos(\alpha + \beta + \varphi)]$; to je kladné číslo, neboť výraz v lomené závorce je kladný [viz (5)]. Ze (16) dostaneme tedy

$$v = \\ = r\left[\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta + \varphi)}}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)} - 1\right].$$

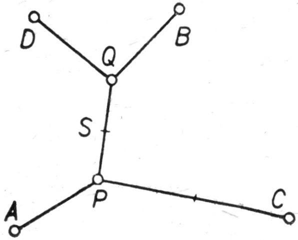
Tím je úloha rozřešena.

Poznámka. Pro $\alpha = \beta$ obdržíme pro výšku výraz

$$v = r\,\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + \frac{1}{2}\varphi)} - 1\,.$$

6. Náčrtek znázorňuje dvě trati pouliční dráhy *APQB* a *CPQD*, které mají společný úsek *PQ* (viz obr. 5).

Kterýkoli vůz projede (nehledě na směr) každý z úseků AP, BQ, DQ, PQ za 20 minut, ale úsek CP za 40 minut; přitom nebereme zřetel na dobu strávenou čekáním na zastávkách a konečných stanicích.



Obr. 4

Určité dva vozy vyjedou z konečných stanic A, C v 8 hodin.

a) V kolik hodin se tyto vozy potkají poprvé mezi místy P, Q?

b) V kolik hodin se tyto vozy potkají mezi místy P, Q v době od 12 do 14 hodin?

Řešení. Pro stručnost zvolme dobu 20 minut za časovou jednotku. V ní jsou vyjádřeny všechny další časové údaje; přitom čas začínáme v těchto jednotkách počítat od 8 hodin. Vůz M první trati projede úsek z A do B a zpět za dobu 6, vůz N druhé trati projede úsek z C do D a zpět za dobu 8. Situace tedy bude vždy za dobu 24 (nejmenší společný násobek čísel 6, 8) táž jako při počátečním stavu. Přitom vůz M se do místa P dostane v lichých časových údajích (1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23), takže v místě Q je v sudých časových údajích (dráhu PQ urazí za jednotku); vůz N je v místě P v sudých časových údajích (2; 6; 10; 14; 18; 22) a tím v místě Q v lichých časových údajích. Setkání je proto možné jedině ve středu S úsečky PQ (za předpokladu rovnoměrného pohybu), přičemž se vozy pohybují proti sobě.

Vůz M projíždí místem S v těchto časových údajích:

$\frac{3}{2} + 6m$ (při jízdě z P do Q); $\frac{9}{2} + 6m$(při jízdě z Q do P); vůz N je v místě S v těchto časových údajích: $\frac{5}{2} + 8n$ (při jízdě z P do Q); $\frac{11}{2} + 8n$ (při jízdě z Q do P).

Přitom jsou m, n celá nezáporná čísla.

Rovnosti $\frac{3}{2} + 6m = \frac{5}{2} + 8n$, $\frac{9}{2} + 6m = \frac{11}{2} + 8n$ nelze splnit žádnou dvojicí čísel m, n, což ostatně plyne z dřívější úvahy (vozy by se nepotkaly). Zbývají právě dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $\frac{9}{2} + 6m = \frac{5}{2} + 8n$ neboli

$$m = n + \tfrac{1}{3}(n - 1)\,. \tag{1}$$

Nejmenší vyhovující n je $n = 1$ a pak $m = n = 1$. Setkání tedy nastává v časovém údaji $\frac{9}{2} + 6 \,.\, 1 = \frac{5}{2} + 8 \,.\, 1 = 10\frac{1}{2}$, tedy za 210 minut neboli za $3\frac{1}{2}$ hodiny po osmé hodině, tj. o $11\frac{1}{2}$ hodině. Přitom vůz M jede z Q do P.

Případ [2]. Nechť je $\frac{3}{2} + 6m = \frac{11}{2} + 8n$ neboli

$$m = n + \tfrac{1}{3}(n + 2)\,. \tag{2}$$

Nejmenší n, které vyhovuje požadavkům, je $n = 1$ a k němu přísluší $m = 2$; setkání tedy nastává v časovém údaji $\frac{3}{2} + 6 \,.\, 2 = \frac{11}{2} + 8 \,.\, 1 = 13\frac{1}{2}$, tj. za 270 minut neboli $4\frac{1}{2}$ h po osmé hodině, tedy o $12\frac{1}{2}$ hodině. Přitom vůz M jede z P do Q.

Tím je zodpověděna otázka a).

b) Doba mezi 12. a 14. hodinou je vyjádřena intervalem (12, 18) v smluvené časové jednotce, přičemž časový údaj $t = 0$ je v 8 hodin. Abychom zodpověděli otázku b), musíme řešit nerovnosti

$$12 < \tfrac{3}{2} + 6m < 18, \qquad 12 < \tfrac{9}{2} + 6m < 18 \tag{3}$$

celými nezápornými čísly m. První nerovnost (3) dává vztah

$$1{,}7 < m < 2{,}8\,,$$

který má jediné celočíselné řešení $m = 2$. Ze vztahu (2) dostaneme $n = 1$; příslušná doba $\frac{3}{2} + 6 \,.\, 2 = 13\frac{1}{2}$, tj. 270 minut = 4 hodiny 30 minut. Doba setkání je tedy 12 hodin 30 minut.

Druhá nerovnost (3) dává vztah

$$1{,}2 < m < 2{,}3\,,$$

který má jediné celočíselné řešení $m = 2$. Ze vztahu (1) dostaneme $n = \frac{7}{4}$, což není celé číslo; nedostaneme tedy žádné další řešení.

Při řešení této úlohy užívali někteří účastníci tabulky (což je vlastně řešení experimentální) nebo grafického jízdního řádu, jako např. Leopold Vrána, žák třídy III.b SVVŠ v Novém Jičíně.

2. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A*

1. Číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17 + 19$. Dokažte.

Řešení. Je znám vzorec

$$a^n + b^n = (a + b)\,[a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots\ldots + b^{n-1}]\,,$$

který platí pro lichá $n > 1$, jehož v dalším použijeme.

O čísle $x = 17^{19} + 19^{17}$ nyní platí

$$x = (17^{19} - 17^{17}) + (19^{17} + 17^{17}) =$$
$$= 17^{17}(17^2 - 1) + (19 + 17)\,(19^{16} - 19^{15} \,.\, 17 + \ldots$$
$$\ldots + 17^{16}) = 17^{17} \,.\, 16 \,.\, 18 + 36 \,.\, B = 36\,(A + B),$$

kde $A = 17^{17} \,.\, 8$, $B = 19^{16} - 19^{15} \,.\, 17 + \ldots + 17^{16}$ jsou přirozená čísla.

Z výsledku $x = 36(A + B)$ vyplývá, že číslo x je dělitelné třicetišesti.

Jiné řešení. Platí

$$x = (18 - 1)^{19} + (18 + 1)^{17} =$$

$$= \left[18^{19} - \binom{19}{1} 18^{18} + \ldots + \binom{19}{18} 18 - 1\right] +$$

$$+ \left[18^{17} + \binom{17}{1} 18^{16} + \ldots + \binom{17}{16} 18 + 1\right] =$$

$$= 18\left[18^{18} - \binom{19}{1} 18^{17} + \ldots + \binom{19}{1}\right] +$$

$$+ 18\left[18^{16} + \binom{17}{1} 18^{17} + \ldots + \binom{17}{1}\right] =$$

$$= 18\left[18^{18} - \binom{19}{1} 18^{17} + \ldots + \binom{19}{1} + 18^{16} + \right.$$

$$\left. + \binom{17}{1} 18^{17} + \ldots + \binom{17}{1}\right].$$

Členy obsažené v lomené závorce jsou až na $\binom{19}{1}$, $\binom{17}{1}$ čísla věsměs dělitelná osmnácti a tudíž sudá; z toho plyne, že výraz v lomené závorce je číslo sudé, takže platí

$$x = 18 \,.\, 2k\,,$$

kde k je celé číslo. Je tedy číslo x dělitelné číslem 36.

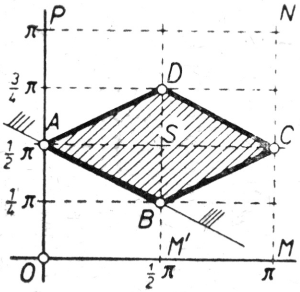
2. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y

v této soustavě splňují nerovnosti

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi ; \\ 1 + |\cos x| \leqq 2\sin^2 y . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Řešení. Máme najít všechna řešení, jejichž obrazy náleží čtverci $OMNP$ (viz obr. 6):

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq \pi , \\ 0 \leqq y \leqq \pi . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



Obr. 6

Je-li x_0, y_0 řešení soustavy (1), je také

$$\pi - x_0, y_0$$

řešení soustavy (1), a také

$$x_0, \pi - y_0$$

je řešení soustavy (1).

To znamená, že množina obrazů řešení, které leží ve čtverci (2), je souměrná podle přímek o rovnicích

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2} .$$

Stačí tedy najít řešení ve čtverci skládajícím se z bodů $[x, y]$, pro něž platí

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} , \\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Potom však platí, že s třetí nerovností (1) je ekvivalentní nerovnost

$$2\sin^2 y - 1 \geqq |\cos x|\,.$$

Poněvadž je

$$\cos x \geqq 0\,,$$

dostaneme dále

$$-\cos 2y \geqq \cos x \tag{4}$$

čili

$$\cos(\pi - 2y) \geqq \cos x\,.$$

Jak číslo $\pi - 2y$, tak i číslo x leží v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, v němž je funkce kosinus klesající. Proto je nerovnost (4) ekvivalentní s nerovností

$$\pi - 2y \leqq x\,,$$

tj.

$$x + 2y \geqq \pi\,.$$

Avšak rovnice $x + 2y = \pi$ vyjadřuje v rovině přímku, která prochází body

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ a } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Body společné polorovině $x + 2y \geqq \pi$ a čtverci (3) tvoří trojúhelník ABS (viz obr. 6) s vrcholy

$$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad B = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \quad S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

V důsledku zmíněných souměrností je hledaná množina bodů kosočtverec $ABCD$; viz obr. 6.

3. Daná je rovnica

$$x^2 + 2px + 2p^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

s neznámou x, kde p je reálne číslo. Nájdite všetky čísla p, pre ktoré má daná rovnica reálne korene, z ktorých žiaden nemá absolútnu hodnotu väčšiu než jedna.

Riešenie. Ak má daná rovnica (1) reálne korene, potom je jej diskriminant nutne nezáporné číslo. Teda nutne platí

$$(-p)^2 - (2p^2 - 1) = 1 - p^2 \geqq 0$$

čiže

$$-1 \leqq p \leqq 1\,. \tag{2}$$

Korene x_1, x_2 danej rovnice (1) sú

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{1 - p^2}\,.$$

Podľa požiadaviek vyslovených v texte úlohy platí o nich

$$-1 \leqq -p - \sqrt{1 - p^2} \leqq -p + \sqrt{1 - p^2} \leqq 1\,.$$

Z toho vyplýva (stredná nerovnosť zrejme platí), že súčasne musia byť splnené nerovnosti

$$\sqrt{1 - p^2} \leqq 1 - p\,, \qquad \sqrt{1 - p^2} \leqq 1 + p\,; \tag{3}$$

pričom sú na základe vzťahu (2) čísla $1 - p$, $1 + p$ nezáporné. Po umocnení obidvoch strán nerovností (3) a ďalšej úprave dostaneme, že číslo p musí súčasne vyhovovať vzťahom

$$0 \leqq p(p - 1)\,, \qquad 0 \leqq p(p + 1)\,. \tag{4}$$

Je teda nutne buď

$$p = 0, \tag{5}$$

alebo platí súčasne [pozri (4)]

$$p > 0\,, \quad p \geqq 1, \tag{6}$$

alebo platí súčasne [pozri (4)]

$$p < 0\,, \quad p \leqq -1\,. \tag{7}$$

Kombináciou vzťahov (6), (2) dostávame, že je nutne

$$p = 1; \tag{8}$$

kombináciou vzťahov (7), (2) dostávame, že je nutne

$$p = -1. \tag{9}$$

Výsledky (5), (8), (9) vedú k tomu, že daná rovnica (1) musí byť jednou z rovníc

$$x^2 - 1 = 0,$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Tieto rovnice skutočne všetky vyhovujú požiadavkám úlohy. O tom sa ľahko presvedčíme vypočítaním ich koreňov. Tým je úloha vyriešená.

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1 a číslo d, pro něž platí $1 \leqq d \leqq \sqrt{2}$. Úsečka XY délky d je umístěna tak, že bod X leží ve stěně $ABCD$ a bod Y ve stěně $A'B'C'D'$; mimoto obsahuje úsečka XY pevný bod M tělesové úhlopříčky AC', pro který platí $C'M = 2AM$. Vyšetřte geometrické místo bodů X; jaký útvar vznikne pro různé hodnoty d?

Řešení (viz obr. 7). Bodem M vedeme kolmici na rovnoběžné roviny ABC, $A'B'C'$ a její průsečíky s těmito rovinami po řadě označíme P, Q; je $PQ = AA' = 1$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků AMP, $AC'C$ podle bodu A vyplývá $MP = \frac{1}{3}PQ = \frac{1}{3}$, takže $MQ = \frac{2}{3}$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků MPX, MQY podle bodu M vyplývají vztahy (je $XY = d$)

$$MX = \tfrac{1}{3}d, \quad MY = \tfrac{2}{3}d.$$

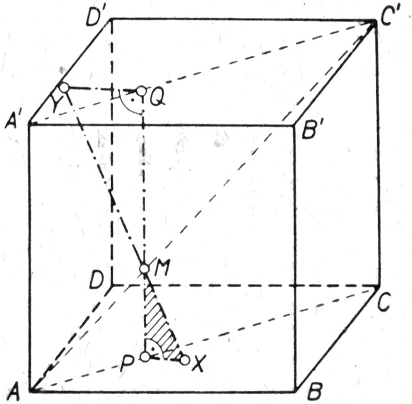
Proto z pravoúhlého trojúhelníka MXP plyne podle

Pythagorovy věty

$$PX^2 = MX^2 - MP^2 = \tfrac{1}{9}(d^2 - 1) \leqq \tfrac{1}{9},$$

tudíž $PX = \frac{1}{3}\sqrt{d^2 - 1}$ a dále

$$PX \leqq \tfrac{1}{3}.$$



Obr. 7.

Pro dané d je PX konstanta, a proto všechny body X leží na kružnici $k \equiv (P;\ \frac{1}{3}\sqrt{d^2 - 1})$, popř. dostaneme pro $d = 1$ jediný bod $X \equiv P$. Tato kružnice k leží celá ve čtverci $ABCD$, neboť vzdálenost bodu P od přímek AB, AD je $\frac{1}{3}$, od přímek BC, CD je $\frac{2}{3}$.

Avšak celá kružnice k není hledaným geometrickým místem bodů X, neboť ne ke každému bodu X kružnice k lze sestrojit bod Y, aby náležel čtverci $A'B'C'D'$; této otázky si ihned blíže všimneme.

Z pravoúhlého trojúhelníka MYQ podle Pythagorovy věty dostaneme

$$QY^2 = MY^2 - MQ^2 = \tfrac{4}{9}(d^2 - 1)\,,$$

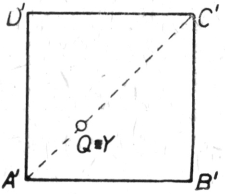
tj.

$$QY = \tfrac{2}{3}\sqrt{d^2 - 1} \leqq \tfrac{2}{3};$$

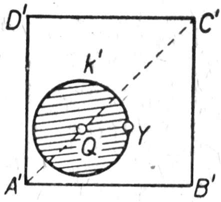
body Y pro dané číslo d leží na kružnici $k' \equiv (Q;\ \tfrac{2}{3}\sqrt{d^2 - 1})$, popř. pro $d = 1$ je $Y \equiv Q$. Kružnice k' však pro dané číslo d nemusí náležet celá čtverci $A'B'C'D'$. Rozlišme 5 případů, které snadno pomocí náčrtků vyšetříme; nechť je

[1] $1 = d$ (obr. 8); pak platí $Y \equiv Q$ a $X \equiv P$;

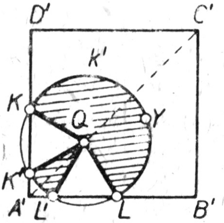
[2] $1 < d \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ (obr. 9); potom celá kružnice k' leží ve čtverci $A'B'C'D'$;



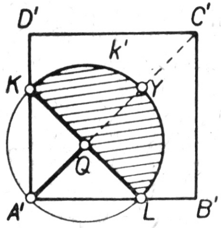
Obr. 8



Obr. 9

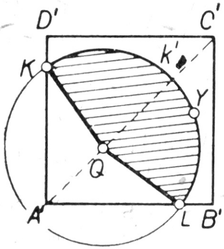


Obr. 10



Obr. 11

[3] $\frac{1}{2}\sqrt{5} < d < \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (obr. 10). Kružnice k' protíná stranu $A'B'$ ve dvojici bodů L, L' ležících mezi A', B'; podobně je tomu i se stranou $A'D'$.



Obr. 12

[4] $d = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (obr. 11). Kružnice k' prochází bodem A' a vedle toho protíná stranu $A'B'$ v dalším bodu L ležícím mezi A', B'; podobně je tomu se stranou $A'D'$.

[5] $\frac{1}{2}\sqrt{6} < d \leqq \sqrt{2}$ (obr. 12). Kružnice k' se rozpadá ve dva oblouky, z nichž jeden leží vně čtverce $A'B'C'D'$, druhý náleží tomuto čtverci.

Bod Q má od stran $A'B'$, $A'D'$ vzdálenosti $\frac{1}{3}$, od stran $B'C'$, $C'D'$ vzdálenosti $\frac{2}{3}$; protože pak je $QY \leqq \frac{2}{3}$, leží ten oblouk KL kružnice k' v obr. 10 až 12, který protíná úsečku QC', celý ve čtverci $A'B'C'D'$; o poloměru $\varrho = QY$ této kružnice v jednotlivých obrázcích 9 až 12 po řadě platí:

$$\varrho \leqq \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{3} < \varrho < \tfrac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \varrho = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \tfrac{1}{3}\sqrt{2} < \varrho \leqq \tfrac{2}{3}.$$

Z těchto podmínek a ze vzorce $MY^2 = MQ^2 + QY^2$ neboli

$$(\tfrac{2}{3}d)^2 = (\tfrac{2}{3})^2 + \varrho^2$$

dostaneme vztahy uvedené v případech [2] až [5].

Nyní snadno vyšetříme hledané geometrické místo bodů X. Jestliže bod Y leží na kružnici k' a zároveň ve čtverci $A'B'C'D'$ (popř. je-li $Y \equiv Q$), pak příslušný bod X úsečky $XY = d$ náleží hledanému geometrickému místu bodů. Hledané geometrické místo bodů pro dané d je tedy v případě:

[1] jediný bod P;

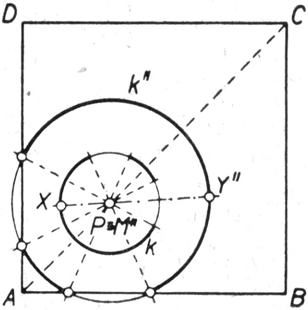
[2] kružnice k;

[3] dva oblouky kružnice k, které jsou bez společného bodu;

[4] jeden oblouk kružnice k a izolovaný další bod (průsečík kružnice k s úsečkou PC);

[5] jeden oblouk kružnice k.

Graficky tyto oblouky nejrychleji sestrojíme takto: V pravoúhlém promítání na rovinu ABC sestrojíme průmět k'' kružnice k' a průmět XY'' úsečky XY (viz obr. 13, pro případ [3] porovnej s obr. 10). Průměty Y'' bodů na kružnici k'' a hledané geometrické místo bodů X na kružnici k jsou stejnolehlé podle bodu $P \equiv M''$ při konstantě stejnolehlosti $-\frac{1}{2}$ (viz silně narýsované části kružnice k'' a kružnice k v obr. 13).



Obr. 13

3. *TEXTY ÚLOH III. KOLA KATEGORIE A*

1. Je dán trojčlen

$$2x^2 - x - 36 .$$

Určete všechna celá čísla x, pro která se hodnota daného trojčlenu rovná druhé mocnině prvočísla.

2. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic x, y.

Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice v této soustavě splňují nerovnost

$$0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi ,$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leqq y \leqq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x} .$$

Načrtněte obraz této množiny.

3. Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky PM, QN, kde přímka PQ je kolmá ke každé z obou mimoběžek. V rovině σ kolmé k úsečce PQ a procházející jejím středem S je dána kružnice $k \equiv (S, r)$.

Dokažte, že každá úsečka XY, jejíž krajní body X, Y leží po řadě na mimoběžkách PM, QN a která obsahuje bod kružnice k, má touž délku; vyjádřete tuto délku pomocí poloměru r a délky $v = PQ$.

Jaký útvar vyplní krajní body X všech takových úseček XY?

4. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S, r)$. Kromě toho je dán bod $A \not\equiv S$, který leží uvnitř kružnice k. Světelný paprsek vycházející z daného bodu A se odráží od kružnice k v jistém bodě B, pak se odráží od kružnice k v jistém bodě C a odtud se vrací nazpět do bodu A.

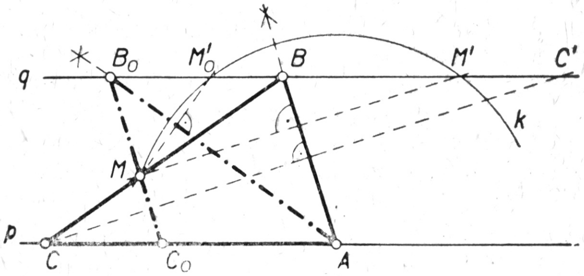
Vypočítejte sinus dutého úhlu $\sphericalangle SAB$ pomocí čísel r, $d = SA$ a rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

Poznámka. Řešení těchto úloh najdete v této brožuře na str. 111 v článku „Něco o metodách řešení úloh."

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a bod A ležící na p; dále je dán bod M ležící uvnitř pásu s hranicemi p, q.

Sestrojte takový rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, aby vrcholy B, C ležely po řadě na přímkách q, p a bod M na ramenu BC.

Proveďte diskusi vzhledem k vzdálenosti v rovnoběžek p, q a vzdálenosti bodů A, M.



Obr. 14

Řešení (obr. 14). Pokusíme se určit směr přímky AB. Souměrnost podle této přímky převede hledaný trojúhelník ABC v rovnoramenný trojúhelník ABC', jehož rameno BC' leží v přímce q. Táž souměrnost převede bod M v jistý bod M', který leží jednak na přímce q, jednak na kružnici $k \equiv (A; AM)$. Sestrojíme-li bod M' jako společný bod čar q, k a vedeme-li osu o úsečky MM', protne osa o přímku q v bodě B; přímka BM protne přímku p v jistém bodě C; bod s ním souměrně sdružený podle přímky o (který leží na q) označíme C'. Obrazec $ACBC'$ je rovnoběžník, neboť $AC \parallel BC'$, $BC \parallel AC'$; jeho úhlopříčky leží v přímkách o, CC' navzájem kolmých, a je to tedy kosočtverec. Proto je trojúhelník ABC skutečně rovnoramenný se základnou AB.

Úloha má dvě různá řešení, je-li $AM > v$; jediné řešení, je-li $AM = v$; je neřešitelná, je-li $AM < v$.

2. Druhá mocnina prirodzeného čísla n má v dekadickom zápise posledné dvojčíslie 56. Aké je posledné dvojčíslie čísla n? (Sú 4 možnosti.)

Řešení. Protože poslední cifra n^2 je 6, je poslední cifra čísla n buď 4, nebo 6. Číslo n lze tedy napsat v jednom z tvarů

$$n = 10x + 4\,, \tag{1}$$

$$n = 10x + 6\,. \tag{2}$$

V případě (1) je

$$n^2 = 100x^2 + 80x + 16 =$$
$$= 100x^2 + 10\,.\,(8x + 1) + 6.$$

Na předposlední číslici má vliv jedině člen $10(8x + 1)$. Podle podmínky úlohy musí číslo $8x + 1$ končit číslicí 5, tj. $8x$ musí být číslo končící čtyřkou. Mezi násobky osmi jsou to čísla 24, 64, 104, 144, ..., tj. číslo $8x$ pro $x = 3, 13, 23, 33, \ldots$ a $x = 8, 18, 28, 38, \ldots$. První dvě řešení úlohy jsou tedy čísla, jejichž poslední dvojčíslí je 34 nebo 84.

V případě (2) je

$$n^2 = 100x^2 + 120x + 36 =$$
$$= 100x^2 + 10(12x + 3) + 6.$$

Jako v případě (1) zjistíme, že číslo $12x$ musí končit dvojkou. Takové násobky dvanácti dostaneme jen pro $x = 1, 11, 21, 31, \ldots$ a $x = 6, 16, 26, 36, \ldots$. Tak dostáváme další dvě řešení úlohy: poslední dvojčíslí hledaných čísel je 16 nebo 66.

3. Je dáno kladné číslo p. Množina všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y vyhovují rovnici

$$p\,|x| + |x + y| = 4\,, \tag{1}$$

je obvod jistého rovnoběžníka; dokažte.

Potom zjistěte, pro které číslo p je tento rovnoběžník obdélníkem.

Řešení. Rozlišíme čtyři případy:

a) $x \geqq 0,\ x + y \geqq 0$, b) $x \geqq 0,\ x + y \leqq 0$,

c) $x \leqq 0,\ x + y \geqq 0$, d) $x \leqq 0,\ x + y \leqq 0$.

V případě a) platí $|x| = x$, $|x + y| = x + y$; proto přepíšeme rovnici (1) do tvaru

$$(p + 1)\,x + y = 4\,. \tag{1a}$$

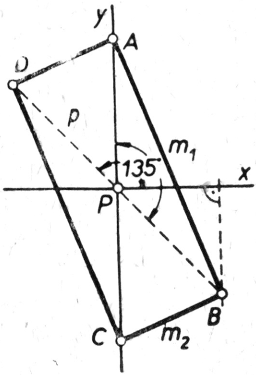
Grafem rovnice (1a) je přímka m_1, která protíná osu y v bodě $A = [0,4]$ a přímku p o rovnici $x + y = 0$ v bodě $B = \left[\frac{4}{p}, -\frac{4}{p}\right]$, jak zjistíme snadným výpočtem z (1a). Graf rovnice (1) však neobsahuje celou přímku m_1, nýbrž jen její část, pro kterou platí současně $x \geqq 0$, $x + y \geqq 0$. Všecky body $[x, y]$, pro něž platí $x \geqq 0$, vyplní polorovinu yB, tj. pravou polorovinu s hranicí v ose y; všecky body $[x, y]$, pro něž platí $x + y \geqq 0$, vyplní polorovinu pA. Společná část obou těchto polorovin je úhel $\sphericalangle APB$ (P je počátek souřadnic). V tomto úhlu leží jen část přímky m_1, a to úsečka AB.

V případě b) postupujeme obdobně jako v případě a). Zde platí $|x| = x$, $|x + y| = -x - y$; proto přepíšeme rovnici (1) do tvaru

$$(p - 1)x - y = 4\,. \tag{1b}$$

Grafem rovnice (1b) je přímka m_2, která protíná osu y v bodě $C = [0, -4]$ a přímku p v bodě B. Všecky body $[x, y]$, pro něž platí současně $x \geqq 0$, $x + y \leqq 0$, vyplní společnou část polorovin yB, pC, což je úhel $\sphericalangle BPC$. Část přímky m_2 ležící v tomto úhlu je úsečka BC.

Případy c) a d) vyšetříme snadno na základě středové souměrnosti. Z rovnice (1) je patrné: Jestliže této rovnici vyhovuje dvojice čísel x, y, vyhovuje jí též dvojice $-x$, $-y$; to znamená, že graf rovnice (1) je útvar souměrný podle středu P (viz obr. 15).



Obr. 15

Mimo nalezené úsečky AB, BC náleží tomuto grafu tedy také úsečky AD, CD, kde D je bod souměrně sdružený s bodem B podle středu P a ležící ovšem na přímce p. Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, neboť je souměrný podle středu P. Graf rovnice (1) je obvod tohoto rovnoběžníka.

Odpověď na druhou otázku úlohy. Rovnoběžník $ABCD$ je obdélníkem jen tehdy, když platí $AC = BD$, neboli $AP = BP$. Z předchozího víme, že

$AP = 4$; snadno vypočteme podle Pythagorovy věty, že

$$BP = \sqrt{\left(\frac{4}{p}\right)^2 + \left(\frac{4}{p}\right)^2} = \frac{4}{p}\sqrt{2}.$$

Dostaneme tedy pro p podmínku

$$4 = \frac{4}{p}\sqrt{2}$$

a odtud $p = \sqrt{2}$.

4. Nech sú a, b, c dĺžky strán trojuholníka a P jeho obsah. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4P\sqrt{3}; \qquad (1)$$

dokážte.

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie I. Vzhľadom na geometrický význam sú čísla a, b, c všetky kladné. Podľa Heronovho vzorca $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, platí

$$16\,P^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c) \cdot$$
$$\cdot (a+b-c) = [-a^2 + (b+c)^2]\,[a^2 - (b-c)^2] =$$
$$= -a^4 + a^2[(b-c)^2 + (b+c)^2] - (b^2 - c^2)^2 =$$
$$= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\,.$$

Teda je

$$16\,P^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \quad (2)$$

Nech teraz platí nerovnosť (1), ktorej obidve strany sú kladné čísla. Potom platí tiež nerovnosť

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqq (4P\sqrt{3})^2$$

čiže
$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geqq 16 \,.\, 3P^2 \,.$$
Do pravej strany poslednej nerovnosti dosaďme zo vzťahu (2). Po úprave dostaneme
$$4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) \geqq 0$$
čiže
$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqq 0 \,. \quad (3)$$
Tento vzťah platí pre všetky čísla a, b, c. Pretože úpravy, ktoré sme previedli, sú za daných predpokladov o číslach a, b, c ekvivalentné, vyplýva z nerovnosti (3) nerovnosť (1). Vzhľadom na vzťah (3) nastane v (1) rovnosť práve pre $a^2 = b^2 = c^2$, čiže pre $a = b = c$, tj. pre rovnostranný trojuholník. Tým je úloha vyriešená.

Riešenie II. Do vzťahu (1) dosaďme z kosinusovej vety
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \,,$$
kde $\gamma = \sphericalangle BCA$. Dostaneme
$$2(a^2 + b^2 - ab\cos\gamma) \geqq 4 \,.\, \tfrac{1}{2}\, ab\sin\gamma \,.\, \sqrt{3} \,,$$
pričom sme použili $P = \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma$.

Preveďme ekvivalentné úpravy:
$$2\left[a^2 + b^2 - 2ab\left(\cos\gamma \,.\, \tfrac{1}{2} + \sin\gamma \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \geqq 0 \,,$$
$$2\,[a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - 60^\circ)] \geqq 0 \,. \quad (4)$$
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že je $a \geqq b \geqq c > 0$ čiže
$$180^\circ > \alpha \geqq \beta \geqq \gamma > 0^\circ \,.$$
Pritom je nutne $\gamma \leqq 60^\circ$. Ak by totiž bolo $\gamma > 60^\circ$,

potom $\alpha + \beta + \gamma > 3 . 60° = 180°$, čo je v spore s tým, že ide o uhly α, β, γ trojuholníka.

Je teda $-2ab \cos(\gamma - 60°) \geqq 0$ pre všetky γ a preto pre každý trojuholník platí i vzťah (4), ktorý je so vzťahom (1) ekvivalentný. Tým je dôkaz prevedený.

5. Je dána soustava rovnic

$$x + y + z = 1 , \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c , \tag{2}$$
$$xy = z^2 , \tag{3}$$

kde c je dané kladné číslo.

a) Udejte podmínky pro číslo c, aby soustava měla reálné řešení x, y, z.

b) Udejte všechna čísla c, pro něž alespoň jedna trojice čísel x, y, z (řešících soustavu) je složena z kladných a navzájem různých čísel.

Řešení. Umocněme obě strany rovnice (1) na druhou a do výsledku, který tak dostaneme, dosaďme ze (2) a (3); obdržíme postupně

$$c + 2(xy + yz + xz) = 1 ,$$
$$c + 2z(x + y + z) = 1 .$$

Nyní sem dosaďme z (1), čímž dostáváme

$$z = \tfrac{1}{2}(1 - c) . \tag{1'}$$

Tento výsledek dosaďme do (1) a (3); dostaneme pro neznámé x, y soustavu

$$x + y = \tfrac{1}{2}(1 + c) , \tag{2'}$$
$$xy = \tfrac{1}{4}(1 - c)^2 . \tag{3'}$$

Podle známé věty o koeficientech kvadratické rovnice jsou čísla x, y splňující rovnice (2') a (3') kořeny následující rovnice s neznámou t:

$$t^2 - \tfrac{1}{2}(1 + c)t + \tfrac{1}{4}(1 - c)^2 = 0,$$

neboli

$$4t^2 - 2(1 + c)t + (1 - c)^2 = 0\,. \tag{4}$$

Diskriminant D této rovnice je

$$D = 4[(1 + c)^2 - 4(1 - c)^2] = 4\,(3c - 1)\,(3 - c).$$

Rovnice (4) má tedy reálné řešení právě tehdy, platí-li $D \geqq 0$ neboli

$$\tfrac{1}{3} \leqq c \leqq 3; \tag{5}$$

kořeny t_1, t_2 rovnice (4) pak jsou

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \tfrac{1}{4}(1 + c + \sqrt{(3c - 1)\,(3 - c)}),\\ t_2 &= \tfrac{1}{4}(1 + c - \sqrt{(3c - 1)\,(3 - c)})\,. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Jsou-li splněny podmínky (5), a jen v tomto případě, jsou čísla t_1, t_2 reálná; pak je buď $x = t_1$, $y = t_2$, nebo $x = t_2$, $y = t_1$; číslo z je podle (1′) vždy reálné. Řešením úlohy a) jsou tedy nerovnosti (5).

Aby byly splněny podmínky z úlohy b), musí platit

$$t_1 \neq t_2, t_1 \neq z, t_2 \neq z, z > 0, t_2 > 0 \text{ (pak je i } t_1 > 0)\,.$$

Nerovnost $t_1 \neq t_2$ dává podmínku $D \neq 0$, tj.

$$c \neq \tfrac{1}{3}\,, c \neq 3\,. \tag{5a}$$

Rovnice $t_1 = z$ i rovnice $t_2 = z$ dává po snadné úpravě řešení $c = \frac{1}{3}$, $c = -1$. Číslo $c = \frac{1}{3}$ skutečně vede k rovnostem $z = t_1 = t_2$, číslo $c = -1$ nevyhovuje ani rovnici $z = t_1$, ani $z = t_2$ (pro $c = -1$ je $D < 0$). Nerovnosti $t_1 \neq z$, $t_2 \neq z$ nevedou tedy k další podmínce. Nerovnost $z > 0$ vede k vztahu $1 - c > 0$, neboli

$$c < 1 . \qquad \text{(5b)}$$

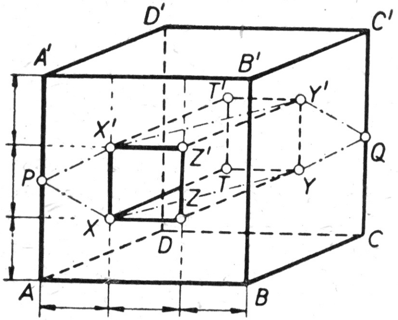
Konečně nerovnost $t_2 > 0$ vede k podmínce $c + 1 > > \sqrt{(3c - 1)(3 - c)}$, neboli $4(c - 1)^2 > 0$, neboli $c \neq 1$, která je zahrnuta v podmínce (5b).

Spojením (5), (5a), (5b) dostaneme tedy odpověď na otázku z druhé úlohy: hledané hodnoty parametru c jsou dány nerovnostmi $\frac{1}{3} < c < 1$.

6. Z kocky $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky d je vyrezaný pravidelný štvorboký hranol $XZYTX'Z'Y'T'$ (pozri obr. 16a). Tým vznikne duté teleso K, ktorého povrch sa skladá z desiatich rovinných obrazcov. Označme postupne P, Q stredy úsečiek AA', CC'.

Vypočítajte dĺžku lomenej čiary $PXYQ$ a nájdite kratšiu lomenú čiaru spájajúcu body P,Q a idúcu po povrchu telesa K.

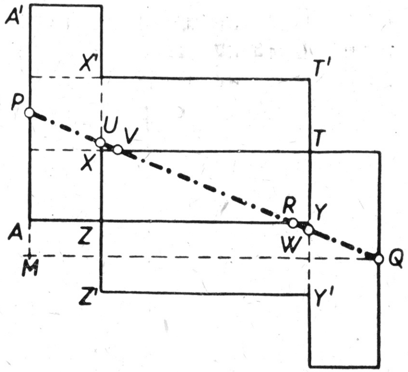
Riešenie (pozri obr. 16a). Zvoľme hranu kocky za



Obr. 16a

jednotkovú úsečku. Potom je $XX' = YY' = x = \frac{1}{3}$.
Ďalej je $PX = QY = PX' = \frac{x}{2}\sqrt{5}$, $XY = X'Y' = \sqrt{(3x)^2 + x^2} = x\sqrt{10}$. Teda

$$PXYQ = PX'Y'Q = 2 . \frac{x}{2}\sqrt{5} + x\sqrt{10} = \frac{1}{3}(\sqrt{5} + \sqrt{10}) . \qquad (1)$$



Obr. 16b.

Zostrojme teraz časť siete vyrezaného telesa (pozri obr. 16b): Body P, Q v sieti spojíme úsečkou, ktorá na povrchu telesa K je vlastne lomenou čiarou $PUVRWQ$. Jej dĺžku vypočítame z pravouhlého trojúholníka PMQ. Dĺžky jeho odvesien sú: $PM = 2x$, $MQ = 5x$. Je teda

$$PQ = \sqrt{4x^2 + 25x^2} = x\sqrt{29} = \frac{1}{3}\sqrt{29} . \qquad (2)$$

Vzhľadom na vzťahy (1) a (2) porovnajme čísla $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ a $\sqrt{29}$. Je

$$(\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 = 15 + 10\sqrt{2} \doteq 29{,}14 > 29 = (\sqrt{29})^2.$$

Preto je druhá spojnica kratšia než prvá.

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic. Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice x, y v této soustavě splňují rovnici

$$|x - 1| + |y - 2| = |x - 5| + |y - 6|\,. \qquad (1)$$

Řešení. Rozlišíme případy

$$x \leqq 1\,, \qquad 1 \leqq x \leqq 5\,, \qquad x \geqq 5\,,$$
$$y \leqq 2\,, \qquad 2 \leqq y \leqq 6\,, \qquad y \geqq 6\,,$$

které kombinujeme všemi devíti možnými způsoby; dostáváme 9 případů:

Případ [1]. Je-li $x \leqq 1$, $y \leqq 2$, pak platí

$$|x - 1| = 1 - x, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = 2 - y, \quad |y - 6| = 6 - y\,.$$

Případ [2]. Je-li $x \leqq 1$, $2 \leqq y \leqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = 1 - x, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = y - 2\,, \quad |y - 6| = 6 - y\,.$$

Případ [3]. Je-li $x \leqq 1$, $y \geqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = 1 - x, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = y - 2, \quad |y - 6| = y - 6\,.$$

Případ [4]. Je-li $1 \leqq x \leqq 5$, $y \leqq 2$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = 2 - y, \quad |y - 6| = 6 - y.$$

Případ [5]. Je-li $1 \leqq x \leqq 5$, $2 \leqq y \leqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = y - 2, \quad |y - 6| = 6 - y.$$

Případ [6]. Je-li $1 \leqq x \leqq 5$, $y \geqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = 5 - x,$$
$$|y - 2| = y - 2, \quad |y - 6| = y - 6.$$

Případ [7]. Je-li $x \geqq 5$, $y \leqq 2$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = x - 5,$$
$$|y - 2| = 2 - y, \quad |y - 6| = 6 - y.$$

Případ [8]. Je-li $x \geqq 5$, $2 \leqq y \leqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = x - 5,$$
$$|y - 2| = y - 2, \quad |y - 6| = 6 - y.$$

Případ [9]. Je-li $x \geqq 5$, $y \geqq 6$, pak platí

$$|x - 1| = x - 1, \quad |x - 5| = x - 5,$$
$$|y - 2| = y - 2, \quad |y - 6| = y - 6.$$

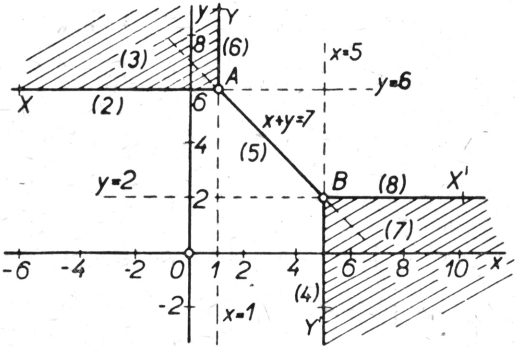
Dosaďme po řadě výsledky z jednotlivých případů do dané rovnice (1); obdržíme tyto rovnice pro hledané geometrické místo bodů (viz obr. 17):

(1) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 8 = 0$ (prázdná množina)
(2) $y = 6$ (polopřímka AX)
(3) $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ (pravý úhel $\sphericalangle XAY$)
(4) $x = 5$ (polopřímka BY')
(5) $x + y = 7$ (úsečka AB)

(6) $x = 1$ (polopřímka AY)
(7) $0 . x + 0 . y = 0$ (pravý úhel $\sphericalangle X'BY'$)
(8) $y = 2$ (polopřímka BX')
(9) $0 . x + 0 . y + 8 = 0$ (prázdná množina)

Přitom je $A = [1;6]$, $B = [5;2]$, $X = [-6;6]$, $X' = [10;2]$, $Y = [1;9]$, $Y' = [5;-2]$.

Hledaná množina bodů tedy vyplní dva pravé úhly $\sphericalangle XAY$, $\sphericalangle X'BY'$ a úsečku AB. Tím je řešení úlohy provedeno.



Obr. 17

2. Jsou dány tři lineární rovnice s neznámými x,y

$$px + (p - 1)\,y = 7\,, \qquad (1)$$
$$(p - 5)\,x + py = 4\,, \qquad (2)$$
$$(4p + 5)\,x - py = 2p - 4\,. \qquad (3)$$

Zjistěte, zda lze zvolit číslo p tak, aby všecky tři rovnice měly společné řešení.

Řešení. Jestliže je $p \neq 0$, plyne ze (2)

$$y = \frac{4 - (p - 5)\,x}{p}$$

a po dosazení do (1) máme

$$(6p - 5)x = 3p + 4\,. \tag{4}$$

Dále z (1) plyne

$$x = \frac{7 - (p - 1)\,y}{p}$$

a po dosazení do (2) obdržíme

$$(6p - 5)y = 35 - 3p\,. \tag{5}$$

Je-li $6p - 5 = 0$ neboli $p = \frac{5}{6}$, pak rovnice (4), (5) jsou podle x, y neřešitelné, neboť pak je $3p + 4 \neq \neq 0$, $35 - 3p \neq 0$; soustava (1) až (3) je pro $p = \frac{5}{6}$ zřejmě neřešitelná.

Je-li však $6p - 5 \neq 0$, neboli $p \neq \frac{5}{6}$, $p \neq 0$, pak ze (4) a (5) dosaďme za x, y do (3); po úpravě dostáváme

$$(4p + 5)(3p + 4) - p(35 - 3p) = (2p - 4)(6p - 5),$$

neboli

$$p(p + 10) = 0\,.$$

Protože je $p \neq 0$, plyne odtud, že musí být $p + 10 = 0$, neboli

$$p = -10\,.$$

Daná soustava (1) až (3) pak zní

$$-10x - 11y = 7\,,$$
$$-15x - 10y = 4\,,$$
$$-35x + 10y = -24$$

a má vzhledem ke (4), (5) zřejmě řešení $x = \frac{2}{5}$, $y = -1$.

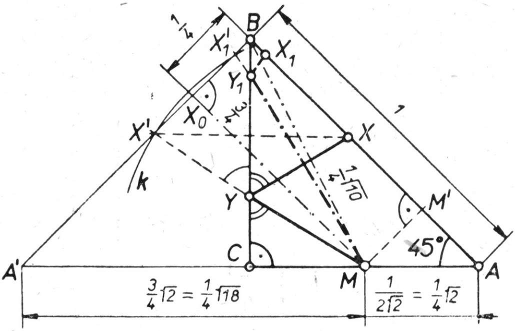
Jestliže je $p = 0$, má soustava (1) až (3) tvar

$$-y = 7, \quad -5x = 4, \quad 5x = -4;$$

její řešení pak je $x = -\frac{4}{5}$, $y = -7$.

Závěr. Daná soustava tří rovnic má řešení jen ve dvou případech, a to je-li $p = 0$ anebo $p = -10$; v obou případech má jediné řešení. Pro všechna ostatní reálná p nemá soustava řešení.

3. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d. Světelný paprsek vyslaný z bodu X ležícího mezi A, B se zrcadlově odrazí na odvěsně BC v bodě Y a dopadne do středu M odvěsny AC. Určete bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla délku d. Proveďte diskusi vzhledem k číslu d.



Obr. 18

Řešení (obr. 18). *Rozbor.* Jestliže bod X ležící mezi A, B je řešením úlohy a odraz paprsku se děje v bodě Y mezi body B, C, potom platí

$$d = XY + YM, \quad \sphericalangle XYB = \sphericalangle MYC .$$

Označme A' obraz bodu A v souměrnosti o ose BC, takže $A'BC$ je v této souměrnosti obrazem trojúhelníka ABC a bod X' uvnitř úsečky $A'B$ je obrazem bodu X. Tu ze souměrnosti plyne

$$d = X'Y + YM, \; \sphericalangle X'YB = \sphericalangle XYB ,$$

tj. $\sphericalangle X'YB = \sphericalangle MYC$; oba tyto úhly jsou vrcholové, takže body M, Y, X' leží v téže přímce a $d = X'Y + YM = X'M$. Je tedy

$$MX' = d .$$

Odtud *konstrukce* (obr. 18): V souměrnosti o ose BC sestrojíme obraz A' bodu A a opíšeme kružnici $k \equiv (M, d)$. Je-li X' společný bod kružnice k a vnitřku úsečky $A'B$, potom určíme průsečík Y přímek MX' a BC; dále označíme X obraz bodu X' v souměrnosti o ose BC. Pak XY je hledaný paprsek, který se odráží v bodě Y od BC a míří do bodu M. Důkaz je patrný z rozboru.

Diskuse. Z požadavku, že bod X má ležet mezi body A, B, vyplývá, že bod X' nutně musí padnout mezi body A', B (všimněme si též, že body přímky $A'B$ s výjimkou vnitřku úsečky $A'B$ nevedou k fyzikálnímu řešení úlohy).

Podle textu je $AB = 1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$. Proto po řadě platí

$$CB = CA = CA' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$CM = AM = \tfrac{1}{2}\, AC = \tfrac{1}{4}\, AA' = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$MA' = \tfrac{3}{2}\, CA = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{18}\,. \qquad (1)$$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník BMC ($\sphericalangle\, C = 90°$) je

$$MB = \sqrt{CB^2 + CM^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{5}{8}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10}\,, \qquad (2)$$

takže je $MB < MA'$ [viz (2) a (1)].

Je-li X_0 pata kolmice vedené bodem M k přímce BA', je $MX_0 \parallel BA$, neboť je $\sphericalangle\, ABA' = 90°$; je tedy

$$\frac{BX_0}{BA'} = \frac{AM}{AA'} = \tfrac{1}{4},$$

tj.

$$BX_0 = \tfrac{1}{4}\,.$$

Dále je

$$MX_0 = \tfrac{3}{4} AB = \tfrac{3}{4}\,. \qquad (3)$$

Na základě toho provedeme diskusi řešitelnosti úlohy. Jestliže je:

[1] $$d = MX_0 = \tfrac{3}{4}\,,$$

má úloha jediné řešení [viz (3)];

[2] $$MX_0 < d < MB$$

neboli

$$\tfrac{3}{4} < d < \tfrac{1}{4}\sqrt{10},$$

má úloha dvě řešení [viz (3) a (2)];

[3] $$MB \leqq d \leqq MA'$$

neboli

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{10} \leqq d \leqq \tfrac{3}{4}\sqrt{2},$$

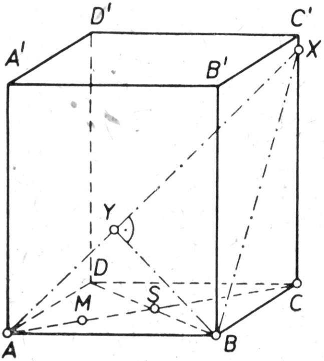
má úloha jediné řešení [viz (2) a (1)]; přitom pro $d = \tfrac{3}{4}\sqrt{2}$ je $X \equiv A$ a jedná se o kolmý odraz paprsku XC od přímky BC.

Neplatí-li pro číslo d žádný ze vztahů [1] až [3], nemá úloha řešení.

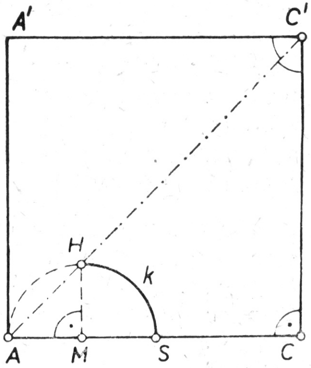
4. Daný je kváder $ABCDA'B'C'D'$, ktorého podstavou je štvorec so stranou dĺžky 1 a jeho výška je v. Bod X prebieha hranu CC'. Vyšetrite geometrické miesto bodov, ktoré sú pätami kolmíc spustených z bodu B na priamky AX. Možno zvoliť výšku v tak, aby toto geometrické miesto obsahovalo aspoň jeden bod, ktorého vzdialenosť od podstavy kvádra je $\frac{1}{3}$?

Riešenie. Všetky trojuholníky ABX sú pravouhlé s preponou AX (obr. 19). Prepony všetkých týchto trojuholníkov ležia v rovine ACC'. Označme Y pätu kolmice spustenej z bodu B na priamku AX. Pretože je uhol $\sphericalangle AYB$ pravý, ležia podľa Thaletovej vety všetky body Y na guľovej ploche K zostrojenej nad priemerom AB. Okrem toho ležia všetky body Y v rovine ACC'. Musia teda ležať na prieseku roviny ACC' s guľovou plochou K. Týmto priesekom je kružnica k s priemerom AS, kde bod S je stredom podstavy $ABCD$ a je jedným z bodov Y (dostaneme ho pre $X \equiv C$). Stred M kružnice k je pritom päta kolmice spustenej zo stredu plochy K na rovinu ACC'. Preto bod M leží na priamke AC a je teda stredom úsečky AS.

Na obr. 20 je znázornená situácia v rovine ACC'. Bod Y neprebieha celú kružnicu k, ale len jej oblúk ohraničený bodom S a priesečníkom H kružnice k s polpriamkou AC'. Poloha bodu H na k teda závisí od veľkosti úsečky CC'(v obr. 20 je vzhľadom na ďalšie zvolené $HM \perp AC$). Pritom ku každému bodu Y oblúku HS dokážeme nájsť na úsečke CC' príslušný bod X, pri ktorom je Y pätou kolmice vedenej bodom B k priamke AX. Oblúk HS je teda hľadaným geometrickým miestom bodov.



Obr. 19



Obr. 20

Zvoľme teraz bod C' tak, aby H bol tým bodom kružnice k, ktorý je najďalej vzdialený od priamky AC (od roviny ABC). Potom je $MH = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (pretože je $AC = \sqrt{2}$). Zvoľme ďalej výšku v kvádra tak, aby telesová uhlopriečka AC' prechádzala bodom H. Potom z podobnosti $\triangle ACC' \sim \triangle AMH$ vyplýva vzťah $CC' = 4\,MH = \sqrt{2}$. Pretože je $\frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1{,}414}{4} =$ $= 0{,}353\ldots > \frac{1}{3}$, môžeme teda vyhovieť druhej časti úlohy, napr. vtedy, ak zvolíme za výšku kvádra dĺžku uhlopriečky jeho podstavy.

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Je-li x celé číslo, potom číslo $x^3 + 2x$ je dělitelné třemi; dokažte.

Řešení. Máme-li zkoumat dělitelnost čísla třemi, užijeme té skutečnosti, že každé celé číslo děleno třemi dává zbytek buď 0, nebo 1, nebo 2. Lze tedy psát číslo x v jednom z těchto tří tvarů

$$x = 3y\,, \qquad (1)$$
$$x = 3y + 1\,, \qquad (2)$$
$$x = 3y + 2\,, \qquad (3)$$

kde y značí celé číslo. V každém z těchto případů nyní vypočteme $x^3 + 2x$.

V případě (1) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 6y = 3(9y^2 + 2y)\,,$$

což je číslo dělitelné třemi.

V případě (2) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 27y^2 + 9y + 1 + 6y + 2 = 3a\,,$$

kde a je číslo celé; číslo $x^3 + 2x$ je tedy opět dělitelné třemi.

V případě (3) je

$$x^3 + 2x = 27y^3 + 54y^2 + 36y + 8 + 6y + 4 = 3b,$$

kde b je číslo celé; číslo $x^3 + 2x$ je tedy i v tomto případě dělitelné třemi.

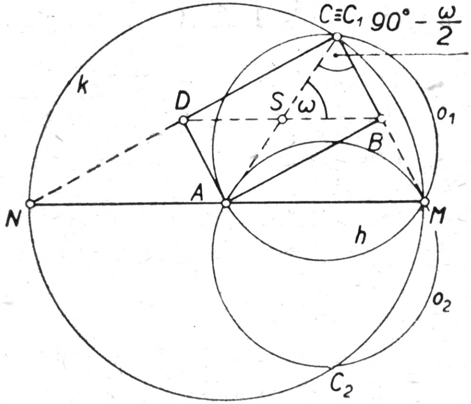
Tím je věta dokázána.

2. Je dána úsečka MN a uvnitř této úsečky je dán bod A; dále je dán ostrý úhel ω.

Sestrojte obdélník $ABCD$ těchto vlastností:

(1) Přímky CB, CD po řadě procházejí body M, N;
(2) je $AB > AD$;
(3) úhel úhlopříček obdélníka je shodný s daným úhlem ω.

Řešení (obr. 21). Je třeba sestrojit tři neznámé vrcholy obdélníka, a to body B, C, D; zřejmě postačí sestrojit bod C; oba zbývající vrcholy B, D pak snadno doplníme jako paty kolmic spuštěných z bodu A na přímky CM, CN. Z této konstrukce vyplývá, že bod B leží mezi body C, M a bod D mezi body C, N.



Obr. 21

Pro bod C určíme dvě geometrická místa bodů. Předně protože $\sphericalangle MCN$ je pravý, leží bod C na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem MN.

Za druhé vypočteme velikost úhlu $\sphericalangle ACM$. Je-li S středem hledaného obdélníka $ABCD$, je $\sphericalangle ASB >$ $> \sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$, neboť podle předpokladu je $AB > AD$. Z rovnoramenného trojúhelníka BCS zjistíme, že

$$\sphericalangle SCB = 90° - \frac{\omega}{2}.$$

Protože body B, D, S leží po řadě uvnitř úseček CM, CN, CA, platí

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle SCB = 90° - \frac{\omega}{2}. \qquad (1)$$

Geometrickým místem bodů X, pro něž platí

$$\sphericalangle AXM = 90° - \frac{\omega}{2},$$

jsou dva oblouky o_1, o_2 sestrojené nad tětivou AM; oblouky o_1, o_2 jsou souměrně sdruženy podle přímky AM.

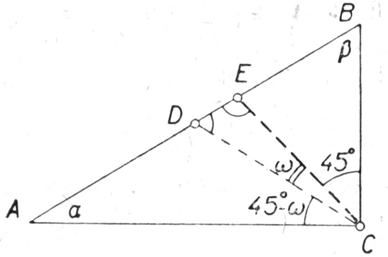
Každý z obou oblouků o_1, o_2 protne kružnici k mimo bod M ještě v jednom bodě. Skutečně kružnice h, jíž náleží oblouk o_1, se nedotýká v bodě M kružnice k; jinak by totiž měly kružnice k, h v bodě M společnou tečnu, která by byla kolmá k přímce AM, a oblouk o_1 by byl polokružnice. To však není možné, neboť obvodový úhel $\sphericalangle AXM$ je podle (1) ostrý.

Sestrojíme tedy dva průsečíky $C_1 \neq M$, $C_2 \neq M$ kružnice k s oblouky o_1, o_2. Protože přímka AC_1 není kolmá k C_1M ani k C_1N (A leží mezi M, N a $C_1M \perp$ $\perp C_1N$), lze sestrojit obdélník $AB_1C_1D_1$. Obdobně se sestrojí obdélník $AB_2C_2D_2$.

Úloha má tedy vždy dvě řešení.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme D stred prepony a E priesečník osi uhla $\sphericalangle ACB$ s preponou AB. Zostrojte tento trojuholník, ak je daná dĺžka úsečky CE a veľkosť uhla $\sphericalangle DCE$. Zistite podmienky riešiteľnosti.

Řešení. Podaří-li se sestrojit trojúhelník CDE, doplníme snadno trojúhelník ABC, neboť podle známé vlastnosti pravoúhlého trojúhelníka je $DA = DB = DC$ (obr. 22).



Obr. 22

Z prvků trojúhelníka CDE je dána délka strany CE a velikost úhlu $\sphericalangle DCE = \omega$. Vypočteme velikost vnitřního úhlu $\sphericalangle CED$. Zvolme označení vrcholů A, B tak, aby bod E ležel mezi body B, D, a označme $\beta = \sphericalangle CBA$. Úhel $\sphericalangle CED$ určíme jako vnější úhel trojúhelníka BCE

$$\sphericalangle CED = 45° + \beta\,. \tag{1}$$

Protože trojúhelník BCD je rovnoramenný, je

$$\beta = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BCD = 45° + \omega\,. \tag{2}$$

Spojením (1) a (2) dostaneme

$$\sphericalangle\, CED = 90° + \omega\,.$$

Trojúhelník CDE sestrojíme ze strany CE a z obou přilehlých úhlů $\sphericalangle\, DCE = \omega$ a $\sphericalangle\, CED = 90° + \omega$. Obě ramena těchto úhlů, která neleží v přímce CE, se protnou podle Euklidova axiómu (v bodě D) právě tehdy, je-li $\omega + 90° + \omega < 180°$ neboli

$$\omega < 45°\,. \tag{3}$$

Když máme doplnit trojúhelník CDE na trojúhelník ABC, je třeba, aby bylo $DA = DB = DC > DE$. Porovnáme tedy délky stran CD, DE trojúhelníka CDE pomocí protějších úhlů. Nerovnost $DE < CD$ skutečně platí, neboť je

$$\omega = \sphericalangle\, DCE < \sphericalangle\, CED = 90° + \omega.$$

Vztah (3) je tedy podmínkou řešitelnosti úlohy.

4. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie je možné vyjadriť ako súčet dvoch zložených čísel (prirodzených).

Riešenie. V ďalšom budeme rozumieť pod číslom prirodzené číslo. Párne číslo môžeme napísať ako súčet dvoch párnych čísel. Nepárne číslo možno zapísať ako súčet nepárneho a párneho čísla. Najmenšie párne zložené číslo sú 4, kým najmenšie nepárne zložené číslo je 9.

Najskôr nájdeme všetky prirodzené čísla, ktoré možno vyjadriť ako súčet dvoch zložených čísel. Rozoznávajme v ďalšom dva prípady:

Prípad [1]. Nech N je párne číslo. Potom možno nájsť jediné číslo p tak, že platí $N = 2p$ čiže $N = 4 + + 2(p - 2)$.

Ak je $p - 2 \geqq 2$ čiže $p \geqq 4$, potom číslo N možno zrejme rozložiť na súčet dvoch zložených čísel. To znamená, že žiadne párne číslo $N \geqq 8$ nevyhovuje požiadavke úlohy, zatiaľ čo čísla

$$4, 6 \tag{1}$$

zrejme túto požiadavku spĺňajú.

Prípad [2]. Nech N je nepárne číslo. Potom existuje jediné číslo p tak, že platí $N = 2p + 1$ čiže $N = = 9 + 2(p - 4)$.
Ak je $p - 4 \geqq 2$ čiže $p \geqq 6$, potom číslo N možno zrejme rozložiť na súčet dvoch zložených čísel. To znamená, že žiadne nepárne číslo $N \geqq 13$ nevyhovuje požiadavke úlohy, zatiaľ čo čísla

$$3, 5, 7, 9, 11 \tag{2}$$

požiadavky úlohy spĺňajú.

Záver. Čísla (1) a (2) sú všetky prirodzené čísla, ktoré spĺňajú požiadavky danej úlohy.

5. Daná je železná kocka s hranou dĺžky h. Z nej boli vyrezané rovnaké otvory tvaru pravidelného štvorbokého hranola s podstavnou hranou dĺžky x. Bočné hrany všetkých otvorov sú rovnobežné s určitou hranou kocky. Tak vzniklo teleso s dutinami, ktorého povrch je približne rovný dvojnásobku povrchu pôvodnej kocky a jeho váha sa približne rovná $\frac{3}{4}$ váhy pôvodnej kocky.

Určite počet otvorov a dĺžku x.

Riešenie. Označme $V = h^3$, $P = 6h^2$ objem a povrch kocky. Objem jednej dutiny je $V_1 = x^2h$ a povrch P jednou dutinou vzrastie o $P_1 = 4xh - 2x^2$. Nech n je prirodzené číslo, ktoré znamená počet dutín. Ďalej nech je V', P' objem a povrch telesa, ktoré z danej kocky vzniklo tak, že sme v nej vytvorili n dutín. Podľa textu úlohy má platiť:

$$P' \doteq 2P\,, \tag{1}$$

$$V' \doteq \tfrac{3}{4}\,V\,. \tag{2}$$

Povrch P vzrastie o nP_1 na $P' \doteq 2P$, tj. $nP_1 \doteq P$ čiže

$$n(4xh - 2x^2) \doteq 6h^2\,.$$

Teda

$$n \doteq \frac{3h^2}{x(2h - x)}\,. \tag{3}$$

O objeme vzniklého telesa platí podľa vzťahu (2)

$$h^3 - nx^2h \doteq \tfrac{3}{4}\,h^3$$

čiže

$$n \doteq \frac{h^2}{4x^2}\,. \tag{4}$$

Porovnaním vzťahov (3) a (4) dostaneme

$$\frac{3h^2}{2hx - x^2} \doteq \frac{h^2}{4x^2}\,.$$

Postupnými úpravami stadiaľ dostaneme (je $h \neq 0$, $x \neq 0$):

$$\frac{3}{2h - x} \doteq \frac{1}{4x}\,,$$

$$12x \doteq 2h - x\,,$$

$$13x \doteq 2h\,,$$

$$x \doteq \tfrac{2}{13}\,h\,. \tag{5}$$

Po dosadení do (4) máme pre n približnú rovnosť:

$$n \doteq h^2 : (4 \,.\, \tfrac{4}{169}\, h^2) = \tfrac{169}{16}\,.$$

Je teda

$$10 < n < 11\,.$$

Skúška. Pre $n = 11$ je:

a) $P' = 6h^2 + 4xhn - 2nx^2 = 6h^2 + 2nx(2h - x) =$

$$= 6h^2 + \frac{2\,.\,11\,.\,2h}{13}\left(2h - \frac{2h}{13}\right) =$$

$$= 6h^2 + \frac{88}{13}\cdot\frac{12h^2}{13} = \frac{6h^2}{13^2}\,.\,(169 + 176) =$$

$$= \frac{6h^2}{169}\,.\,(2\,.\,169 + 7) = 6h^2\,.\left(2 + \frac{7}{169}\right) > 2P.$$

Teda $P' > 2P$, pričom P' je len o málo väčšie než $2P$.

b) Má byť $V' = h^3 - n\,.\,x^2\,.\,h \doteq \frac{3}{4}\,h^3$.
Po dosadení z (5) pri $n = 11$ je

$$V' = h^3\left(1 - \frac{44}{169}\right) = \frac{125}{169}\,h^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{125\,.\,4}{169\,.\,3}\,h^3 =$$

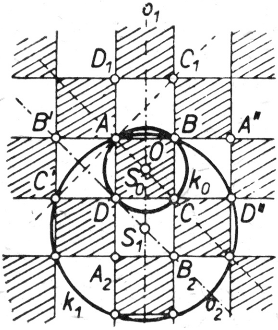
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{500}{507}\,h^3\,.$$

Teda V' je o málo menšie ako $\frac{3}{4}\,V$.

Záverom treba konštatovať, že do kocky s hranou h možno skutočne umiestniť 11 otvorov tvaru kvádra s rozmermi $\frac{2}{13}h$, $\frac{2}{13}h$, h tak, ako to text úlohy vyžaduje.

6. Na šachovnici se 64 poli byly sestrojeny všechny kružnice, jejichž průměr není menší než délka jednoho pole a které neprocházejí vnitřkem žádného černého pole. Určete počet těchto kružnic.

Řešení. Užijeme označení z obr. 23. Čtvercová pole šachovnice budeme krátce nazývat poli; vrcholy polí tvoří čtvercovou síť, délku strany pole označme $2d$. Podle textu úlohy platí o průměru x hledaných kružnic vztah $x \geqq 2d$. Pro $x = 2d$ dostaneme zřejmě 32 kružnic vepsaných do bílých polí. V dalším předpokládáme, že je $x > 2d$.



Obr. 23

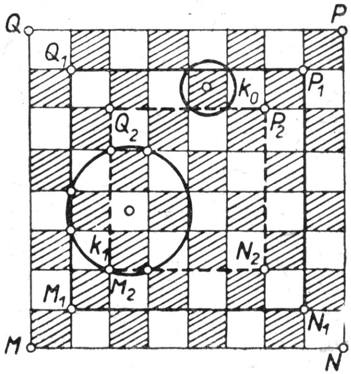
Buď $ABCD$ černé pole a ABC_1D_1, $AB'C'D$, A_2B_2CD, $A''BCD''$ bílá bezprostředně s ním sousedící pole. Mějme kružnici k, která splňuje požadavky úlohy. Tato kružnice nemůže zřejmě ležet v jediném poli, takže prochází několika poli. Z jednoho pole do druhého (jde vesměs o bílá pole) může přejít jedině ve vrcholu pole (v bodu sítě). Nechť tedy k jde vrcholem A, takže prochází polem ABC_1D_1; potom musí procházet ještě buď vrcholem B, anebo vrcholem C_1 (vrchol D_1 při této úvaze můžeme vynechat; situace, kdy kružnice jde body A, D_1, se dostane ze situace, kdy kružnice jde body A, B, a to pomocí osové souměrnosti podle přímky AC_1).

Uvažujme nejprve případ, kdy kružnice k prochází body A, B. Nyní v poli $AB'C'D$ kružnice k prochází buď bodem D, anebo bodem C' (bodem B' neprochází, neboť body B, A, B' leží v téže přímce).

Případ [1]. Nechť kružnice k prochází bodem D, neboli je opsána černému čtverci $ABCD$; označme ji $k_0 \equiv (S_0, r_0)$, kde $r_0 = d\sqrt{2}$. Těchto kružnic je tolik jako černých polí, které nepatří k okrajovým řadám polí šachovnice; je jich tedy $\frac{1}{2}(8-2)(8-2) = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$ (viz v obr. 24 čtverec $M_1N_1P_1Q_1$ o délce strany $6 \cdot 2d$).

Případ [2]. Nechť kružnice k prochází bodem C', neboli je opsána trojúhelníku ABC'; označme ji $k_1 \equiv$ $\equiv (S_1, r_1)$. Přitom S_1 je průsečíkem přímek o_1, o_2, kde o_1 je osa úsečky AB a $o_2 \equiv DB'$; bod S_1 je tedy středem bílého čtverce A_2B_2CD. Z trojúhelníka AS_1O (tj. $\sphericalangle O = 90°$) pro její poloměr $r_1 = S_1A$ dostaneme pomocí Pythagorovy věty $AS_1^2 = OA^2 + OS_1^2$, neboli $r_1 = d\sqrt{10}$, kde $3d < r_1 < 4d$.

Střed S_1 kružnice k_1 je středem bílého pole; kružnice k_1 probíhá těmi bílými poli, jejichž nejvzdálenější strany mají od S_1 vzdálenost nejvýše $5d$ (např. vzdálenost bodu S_1 od přímky C_1D_1). Počet kružnic typu k_1 je roven počtu bílých polí, která dostaneme, když vynecháme z dané šachovnice $MNPQ$ nejprve všechny okrajové řady šachovnice a ve vzniklé šachovnici $M_1N_1P_1Q_1$



Obr. 24

o $6 . 6 = 36$ polích opět vynecháme všechny okrajové řady; zbude nám čtverec $M_2N_2P_2Q_2$, který má $4 . 4 = 16$ polí, z něhož 8 je bílých. Kružnic typu k_1 je tedy 8. Tím je případ [2] vyřízen.

Nyní budeme uvažovat případ, že kružnice k prochází body A, C_1 (bodem C' neprochází, neboť body C_1, A, C' leží v téže přímce); potom ze čtverce $AB'C'D$ tato kružnice vychází buď ve vrcholu D, anebo ve vrcholu B'. Platí však

$$\triangle DAC_1 \cong \triangle ABC' \cong \triangle B'AC_1 ,$$

takže jde o kružnici typu k_1, která je opsána trojúhelníku ABC', a kterou jsme právě vyšetřovali.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány.

Závěr. Jsou tři typy kružnic vyhovujících úloze. První typ jsou kružnice opsané těm černým polím, které nejsou v okrajových řadách šachovnice (pole čtverce $M_1N_1P_1Q_1$); těchto kružnic je 18. Druhý typ jsou kružnice opsané ze středů osmi bílých polí čtverce $M_2N_2P_2Q_2$ na obr. 24 poloměrem $d\sqrt{10}$, kde $2d$ je délka strany pole; těchto kružnic je 8. Třetím typem jsou kružnice vepsané bílým polím, kterých je 32. Hledaný počet kružnic je tedy $18 + 8 + 32 = 58$.

7. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C*

1. Přirozené číslo x je dělitelné šestnácti, jeho ciferný součet v desítkové soustavě je 7, součin jeho číslic je 6. Určete všecka taková čísla x.

Řešení. Vzhledem k tomu, že ciferný součet hledaného čísla x je 7, kdežto součin cifer je 6, jsou jedině možné tyto dva rozklady čísla 6 v součin:

$$6 = 6 . 1 , \tag{1}$$

$$6 = 3 . 2 . 1 . 1. \tag{2}$$

První rozklad vede k dvojcifernému, druhý ke čtyřcifernému číslu. Přitom musí být hledaná čísla dělitelná šestnácti a tedy i čtyřmi; vyhledáme proto nejprve čísla dělitelná čtyřmi; ta mají nutně poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi.

Případ [1]. Rozklad (1) vede jedině k číslu 16, které splňuje požadavky úlohy.

Případ [2]. Poslední dvojčíslí hledaného čísla musí mít na konci cifru 2, a může tedy to být buď 12, anebo 32.

a) Před dvojčíslí 12 musíme vzhledem k rozkladu (2) napsat cifry 1 a 3, což lze učinit dvěma způsoby, a to:

$$1312, 3112 .$$

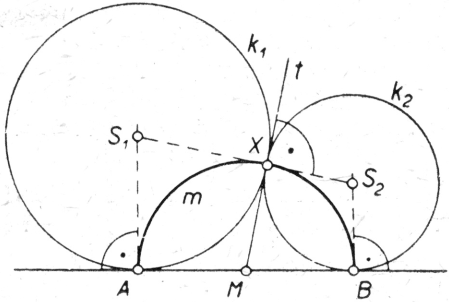
Z obou čísel je jedině číslo 1312 dělitelné šestnácti.

b) Před dvojčíslí 32 musíme vzhledem k rozkladu (2) napsat dvě cifry 1, což vede k jedinému číslu 1132, které zřejmě není dělitelné šestnácti (dokonce ani osmi).

Závěr. Úloze vyhovují právě dvě přirozená čísla, a to 16 a 1312.

2. Daná je priamka AB. Kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú priamky AB po rade v bodoch A, B a majú navzájom vonkajší dotyk v bode X. Vyšetrite, aký útvar vyplnia všetky body dotyku X pre všetky možné také dvojice kružníc k_1, k_2.

Riešenie (obr. 25). Zostrojme spoločnú dotyčnicu t kružníc k_1, k_2 v bode X. Priamka t nie je rovnobežná s priamkou AB, lebo je $t \perp S_1S_2$ (S_1,S_2 sú stredy kružníc k_1, k_2) a S_1S_2 nie je kolmicou k AB (je totiž



Obr. 25

$S_1A \perp AB$, $S_2B \perp AB$, $S_1A \not\parallel S_2B$). Priamka t pretne teda priamku AB v nejakom bode M. Dotyčnice vedené z bodu M ku kružnici k_1 sú priamky $AM \equiv AB$ a t. Body dotyku sú A a X, preto je

$$AM = MX.$$

Z podobného dôvodu je

$$BM = MX.$$

Z toho vyplýva $AM = BM = \frac{1}{2}AB$. Bod M je preto stredom úsečky AB, takže bod X leží na kružnici m zostrojenej nad priemerom AB v danej polrovine s hranicou AB.

Obrátene, každým bodom X (rôznym od bodov A, B) kružnice m prechádza jediná kružnica k_1, ktorá sa dotýka priamky AB v bode A a jediná kružnica k_2, ktorá sa dotýká priamky AB v bode B. Pretože je $MA = MX$, je X bodom dotyku dotýčnice vedenej z bodu M ku kružnici k_1 a z podobného dôvodu je X tiež bodom dotyku dotýčnice vedenej z bodu M ku kružnici k_2. Priamka MX sa teda dotýka oboch kružníc k_1, k_2 v bode X. Dotyk oboch kružníc je vonkajší, pretože kružnica k_2 obsahuje bod B ležiaci mimo kružnice k_1 (na jej dotýčnici) a kružnica k_1 obsahuje bod A ležiaci mimo k_2 (na jej dotýčnici).

Záver. Hľadané geometrické miesto bodov je kružnica m bez bodov A, B. Úsečka AB je jej priemerom.

3. Řešte podle neznámých x, y, z soustavu rovnic s reálným parametrem p:

$$x - py + p^2z = 1\,, \tag{1}$$

$$-p^3x + y - pz = 1\,, \tag{2}$$

$$p^2x - p^3y + z = 1\,. \tag{3}$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametru p.

Řešení. Obě strany rovnice (2) znásobme číslem p a přičtěme ji k rovnici (1); dostaneme

$$x\,(1 - p^4) = 1 + p\,. \tag{4}$$

Nyní znásobíme obě strany rovnice (3) číslem p a přičtěme ji k rovnici (2); obdržíme

$$y\,(1 - p^4) = 1 + p\,. \tag{5}$$

Konečně znásobme rovnici (1) číslem $-p^2$ a přičtěme ji k rovnici (3); dostaneme

$$z\,(1 - p^4) = 1 - p^2\,. \tag{6}$$

Protože platí $1 - p^4 = (1 - p)(1 + p)(1 + p^2)$, je $1 - p^4 = 0$ jedině pro $p = 1$ a $p = -1$. Je-li $p \neq \pm 1$, potom ze (4) až (6) dostáváme jediné řešení, a to

$$x = y = \frac{1}{(1-p)(1+p^2)}, \; z = \frac{1}{1+p^2}. \qquad (7)$$

Tato čísla x, y, z skutečně jsou řešením rovnic (1) až (3), jak se zjistí dosazením.

Pro $p = 1$ soustava (1) až (3) zní

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ -x + y - z &= 1, \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

a nemá řešení; sečtením prvních dvou rovnic dostaneme spor $0 = 2$.

Pro $p = -1$ soustava (1) až (3) zní

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \end{aligned}$$

takže každé řešení rovnice $x + y + z = 1$ je řešením soustavy. Můžeme např. volit čísla y, z; pak je $x = 1 - y - z$. Soustava má nekonečně mnoho (různých) řešení.

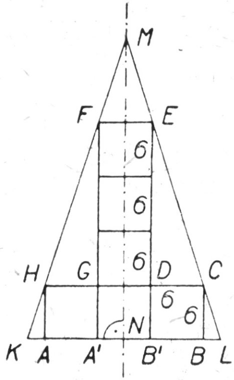
Závěr. Daná soustava má pro každé reálné číslo p různé od 1 nebo -1 řešení dané vztahy (7). Pro $p = 1$ nemá žádné řešení a pro $p = -1$ má nekonečně mnoho řešení $[x = 1 - y - z, y, z]$, při čemž y, z jsou libovolná čísla.

4. Je daný ústrižok plechu v tvare rovnoramenného trojuholníka s podstavou dĺžky 22 cm a ramenom dĺžky 35 cm. Zistite, či možno z tohto plechu vystrihnúť sieť kocky s hranou dĺžky 6 cm tak, aby táto sieť mala tvar písmena T.

Výsledok odôvodnite výpočtom.

Riešenie. (Dĺžky úsečiek sú v cm.) Sieť danej kocky voľme v tvare nevypuklého osemuholníka $ABCDEFGH$

ako na obr. 26 (pritom P je stred úsečky EF), takže má tvar „obráteného“ T. Os úsečky AB je tiež osou úsečky $A'B'$ „dolného stredného“ štvorca. Opíšme sieti rovnoramenný trojuholník MKL, kde $M \equiv CE \,.\, HF$, $K \equiv AB \,.\, HF$, $L \equiv AB \,.\, CE$. Jeho osou súmernosti je priamka MN, ktorá je tiež osou siete kocky.



Obr. 26

Strany štvorcov siete majú dĺžku $d = 6$. Teraz sa budeme zaoberať pravouhlými trojuholníkmi CLB, ECD, EMP (kde po rade $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle P = 90°$ a $\sphericalangle L = \sphericalangle C = \sphericalangle E$). Z podobnosti týchto troch trojuholníkov, ktoré sa okrem pravých uhlov zhodujú tiež v ostrých uhloch $\sphericalangle L$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle E$, vyplýva (pretože podľa daných údajov je $\dfrac{DE}{DC} = \dfrac{18}{6} = 3$)

$$3 = \frac{BC}{BL} = \frac{6}{BL}; \; 3 = \frac{PM}{PE} = \frac{PM}{3}.$$

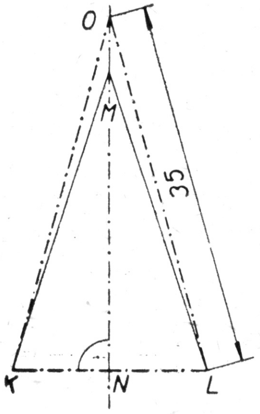
Je teda

$$BL = 2\,, \qquad MP = 9\,, \tag{1}$$
$$MN = MP + PN = MP + 24 = 33.$$

O preponách uvažovaných pravouhlých trojuholníkov dostávame po rade z Pythagorovej vety [pozri (1)]:

$$CL = \sqrt{BC^2 + BL^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$
$$EC = \sqrt{DE^2 + DC^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = 6\sqrt{9+1} = 6\sqrt{10},$$
$$ME = \sqrt{MP^2 + PE^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{9+1} = 3\sqrt{10}.$$

Sčítaním týchto troch úsečiek dostaneme



Obr. 27

$$ML = 11\sqrt{10},$$

kde $\sqrt{10} < 3{,}17$, a teda

$$ML < 35. \qquad (2)$$

Pritom podľa (1) je

$$KL = KA + AB + BL = 2 \,.\, BL + AB = 2 \,.\, 2 + 18 = 22.$$

Teda

$$KL = 22\,. \qquad (3)$$

Pomocný rovnoramenný trojuholník MKL so základňou $KL = 22$ a s ramenom $ML < 35$, do ktorého sa celá sieť kocky vojde, má s daným trojuholníkom KLO (tvaru ústrižku) zhodnú základňu, ale rameno ML je menšie ako rameno daného trojuholníka KLO. Celý trojuholník MLK sa teda vojde do trojuholníka KLO ako na obr. 27. Preto sa tam vojde aj nami pôvodne narysovaná sieť kocky, t.j. sieť kocky sa dá skutočne vystrihnúť z daného ústrižku plechu. Tým je riešenie úlohy prevedené.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Dielňa v 1. týždni splnila plán, t.j. vyrobila n kusov výrobkov. V 2. týždni poklesla výroba oproti 1. týždňu o p %.

O koľko percent musela dielňa zvýšiť svoj výkon z druhého týždňa v treťom týždni, aby na konci týždňa bol splnený trojtýždenný plán?

Na záver preveďte výpočet pre $p = 10$.

Riešenie. V prvom týždni vyrobila dielňa n výrobkov. V druhom týždni vyrobila dielňa

$$v = n - \frac{np}{100} = \frac{n(100 - p)}{100} \qquad (1)$$

výrobkov. V treťom týždni musí zvýšiť výrobu z druhého týždňa o x percent, takže musí vyrobiť

$$v + \frac{vx}{100} \qquad (2)$$

výrobkov. Toto číslo sa rovná súčtu jednak tých n výrobkov, ktoré boli pôvodne plánované na tretí týždeň, jednak tých $\frac{np}{100}$ výrobkov, ktoré neboli vyrobené v druhom týždni, t.j. číslu

$$n + \frac{np}{100} \qquad (3)$$

výrobkov.

Porovnaním (2) a (3) dostávame lineárnu rovnicu pre neznámu x:

$$v + \frac{vx}{100} = n + \frac{np}{100}.$$

Po vynásobení tejto rovnice číslom $\frac{100}{v}$ a po úprave dostaneme:

$$x = \frac{n(100 + p)}{v} - 100 \,. \tag{4}$$

Po dosadení za v z (1) do (4) postupne dostaneme:

$$x = n(100 + p) \,.\, \frac{100}{n(100 - p)} - 100 \,,$$

$$x = \frac{100(100 + p)}{100 - p} - 100 =$$

$$= 100 \,.\, \frac{100 + p - (100 - p)}{100 - p} = \frac{200p}{100 - p} \,.$$

Dieľňa musí teda svoj výkon z druhého týždňa zvýšiť o

$$x = \frac{200p}{100 - p} \text{ percent.}$$

Príklad. V prípade, keď je $p = 10$ (to znamená, že v druhom týždni podala dielňa 90-percentný výkon), dostávame

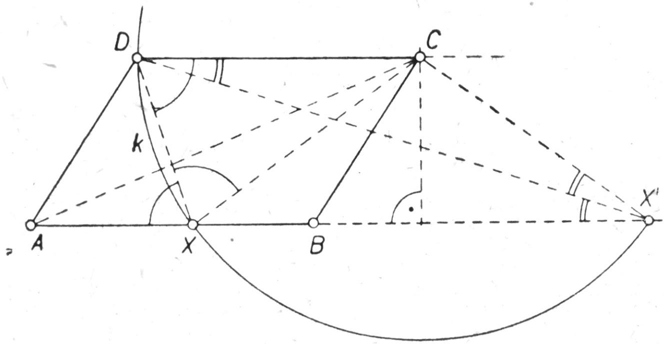
$$= x \,.\, \frac{2000}{90} = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9} < 22{,}3 \,.$$

Ak chce teda dielňa dohnať svoje oneskorenie z druhého týždňa, musí svoj výkon z tohto týždňa v treťom týždni zvýšiť asi o 22,3 %.

2. Daný je rovnobežník $ABCD$, v ktorom $AB > BC$ a uhol $\sphericalangle DAB$ je ostrý. Na priamke AB zostrojte ten bod X, z ktorého vidno úsečky AD, CD pod zhodnými uhlami.

Vyšetrite polohu bodu X vzhľadom na úsečku AB.

Řešení (obr. 28). Podle podmínky úlohy je $\sphericalangle AXD = \sphericalangle DXC$. Podle věty o střídavých úhlech je $\sphericalangle AXD = \sphericalangle XDC$. Trojúhelník DXC je tedy rovnoramenný se základnou DX. Odtud vyplývá konstrukce bodu X: je to společný bod přímky AB a kružnice $k \equiv (C; CD)$.



Obr. 28

Kružnice k má s přímkou AB společný aspoň jeden bod náležející polopřímce BA právě tehdy, je-li $CD \geqq CB$ neboli $AB \geqq BC$; tato podmínka je však splněna podle znění textu úlohy. Tento bod náleží úsečce AB, neboť podle předpokladu je $\sphericalangle DAB$ ostrý, tj. úhel $\sphericalangle ADC$ je tupý a z trojúhelníka ACD pak vyplývá $AC > CD$. Přitom kružnice k protne úsečku AB v jediném bodě X, neboť $\sphericalangle ABC$ je tupý; proto bod X' souměrně sdružený s X podle kolmice

$p \perp AB$ vedené bodem C padne na prodloužení úsečky AB za bod B, přičemž X' leží též na k. Oba body X, X' tedy zřejmě vyhovují požadavkům úlohy, která má dvě řešení.

3. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, které vyhovují rovnici

$$5x + 7y^2 = 1600\,. \tag{1}$$

Řešení. Jestliže dvojice přirozených čísel x, y splňuje rovnici (1), potom platí

$$x = 320 - y^2 - \frac{2y^2}{5}\,. \tag{2}$$

Číslo $2y^2$ musí být dělitelné pěti; to znamená, že i číslo y^2 musí být dělitelné pěti (tj. musí končit nulou nebo pětkou). To znamená dále, že i číslo y musí být dělitelné pěti (snadno se přesvědčíme, že druhé mocniny těch přirozených čísel, která nekončí nulou nebo pětkou, nikdy nekončí nulou nebo pětkou). Číslo y je tedy násobkem pěti, tj. má tvar

$$y = 5z\,, \tag{3}$$

kde z je přirozené číslo. Po dosazení do (2) dostaneme

$$x = 320 - 35z^2$$

neboli

$$x = 5\,(64 - 7z^2)\,. \tag{4}$$

Číslo $64 - 7z^2$ je celé a kladné (jinak by nebylo číslo x přirozené); sestavme tabulku tak, že budeme volit číslo $z = 1, 2, 3$ (pro $z \geqq 4$ je $64 - 7z^2$, a tedy i číslo x záporné). Určíme ze (3) a (4) čísla x, y:

z	1	2	3
$64 - 7z^2$	57	36	1
x	285	180	5
y	5	10	15

Proveďme nyní zkoušku; skutečně platí:

a) $5 \,.\, 285 + 7 \,.\, 5^2 = 1425 + 175 = 1600$;
b) $5 \,.\, 180 + 7 \,.\, 10^2 = 900 + 700 = 1600$;
c) $5 \,.\, 5 + 7 \,.\, 15^2 = 25 + 1575 = 1600$.

Jsou právě tři dvojice přirozených čísel, které splňují rovnici (1); jsou to dvojice: $x = 285$, $y = 5$; $x = 180$, $y = 10$; $x = 5$, $y = 15$.

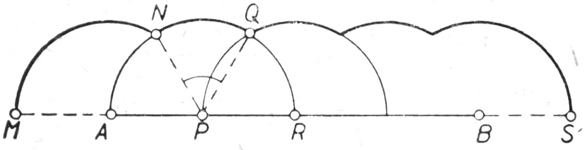
Jiné řešení. Rovnici (1) postupně upravujeme takto

$$x = \frac{1600 - 7y^2}{5},$$

$$x = \frac{7(228 - y^2) + 4}{5}. \tag{5}$$

Nyní $228 - y^2$ musí být přirozené číslo, tj. nejvýše může být $y^2 = 225 = 15^2$. Vyzkoušejme čísla od $y = 1$ do $y = 15$ dosazením do (5); snadno zjistíme, že jedině čísla $y = 5$, $y = 10$, $y = 15$ vedou k vyhovujícím dvojicím $[x = 285, y = 5]$, $[x = 180, y = 10]$, $[x = 5, y = 15]$.

4. Úsečka AB dĺžky d je rozdelená na n zhodných úsečiek; z koncových bodov týchto úsečiek sú opísané kružnice polomerom $\frac{d}{n}$. Vypočítajte dĺžku čiary, ktorá sa skladá z hrubo vytiahnutých oblúkov kružníc, a dokážte, že pre každé číslo n je dĺžka tejto čiary väčšia ako d (pozri obr. 29).



Obr. 29

Řešení (obr. 29). Zaveďme označení podle obrázku; přitom je $AP = \frac{d}{n}$, kde n je libovolné přirozené číslo. Označme x délku silně narýsované čáry.

Poloměry shodných kružnic mají velikost $r = \frac{d}{n}$. Oblouky, s výjimkou prvního a posledního oblouku čáry, příslušejí ke středovým úhlům velikosti 60°; např. je $\sphericalangle NPQ = 60°$, neboť trojúhelníky APN, PRQ a tím i NPQ jsou rovnostranné. Délka y každého z těchto oblouků, jichž je celkem $n - 1$, je

$$y = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d}{n} = \frac{\pi d}{3n}.$$

První a poslední oblouk naší čáry příslušejí ke středovým úhlům 120° (je $\sphericalangle MAN = 120°$), tj. každý má délku $2y$.

Je tedy
$$x = (n - 1)\,y + 2\,.\,2y = (n + 3)\,y$$
neboli
$$x = \frac{\pi(n + 3)}{3n}\,.\,d\,. \tag{1}$$
Ještě dokážeme, že je $x > d$ pro každé přirozené číslo n.

Vzorec (1) napíšeme ve tvaru
$$x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{n + 3}{n}\,.\,d = \frac{\pi}{3}\,.\left(1 + \frac{3}{n}\right).\,d\,.$$
Víme, že je $\frac{\pi}{3} > 1$, $1 + \frac{3}{n} > 1$, proto je $\frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{3}{n}\right) > 1$, $x > d$.

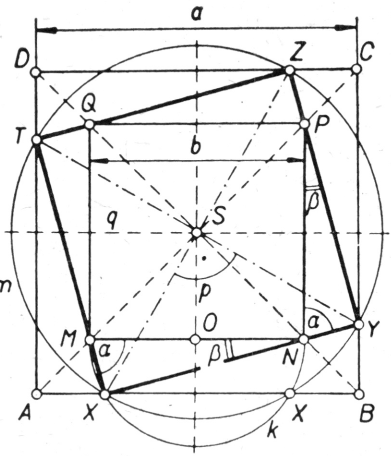
5. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany a a čtverec $MNPQ$ o délce strany b, přičemž je $a > b$; vrcholy M, N, P, Q leží na úhlopříčkách AC, BD (viz obr. 30). Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$.

Stanovte počet řešení úlohy vzhledem k daným číslům a, b.

Řešení. *Rozbor* (viz obr. 30). Označme S společný střed čtverců $ABCD$, $MNPQ$ a $p \parallel BC$, $q \parallel AB$ rovnoběžky vedené bodem S ke stranám obou čtverců.

Předpokládejme, že jsme sestrojili hledaný čtverec $XYZT$. Potom je trojúhelník MNX pravoúhlý s přeponou MN o středu O; Thaletova kružnice $k \equiv (O, \frac{1}{2}b)$ nutně obsahuje vrchol X pravého úhlu $\sphericalangle MXN$.

Odtud plyne *konstrukce*: Sestrojme kružnici $k \equiv$



Obr. 30

$\equiv (O, r = \frac{1}{2}b)$ nad úsečkou MN jako průměrem a označme X jeden z jejích společných bodů s přímkou AB.

Opišme kružnici $m \equiv (S; SX)$; na ní leží další vrcholy Y, Z, T hledaného čtverce $XYZT$, přičemž je např. $BY = AX$ atd.

Důkaz. Otočme celý útvar okolo bodu S o pravý úhel tak, že bod A přejde v B, bod M v N a bod B v C atd. (víme, že je to možné, neboť $SA = SB$, $SM = SN$). Přitom úsečka AB přejde v úsečku BC a bod X v bod Y; je tedy $SX = SY$. Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYS snadno doplníme na čtverec $XYZT$ pomocí souměrnosti o středu S, podle něhož oba dané čtverce jsou souměrné.

Ještě musíme dokázat, že bod N leží na přímce XY. Označme α, β ostré úhly $\sphericalangle M$, $\sphericalangle N$ v pravoúhlém trojúhelníku MNX; víme, že je

$$\alpha + \beta = 90° . \qquad (1)$$

Víme dále, že je

$$\triangle MNX \cong \triangle NPY ,$$

neboť při otáčení, které jsme při konstrukci bodu Y prováděli, přešel první trojúhelník ve druhý. Je tedy $\sphericalangle YNP = \alpha$. A nyní vzhledem k (1) platí

$$\sphericalangle XNM + \sphericalangle MNP + \sphericalangle YNP = \beta + 90° + \alpha = \\ = 180°;$$

proto polopřímky NX, NY tvoří přímý úhel, tj. body X, N, Y leží v přímce. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky AB a kružnice k. Vzdálenost v jejího středu O od AB je $v = \frac{1}{2}(a - b)$, její poloměr je $r = \frac{1}{2}b$. Podle známé věty o vzájemné poloze přímky a kružnice dospějeme k tomuto výsledku:

Je-li $v < r$ neboli $a - b < b$, tj.

$$b < a < 2b ,$$

jsou dvě různá řešení $XYZT$, $X'Y'Z'T'$, souměrně sdružená podle středních příček čtverců $ABCD$, $MNPQ$.

Je-li $v = r$ neboli

$$a = 2b ,$$

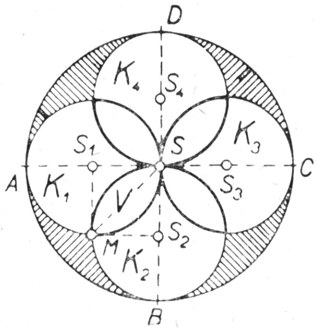
je jediné řešení $XYZT$, kde X je střed úsečky AB.

Je-li $v > r$ neboli

$$a > 2b ,$$

nemá úloha řešení.

6. Je daný kruh K so stredom S a polomerom r. Bodom S vedieme dva kolmé priemery AC, BD tohto kruhu. Nad úsečkami SA, SB, SC, SD ako priemermi zostrojíme kruhy K_1, K_2, K_3, K_4 (pozri obr. 31). Vypočítajte obsah P štvorlístka, ktorého každý lístok je spoločnou časťou niektorých dvoch kruhov.



Obr. 31.

Ďalej vypočítajte obsah Q vyšrafovanej časti roviny, ktorá vznikne oddelením kruhov K_1, K_2, K_3, K_4 od kruhu K.

Riešenie. Označme (pozri obr. 31) po rade S_1, S_2, S_3, S_4 stredy kruhov K_1, K_2, K_3, K_4, ktorých polomery sú $\frac{1}{2}r$. Kružnice $k_1 \equiv (S_1, \frac{1}{2}r)$, $k_2 \equiv (S_2, \frac{1}{2}r)$ majú okrem bodu S spoločný bod M, pričom je $\frac{1}{2}r = S_1S = S_2S = S_1M = S_2M$, $\sphericalangle S_1SS_2 = 90°$. SS_1MS_2 je tedy štvorec a platí

$$\sphericalangle SS_1M = \sphericalangle SS_2M = 90°.$$

Označme V obsah spoločnej časti kruhov K_1, K_2. Úseč kruhu K_1 prislúchajúca pravému stredovému uhlu SS_1M má obsah $\frac{1}{2}V$. Obsah x tejto úseče však vieme vypočítať. Číslo x je rozdiel štvrtiny obsahu kruhu K_1 a obsahu trojuholníka SMS_1, v ktorom je $S_1M = S_1S = \frac{1}{2}r$, $\sphericalangle S_1 = 90°$. Platí teda

$$x = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{\pi - 2}{16}r^2.$$

Pre obsah V dostávame teda

$$V = \frac{\pi - 2}{8} r^2,$$

a preto, že $P = 4V$, je

$$P = \frac{\pi - 2}{2} r^2 \doteq 0{,}571\, r^2\,,$$

čo sme mali vypočítať.

Obsah Q dostaneme z obsahu πr^2 kruhu K, keď od neho odčítame obsah $\frac{1}{4}\pi r^2$ každého z kruhov K_1, K_2, K_3, K_4 čiže číslo πr^2 a pripočítame obsah P. Je teda

$$P = Q\,.$$

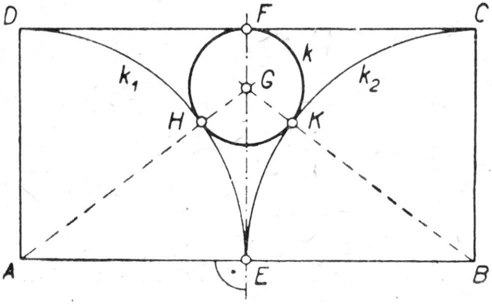
Záver. Vyšrafovaná časť obrazca má ten istý obsah ako štvorlístok.

9. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D*

1. Narysujte obdĺžnik $ABCD$ s rozmermi $AB = 12$ cm a $BC = 6$ cm. V tomto obdĺžniku narysujte štvrťkružnice k_1, k_2 so stredmi A, B a s polomermi 6 cm.

Vypočítajte polomer kružnice k, ktorá sa dotýka priamky CD i oboch štvrťkružníc k_1, k_2 a potom kružnicu k zostrojte.

Riešenie (obr. 32). Označme x polomer hľadanej kružnice k. Dotyk kružnice k s k_1 i s k_2 je nutne vonkajší, pričom kružnica k musí ležať v polrovine CDA, kde ležia aj obe kružnice, ktorých časťami sú štvrťkružnice k_1, k_2 (kružnica leží vždy celá na jednej strane svojej dotyčnice). Stred G kružnice k leží nutne na strednej priečke EF obdĺžnika $ABCD$. To preto, že je $GA = 6 + x = GB$, takže bod G padne nutne na os úsečky AB.



Obr. 32

Z pravouhlého trojuholníka AGE s preponou $AG = 6 + x$ dostaneme

$$AG^2 - AE^2 = GE^2,$$

čiže

$$AG^2 - (EF - FG)^2 = AE^2$$

a po dosadení

$$(6 + x)^2 - (6 - x)^2 = 6^2 .$$

Po úpravách dostaneme

$$x = \tfrac{3}{2} .$$

Zostrojíme teda os EF úsečky AB (pozri obr. 32) a na polpriamku FE nanesieme úsečku $FG = \frac{3}{2}$ (je to $\frac{1}{4}AD$), opíšeme kružnicu $k \equiv (G, \frac{3}{2})$ a na úsečkách AG, BG a štvrťkružniciach k_1, k_2 zostrojíme dotykové body H, K. Správnosť konštrukcie vyplýva z toho, že

$$AE^2 + EG^2 = 6^2 + (6 - \tfrac{3}{2})^2 = 6^2 + (\tfrac{9}{2})^2 =$$

$$= \frac{144 + 81}{4} = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

a ďalej je $AG = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$, ako má byť podľa Pythagorovej vety použitej na trojuholník AGE. Tým je úloha vyriešená.

2. Dílna plnila plán na 100 %. Když několik dělníků onemocnělo chřipkou, zvýšili ostatní dělníci pracovní výkon o 20 %; avšak i potom plnila dílna denní plán jen na 90 %. Po onemocnění dalších čtyř dělníků se podařilo zbývajícím dělníkům dosáhnout původního výkonu dílny, když svůj pracovní výkon zvýšili o 25 % jednou již zlepšeného výkonu.

Vypočtěte, kolik bylo původně v dílně dělníků a kolik jich celkem onemocnělo.

Řešení. Označme x původní počet dělníků v dílně a y počet dělníků, kteří prvně onemocněli; mysleme si, že jeden dělník původně v dílně vyrobil např. v kusů výrobků. Pak platí v prvním období chřipky:

$$v(x - y) \,.\, 1{,}2 = 0{,}9\, xv\,, \tag{1}$$

neboť za 1 den každý z dělníků plnil denní plán na 120 % a vyrobil $v \,.\, \frac{120}{100}$ výrobků; vyráběli však celkem jen 90 % denního výkonu původních x dělníků, tj. $vx.\ 0{,}9$.

V druhém období zbylo $x - y - 4$ dělníků; každý z nich vyráběl 125 % denního výkonu z prvního období chřipky, tj. $v.\ 1{,}2 \,.\, 1{,}25$, tedy $x - y - 4$ dělníků vyrobilo

$$v(x - y - 4) \,.\, 1{,}2 \,.\, 1{,}25\,,$$

což je původní denní výkon celé dílny, tj. vx. Platí tedy

$$v(x - y - 4) \,.\, 1{,}2 \,.\, 1{,}25 = vx\,. \qquad (2)$$

Obě strany rovnic (1), (2) znásobme číslem $\frac{1}{v}$; dostaneme po snadné úpravě soustavu

$$0{,}3x = 1{,}2y\,,$$
$$0{,}5x - 1{,}5y = 6\,.$$

Soustavu upravíme na tvar

$$x = 4y\,,$$
$$x - 3y = 12\,.$$

Odtud snadno dostaneme

$$y = 12, \qquad x = 48;$$

všech dělníků bylo 48, nejdříve jich onemocnělo 12, později se počet nemocných zvýšil na 16.

Zkouška. 48 dělníků denně vyrábělo $48v$ výrobků. Denní výroba po prvním onemocnění byla

$$v \,.\, 36 \,.\, \frac{120}{100} = 36 \,.\, 1{,}2v = 43{,}2v;$$

přitom 90 %ní denní výkon dá $v.\ 48 \,.\, 0{,}9$ výrobků, což je vskutku $43{,}2v$.

Po druhém onemocnění zbylo 32 dělníků, kteří vyráběli

$$v.32.\frac{120}{100}\cdot\frac{125}{100} = v \,.\, 4 \,.\, \frac{120}{100}\cdot\frac{125 \,.\, 8}{100} = v \,.\, 4 \,.\, 12 = 48v,$$

což je původní denní výkon dílny.

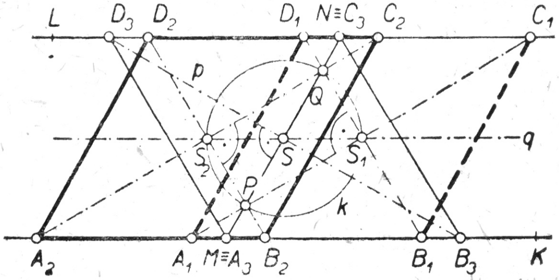
3. Je dán úhel $\sphericalangle KMN = 60°$, přičemž je $MN = 6$ cm. Bodem N sestrojíme přímku $NL \parallel MK$ a na úsečce MN sestrojíme body P, Q tak, aby platilo $MP = NQ = 1$ cm.

Sestrojte tři různé kosočtverce, z nichž každý má tyto vlastnosti:

(1) Dvě protější strany kosočtverce leží po řadě na přímkách MK, NL.

(2) Každý z bodů P, Q leží na některé z úhlopříček hledaného kosočtverce.

Řešení (obr. 33). Narýsujeme úhel $\sphericalangle KMN = 60°$, přičemž je $MN = 6$ cm; sestrojíme přímku $NL \parallel MK$ a uvnitř úsečky MN sestrojíme body P, Q, o nichž platí $MP = NQ = 1$ cm.



Obr. 33

Jsou dvě možnosti: Oba body P, Q padnou na touž úhlopříčku hledaného kosočtverce anebo každý padne na jinou z úhlopříček hledaného kosočtverce. Podle známé věty má hledaný kosočtverec úhlopříčky navzájem kolmé.

Případ [1]. Označme S společný střed úseček MN, PQ a považujme MN za úhlopříčku hledaného rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$, kde $A_3 \equiv M$, $C_3 \equiv N$ a body B_3, D_3 jsou po řadě průsečíky přímky $p \perp MN$, vedené bodem S, s danými rovnoběžkami MK, NL.

Případ [2]. Je-li S_1 střed rovnostranného rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ druhého typu, potom bod S_1 nutně leží na ose q pásu rovnoběžek MK, NL, a to spolu s bodem S; bodem S tedy vedeme přímku $q \parallel MK$. Nechť bod P leží na úhlopříčce S_1A_1 a bod Q na úhlopříčce S_1D_1 (body P, Q jsou zřejmě přímkou q odděleny), přičemž je úhel $\sphericalangle PS_1Q = 90°$. Bod S_1 proto nutně leží na Thaletově kružnici $k \equiv (S, SP)$. Odtud *konstrukce*:

Středem S úsečky PQ sestrojíme rovnoběžku $q \parallel MK$ a nad úsečkou PQ jako průměrem opíšeme Thaletovu kružnici k; protože přímka q prochází středem této kružnice, má s ní dva různé společné body S_1, S_2, takže PS_1QS_2 při vhodné volbě označení bodů S_1, S_2 je obdélník.

Kolmice S_1P, S_1Q vytínají na přímce MK body A_1, B_1 a na přímce NL body C_1, D_1; čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ splňuje požadavky úlohy (je to rovnoběžník, neboť se jeho úhlopříčky vzájemně půlí, a je rovnostranný, což vyplývá z kolmosti jeho úhlopříček).

Bod S_2 vede k druhému rovnoběžníku $A_2B_2C_2D_2$, o němž se snadno usoudí, že vznikne posunutím rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ o úsečku S_1S_2, takže oba sestrojené rovnostranné rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ jsou shodné.

Tím je úloha rozřešena.

4. Žák měl řešit rovnici
$$\frac{x+2}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x+1)}.$$
Opsal ji však s chybami: v čitateli na levé straně rovnice napsal chybně druhý člen a ve jmenovateli na pravé straně místo znaménka plus napsal znaménko minus. Přesto při správném řešení chybně opsané rovnice obdržel kořen dané rovnice.

Jak zněla chybně opsaná rovnice?

Řešení. Nejprve najdeme řešení dané rovnice; znásobme obě strany dané rovnice číslem $7(x+1)\,(7x+23)$; dostaneme postupně
$$\begin{aligned} 7(x+1)\,(x+2) &= (7x+23)\,(x-2), \\ 7(x^2+3x+2) &= 7x^2+9x-46, \\ 21x-9x &= -46-14, \\ 12x &= -60, \\ x &= -\tfrac{60}{12} = -5. \end{aligned}$$
Proveďme hned zkoušku správnosti. Označme L, P výsledek dosazení $x=-5$ do levé a do pravé strany dané rovnice. Dostáváme
$$L = \frac{-5+2}{-35+23} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4},$$
$$P = \frac{-5-2}{7(-5+1)} = \frac{-7}{7\,.\,(-4)} = \frac{1}{4},$$
takže je $L = P$.

Špatně napsaná rovnice vypadala takto:
$$\frac{x+p}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x-1)},$$

kde p je nějaké známé číslo. Tato rovnice však má rovněž řešení $x = -5$; dosaďme do ní toto číslo. Dostaneme

$$\frac{-5+p}{-35+23} = \frac{-5-2}{7(-5-1)}$$

neboli

$$\frac{-5+p}{-12} = \frac{-7}{7\,.\,(-6)};$$

po zkrácení zlomku na pravé straně dostaneme

$$\frac{-5+p}{-12} = \frac{1}{6}.$$

Je to rovnice pro neznámé číslo p; řešme ji. Znásobme obě strany rovnice číslem -12; dostaneme postupně

$$\begin{aligned} -5 + p &= -2\,, \\ p &= -2 + 5\,, \\ p &= 3\,. \end{aligned}$$

Žák tedy chybně napsal místo dané rovnice tuto rovnici:

$$\frac{x+3}{7x+23} = \frac{x-2}{7(x-1)}.$$

Ta má řešení $x = -5$, neboť dosazení do levé a do pravé strany jsou:

$$L = \frac{-5+3}{-35+23} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6},$$

$$P = \frac{-5-2}{7(-5-1)} = \frac{-7}{7\,.\,(-6)} = \frac{1}{6},$$

takže vskutku je $L = P$.

Tím jsme úlohu rozřešili.

10. NĚCO O METODÁCH ŘEŠENÍ ÚLOH

V brožurách matematické olympiády najdete každý rok tzv. vzorová řešení soutěžních úloh. Jsou to buď řešení autorská, která vypracovali autoři úloh, nebo některá pěkná řešení účastníků soutěže. Otištěná řešení však mají zpravidla jeden nedostatek: předvádějí sice pěkné, přesné — někdy i elegantní a vtipné způsoby řešení úloh, ale obvykle neříkají, jak se na takový způsob řešení přijde. Domníváme se, že čtete naše brožury proto, abyste se naučili řešit matematické úlohy; a to půjde ztěžka, budete-li jen studovat hotová, třebas vybroušená řešení úloh. Proto vám chceme v této brožuře ukázat aspoň na několika příkladech, jak je možné hledat metodu řešení. Metody, které uvádíme, nejsou ovšem jediné možné; jistě sami objevíte jiné. Ale snad si při našich ukázkách aspoň uvědomíte, že metodu řešení se vždy pokoušíme vyhledat tím, že úlohu zařaďujeme do skupiny úloh, které se řeší jistými nám známými způsoby.

Jako první ukázku uvedeme úlohu **B-I-1**, tj. úlohu č. 1, I. kolo, kategorie B); text úlohy nebudeme opakovat (viz str. 55), začneme přímo s úvahami.

Abychom sestrojili hledaný trojúhelník ABC, musíme sestrojit neznámé vrcholy B, C. Pro každý z nich máme jedno geometrické místo bodů (přímky q, p); mimoto víme, že úsečka BC prochází bodem M a je jím dělena v známém poměru: Platí totiž $MB : MC = MX : MY$, kde X, Y jsou průsečíky přímek q, p s libovolnou přímkou procházející bodem M.

Konstruktivní úloha tohoto typu se obvykle řeší stejnolehlostí: najde se obraz q' přímky q v stejnolehlosti se středem M a koeficientem $-MY : MX$ a určí se společné body čar p, q'; mezi nimi musí být bod C. Bohužel v našem případě je $q' \equiv p$, a proto tato metoda nevede k cíli.

Jiný nápad: pokusíme se pro bod B určit další geometrické místo bodů, a to přímku AB. Pro tuto přímku je třeba určit jen směr, protože bod A je dán. Úsečka AB je úhlopříčkou kosočtverce, který vznikne, překlopíme-li trojúhelník ABC kolem přímky AB do polohy ABC'. Přímka AB je pak osou úsečky CC' a také osou úsečky MM', kde M' je bod vzniklý překlopením bodu M kolem přímky AB. Protože je zřejmě $BC' \equiv q$, leží bod M' na přímce q a dovedeme jej sestrojit, neboť je $AM' = AM$. Přenecháváme čtenářům, aby si řešení dokončili sami.

Jiný nápad: místo rovnoramenného trojúhelníka ABC budeme sestrojovat rovnoramenný lichoběžník $ABMN$ se základnami AB, MN; neznámé jsou vrcholy B, N. Pro každý z nich máme jedno geometrické místo bodů: pro bod B přímku q, pro bod N přímku p. Obě úhlopříčky AM, BN se protínají v bodě Q a platí $BQ : NQ = AQ : MQ$. Tento poměr je však znám, neboť podle jisté vlastnosti lichoběžníka je $AQ : MQ = BC : MC = XY : XM$ (viz první způsob řešení). Dovedeme tedy sestrojit bod Q a pak i body B, N, C. Při tomto způsobu řešení jsme použili vlastně pro lichoběžník $ABMN$ metody, která selhala v prvním případě pro trojúhelník ABC.

Druhá ukázka se týká úlohy **C-I-1** (viz str. 76). Nebudeme vycházet z formulace důkazové úlohy, ale zadáme úlohu raději takto: máme nalézt všechna přirozená čísla x, pro něž je číslo $x^3 + 2x$ dělitelné třemi.

Je zřejmé: je-li x dělitelné třemi, je také číslo $x^3 + 2x$ dělitelné třemi. Není-li x dělitelné třemi, dává po dělení třemi zbytek buď 1, nebo 2; lze je tedy napsat v jednom z tvarů

$$x = 3n + 1, \qquad x = 3n + 2\,, \tag{1}$$

kde n je celé číslo nezáporné. Takovéto vyjádření čísla x vzhledem k děliteli 3 se zpravidla vždy osvědčí při zkoumání dělitelnosti třemi u složitějších výrazů závislých na x.

Vypočteme pro obě vyjádření (1) výraz $x^3 + 2x$ a úloha bude rozřešena; vyjde totiž

$$x^3 + 2x = (3n + 1)^3 + 2(3n + 1) = 27n^3 + 27n^2 + \\ + 9n + 1 + 6n + 2 = 3k\,,$$

$$x^3 + 2x = (3n + 2)^3 + 2(3n + 2) = 27n^3 + 54n^2 + \\ + 36n + 8 + 6n + 4 = 3\,l\,.$$

Tento postup je možná méně elegantní než řešení autorské, ale zato je přirozenější a ukazuje obecnou metodu pro řešení úloh tohoto druhu.

Jako další ukázky uvádíme úlohy III. kola.

Úloha A-III-1. Je dán trojčlen

$$2x^2 - x - 36\,.$$

Určete všechna celá čísla x, pro něž je hodnota daného trojčlenu rovna druhé mocnině prvočísla.

Řešení. První pokus směřuje k zjištění, zda lze daný trojčlen rozložit v součin lineárních dvojčlenů, které nabývají pro celočíselná x celočíselných hodnot. V tom případě bude řešení jednoduché. Každý z těchto dvojčlenů musí totiž nabývat pro hledané x hodnoty buď ± 1, nebo $\pm p$, nebo $\pm p^2$ (kde p je prvočíslo) a hledané x se určí řešením lineární rovnice. Je ovšem třeba hned uvážit toto: nezdaří-li se rozložit trojčlen uvedeným způsobem, nemusí být úloha neřešitelná. Tak např. trojčlen $2x^2 - x + 21$ nelze rozložit v součin lineárních činitelů s reálnými koeficienty, a přesto pro $x = 4$ nabývá hodnoty $49 = 7^2$. Trojčlen $2x^2 - x - 17$ lze sice rozložit v lineární činitele, ale s koeficienty iracionálními

$$2x^2 - x - 17 = 2\left(x - \frac{1 + \sqrt{137}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{137}}{4}\right);$$

přesto pro $x = 6$ nabývá tento trojčlen hodnoty $49 = 7^2$. V těchto případech vede naše úloha na neurčitou rovnici druhého stupně, např. $2x^2 - x - 17 = y^2$, kterou upravíme na tvar $(4x - 1)^2 - 8y^2 = 137$; tuto rovnici máme řešit celými čísly x, y a vybrat navíc ta řešení, kde y je prvočíslo. To je ovšem úloha značně složitější.

Tímto způsobem řešil danou úlohu Peter Hatala, žák třídy III.a SVVŠ v Bratislavě v Novohradské ulici. Označil si $4x - 1 = A$ a po úpravě dospěl k rovnici $A^2 - 289 = 8p^2$, neboli

$$8p^2 = (A + 17)(A - 17). \qquad (*)$$

Dále uvažoval takto: Je-li p sudé, je $p = 2$, vyjde $A^2 = 321$, což je nemožné, neboť A je číslo celé. Je-li p liché, je také A liché a čísla $A + 17$, $A - 17$ jsou sudá. Je tedy třeba rozložit číslo $8p^2$ v součin dvou sudých činitelů; protože je p liché, je to možné jen šesti způsoby $8p^2 = (\pm 2p).(\pm 4p) = (\pm 2p^2).(\pm 4) =$

$= (\pm 4p^2) \,.\, (\pm 2)$. Nyní zkoumá jednotlivé případy (např. $A + 17 = 2p$, $A - 17 = 4p$ atd.) a po vyloučení neznámé A dostane p ($p = -17$). Po vynechání nevyhovujících čísel p dostane všecka řešení úlohy: nejprve p a pak x. Výhodnější by ovšem bylo vyloučit p, určit A, pak x a provést zkoušku, zda p, které vyjde z rovnice (*), je skutečně prvočíslo.

V úloze A-III-1 však je trojčlen rozložitelný žádaným způsobem. Kvadratická rovnice $2x^2 - x - 36 = 0$ má kořeny $\frac{9}{2}$, -4 a rozklad zní

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4)\,.$$

Nyní musí být buď

$$[1] \quad 2x - 9 = \pm 1, \quad x + 4 = \pm p^2,$$

nebo

$$[2] \quad x + 4 = \pm 1, \quad 2x - 9 = \pm p^2,$$

nebo

$$[3] \quad x + 4 = \pm p, \quad 2x - 9 = \pm p\,.$$

V případě [1] dostaneme z první rovnice buď $x = 5$, nebo $x = 4$; druhá rovnice dá buď $x + 4 = 9$, nebo $x + 4 = 8$. Dostáváme tedy jedno řešení

$$x_1 = 5\,.$$

V případě [2] dostaneme z první rovnice buď $x = -3$, nebo $x = -5$; druhá rovnice dá buď $2x - 9 = -15$, nebo $2x - 9 = -19$. Nevychází tedy žádné další řešení, neboť čísla 15 ani 19 nejsou druhé mocniny prvočísel.

V případě [3] musí být $x + 4 = 2x - 9$; odtud vychází $x = 13$, $(x + 4)(2x - 9) = 17^2$; máme tedy druhé řešení úlohy

$$x_2 = 13\,.$$

Tím je úloha A-III-1 úplně rozřešena.

Úloha A-III-2 zní: V rovině je dána soustava pravoúhlých souřadnic x, y. Vyšetřte množinu všech bodů, jejichž souřadnice v této soustavě splňují nerovnosti:

$$0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \tag{1a}$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leqq y \leqq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x}. \tag{1b}$$

Načrtněte obraz této množiny.

K **řešení** této úlohy není třeba mnoho důvtipu. Jde zřejmě jen o úpravu druhé dvojice nerovností, aby vztahy mezi x, y byly jednodušší, tj. aby na pravé i levé straně byl pokud možno jen jeden člen. Pokud jde o pravou nerovnost (1b), nabízejí se přirozeně vzorce z goniometrie

$$\sqrt{2}\,|\cos x| = \sqrt{1 + \cos 2x}, \quad \sqrt{2}\,|\sin x| = \sqrt{1 - \cos 2x}. \tag{2}$$

Protože platí (1a), je $\cos x \geqq 0$, $\sin x \geqq 0$ a absolutní hodnoty ve vzorcích (2) lze vynechat. Dále upravíme

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = \sqrt{2}\left[\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] =$$
$$= \sqrt{2}\,.\,2\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \tag{3}$$

Dále upravíme levou nerovnost (1b) podle vzorců

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right|, \tag{4a}$$

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right|. \qquad (4b)$$

Také ve vzorcích (4a) a (4b) chceme odstranit absolutní hodnoty. Protože platí (1a), je

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4} - x \leqq \frac{\pi}{4};$$

bude tedy nutné rozlišit d v a p ř í p a d y :

[1] Je-li $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$, je

$$0 \leqq \frac{\pi}{4} - x \leqq \frac{\pi}{4}, \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqq 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqq 0,$$

tj.

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} =$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2} \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin x) = -2\sin x,$$

neboli

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2\sin x. \qquad (5)$$

[2] Je-li $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, je

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4} - x \leqq 0\,,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqq 0,\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqq 0\,,$$

tj.

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} =$$

$$= -\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] =$$

$$= -\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] =$$

$$= -\sqrt{2}\,.\,2\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -2\cos x\,,$$

neboli

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2\cos x\,. \qquad (6)$$

Pro interval $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ dostáváme tedy podle (3), (5) nerovnosti

$$-2\sin x \leqq y \leqq -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right); \qquad (7)$$

pro interval $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ dostáváme podle (3), (6) nerovnosti

$$-2\cos x \leqq y \leqq -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \qquad (8)$$

Nerovnosti (7) přepíšeme do tvaru

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqq -\frac{y}{2} \leqq \sin x\,, \qquad (7')$$

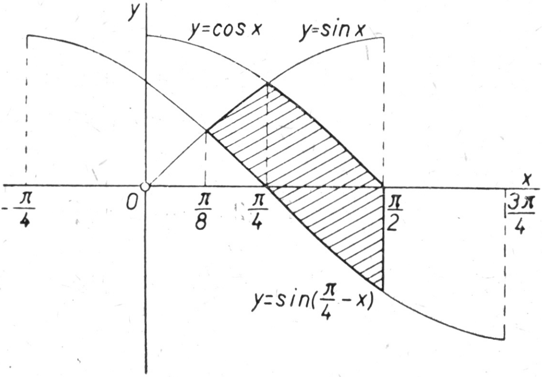
nerovnosti (8) přepíšeme do tvaru

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqq -\frac{y}{2} \leqq \cos x\,. \qquad (8')$$

Zobrazíme funkce

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

viz obr. 34. Body $\left[x, \frac{y}{2}\right]$ vyplní vyšrafovaný obrazec; hledaný obrazec bodů $[x, y]$ dostaneme překlopením kolem osy x a dvojnásobným zvětšením všech souřadnic y.



Obr. 34

Podstatné kroky našeho postupu byly tyto: použití vzorců pro „funkce polovičního úhlu“ k odstranění odmocnin v (1b); použití vzorců pro „součet sinů“ k získání jediného členu na pravé i levé straně nerovností (1b); v obou případech bylo nutno nahradit někde funkci sinus funkcí kosinus a naopak. Další podstatné kroky byly: rozdělení intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ na dva intervaly, abychom se zbavili absolutních hodnot, a konečně úprava nerovností na tvar (7') a (8'), abychom získali jednodušší funkce, jejichž průběh lze snadno zakreslit.

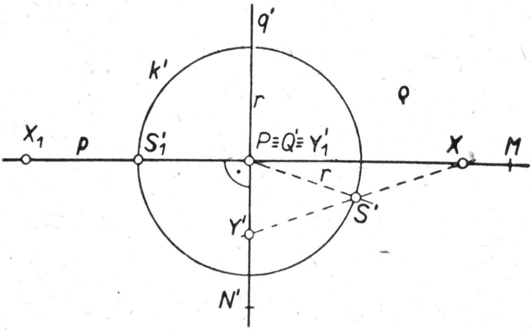
Většina správných řešení užívala v podstatě tohoto postupu.

Úloha A-III-3 má tento text: Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky PM, QN, kde přímka PQ je kolmá ke každé z obou mimoběžek. V rovině σ kolmé k úsečce PQ a procházející jejím středem O je dána kružnice $k \equiv (O, r)$.

Dokažte, že každá úsečka XY, jejíž krajní body X, Y leží po řadě na mimoběžkách PM, QN a která obsahuje bod kružnice k, má touž délku; vyjádřete tuto délku pomocí poloměru r a délky $v = PQ$.

Jaký útvar vyplní krajní body X všech takových úseček XY?

Řešení. První část úlohy bude rozřešena, vypočteme-li délku úsečky XY. Každou úsečku XY lze pokládat za přeponu pravoúhlého trojúhelníka $Y'XY$, který zkonstruujeme takto: přímkou p vedeme rovinu $\varrho \parallel \sigma$ a označíme Y' pravoúhlý průmět bodu Y do roviny ϱ. Zřejmě je $YY' = PQ = v$; zbývá vypočítat délku odvěsny XY'. K tomu je třeba uplatnit ještě podmínku, že střed S úsečky XY leží na kružnici k. Proto promítneme pravoúhle také kružnici k do roviny ϱ; tak dostaneme kružnici $k' \equiv (P, r)$. Střed S



Obr. 35

úsečky XY se promítne pravoúhle do roviny ϱ do středu S' úsečky XY'; bod S' leží na kružnici k'. Situace v rovině ϱ je naznačena na obr. 35; přitom q' značí pravoúhlý průmět přímky q do roviny ϱ. Na obr. 35 je zakreslena tzv. „obecná poloha" úsečky XY', kdy žádný z bodů X, Y' nesplyne s bodem P; proto vznikne pravoúhlý trojúhelník $XY'P$ s přeponou XY'. Protože její střed S' leží na kružnici k', je $PS' = r$. Střed S' je však středem kružnice opsané trojúhelníku $XY'P$, proto je $S'X = S'Y' = S'P = r$ a $XY' = XS' + S'Y' = 2r$. Zbývá dokázat, že úsečka XY' má délku $2r$ také v případě, když jde o „zvláštní polohu", kdy je buď $X \equiv P$, nebo $Y' \equiv P$; to je však zřejmé, jak ukazuje na obr. 35 příklad úsečky X_1Y_1'. Je tedy

$$XY^2 = YY'^2 + XY'^2 = v^2 + 4r^2 .$$

Tím je úplně rozřešena první část úlohy. Odpověď na druhou otázku dáme zcela snadno. Předchozí úvahy vám jistě připomněly jedno známé geometrické místo bodů v rovině: geometrické místo středů S' úseček XY', které mají stálou délku $2r$ a jejichž krajní body X, Y' leží na kolmicích p, q', je kružnice $k' \equiv (P, r)$. Každý z bodů X, Y' vyplní tedy úsečku délky $4r$, která leží v přímce p (q') a má střed v bodě P. Tím je vyšetřeno geometrické místo bodů X; protože lze v textu úlohy zaměnit přímky p, q (body X, Y), je tím vyšetřeno i geometrické místo bodů Y.

Řada řešitelů úlohy A-III-3 užila částečně metody souřadnic, ovšem jen kartézských souřadnic v rovině. Tak např. Jiří Durdil, žák třídy III.b SVVŠ v Praze 8-Libni, zvolil za osy souřadnic přímky p, q' a užil rovnice kružnice k' k tomu, aby dokázal vztah $XY' = 2r$. Pro výpočet délky úsečky XY však už užil opět Pythagorovy věty a doplňující úvahy pro „zvláštní" polohy této úsečky vynechal. Zde se ukazuje, jak bylo výhodné užít důsledně metody souřadnic (analytické geometrie) pro řešení celé úlohy [i otázky b)]. Tu by ovšem bylo třeba zavést soustavu prostorových souřadnic, která se na střední škole neprobírá. Zároveň si uvědomíme při této příležitosti, jak účinným prostředkem pro vyšetřování geometrických míst bodů je právě metoda analytické geometrie.

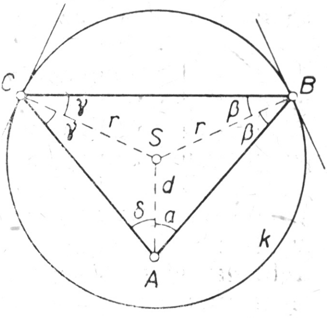
Úloha A-III-4 zní: V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Kromě toho je dán bod $A \not\equiv S$, který leží uvnitř kružnice k. Světelný paprsek vycházející z daného bodu A se odráží od kružnice k v jistém bodě B, dále se odráží od kružnice k v jistém bodě C a pak se vrací nazpět do bodu A.

Vypočítejte sinus dutého úhlu $\sphericalangle SAB$ pomocí čísel r, $d = SA$ a rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

Při řešení stačí uplatnit známý fyzikální zákon o úhlu dopadu a odrazu světelného paprsku; přitom je třeba uvážit, že kolmice ke křivce odrazu v daném bodě je kolmice k tečně čili tzv. normála křivky. U kružnice prochází normála každého jejího bodu středem kružnice. Dráha světelného paprsku je zakreslena na obr. 36. Dráha je obvod trojúhelníka ABC; bod S je podle podmínek úlohy průsečíkem os úhlů $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ tohoto trojúhelníka a polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle A$.

Hledaný $\sin\alpha$ vyjádříme z trojúhelníka SAB pomocí sinové věty

$$d \sin\alpha = r \sin\beta . \quad (1)$$



Obr. 36

Abychom z rovnice (1) určili $\sin\alpha$ pomocí r, d, je třeba vyjádřit β pomocí α. Protože polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle CAB$, je $\delta = \alpha$ (označení úhlů podle obr. 36); protože trojúhelník BCS je rovnoramenný, je $\beta = \gamma$. Pro velikost vnitřních úhlů $\sphericalangle ABC$ platí tedy $2\alpha + 4\beta = 180°$ neboli $\alpha = 90° - 2\beta$. Dosadíme za α do rovnice (1), vyjádříme nejprve $\sin\beta$ a pak dosadíme zpět do (1); dostaneme

$$d \sin (90° - 2\beta) = r \sin\beta ,$$

neboli

$$d \cos 2\beta = r \sin\beta ,$$

neboli

$$d(1 - 2 \sin^2\beta) = r \sin\beta ,$$

neboli

$$2d \sin^2\beta + r \sin\beta - d = 0 .$$

Odtud vychází ($d \neq 0$ podle předpokladu)

$$\sin\beta = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} . \tag{2}$$

Diskriminant je zřejmě číslo kladné; protože úhel β je dutý, je $\sin \beta > 0$ a ve vzorci (2) přichází v úvahu jen znamení plus. Je tedy

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} . \tag{2'}$$

Můžeme se ještě přesvědčit, že zlomek na pravé straně je číslo kladné a menší než 1. Skutečně je $\sqrt{r^2 + 8d^2} > \sqrt{r^2} = r$; kdyby platilo $\dfrac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} \geqq 1$, bylo by $\sqrt{r^2 + 8d^2} \geqq 4d + r$, tj. po úpravě $8d(d + r) \leqq 0$, což je nemožné.

Nyní dosadíme z (2′) do (1) a dostaneme

$$\sin\alpha = r \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d^2} .$$

Tím je úloha úplně rozřešena.