11. ročník matematické olympiády

II. Texty přípravných úloh I. kola

II. Texty přípravných úloh I. kola

1. Kategorie A

1. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány: velikost c strany AB, velikost t_c těžnice příslušné k vrcholu C a velikost α úhlu $\sphericalangle CAB$.

Vyjádřete podmínku řešitelnosti pomocí daných čísel c, t_c, α a rozhodněte o počtu řešení.

2. Zistite počet prirodzených čísel menších než 1000, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom 1000.

3. Jsou dány rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0\,,$$
$$x^2 + x + p = 0\,,$$

kde p je dané reálné číslo. Určete všechna čísla p taková, aby obě rovnice měly společný reálný kořen.

4. Daná je funkcia

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

pričom a, b, c sú dané reálne čísla a platí $a \neq 0$.

Dokážte:

a) Ak je $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, potom pre všetky reálne čísla x je $y > 0$.

b) Ak pre všetky reálne čísla x je $y > 0$, potom je $b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$.

5. Řešte rovnici

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x\,.$$

6. Je dána koule $\varkappa$ o středu S a poloměru R.

Uvnitř koule v bodech hlavní kružnice se této koule dotýká 8 shodných menších koulí tak, že každá z nich se dotýká dvou sousedních. Dále uvnitř koule $\varkappa$ leží koule $\varkappa_1$ o středu S_1, která se dotýká koule $\varkappa$ i osmi menších koulí.

Určete poloměr koule $\varkappa_1$.

2. Kategorie B

1. V rovine je daná úsečka AB. Uvažujme o menlivom pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a o kružnici k jemu zvonku vpísanej k odvesne BC. Zistite, čo tvorí množina stredov všetkých kružníc k.

2. Dokažte, že nerovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqq 0\,,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqq 0$$

jsou splněny pro každou trojici reálných čísel x, y, z.

Potom vyšetřete všechny trojice reálných čísel x, y, z, pro něž v prvním nebo ve druhém vztahu platí rovnost.

3. Řešte soustavu rovnic

$$|x - y| + 2\,|y| = 2\,,$$
$$px + 2y = 2p\,,$$

kde p je dané reálné číslo.

4. Druhá mocnina párneho čísla zapísaná v desiatkovej sústave končí vždy jednou z cifier 0, 4, 6; dokážte to.

Na základe toho potom zistite, ktorou cifrou končí štvrtá mocnina párneho čísla.*)

---

*) Slovenské „párny" je česky „sudý".

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a na ní bod A; ve vzdálenosti d od bodu A je vedena sečna p kružnice k, přičemž je $p \perp SA$.

Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na přímce p a vrchol D na kružnici k.

Proveďte diskusi úlohy vzhledem k číslům r, d. (Pokyn: Použijte otočení o středu A.)

6. Do rotačního kužele je vepsána krychle, jejíž jedna stěna leží v rovině podstavy kužele a zbývající 4 vrcholy leží na jeho plášti. Délka hrany krychle je rovna třetině výšky kužele.

Vypočtěte velikost úhlu, který svírá osa kužele se stranou kužele.

3. Kategorie C

1. Do kruhové úseče o poloměru r a středovém úhlu $120°$ jsme vepsali kružnici tak, že se tětivy omezující úseč dotýká právě v jejím středu.

Dokažte, že délka této kružnice je rovna $\frac{3}{4}$ délky oblouku, který omezuje danou úseč.

2. Narysujte trojuholník SMN, keď $SM = 9$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 10$ cm.

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby platilo:

(1) Uhol $\sphericalangle DAB$ kosoštvorca má veľkosť $67\frac{1}{2}°$.
(2) Priamka AB prechádza bodom M.
(3) Priamka CD prechádza bodom N.

Dokážte, že úloha má dva vyhovujúce výsledky.

(Pokyn: Užijte souměrnosti o středu S.)

3. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{b-z}{x}=\frac{b}{c}, \quad \frac{c-x}{y}=\frac{c}{a}, \quad \frac{a-y}{z}=\frac{a}{b},$$

kde x, y, z jsou neznámé a a, b, c jsou daná čísla. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy.

4. Sestrojte graf funkce

$$y=\tfrac{1}{2}(|x+1|-|x-1|).$$

(Pokyn: Rozeznávejte možnosti: $x \leqq -1$; $-1 \leqq x \leqq \leqq 1$; $x \geqq 1$.)

5. Keď p je celé číslo, potom je číslo $p^4 - p^2 - 24$ deliteľné číslom 12; dokážte.

6. Je dána kružnice k a na ní dva různé body A, B. Uvažujme trojúhelník ABX, kde X je bod kružnice k. Na prodloužení úsečky AX za bod X sestrojme bod Y tak, aby platilo $XY = BX$.

Vyšetřte geometrické místo bodů Y, když bod X probíhá kružnici k (s výjimkou bodů A, B).

4. Kategorie D

1. Národní podnik měl zvýšit výrobu o 40 %. Vhodnou organizací práce se mu podařilo zvýšit výrobu o 50 %.

Na kolik procent tím splnil plán?

2. Zistite všetky delitele (prirodzené čísla) čísla 270. Uveďte postup, ako ste úlohu riešili.

3. Narýsujte dvě různoběžky p, q o průsečíku M tak, aby svíraly úhel 60°. Na přímce p zvolte bod P tak, aby $MP = 7{,}4$ cm.

Kolem bodu P opište kružnici k takovou, aby na přímce q vytínala tětivu délky 7,2 cm.

Rozhodněte, zda bod M padne na kružnici k nebo leží vně nebo uvnitř kružnice k. Odůvodněte.

4. Je dán výraz

$$V = \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\right) : \\ : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

a) Výraz V zjednodušte a udejte, pro která čísla a, b nemá smysl.

b) Vypočtěte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro která je $V = 10$.

5. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s väčšou základňou $AB = 8{,}3$ cm, výškou $v = 3{,}5$ cm, a to taký, že z obidvoch bodov C, D úsečku AB vidno pod pravými uhlami.

6. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby platilo: $AB = 4{,}9$ cm, $AC = 7$ cm, výška příslušná ke straně AB je $v_c = 5$ cm.

Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky v_c vedené ke straně AB leží uvnitř této strany či nikoli. (Třeba rozlišovat dvě možnosti: úhel $\sphericalangle CAB$ je ostrý nebo tupý.)