10. ročník matematické olympiády

IV. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 10. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1960-1961. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962. pp. 39–45.

Přípravné úlohy I. kola

KATEGORIE A

1. Zostrojte pravouhlý trojuholník, ak je daný polomer kružnice trojuholníku opísanej a polomer kružnice vpísanej. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na veľkosti oboch daných polomerov.

(P o k y n. Vypočítajte súčet odvesien pomocou daných polomerov a výsledku použite ku konštrukcii.)

2. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 (o poloměrech R, r, kde $R \geqq r = 1$), které mají vnější dotyk. Vypočítejte poloměr x kružnice k, která se každé z kružnic k_1, k_2 dotýká vně a zároveň se dotýká jedné společné vnější tečny kružnic k_1, k_2.

Rozhodněte, při které hodnotě R je x nejmenší.

3. Narýsujte graf funkce:

a) $y = \dfrac{x^2}{|x|}$; b) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}$; c) $y = \dfrac{x}{|x|}\sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{|x^2 - 9|}}$;

d) $y = \dfrac{x}{|x|} \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}}$;

e) $y = |x| \, . \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{|4 - x^2|}}$; f) $y = |x| \, . \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}$.

Podejte odůvodnění.

4. Určete všechna reálná čísla p, pro která rovnice

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

o neznámé x má:

a) oba kořeny různé a záporné; b) jeden záporný kořen, druhý nezáporný.

5. Výroba podniku sa každým rokom zvyšuje o p %. V priebehu ktorého roku vzrastie výroba o np % (kde n je dané prirodzené číslo) proti počiatočnému stavu? Na záver urobte výpočet pře $p = 20$, $n = 5$.

6. Označme D průsečík osy úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníku ABC se stranou AB; dále označme $CB = a$, $CA = b$, $CD = u$.

a) Dokažte, že platí $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{a}{b}$.

b) Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, jestliže jsou dána čísla a, b, u.

(Je výhodné užít trigonometrických vzorců pro obsah trojúhelníka.)

KATEGORIE B

1. Dané sú celá čísla A, B. Potom aspoň jedno z čísel A, B, $A + B$, $A - B$ je deliteľné troma; dokážte. (P o k y n. Existuje jediná dvojica celých čísel a, z, kde $0 \leqq z < 3$, taká, že platí $A = 3a + z$.)

2. V rovině jsou dány dva různé body C, P a na přímce CP bod V.

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, v němž je bod P středem základny AB a bod V průsečíkem výšek.

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k poloze bodu V na přímce CP. (P o k y n. Vypočtěte velikost úsečky $x = \frac{1}{2}AB$.)

3. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$.

Sestrojte kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ těchto vlastností:

(1) kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk,

(2) platí $r_2 = 2r_1$,

(3) kružnice k_1 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle DAB$ a kružnice k_2 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle BCD$,

(4) obě kružnice k_1, k_2 leží v kosočtverci $ABCD$.

4. V rovině jsou dány dva pravé přilehlé úhly $\sphericalangle QMN$ $\sphericalangle MNP$. Uvažujme čtverec $ABCD$, kde bod A leží na polopřímce MQ, bod B je bodem úsečky MN, bod C leží na polopřímce NP.

Vyjádřete délku úsečky AB pomocí dané délky $MN = 2d$ a vzdálenosti x bodů O, B (je tedy $x \geqq 0$), kde O je střed úsečky MN. Jestliže bod B probíhá úsečku MN, vyšetřte, co přitom vyplní:

a) střed S čtverce $ABCD$; b) vrchol D čtverce $ABCD$. (Ke zvolenému bodu B příslušný bod C je průsečíkem přímky NP a přímky, kterou dostaneme otočením přímky MQ o pravý úhel kolem bodu B.)

5. Riešte rovnicu

$$\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3,$$

kde a, b, c sú dané reálne čísla a x je neznáma. Zistite, pre ktoré trojice čísel a, b, c nemá rovnica vyhovujúce riešenie; ďalej, kedy má jediné riešenie a kedy má nekonečne mnoho riešení.

6. Výraz

$$V = \frac{p-2}{p+2} - \frac{p^2 - 4p + 4}{p^2 + 4p + 5} + \frac{p^3 - 6p^2 + 12p - 8}{p^3 + 6p^2 + 12p + 8},$$

kde $p \neq -2$ je dané reálné číslo, je záporný pro ta čísla p, o nichž platí

$$-2 < p < 2;$$

jinak je nezáporný; dokažte a udejte všechna čísla p, pro něž je daný výraz roven nule.

(Pokyn. Lze řešit tak, že nejprve dokážete: $1 - x + x^2 > 0$ pro všechna reálná čísla x; přitom položte $x = \frac{p-2}{p+2}$.)

KATEGORIE C

1. Mořská voda obsahuje 5 % soli. Kolik kilogramů obyčejné vody musíme přilít do m kg mořské vody, abychom dostali dvouprocentní roztok soli ve vodě? (Ostatní látky rozpuštěné ve vodě přitom zanedbáme.) Proveďte též příklad pro $m = 40$.

2. V rovine je daná úsečka CP a priamka $p \perp CP$, ktorá prechádza bodom P. Uvažujme rovnoramenný trojuholník ABC, ktorého vrcholy A, B ležia na priamke p.

Vyšetrite, čo vyplnia ťažiska T všetkých trojuholníkov ABC.

(P o z n á m k a. Pre polohu hlavného vrcholu trojuholníka ABC sú dve podstatne rozdielne možnosti.)

3. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, c a uvnitř jimi určeného pásu je dán bod B.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c.

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

(P o k y n. Otočte přímku c kolem bodu B o pravý úhel.)

4. Narýsujte trojúhelník SMN, kde $SM = 5$ cm, $SN = 4$ cm, $MN = 6$ cm.

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ o středu S, aby platilo:

(1) Délka stran kosočtverce je 7,5 cm.

(2) Přímka AB prochází daným bodem M.

(3) Přímka CD prochází daným bodem N.

Dokažte, že úloha má dvě řešení.

(Užijte souměrnosti o středu S.)

5. Nájdite všetky prirodzené čísla p, q, o ktorých platia:

a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$ b) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$

(Dokážte, že úlohe a) vyhovujú jedine čísla $p = q = 2$, úlohe b) tieto tri dvojice: $p = 6$, $q = 3$; $p = q = 4$; $p = 3$, $q = 6$.]

6. Jsou dána reálná čísla a, b, c, o nichž platí $a + b + c = 0$.

Má-li výraz

$$V = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

smysl, potom platí

$$V = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc};$$

dokažte.

Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c, pro něž daný výraz ztrácí smysl.

KATEGORIE D

1. Udajte všetkých deliteľov (tj. prirodzené čísla) čísla 180. Uveďte postup, ako ste túto úlohu riešili.

2. JZD mělo v r. 1959 dodat 2670 q obilí; plán splnilo na 115 % (takže plán dodávky obilí překročilo o 15 %).

Kolik obilí musí dodat v roce 1960, jestliže chce překročit o 15 % svou dodávku z minulého roku?

3. Narýsujte dvě rovnoběžky p, q o vzdálenosti 4 cm; na přímce p zvolte bod P.

Sestrojte kružnici, která se přímky p dotýká v bodě P a která na přímce q vytíná tětivu délky 5 cm.

4. Počítajte dvojakým spôsobom, najskór podľa poučky o druhej mocnine mnohočlenu, potom podľa poučky o rozdielu štvorcov

$$(2x + y)^2 - (x + 2y)^2.$$

5. Narýsujte úhel $\sphericalangle MPN = 60°$.

Na polopřímce PM sestrojte bod A a na přímce PN sestrojte body B, C tak, aby o trojúhelníku ABC platilo: $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $\sphericalangle BCA = 75°$.

Úloha má dvě řešení; z provedené konstrukce rozhodněte, zda oba sestrojené trojúhelníky padnou do úhlu $\sphericalangle MPN$.

6. V rovnoběžníku $ABCD$ je strana $AB = 4{,}9$ cm, strana $AD = 7$ cm a výška příslušná ke straně AB má délku 5 cm; přitom úhel $\sphericalangle DAB$ je ostrý.

Výpočtem rozhodněte, zda pata P výšky vedené bodem D ke straně AB padne dovnitř úsečky AB či nikoli.