09. ročník matematické olympiády

III. Řešení úloh ze soutěže

III. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqq\frac{2}{a+b+c}\,.$$

Řešení. Z podmínky $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ vyplývají nerovnosti

$$a+b>0,\quad b+c>0,\quad c+a>0,\quad a+b+c>0.$$

Z poslední nerovnosti kombinací s nerovnostmi $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ po řadě dostaneme

$$a+b+c>b+c,$$

$$a+b+c>c+a,$$

$$a+b+c>a+b.$$

V těchto nerovnostech jsou na obou stranách kladná čísla; podle známé věty proto platí tyto nerovnosti o převrácených hodnotách uvažovaných stran

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{b+c},$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{c+a},$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b}.$$

Sečtením levých a pravých stran těchto tří nerovností dostáváme

$$\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

neboli

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}.$$

Dále platí nerovnost

$$1 > \frac{2}{3}.$$

Znásobením příslušných stran obou posledních nerovností dostáváme

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{2}{a+b+c}.$$

Z této nerovnosti pak zřejmě vyplývá daná nerovnost (1); tím je důkaz proveden.

2. Dané sú dve rôznobežné roviny **P**, **Q**, pretínajúce sa v priamke p; v rovine **P** je daný bod A a v rovine **Q** je daný bod C, pričom žiadny z bodov A, C neleží na priamke p.

Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$ (kde $AB \| CD$), ktorému možno vpísať kružnicu, a to taký, aby bod B ležal v rovine **P** a bod D v rovine **Q**.

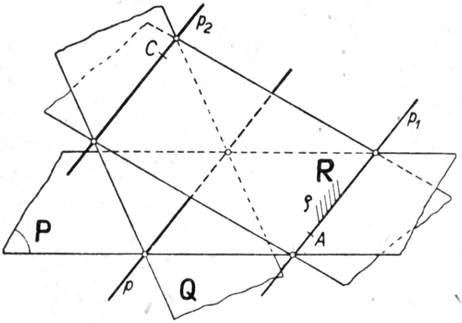
Riešenie.

Poznámka. Riešenie úlohy rozdelíme na dve časti: stereometrickú časť **A** a planimetrickú časť **B**.

A. *Rozbor stereometrickej časti úlohy (obr. 1).* Nech existuje lichobežník $ABCD$, ktorý splňuje požiadavky textu úlohy. Rovinu lichobežníka označme **R**; priesečnicu rovín **P**, **R** označme p_1 a priesečnicu rovín **Q**, **R** označme p_2. Je teda $p_1 \equiv AB$, $p_2 \equiv CD$, pričom nutne platí $p_1 \| p_2$, $p_1 \not\equiv p_2$. Rovina **R** je teda určená dvoma rôznymi rovnobežkami p_1, p_2. Pritom je nutne **R** $\not\equiv$ **P**, lebo bod C neleží v rovine **P** (**P**, **Q** sú podľa textu úlohy rôznobežné roviny, bod C leží v **Q**, ale neleží v **P**); rovnako je **R** $\not\equiv$ **Q**. Je teda $p \not\equiv p_1$, $p \not\equiv p_2$.

Priamky p, p_1 nie sú rôznobežné, čo hneď dokážeme. Nech je X priesečík rôznobežiek p, p_1, takže je **P** $\equiv (p, p_1)$. Rovina **R** pretne rovinu **Q** v priamke p_2 a pretože bod X roviny **R** leží i v rovine **Q**, prechádza priesečnica p_2 rovín **Q**, **R** týmto bodom (určite je

$\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$), tj. priamky p_1, p_2 majú spoločný bod, čo však nie je možné. Platí teda $p \| p_1$ a podobne sa dokáže, že je $p \| p_2$. Priamky p, p_1, p_2 sú teda rovnobežné a žiadne dve z nich nesplývajú. Z toho vyplýva *konštrukcia* roviny **R**:



Obr. 1

Bodom A vedieme priamku $p_1 \| p$ a bodom C priamku $p_2 \| p$. Podľa známej vety je $p_1 \| p_2$. Pritom je $p_1 \neq p_2$, pretože priamka p_1 obsahuje bod A, ktorý neleží na p (takže je $p \neq p_1$), priamka p_2 je z podobného dôvodu rôzna od p (roviny **P**, **Q** nemajú okrem priamky p spoločný bod). Obidve rôzne rovnobežky p_1, p_2 určujú jedinú rovinu **R**, ktorá je tým zostrojená.

Teraz v rovine **R** prevedieme ďalšiu časť **B** riešenia úlohy.

B. *Rozbor planimetrickej časti úlohy* (viď označenie z *obr. 2*). Túto časť úlohy možno vysloviť takto: „V rovine **R** sú dané dve rôzne rovnobežky p_1, p_2, na p_1 je daný bod A, na p_2 je daný bod C. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $ABCD$, kde B leží na p_1, D leží na p_2, a to taký, ktorému možno vpísať kružnicu.“ Rozriešením tejto úlohy bude skončené riešenie danej úlohy.

V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ je uhlopriečka AC zrejme vždy šikmá k základni AB. Preto úloha nemá riešenie v prípade, keď platí $AC \perp p_1$ alebo

$$AC \perp p. \tag{1}$$

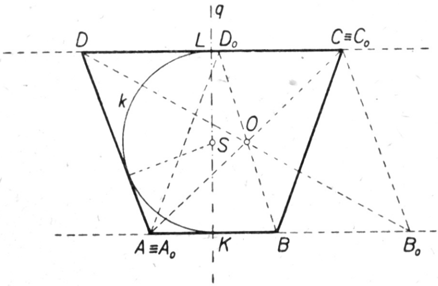
V ďalšom predpokladajme, že neplatí (1). Okrem toho môžeme predpokladať, že je

$$AB > CD \tag{2}$$

čiže, že v priamke p_1 leží väčšia základňa lichobežníka Odôvodníme to takto:

Nech je $AB < CD$. Označme O stred úsečky AC. V súmernosti so stredom O sú p_1, p_2 súmerne združené podle bodu O a práve tak sú súmerne združené aj body A, C. Lichoběžníku $ABCD$ odpovedá v tejto súmernosti lichobežník CD_0AB_0 alebo AB_0CD_0 *(obr.2)* s ním zhodný, tj. platí $CD_0 < AB_0$ (pretože je $AB = CD_0$, $CD = AB_0$). Lichobežník AB_0CD_0 má teda väčšiu základňu v priamke p_1. Od neho prejdeme spomínanou súmernosťou k lichobežníku $ABCD$, ktorý je tiež riešením úlohy.

Za platnosti vzťahu (2) zostrojíme obdĺžnik $AFCE$, kde F je päta kolmice vedenej bodom C k p_1. Označme K, L stredy základní lichobežníka $ABCD$ a M, N dotykové body ramien BC, AD s kružnicou $k \equiv (S, r)$



Obr. 2

lichobežníku vpísanou. Výška lichobežníka je $v = 2r$. Zo súmernosti lichobežníka podľa jeho osi súmernosti $q \equiv KL$ vyplýva, že K, L sú dotykové body kružnice k s jeho základňami. Bod F padne nutne dovnútra úsečky KB, bod D dovnútra úsečky EL. Pri väčšej základni AB leží ostrý úhol $\sphericalangle DAB$ lichobežníka, preto bod D nutne padne dovnútra úsečky LE a teda aj dovnútra polroviny AEC. Položme *(obr. 3)*

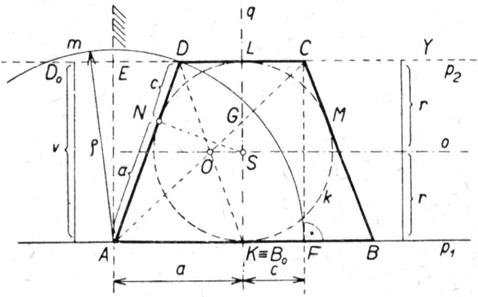
$$AB = 2a, \quad CD = 2c, \quad \text{kde} \quad a > c.$$

O dĺžkach dotyčnic vedených z bodov A, C ku kružnici k platí

$$a = AK = AN, \quad c = DL = DN.$$

Je teda $AD = AN + DN = a + c$. Ďalej je $AF = AK + FK = AK + LC = a + c$, tj.

$$AD = AF. \tag{3}$$



Obr. 3

Tento výsledok použijeme ku konštrukcii bodu D a tým aj hľadaného lichobežníka. Bod D je spoločným bodom priamky p_2 a kružnice $m \equiv (A, AF)$ a padne do vnútra polroviny AEC. Všimnime si ešte toho, že musí byť $AD > v$ (pre $AD = v$ by sme dostali štvorec) čiže nutne platí

$$AF > CF \tag{4}$$

alebo

$$\sphericalangle CAF < 45°. \tag{4'}$$

Vopred môžeme povedať, že úloha nemá riešenie pre

$$AF \leqq CF \quad \text{alebo} \quad \sphericalangle CAF \geqq 45°,$$

tj. ak je odchýlka mimobežiek p, AC väčšia alebo rovná 45° [vzhľadom k (1) včítane uhla 90°]. Pri konštrukcii dokážeme, že ak platí (4) alebo (4′), potom má úloha práve dve riešenia.

Konštrukcia (obr. 3). V rovine R sú dané rôzne priamky $p_1 || p_2$, na p_1 bod A, na p_2 bod C, pričom je $\sphericalangle CAF < 45°$, kde F je päta kolmice vedenej bodom C k priamke p_1. Zostrojme obdĺžnik $AFCE$. Je teda

$$AF > CF. \tag{5}$$

Opíšme kružnicu $m \equiv (A, AF)$. Pretože platí (5), m pretne priamku p_2 vo dvoch rôznych bodoch. Zo súmernosti kružnice m podľa priamky AE vyplýva, že jeden z priesečíkov padne do vnútra polpriamky EC. Označme ho D (druhý bod D_0 nevedie zrejme k lichobežníku s väčšou základňou v priamke p_1). Pretože platí

$$AD = AF < AC$$

(prepona AC trojuholníka ACF je väčšia ako odvesna AF), padne bod D podľa známej vety do vnútra úsečky EC. Označme q os úsečky DC a B obraz bodu A v súmernosti s osou q. Dostaneme štvoruholník $ABCD$ s osou súmernosti q, pričom je $AB \perp q$, $CD \perp q$, $AB || CD$, $AB > CD$, čiže rovnoramenný lichobežník s väčšou základňou AB.

Dokážeme, že mu možno vpísať kružnicu: Označme K, L priesečíky priamky q s priamkami p_1, p_2 a nech S je stred úsečky KL. Kružnica $k \equiv (S, \frac{1}{2}v)$, kde v je vzdialenosť rovnobežiek p_1, p_2, sa dotýka priamok p_1, p_2 po rade v bodoch K, L. Dotýka sa však aj priamky AD ako hneď dokážeme:

Podľa konštrukcie je $AD = AF$, takže ADF je rovnoramenný trojuholník. Jeho základňou je úsečka DF, no body D, F sú súmerne združené podľa stredu S, pretože K, L sú súmerne združené podľa S a $KF = LC = LD$, pričom body F, D sú oddelené priamkou q. Zo stredovej súmernosti bodov F, D vyplýva, že bod S je stredom úsečky DF, takže priamka AS je osou súmernosti $\triangle ADF$ a bod S leží na osi uhla $\sphericalangle BAD$. Kružnica k má stred S na tejto osi AS a dotýka sa ramena AF v bode K, preto sa dotýka aj ramena AD tohto uhla. Zo súmernosti lichobežníka podľa priamky q vyplýva, že kružnica k sa dotýka aj ramena BC lichobežníka $ABCD$. Tým je dôkaz prevedený.

Použitím stredovej súmernosti podľa stredu O úsečky AC prejde lichobežník $ABCD$ do lichobežníka CD_0AB_0, ktorý je tiež riešením úlohy. Viac riešení úloha nemá.

Záver. Ak je F päta kolmice vedenej bodom C k priamke p_1 a platí $AF > CF$, má úloha dve rôzne riešenia. Obidva lichobežníky sú súmerne združené podla stredu O úsečky AC. Inak nemá riešenie.

Lepšie možno vysloviť podmienku riešitelnosti takto: Ak je odchýlka mimobežiek p, AC menšia ako 45°, má úloha dve riešenia. V inom prípade neexistuje lichobežník požadovaných vlastností.

3. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř úsečky je dán pohyblivý bod M; nad úsečkami AM, BM jako stranami sestrojíme dva čtverce $AMCD$, $BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině vyťaté přímkou AB. Těmto čtvercům opíšeme kružnice; ty se vedle bodu M protínají ještě v dalším bodu N.

a) Dokažte, že přímky AE, BC procházejí bodem N.

b) Dokažte, že přímka MN prochází určitým pevným bodem.

c) Vyšetřte geometrické místo středů úseček, které spojují středy obou uvažovaných čtverců.

Řešení (užijeme označení z *obr. 4*). a) V dalším předpokládejme, že platí

$$AM > BM. \tag{1}$$

Případ $AM < BM$ převedeme na předchozí užitím souměrnosti podle osy q úsečky AB a vhodnou výměnou názvů bodů A, B; případ $AM = BM$ vyřídíme při závěru. Pro stručnost označme

$$AB = 4d \tag{2}$$

a dále ϱ polorovinu, v níž leží oba čtverce $AMCD$, $BMEF$. Označme U vrchol pravého úhlu v rovnoramenném trojúhelníku ABU, kde U leží v polorovině ϱ na přímce q; označme M_0 střed úsečky AB, potom platí

$$AM_0 = 2d = M_0U. \tag{3}$$

Ze vztahu (1) plyne $S_1O_1 > S_2O_2$, neboť je $S_1O_1 = \frac{1}{2}AM$, $S_2O_2 = \frac{1}{2}BM$. Odtud plyne, že kolmice $MP \perp S_1S_2$ prochází vnitřkem pravého úhlu $\sphericalangle BMC$, takže druhý průsečík $N \neq M$ obou kružnic k_1, k_2 leží uvnitř tohoto úhlu. Bod E padne dovnitř úsečky MC a body S_1, S_2 zřejmě padnou pořadě dovnitř ramen AU, BU trojúhelníka ABU.

Úhly $\sphericalangle ACM$, $\sphericalangle ANM$ jsou obvodové v kružnici k_1 a jejich vrcholy leží v polorovině ϱ; je tedy $45° = \sphericalangle ACM = \sphericalangle ANM$ neboli

$$\sphericalangle ANM = 45°. \tag{4}$$

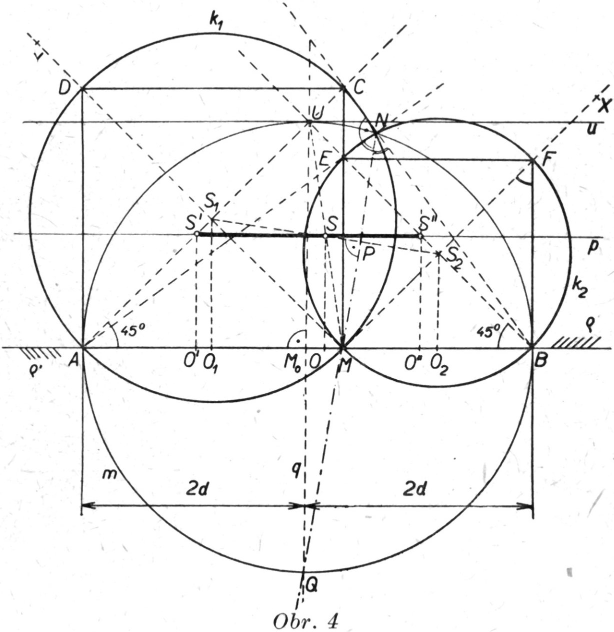
Stejně se dokáže vztah $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BNM = 45°$ vzhledem ke kružnici k_2, tj.

$$\sphericalangle BNM = 45°. \tag{5}$$

Oba úhly $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle BNM$ jsou styčné a vzhledem ke (4), (5) platí $\sphericalangle ANM + \sphericalangle BNM = 90°$ neboli $\sphericalangle ANB = 90°$, takže je

$$AN \perp BN; \tag{6}$$

trojúhelník ANB je tedy pravoúhlý a úsečku AB má za přeponu; kružnice $m \equiv (M_0, 2d)$ mu je opsána.



Obr. 4

Nyní dokážeme, že body A, E, N leží v téže přímce (v právě napsaném pořádku): Úsečka BE je průměrem kružnice k_2, bod E leží uvnitř úsečky MC, takže body M, N jsou přímkou BE odděleny; k_2 je kružnice opsaná trojúhelníku BEN a tedy $\sphericalangle BNE = 90°$, tj. platí

$$EN \perp BN. \tag{7}$$

Ze vztahů (6), (7) vyplývá správnost našeho tvrzení, čímž je důkaz proveden.

Dále dokážeme, že body B, N, C leží (v právě napsaném pořádku) v téže přímce: Úsečka AC je průměrem kružnice k_1, opsané trojúhelníku ACN, tj. $\sphericalangle ANC = 90°$; oba styčné úhly $\sphericalangle ANC$, ANB jsou pravé a tudíž vedlejší. Tím je i toto tvrzení dokázáno.

Dokázali jsme tedy, že platí-li (1), potom přímky AE, BC procházejí bodem N.

Jestliže však je $AM = BM$, jsou oba uvažované čtverce shodné, takže i kružnice k_1, k_2 jsou shodné a platí $C \equiv E \equiv N$ a tvrzení a) úlohy je samozřejmé.

Tím je tvrzení části a) úlohy dokázáno.

b) V předchozím jsme dokázali, že trojúhelník ABN je pravoúhlý s přeponou AB a opsanou kružnicí $m \equiv (M_0, 2d)$. Polopřímka NM je osou úhlu $\sphericalangle ANB$ a protíná nutně kružnici m v bodě $Q \not\equiv N$, přičemž Q leží v polorovině ϱ' opačné k polorovině ϱ na přímce q; to plyne z toho, že je $\sphericalangle ANM = \sphericalangle BNM = 45°$ neboli $\sphericalangle ANQ = \sphericalangle BNQ$, takže jsou i příslušné středové úhly shodné, tj. $\sphericalangle AM_0Q = \sphericalangle BM_0Q = 90°$.

Přímka MN tedy prochází bodem Q; tím je podáno řešení části b) úlohy.

c) Označme S střed úsečky S_1S_2 a dále po řadě

O_1, O_2, O paty kolmic vedených body S_1, S_2, S k přímce AB. Čtyřúhelník $S_1S_2O_2O_1$ je pro $AM \neq BM$ pravoúhlý lichoběžník, pro $AM = BM$ obdélník a úsečka SO je jeho střední příčka, takže O je středem úsečky O_1O_2 a dále je

$$SO = \tfrac{1}{2}(S_1O_1 + S_2O_2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}AD + \tfrac{1}{2}BF] =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}AB] = \tfrac{1}{4}\,.\,4d = d.$$

Označme $p \| AB$ přímku poloroviny ϱ, přičemž vzdálenost přímek p, AB je právě d; bod S tedy leží na přímce p.

Úhel $\sphericalangle AUB$ je pravý; protože body S_1, S_2 leží uvnitř jeho ramen, leží úsečka S_1S_2 v tomto úhlu. Bod S je vnitřním bodem úsečky S_1S_2 a tudíž je vnitřním bodem úhlu $\sphericalangle AUB$. Protože z přímky $S'S'' \equiv p$ právě úsečka $S'S''$ leží v úhlu $\sphericalangle AUB$, leží uvažovaný bod S nutně uvnitř úsečky $S'S''$.

Odtud plyne, že bod O je vnitřním bodem úsečky $O'O''$ (kde O', O'' jsou paty kolmic vedených body S', S'' k přímce AB) a tím bod S je vnitřním bodem $S'S''$.

Zbývá ještě dokázat, že každý bod S, který zvolíme uvnitř právě popsané úsečky $S'S''$, je středem jisté úsečky S_1S_2, přičemž body S_1, S_2 jsou po řadě středy čtverců $AMCD$, $BMEF$, které vyhovují požadavkům textu úlohy.

Důkaz. Nechť bod S leží uvnitř střední příčky (úsečky) $S'S''$ rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABU; bod S leží tedy uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle AUB$. Sestrojme obraz pravého úhlu $\sphericalangle AUB$ v souměrnosti o středu S. Buď M obraz bodu U. Je-li u rovnoběžka s přímkou AB vedená bodem U, mají pásy rovnoběžek $S'S''||AB$, $S'S''||u$ stejné šířky a ze vztahu $US = SM$ plyne, že bod M padne na přímku AB, a to dovnitř úsečky AB.

Označme po řadě MX, MY obrazy polopřímek UA, UB v souměrnosti o středu S. Přímky $UA||MX$, $UB||MY$ omezují obdélník US_2MS_1 (viz obr. 4) o středu S, v němž platí $SS_1 = SS_2$, takže S je středem úsečky S_1S_2. Sestrojme čtverce $AMCD$, $BMEF$ v polorovině ϱ; protože je $\sphericalangle AMY = \sphericalangle ABU = 45°$ a $\sphericalangle BMX = \sphericalangle BAU = 45°$, jsou právě sestrojené body S_1, S_2 středy sestrojených čtverců $AMCD$, $BMEF$. Tím je důkaz ukončen a řešení části c) úlohy provedeno.

Geometrickým místem bodů S je tedy vnitřek úsečky $S'S''$, kde S', S'' jsou po řadě středy odvěsen pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka ABU o přeponě AB a ležícího v polorovině ϱ.

4. Je dána rovnice

$$x^2 - 6(k-1)x + 9(k^2-2) = 0 \tag{1}$$

o neznámé x, přičemž je k dané reálné číslo.

Určete všechna čísla k, pro něž má daná rovnice alespoň jeden nezáporný kořen, který je nejvýše roven číslu 1.

Řešení. Nechť číslo x, o němž platí

$$0 \leqq x \leqq 1, \tag{1'}$$

je řešením rovnice (1). Vyšetříme podmínky, které o něm musí platit; protože úpravy, které budeme provádět, budou ekvivalentní, dostaneme přitom číslo k, pro něž o čísle x platí vztah (1′).

Diskriminant D rovnice (1) je

$$D = 9(k - 1)^2 - 9(k^2 - 2) =$$
$$= 9(k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2) = 9(3 - 2k). \tag{2'}$$

Protože musí platit $D \geqq 0$ neboli $3 - 2k \geqq 0$, dostáváme

$$k \leqq \tfrac{3}{2} = 1{,}5; \tag{2}$$

jinak by rovnice (1) neměla reálné řešení.

Označme $x_1 \geqq x_2$ reálné kořeny rovnice (1); platí

$$x_{1,2} = 3(k - 1) \pm 3\sqrt{3 - 2k}$$

čili po úpravě

$$x_1 = 3\left(k - 1 + \sqrt{3 - 2k}\right), \tag{3}$$

$$x_2 = 3\left(k - 1 - \sqrt{3 - 2k}\right). \tag{4}$$

Vyšetřování o čísle k provedeme pro každý z kořenů x_1, x_2 odděleně.

I. Vyšetřování kořene x_1. **A.** Nechť je $x_1 \geqq 0$; pak ze (3) plyne postupně

$$k - 1 + \sqrt{3 - 2k} \geqq 0,$$

$$\sqrt{3 - 2k} \geqq 1 - k. \tag{5}$$

a) Nechť je $1 - k \leqq 0$ neboli

$$1 \leqq k;$$

potom nerovnost (5) je splněna pro každé k, o němž platí

$$1 \leqq k \leqq \tfrac{3}{2}. \tag{6}$$

b) Nechť je $1 - k \geqq 0$ neboli

$$k \leqq 1; \tag{7}$$

umocněním obou stran vztahu (5) na druhou dostaneme postupně

$$3 - 2k \geqq 1 - 2k + k^2,$$

$$k^2 - 2 \leqq 0,$$

$$\left(k + \sqrt{2}\right)\left(k - \sqrt{2}\right) \leqq 0.$$

Činitel $k - \sqrt{2}$ je vzhledem k předpokladu (7) záporný, a proto je nutně $k + \sqrt{2} \geqq 0$ neboli

$$k \geqq -\sqrt{2},$$

tj. vzhledem ke (2), (7)

$$-\sqrt{2} \leqq k \leqq 1. \tag{8}$$

Spojením vztahů (6) a (8) vyplývá pro k nutně vztah

$$-\sqrt{2} \leqq k \leqq \tfrac{3}{2}. \tag{8'}$$

B. Jestliže je dále $x_1 \leqq 1$, dostaneme ze (3) postupně

$$3\left(k-1+\sqrt{3-2k}\right) \leqq 1,$$

$$3\sqrt{3-2k} \leqq 4-3k, \tag{9}$$

takže nutně platí $4-3k \geqq 0$, tj.

$$k \leqq \tfrac{4}{3} = 1{,}\overline{3}. \tag{10}$$

Umocněním obou stran (9) na druhou dostáváme postupně

$$9(3-2k) \leqq 16-24k+9k^2,$$

$$0 \leqq 9k^2-6k-11, \tag{11}$$

$$0 \leqq \left(3k-1-2\sqrt{3}\right)\left(3k-1+2\sqrt{3}\right).$$

Tu vzhledem k (10) je $3k-1-2\sqrt{3} \leqq 4-1-$ $-2.1{,}7 = 4-4{,}4 < 0$; proto z (11) nutně plyne

$$3k-1+2\sqrt{3} \leqq 0,$$

tj.

$$k \leqq -\tfrac{1}{3}(2\sqrt{3}-1) < 0. \tag{12}$$

Shrnutí případu **I**. Spojením vztahu (8′) se vztahem (12) dostáváme

$$-\sqrt{2} \leqq k \leqq -\tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-1\right). \tag{13}$$

Platí $-\sqrt{2} < -\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1)$, neboť je

$$-\tfrac{1}{3}(2\sqrt{3} - 1) - (-\sqrt{2}) =$$
$$= \tfrac{1}{3}(3\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{3}) >$$
$$> \tfrac{1}{3}(3 . 1{,}4 + 1 - 2 . 1{,}8) =$$
$$= \tfrac{1}{3}(4{,}2 + 1 - 3{,}6) > 0;$$

proto interval (13) existuje. Obrácením postupu dostáváme:

Výsledek **I** *(obr. 5)*. Vztah $0 \leqq x_1 \leqq 1$ platí právě pro

$$-\sqrt{2} \leqq k \leqq -\tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{3} - 1\right). \qquad (13')$$

II. Vyšetřování kořene x_2. **A.** Z požadavku $x_2 \geqq 0$ ze (4) plyne postupně

$$k - 1 - \sqrt{3 - 2k} \geqq 0, \qquad (14)$$
$$k - 1 \geqq \sqrt{3 - 2k}$$

a tedy především je nutně $k - 1 \geqq 0$, tj.

$$k \geqq 1, \qquad (15)$$

což spolu se vztahem (2) dává

$$1 \leqq k \leqq \tfrac{3}{2}. \qquad (16)$$

Umocněním obou stran nerovnosti (14) na druhou postupně obdržíme

$$k^2 - 2k + 1 \geqq 3 - 2k,$$
$$k^2 - 2 \geqq 0,$$
$$\left(k + \sqrt{2}\right)\left(k - \sqrt{2}\right) \geqq 0.$$

Vzhledem ke vztahu (16) je $k + \sqrt{2} \geqq 0$ a z poslední nerovnosti plyne, že nutně platí $k - \sqrt{2} \geqq 0$ neboli $k \geqq \sqrt{2}$; spojením se (16) dostáváme

$$\sqrt{2} \leqq k \leqq \tfrac{3}{2}. \tag{17}$$

B. Z požadavku $x_2 \leqq 1$ ze (4) plyne postupně

$$3\left(k - 1 - \sqrt{3 - 2k}\right) \leqq 1,$$

$$3k - 4 \leqq 3\sqrt{3 - 2k}. \tag{18}$$

Pro $3k - 4 \leqq 0$, tj. $k \leqq \frac{4}{3}$, je tato nerovnost splněna; protože však platí $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$, nepřichází tento požadavek vzhledem k požadavku (17) vůbec v úvahu.

Pro $3k - 4 > 0$ neboli pro $k > \frac{4}{3}$ (což je splněno požadavkem (17), neboť je $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$) po umocnění obou stran nerovnosti (18) na druhou postupně dostáváme

$$9k^2 - 24k + 16 \leqq 27 - 18k,$$

$$\left(3k - 1 - 2\sqrt{3}\right)\left(3k - 1 + 2\sqrt{3}\right) \leqq 0.$$

Přitom první činitel na levé straně této nerovnosti je menší než druhý činitel. Z poslední nerovnosti tedy plyne

$$3k - 1 - 2\sqrt{3} \leqq 0,$$

$$3k - 1 + 2\sqrt{3} \geqq 0$$

neboli platí zároveň

$$k \leqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right), \tag{19}$$

$$-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-1\right) \leqq k, \tag{20}$$

kde $-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-1\right) < 0$; vztah (20) je požadavkem (17) splněn. Uveďme ve vzájemnou souvislost vztahy (17), (19).

Je $\sqrt{2} < \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)$, neboť platí

$$\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{2} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1-3\sqrt{2}\right) >$$

$$> \frac{1}{3}(2.1{,}7+1-3.1{,}42) = \frac{1}{3}(4{,}4-4{,}26) > 0.$$

Dále je $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right) < \frac{3}{2}$, neboť platí

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right) = \frac{1}{6}\left(9-4\sqrt{3}-2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(7-4\sqrt{3}\right) > \frac{1}{6}(7-4.1{,}74) = \frac{1}{6}(7-6{,}96) > 0.$$

Z obou posledních výsledků musí tedy vzhledem ke vztahům (17), (19) o čísle k platit

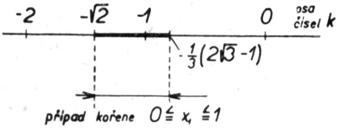
$$\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right). \tag{21}$$

Obrácením postupu dostáváme:

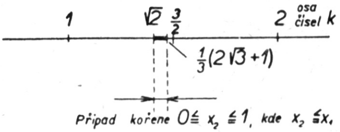
Výsledek II *(obr. 6)*. Vztah $0 \leqq x_2 \leqq 1$ platí právě pro

$$\sqrt{2} \leqq k \leqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} + 1\right). \qquad (21')$$

Závěr. Alespoň jeden z kořenů dané rovnice (1) je nezáporný a zároveň nejvýše roven číslu 1 právě pro čísla k, o nichž platí buď vztahy (13′) anebo vztahy (21′).



Obr. 5



Obr. 6

Poznámka. Současná platnost vztahů $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1$ nenastane (viz též grafy — obr. 5 a 6).

5. Daná je reálna funkcia

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \qquad (1)$$

reálnej premennej x.

Nájdite všetky x, pre ktoré má táto funkcia zmysel; ďalej ukážte, že pre $x \geqq 2$ je funkcia rovná konštante. Potom náčrtnite graf danej funkcie.

Riešenie. Predovšetkým musí o premennej x platiť $x - 1 \geqq 0$ čiže

$$x \geqq 1, \qquad (2)$$

pretože inak by $\sqrt{x-1}$ nemala zmysel. Potom je $x + 2\sqrt{x-1}$ číslo kladné a existuje aj jeho druhá odmocnina.

Číslo $x - 2\sqrt{x-1}$ musí byť nezáporné, aby mala zmysel jeho druhá odmocnina, tj. musí platiť $x \geqq 2\sqrt{x-1}$. Na oboch stranách tejto nerovnosti sú nezáporné čísla, preto ich umocnením na druhú dostaneme nerovnosť

$$x^2 \geqq 4(x-1)$$

čiže

$$(x-2)^2 \geqq 0.$$

Táto nerovnosť je však splnená pre každé reálne x, preto pre $x \geqq 1$ existuje tiež odmocnina $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Daná funkcia je teda definovaná pre všetky $x \geqq 1$.

Teraz rozhodnime o znamienku hodnôt funkcie y pre x z uvedeného intervalu. Dokážeme, že platí $y \leqq 0$ čiže

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \leqq \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}. \qquad (3)$$

Pretože $x - 2\sqrt{x-1}$, $x + 2\sqrt{x-1}$ sú pre $x \geqq 1$ nezáporné čísla, dostaneme umocnením oboch strán nerovnosti (3) na druhú ekvivalentnú nerovnosť. Ak utvoríme rozdiel jej ľavej a pravej strany, dostaneme

$$x - 2\sqrt{x-1} - \left(x + 2\sqrt{x-1}\right) = -4\sqrt{x-1},$$

čo je záporné číslo pre $x > 1$ a nula pre $x = 1$. Tým je dokázané, že je

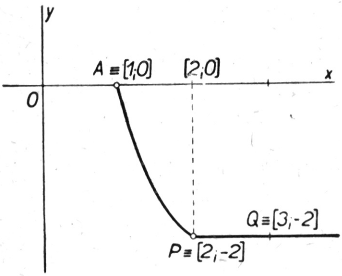
$$y \leqq 0.$$

Teraz vypočítame y^2. Postupne platí

$$y^2 = x - 2\sqrt{x-1} + x + 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)},$$

$$y^2 = 2(x - \sqrt{(x-2)^2}),$$

$$y^2 = 2(x - |x-2|);$$



Obr. 7

z čoho vzhľadom k tomu, že $y \leqq 0$, vyplýva

$$y = -\sqrt{2(x - |x-2|)}.$$

Rozoznávajme dva prípady:

Prípad [**1**]. Nech je $x - 2 \geqq 0$, takže $|x - 2| = x - 2$. Potom platí $y = -\sqrt{4}$ čiže

$$y = -2.$$

Pre $x \geqq 2$ je teda y rovné konštante -2, čo sme mali dokázať a grafom funkcie je v tomto prípade polpriamka (viď *obr. 7*).

Prípad [2]. Nech je $1 \leqq x \leqq 2$, takže je $|x - 2| = 2 - x$. Potom postupne platí

$$y = -\sqrt{2(x - 2 + x)}\,,$$
$$y = -\sqrt{4(x - 1)}\,,$$
$$y = -2\sqrt{x - 1}\,.$$

Grafom funkcie v uvedenom intervale je oblúk AP paraboly o rovnici

$$y^2 = 4(x - 1)\,,$$

ktorá má vrchol $A \equiv (1, 0)$ a prechádza bodom $P \equiv (2, -2)$.

Tým je vyšetrenie grafu prevedené (viď *obr. 7*).

6. Řešte soustavu rovnic

$$\sin(x - \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0, \tag{1}$$

$$\sin(x + \alpha) + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha \tag{2}$$

o neznámých x, y, přičemž α je dané reálné číslo.

Řešení. Nechť dvojice x, y reálných čísel splňuje obě rovnice (1), (2).

Z rovnice (1) podle vzorce $\sin\varphi = -\sin(-\varphi)$ dostaneme rovnici

$$-\sin(-x + \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0.$$

Pomocí vzorce $\sin\varepsilon = \cos(R - \varepsilon)$ lze první člen levé strany této rovnice upravit, čímž dostaneme rovnici

$$-\cos(R + x - \alpha) + \cos(y - \alpha) = 0$$

neboli rovnici

$$\cos(R + x - \alpha) - \cos(y - \alpha) = 0.$$

Na její levou stranu užijme vzorce $\cos\omega_1 - \cos\omega_2 = -2\sin\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \,.\, \sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$; dostaneme rovnici

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(x + y - 2\alpha + R) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(x - y + R) = 0$$

neboli rovnici

$$\sin\tfrac{1}{2}(x + y - 2\alpha + R) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(x - y + R) = 0. \quad (3)$$

Jeden z obou činitelů levé strany této rovnice musí být roven nule; každou z těchto možností uvažujme odděleně (viz případy [1] a [2]).

Případ [1]. Nechť ve vztahu (3) je

$$\sin\tfrac{1}{2}(x + y - 2\alpha + R) = 0. \qquad (3')$$

Je známo, že všechna řešení rovnice $\sin\omega = 0$ jsou dána vztahem $\omega = n \,.\, 2R$, kde n je libovolné celé číslo; podle rovnice (3′) tedy o číslech x, y nutně platí

$$\tfrac{1}{2}(x + y - 2\alpha + R) = n \,.\, 2R$$

neboli

$$y = 2\alpha - x - R + n.4R,$$

tj.

$$y = 2\alpha - x + R(4n - 1), \tag{4}$$

kde n je libovolné celé číslo. Dosaďme tento výsledek do rovnice (2); její levá strana se postupně upravuje takto:

$$\sin(x + \alpha) + \cos(3\alpha - x - R) =$$
$$= \sin(x + \alpha) + \cos[R - (3\alpha - x)] =$$
$$= \sin(x + \alpha) + \sin(3\alpha - x) =$$
$$= 2 \sin 2\alpha \cos(x - \alpha),$$

přičemž jsme užili vzorce $\sin\omega_1 + \sin\omega_2 =$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2).$$

Dosazení ze (4) do (2) tedy dává rovnici

$$2\sin 2\alpha . \cos(x - \alpha) = \sin 2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha \left[\cos(x - \alpha) - \frac{1}{2}\right] = 0. \tag{5}$$

Rozeznávejme d v ě m o ž n o s t i [a], [b].

Možnost [a]. Nechť o čísle α platí

$$\sin 2\alpha = 0 \tag{6}$$

neboli

$$2\alpha = p.2R, \tag{6'}$$

kde p je libovolné celé číslo. Potom rovnice (5) je splněna každým reálným číslem x. Řešením soustavy rovnic (1), (2) může být jedině dvojice čísel [viz (4)]

$$x, \quad y = -x + 2\alpha - R + n.4R, \tag{7}$$

kde x je libovolné reálné číslo a n je libovolné celé číslo; přitom platí (6′).

Proveďme zkoušku dosazením čísel (7) do rovnic (1), (2), jejichž levé strany po řadě označme L_1, L_2:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin(x - \alpha) + \cos(-x + \alpha - R) = \\ &= \sin(x - \alpha) + \cos[R - (\alpha - x)] = \\ &= \sin(x - \alpha) + \sin(\alpha - x) = \\ &= \sin(x - \alpha) - \sin(x - \alpha) = 0, \end{aligned}$$

takže vskutku je $L_1 = 0$.

Dále je

$$\begin{aligned} L_2 &= \sin(x + \alpha) + \cos(-x + 3\alpha - R) = \\ &= \sin(x + \alpha) + \cos[R - (3\alpha - x)] = \\ &= \sin(x + \alpha) + \sin(3\alpha - x) = \\ &= 2\sin 2\alpha \cos(x - \alpha); \end{aligned}$$

avšak $\sin 2\alpha$ je podle předpokladu rovno nule a tedy $L_2 = 0$, proto jsou obě strany rovnice (2) rovny nule. Jsou tedy čísla (7) řešením soustavy rovnic (1), (2), a to tehdy, platí-li (6) neboli (6′).

Možnost [b]. Nechť o čísle α platí

$$\sin 2\alpha \neq 0 \tag{8}$$

neboli

$$2\alpha \neq p.2R, \tag{8'}$$

a to pro kterékoli celé číslo p; potom z rovnice (5) plyne rovnice

$$\cos(x - \alpha) = \frac{1}{2},$$

tj.

$$x - \alpha = 60° + m_1 . 4R$$

anebo

$$x - \alpha = 300° + m_2 . 4R,$$

kde m_1, m_2 jsou libovolná celá čísla. Máme tedy pro číslo x jeden z požadavků:

$$x = \alpha + 60° + m_1 . 4R \tag{9}$$

(kde m_1 je libovolné celé číslo),

$$x = \alpha + 300° + m_2 . 4R \tag{10}$$

(kde m_2 je libovolné celé číslo).
Po dosazení ze vztahů (9), (10) do (4) dostáváme příslušná čísla y, tj.

$$y = \alpha - R - \ \ 60° + (n - m_1)\, 4R,$$
$$y = \alpha - R - 300° + (n - m_2)\, 4R,$$

neboli

$$y = \alpha + 210° + n_1 . 4R, \tag{9'}$$

$$y = \alpha + 330° + n_2 . 4R; \tag{10'}$$

přitom k sobě příslušejí dvojice (9), (9′) anebo dvojice (10), (10′).

I. Z k o u š k a dosazením dvojice (9), (9′) do (1), (2) při označení L_1, L_2 levých stran rovnic (1), (2):

$$L_1 = \sin 60° + \cos 210° = \sin 60° - \cos 30° = 0;$$
$$L_2 = \sin(2\alpha + 60°) + \cos(2\alpha + 210°) =$$
$$= \sin 2\alpha \cos 60° + \cos 2\alpha \sin 60° +$$

$+ \cos 2\alpha \cos 210° — \sin 2\alpha \sin 210° =$
$= \sin 2\alpha (\cos 60° + \sin 30°) + \cos 2\alpha (\sin 60° — \cos 30°) =$
$= \sin 2\alpha . (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \sin 2\alpha.$

Dvojice čísel (9), (9′) tedy splňují obě rovnice (1), (2).

II. Zkouška dosazením dvojice (10), (10′) do (1), (2) při předchozím označení:

$L_1 = \sin 300° + \cos 330° = —\sin 60° + \cos 30° = 0;$
$L_2 = \sin(2\alpha + 300°) + \cos(2\alpha + 330°) =$
$= \sin 2\alpha \cos 300° + \cos 2\alpha \sin 300° +$
$+ \cos 2\alpha \cos 330° — \sin 2\alpha \sin 330° =$
$= \sin 2\alpha (\cos 60° + \sin 30°) +$
$+ \cos 2\alpha (—\sin 60° + \cos 30°) =$
$= \sin 2\alpha . (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \sin 2\alpha.$

Dvojice čísel (10), (10′) tedy splňuje obě rovnice (1), (2).

Případ [2]. Nechť ve vztahu (3) je

$$\sin \frac{1}{2} (x — y + R) = 0 \qquad (3'')$$

neboli

$$\frac{1}{2} (x — y + R) = n . 2R,$$

kde n je libovolné celé číslo, takže

$$x = y — R + n . 4R. \qquad (11)$$

Dosaďme tento výsledek do rovnice (2); dostaneme rovnici

$$\sin(y + \alpha - R) + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha$$

neboli postupně

$$-\sin[R - (y + \alpha)] + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha,$$
$$-\cos(y + \alpha) + \cos(y + \alpha) = \sin 2\alpha,$$
$$0 = \sin 2\alpha. \tag{12}$$

Jsou dvě možnosti [a], [b]:

[a] Nechť je

$$\sin 2\alpha = 0 \tag{13}$$

neboli

$$2\alpha = n \,.\, 2R,$$

tj.

$$\alpha = n \,.\, R,$$

kde n je určité celé číslo závislé na čísle α. Potom rovnice (12) je splněna libovolným číslem y. Jedno z čísel x, y tedy zvolíme, druhé vypočítáme ze vztahu (11).

Jestliže je $\sin 2\alpha = 0$, potom dvojice

$$x, \quad y = x + R + m \,.\, 4R, \tag{14}$$

kde x je libovolné reálné číslo a m je libovolné celé číslo, je řešením rovnic (1), (2); přesvědčíme se o tom zkouškou dosazením. Tu L_1, L_2 jsou opět dosazení do levých stran těchto rovnic.

III. Zkouška

$$L_1 = \sin(x - \alpha) + \cos(x + R - \alpha) =$$
$$= \sin(x - \alpha) + \cos[R - (\alpha - x)] =$$

$$= \sin(x - \alpha) + \sin(\alpha - x) =$$
$$= \sin(x - \alpha) - \sin(x - \alpha) = 0.$$
$$L_2 = \sin(x + \alpha) + \cos(R + x + \alpha) =$$
$$= \sin(x + \alpha) - \sin(x + \alpha) = 0,$$

přičemž pravá strana rovnice (2) je $\sin 2\alpha = 0$.

Čísla (14) splňují rovnice (1), (2).

[b] Nechť je

$$\sin 2\alpha \neq 0$$

neboli

$$\alpha \neq nR,$$

ať zvolíme za n kterékoli celé číslo. Potom levá strana rovnice (2) po dosazení za x ze vztahu (11) je rovna nule, kdežto pravá strana je různá od nuly. Dvojice čísel (14) tedy nesplňuje rovnici (2) při $\alpha \neq nR$.

Závěr. Jestliže o čísle α platí:

1. $\sin 2\alpha = 0$, potom dvojice čísel (7), tj.
x (libovolné reálné číslo), $y = -x + 2\alpha - R + n.4R$ (kde n je libovolné celé číslo) a dále dvojice čísel (14), tj.

$$x \text{ (libovolné reálné číslo)}, \ y = x + R + n.4R$$

(kde n je libovolné celé číslo) je řešením soustavy rovnic (1), (2).

2. $\sin 2\alpha \neq 0$, potom obě dvojice čísel (9), (9') a (10), (10'), tj.

$$\text{a) } x = \alpha + \ \ 60° + m \,.\, 4R, \quad y = \alpha + 210° + n \,.\, 4R,$$
$$\text{b) } x = \alpha + 300° + m \,.\, 4R, \quad y = \alpha + 330° + n \,.\, 4R$$

(kde m, n jsou libovolná celá čísla) jsou řešením obou rovnic (1), (2).

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{\mathrm{tg} 2x}{\mathrm{tg} x} - \frac{2 \,\mathrm{cotg} 2x}{\mathrm{cotg} x} \leqq 1. \tag{1}$$

Riešenie. Aby výrazy na ľavej strane (1) mali zmysel, musí byť $\mathrm{tg} x \neq 0$, $\mathrm{cotg} x \neq 0$ a okrem toho musia mať zmysel $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{cotg} x$, $\mathrm{tg} 2x$ a $\mathrm{cotg} 2x$. Z toho dostávame tieto požiadavky na číslo x (pričom m je ľubovoľné celé číslo):

$$x \neq m\pi; \; x \neq (2m + 1) \,.\, \frac{\pi}{2}; \; x \neq (2m + 1) \,.\, \frac{\pi}{2};$$

$$x \neq m\pi;$$

$$2x \neq (2m + 1) \,.\, \frac{\pi}{2}; \; 2x \neq m\pi.$$

Tieto požiadavky možno všetky zapísať takto:

$$x \neq n \,.\, \frac{\pi}{4}, \text{ kde } n \text{ je ľubovoľné celé číslo.} \tag{2}$$

V ďalšom nech x splňuje vzťahy (2). Ak je x riešením nerovnosti (1), položme

$$\operatorname{tg} x = y.$$

Potom (1) znie

$$\frac{2y}{(1-y^2)y} - \frac{2y(1-y^2)}{2y} \leqq 1$$

a po úpravách dostaneme odtiaľ

$$\frac{2}{1-y^2} - (1-y^2) \leqq 1,$$

$$\frac{2-(1-y^2)^2-(1-y^2)}{1-y^2} \leqq 0,$$

$$\frac{-y^4+3y^2}{1-y^2} \leqq 0,$$

$$\frac{y^2(y^2-3)}{y^2-1} \leqq 0. \tag{3}$$

Vzhľadom ku (2) je $y \neq 0$ a teda $y^2 > 0$. Namiesto (3) stačí preto skúmať nerovnosť

$$\frac{y^2-3}{y^2-1} \leqq 0. \tag{3'}$$

(V ďalšom je n ľubovoľné celé číslo.) Uvažujme o prípadoch [1] a [2]:

Prípad [**1**]: Nech je $y^2 - 1 > 0$ čiže $|y| > 1$. Potom zrejme platí

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3}{4}\pi + n\pi \tag{4}$$

[pričom zároveň platí (2) podľa predpokladu].
Z (3′) potom vyplýva, že je nutne $y^2 - 3 \leqq 0$ čiže $|y| \leqq \sqrt{3}$ a teda:

buď

$$n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} + n\pi \tag{5}$$

alebo

$$\frac{2}{3}\pi + n\pi \leqq x \leqq \pi + n\pi. \tag{6}$$

Spojením požiadaviek (2), (4) a (5), resp. (6) dostávame, že o čísle x musí platiť

buď

$$\frac{\pi}{4} + n\pi < x \leqq \frac{\pi}{3} + n\pi \tag{7}$$

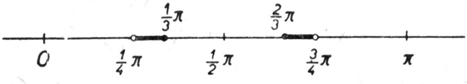
alebo

$$\frac{2}{3}\pi + n\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi. \tag{7'}$$

Obrátením postupu zistíme, že čísla splňujúce vzťahy (7) a (7′) vyhovujú nerovnosti (1).

Prípad [2]. Nech je $y^2 - 1 < 0$; potom z (3′) vyplýva, že musí byť $y^2 - 3 \geqq 0$. No, obom týmto vzťahom súčasne nemôže vyhovovať žiadne reálne číslo.

Záver (obr. 8). Všetky riešenia nerovnosti (1) sú dané vzťahmi (7) a (7′).



Obr. 8

2. Dané sú dve mimobežné priamky p_1, p_2 a bod M, ktorý neleží na žiadnej z nich. Preveďte priestorové riešenie a diskusiu tejto úlohy:

Zostrojte kružnice k_1, k_2, ktoré prechádzajú bodom M a v tomto bode sa dotýkajú tej istej priamky, pričom kružnica k_1 sa dotýka priamky p_1 a kružnica k_2 sa dotýka priamky p_2.

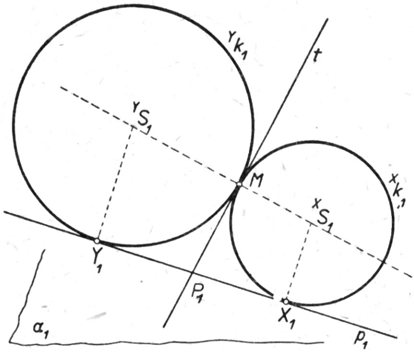
V diskusii udajte, koľko dvojíc takých kružníc k_1, k_2 existuje.

Riešenie. Predpokladajme, že úloha má riešenie. Označme α_1, α_2 roviny určené bodom M a priamkou p_1 resp. p_2. Tieto roviny sú rôzne (inak by priamky p_1, p_2 ležali v tej istej rovine) a pretože majú spoločný bod M, sú roviny α_1, α_2 rôznobežné. Ich priesečnicu označme t. Priamka t je zrejme rôzna od priamok p_1, p_2, pretože inak by bod M padol na niektorú z priamok p_1, p_2. Teraz prevedieme túto konštrukciu v rovine α_1:

a) V rovine α_1 sú dané rôzne priamky p_1, t a na priamke t bod M, ktorý nepadne na p_1.

Sú dve možnosti:

[1] p_1, t majú spoločný bod P_1 (obr. 9);
[2] $p_1 \parallel t$, pričom je $p_1 \not\equiv t$ (obr. 10).



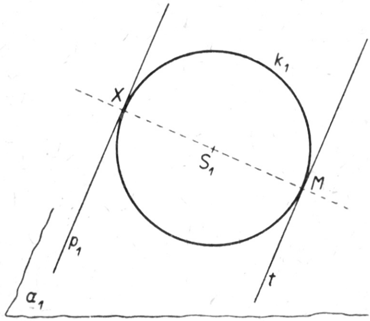
Obr. 9

Prípad [1]. Ak sú p_1, t rôznobežky, možno postupovať takto *(obr. 9)*:

Zostrojíme na p_1 dva rôzne body X_1, Y_1 také, že $P_1X_1 = P_1Y_1 = P_1M$. V každom z uhlov $\sphericalangle MP_1X_1$, $\sphericalangle MP_1Y_1$ leží práve jedna kružnica, ktorá sa dotýka priamky t v bode M, a priamky p_1 (v bode X_1, resp. Y_1 — viď obr. 9). Označme tieto kružnice ${}^Xk_1$, ${}^Yk_1$. Sú to kružnice navzájom rôzne.

Prípad [2]. Nech je $p_1 \| t$, $p_1 \neq t$ (viď obr. 10). Potom zrejme existuje jediná kružnica k_1, ktorá sa dotýka priamky t v bode M a priamky p_1.

b) Rovnakú konštrukciu ako v rovine α_1 prevedieme v rovine α_2 (pozri predchádzajúci text, v ktorom



Obr. 10

sa zamení priamka p_1 priamkou p_2). Ak sú p_2, t rôznobežné, dostaneme dve rôzne kružnice ${}^Xk_2$, ${}^Yk_2$. Ak je $p_2 \| t$ (pritom je $p_2 \neq t$), dostaneme jedinú kružnicu k_2.

Diskusia. Tým sú kružnice zostrojené. Zostáva vyšetriť, za akých podmienok dostaneme v rovine α_1 dve kružnice alebo jedinú a to isté v rovine α_2.

Ak je $p_1 \| t$, potom priamky p_2, t, ktoré ležia v rovine α_2 sú rôznobežné (inak by bolo $p_1 \| p_2$). Bod M a priamka t ležia v rovine α_2, t. j. je $\alpha_2 \| p_1$. Podobne, ak je $p_2 || t$, leží bod M a t v rovine α_1 a je $\alpha_1 || p_2$. Ak neplatí ani jeden zo vzťahov $p_1 || t$, $p_2 || t$, vtedy je t priečkou mimobežiek p_1, p_2.

Záver diskusie. Označme π_1 rovinu, ktorá obsahuje priamku p_1, pričom je $\pi_1 || p_2$. Ďalej označme π_2 rovinu, ktorá obsahuje priamku p_2, pričom je $\pi_2 || p_1$. (Existuje práve jedna rovina π_1 a jedna rovina π_2, je $\pi_1 || \pi_2$ a $\pi_1 \not\equiv \pi_2$.)

Ak neleží bod M v žiadnej z rovín π_1, π_2, potom v každej z rovín α_1, α_2 existujú práve dve kružnice splňujúce požiadavky úlohy. Kombinovaním teda dostaneme celkom štyri dvojice hľadaných kružníc k_1, k_2, a to dvojice:

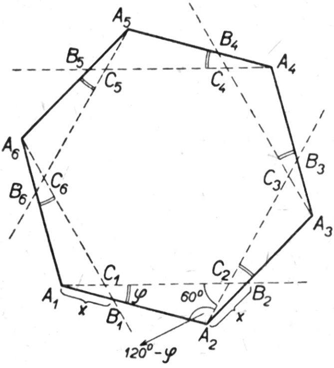
$$^Xk_1,\ ^Xk_2;\ ^Xk_1,\ ^Yk_2;\ ^Yk_1,\ ^Xk_2;\ ^Yk_1,\ ^Yk_2.$$

Ak leží bod M v niektorej z rovín π_1, π_2, napr. nech M leží v rovine π_1, takže je $\pi_1 \equiv \alpha_1$; potom v rovine α_1 existujú práve dve kružnice, zatiaľ čo v rovine $\alpha_2 \not\equiv \pi_2$ existuje jediná kružnica, ktorá vyhovuje požiadavkám úlohy (tu je $t || p_2$). V tomto prípade dostaneme tedy kombinovaním celkom dve dvojice hľadaných kružníc; napr. dvojica $^Xk_1$, k_2 a dvojica $^Yk_1$, k_2.

3. Je dán pravidelný šestiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, jehož strana má délku 1. Uvnitř stran (tj. úseček) A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_5A_6, A_6A_1 jsou po řadě sestrojeny body B_1, B_2, $\ldots$, B_6 tak, že platí

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_6B_6 = x.$$

Úsečky A_1B_2, A_2B_3, ..., A_6B_1 omezí nový šestiúhelník. Dokažte, že tento šestiúhelník je pravidelný, a jeho obsah vyjádřete jako funkci dutého úhlu $\varphi = \sphericalangle A_2A_1B_2$.



Obr. 11

Potom vypočtěte, pro které φ má vzniklý šestiúhelník obsah rovný dvěma třetinám obsahu šestiúhelníka daného.

D o d a t e č n á o t á z k a. Obsah vzniklého šestiúhelníka vyjádřete jako funkci délky $x = A_1B_1$.

Řešení (obr. 11). a) Označme $C_1, C_2, \ldots, C_6$ vrcholy vytvořeného šestiúhelníka jako na *obrázku 11*. Podle vět o shodnosti trojúhelníků snadno dokážeme, že jsou shodné trojúhelníky $\triangle A_1A_2B_2$, $\triangle A_2A_3B_3, \ldots,$ $\triangle A_6A_1B_1$ a dále trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\ldots$, $\triangle A_6B_6C_6$. Odtud vyplývá, že šestiúhelník $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ má všechny vnitřní úhly shodné, všechny strany shodné a že je tedy pravidelný.

b) Obsah P_0 daného šestiúhelníka je

$$P_0 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Označme P obsah šestiúhelníka $C_1C_2 \ldots C_6$ a P' obsah trojúhelníka $A_1A_2C_2$.

V trojúhelníku $A_1A_2C_2$ je $\sphericalangle A_2A_1B_2 = \varphi$, $\sphericalangle A_1A_2C_2 = \sphericalangle A_1A_2A_3 - \sphericalangle A_3A_2B_3 = 120° - \varphi$, $\sphericalangle A_1C_2A_2 = 60°$. Ze sinové věty užité na tento trojúhelník plyne

$$\frac{A_1C_2}{A_1A_2} = \frac{\sin(120° - \varphi)}{\sin 60°}; \qquad \frac{A_2C_2}{A_1A_2} = \frac{\sin\varphi}{\sin 60°},$$

tj.

$$A_1C_2 = \frac{\sin(120° - \varphi)}{\sin 60°}, \quad A_2C_2 = \frac{\sin\varphi}{\sin 60°}.$$

Přitom je $A_1C_1 = A_2C_2$ a tedy $C_1C_2 = A_1C_2 - A_1C_1 = A_1C_2 - A_2C_2$, tj.

$$y = C_1C_2 = \frac{\sin(120° - \varphi) - \sin\varphi}{\sin 60°} =$$

$$= \frac{2\cos 60° \sin(60° - \varphi)}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(60° - \varphi).$$

Odtud

$$P = 6 . \frac{1}{4} y^2 \sqrt{3} = \frac{6}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin^2(60° - \varphi),$$

tj.

$$P = 2\sqrt{3} \sin^2(60° - \varphi). \tag{1}$$

c) Máme najít φ, pro které platí $P = \frac{2}{3} P_0$ neboli $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3}$ a tedy

$$P = \sqrt{3} . \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) vyplývá vzhledem k danému požadavku:

$$2\sqrt{3} \sin^2(60° - \varphi) = \sqrt{3} ,$$

$$\sin^2(60° - \varphi) = \frac{1}{2} ,$$

$$\sin(60° - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} , \tag{3}$$

neboť vzhledem k textu úlohy je

$$0 < \varphi < 30° \tag{3'}$$

a tudíž $\sin(60° - \varphi) > 0$, takže pro úhel $60° - \varphi$ nutně platí

$$30° < 60° - \varphi < 60°,$$

tj. úhel $60° - \varphi$ je ostrý.

Ze vztahů (3) a (3′) plyne $60° - \varphi = 45°$, tj.

$$\varphi = 15°.$$

Závěr. Obsah vzniklého šestiúhelníka pro $0 < \varphi < 30°$ je dán vzorcem (1). Tento obsah je roven dvěma třetinám obsahu daného šestiúhelníka právě pro $\varphi = 15°$.

Dodatečná otázka. Z trojúhelníka $A_1A_2B_2$, kde je $\sphericalangle A_1 = \varphi_1$, $\sphericalangle A_2 = 120°$, $\sphericalangle B_2 = 60° - \varphi_1$, pomocí sinové věty dostaneme

$$\frac{A_2B_2}{A_1A_2} = \frac{\sin\varphi}{\sin(60° - \varphi)}$$

neboli pro $x = A_2B_2$ platí

$$x = \frac{\sin\varphi}{\sin(60° - \varphi)} \tag{4}$$

a tedy

$$\sin(60° - \varphi) = \frac{\sin\varphi}{x}.$$

Po dosazení do (1) máme

$$P = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{x^2}. \tag{5}$$

Ze (4) postupně plyne pro $0 < \varphi < 30°$ (viz geometrický význam úhlu φ a úsečky A_2B_2 délky x, přičemž bod B_2 leží uvnitř úsečky A_2A_3)

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin(60° - \varphi)}{\sin\varphi},$$

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right) : \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{2}$$

a tedy

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{2+x}{2x} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2+x}{x\sqrt{3}} . \tag{6}$$

Je znám vzorec

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\varphi} ;$$

po dosazení ze (6) máme

$$\sin^2\varphi = 1 : \left(1 + \frac{4+4x+x^2}{3x^2}\right)$$

neboli

$$\sin^2\varphi = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{x^2+x+1} .$$

Dosaďme tento výsledek do (5); dostaneme

$$P = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} .$$

4. Platí-li pro reálná čísla a, b, c nerovnosti

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 2c > a + b,$$

potom je $c^2 > ab$ a platí

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab} ; \tag{1}$$

dokažte.

Řešení. Z nerovnosti $2c > a + b$ umocněním obou stran dostaneme (jde o kladná čísla)

$$4c^2 > a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2 + 4ab \geqq 4ab$$

a tedy

$$c^2 > ab; \tag{2}$$

proto v (1) je $c^2 - ab > 0$ a odmocniny mají smysl.

I. Předpokládejme, že platí $c - \sqrt{c^2 - ab} < a$ neboli

$$c - a < \sqrt{c^2 - ab}. \tag{3}$$

Jsou dvě možnosti:

Případ [**1**]. Nechť je $c - a \leqq 0$, potom (3) platí.

Případ [**2**]. Nechť je $c - a > 0$; umocněme obě strany (3) na druhou:

$$c^2 - 2ac + a^2 < c^2 - ab$$

neboli

$$0 < a(2c - a - b). \tag{4}$$

Protože platí $2c > a + b$, je vztah (4) správný; obrácením postupu dospějeme ke (3).

II. Platnost nerovnosti $a < c + \sqrt{c^2 - ab}$ neboli

$$a - c < \sqrt{c^2 - ab}$$

dokážeme stejně jako v odst. I.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Náčrt jiného řešení. I. Podle předpokladu platí

$$(2c)^2 > (a + b)^2; \tag{5}$$

nechť neplatí (2), tj. platí

$$4c^2 \leqq 4ab. \tag{6}$$

Z (5), (6) plyne $4ab > (a + b)^2$ neboli $0 > (a - b)^2$, což je spor.

II. Nechť platí $c - \sqrt{c^2 - ab} \geqq a$ neboli $c - a \geqq \geqq \sqrt{c^2 - ab}$; pak nutně je $c - a \geqq 0$ a platí $(c - a)^2 \geqq \geqq c^2 - ab$, tj. $-2ac + a^2 \geqq -ab$ neboli $2c \leqq a + b$, což je spor s předpokladem.

3. *ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A*

1. Najděte všechna reálná čísla x, pro něž platí nerovnost

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}\,. \tag{1}$$

Řešení. Je-li x řešením nerovnosti (1), pak je nutně

$$x \neq n\,.\,90^\circ \text{ (kde } n \text{ je libovolné celé číslo);} \tag{2}$$

jinak by zlomky v (1) neměly smysl. Tu je

$$3\sin^2 x \cos^2 x > 0$$

a znásobením obou stran nerovnosti (1) tímto číslem dostaneme nerovnost

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) \geqq 8\cos^2 x \sin^2 x;$$

po snadné úpravě obdržíme

$$8\cos^4 x - 2\cos^2 x - 3 \geqq 0$$

neboli

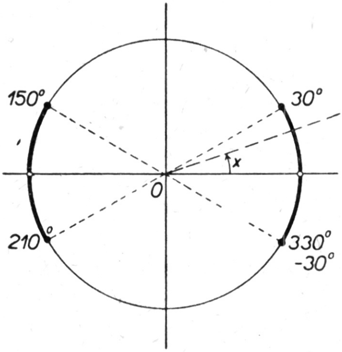
$$\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\right) \geqq 0.$$

Protože druhý činitel na levé straně této nerovnosti je kladný, plyne odtud, že nutně je

$$\cos^2 x - \frac{3}{4} \geqq 0$$

neboli

$$|\cos x| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$



Obr. 12

Protože je $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, snadno z grafu funkce $\cos x$ najdeme tyto intervaly pro úhel x (viz např. *obr. 12*):

$$-30° + k.2R \leqq x < k.2R\,,$$
$$k.2R < x \leqq 30° + k.2R\,,$$

kde k je libovolné celé číslo.

Obrácením postupu s kterýmkoli z čísel x těchto intervalů dospějeme ke vztahu (1). Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení Pavla Noska, 11.a tř. jsš,
Hradec Králové.

Jiné řešení. Vztah (1) lze za předpokladu (2) postupně upravovat takto (je $\mathrm{tg}^2 x > 0$):

$$\mathrm{cotg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x \geqq \frac{8}{3}, \tag{3}$$

$$0 \geqq 3\mathrm{tg}^4 x + 8\mathrm{tg}^2 x - 3.$$

Rovnice $3y^2 + 8y - 3 = 0$ má kořeny

$$y_{1.2} = \frac{1}{6}\left(-8 \pm \sqrt{64 + 36}\right) = \frac{1}{6}(-8 \pm 10),$$

tj. $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -3$. Lze proto vztah (3) psát ve tvaru

$$0 \geqq (\mathrm{tg}^2 x + 3)(3\mathrm{tg}^2 x - 1),$$

kde první činitel napravo je číslo kladné, a proto je nutně

$$3\mathrm{tg}^2 x - 1 \leqq 0.$$

Odtud plyne

$$|\mathrm{tg}\, x| \leqq \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

O čísle x proto nutně platí: buď

$$n.2R \leqq x \leqq 30^\circ + n.2R$$

anebo

$$150^\circ + n.2R \leqq x \leqq 180^\circ + n.2R,$$

kde n je libovolné číslo celé. Avšak vzhledem ke (2) dostáváme intervaly

$$n \,.\, 2R < x \leqq 30° + n \,.\, 2R,$$

$$150° + n \,.\, 2R \leqq x < 180° + n \,.\, 2R,$$

kde n je libovolné číslo celé.

Obrácením postupu dospějeme pro každé z těchto čísel x k nerovnosti (1).

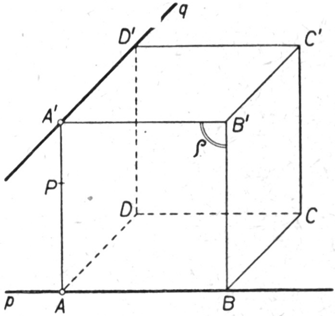
Podle řešení Jana Svobody,
4. roč. průmyslové školy strojní,
Praha 1, Panská ulice.

2. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, kde $ABCD$ je čtverec a platí $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Na přímce AA' leží bod P.

Sestrojte S střed kulové plochy, která je souměrná podle roviny ABB', prochází bodem P a dotýká se přímek $p \equiv AB$, $q \equiv A'D'$.

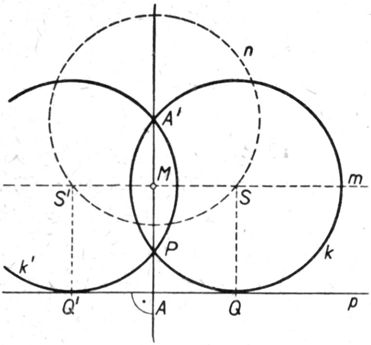
Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy pro různé polohy bodu P na přímce AA'.

Řešení. *Rozbor (obr. 13).* Hledaná kulová plocha $\varkappa$ je souměrná podle roviny $\varrho \equiv ABB'$, proto její střed S nutně leží v rovině ϱ. Plocha $\varkappa$ se dotýká přímky $q \equiv A'D'$, kde $q \perp \varrho$; protože rovina vedená středem kulové plochy kolmo k její tečně protíná tuto tečnu v jejím dotykovém bodě, je nutně bod A' dotykovým bodem tečny q kulové plochy $\varkappa$. Rovina ϱ protne plochu $\varkappa$ v hlavní kružnici k o středu S. Kružnice k prochází tedy body A', P a dotýká se přímky $p \equiv AB$; tím jsme naši úlohu převedli na planimetrickou úlohu, kterou provedeme v rovině ϱ.

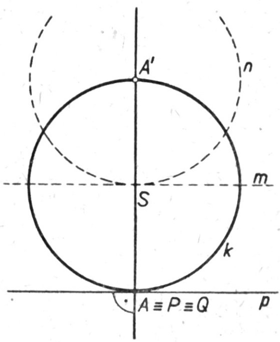


Obr. 13

Označme m osu úsečky PA' (pokud je $P \not\equiv A'$), která je kolmá k přímce p, takže je $m \| p$; bod S nutně leží na ose m tětivy PA' a protože tečna p je rovnoběžná s průměrem m, je vzdálenost r rovnoběžek p, m poloměr kružnice k. Odtud *konstrukce* bodu S (obr. 14):



Obr. 14



Obr. 15

Sestrojme osu m úsečky PA' a vyšetřme vzdálenost $r = AM$ rovnoběžek m, p. Bod S leží jednak na přímce m, jednak na kružnici $n \equiv (A', r)$, tj. je jedním ze společných bodů přímky m a kružnice n. Dále sestrojme kružnici $k \equiv (S, r)$.

Důkaz. Uvažujme nyní kulovou plochu o středu S a poloměru r; kružnice k je její hlavní kružnicí. Plocha $\varkappa$ prochází podle konstrukce body P a A'; protože je $A'D' \perp \varrho$, je bod A' dotykovým bodem tečny $A'D' \equiv q$ kulové plochy $\varkappa$. Přímka p se dotýká kružnice k v bodě Q; proto má přímka p s plochou $\varkappa$ společný jedině bod Q a přímka p je proto i tečnou plochy $\varkappa$. Tím jsme dokázali, že plocha $\varkappa$ splňuje požadavky úlohy. Úvahu jsme provedli za předpokladu, že je $P \not\equiv A'$.

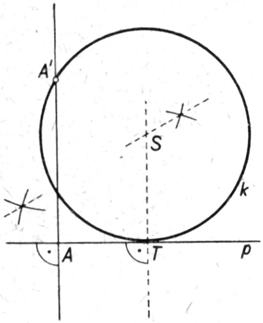
Diskuse. [1] Jestliže je $P \equiv A$, je $r = \frac{1}{2} AA'$ a kružnice k se přímky p dotýká v bodě A; úloha má jediné řešení (*obr. 15*).

[2] Jestliže bod P leží uvnitř úsečky AA', je $r > > \frac{1}{2} AA'$; vzdálenost bodu A' od přímky m je menší než r. Proto kružnice n protne přímku m ve dvou různých bodech S, S' a úloha má dvě řešení (*obr. 14.*)

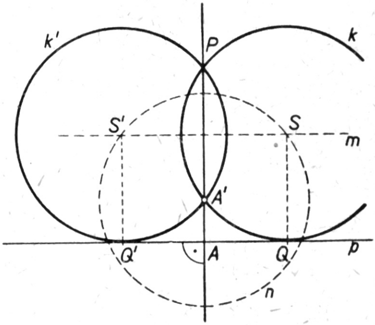
[3] Jestliže je $P \equiv A'$ (výjimečný případ, který jsme neuvažovali — viz *obr. 16*), potom má úloha nekonečně mnoho řešení. Každý bod T přímky p je dotykovým bodem jedné kružnice, která prochází bodem A' a dotýká se přímky p v bodě T. (Množinou

středů hledaných kulových ploch $\varkappa$ je podle známé definice parabola o ohnisku A' a řídicí přímce p.)

[4] Jestliže bod P leží na prodloužení úsečky AA' za bod A', je vzdálenost d bodu A' od přímky m rovna $d = \frac{1}{2} A'P$, kdežto poloměr r kružnice n je



Obr. 16



Obr. 17

$r = \frac{1}{2} A'P + AA'$, tj. $r > d$; proto přímka m a kružnice n se protínají ve dvou různých bodech S, S' a úloha má dvě řešení (*obr. 17*).

[5] Jestliže bod P leží na prodloužení úsečky AA' za bod A, nemá úloha řešení; tečna p kružnice nemůže oddělovat body P, A' kružnice.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení Jana Veselého,
11.c. tř. jsš,
Matiční 5, Ostrava I.

3. V rovině jsou dány dva různé body A, M o vzdálenosti d. Dále je dáno kladné číslo v. V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC.

Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení úlohy.

Může být řešením místo kosočtverce čtverec?

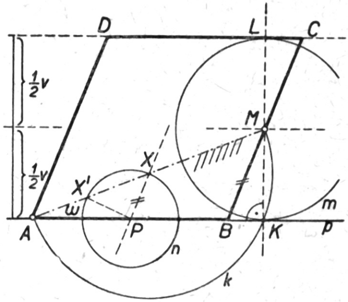
Řešení (*obr. 18*). *Rozbor.* V trojúhelníku ABM je $AB = 2 . BM$, a proto je úhel $\omega \equiv \sphericalangle BAM$ vždy ostrý. Padne tudíž pata K kolmice vedené bodem M na přímku AB dovnitř polopřímky AB. Protože M je středem úsečky BC, je $MK = \frac{1}{2} v$, kde v je výška kosočtverce. Trojúhelník AMK má při vrcholu K pravý úhel; známe přeponu AM a délku odvěsny MK tohoto trojúhelníku (určení podle věty Ssu). V trojúhelníku ABM je

$$\frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Na základě toho sestrojíme stranu hledaného kosočtverce.

Konstrukce (*obr. 18*). Nad úsečkou AM jako průměrem sestrojme Thaletovu kružnici k a opišme kružnici $m \equiv (M, \frac{1}{2} v)$. Zvolme jednu z polorovin vyťatých přímkou AM a označme K společný bod kružnic k, m, který leží v této polorovině. Tím jsme sestrojili trojúhelník AMK; trojúhelník ABM sestrojíme užitím stejnolehlosti takto:

Uvnitř polopřímky AK zvolme bod P a opišme kružnici $n \equiv (P, \varrho = \frac{1}{2}AP)$; označme $X \neq A$ jeden ze společných bodů polopřímky AM s kružnicí n. Tu platí $\dfrac{PX}{AP} = \dfrac{1}{2}$. Ve stejnolehlosti o středu A přiřaďme bodu X bod M; potom bodu P odpovídá bod B (je $MB \| XP$) a platí vztah (1). Tím jsme sestrojili stranu AB hledaného kosočtverce $ABCD$, který pak snadno sestrojíme.



Obr. 18

Z konstrukce plyne, že takto sestrojený kosočtverec splňuje požadavky úlohy: Bod A je jeho vrcholem, bod M je středem strany BC a výška kosočtverce je v.

Diskuse. Bod K se dá ve zvolené polorovině sestrojit právě tehdy, je-li $MK < MA$ neboli jestliže je

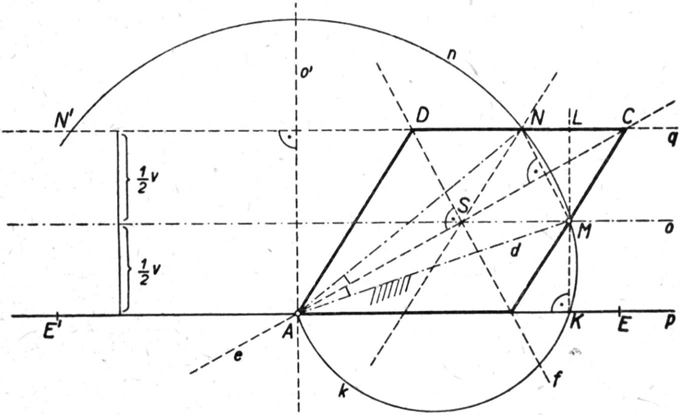
$$v < 2d. \tag{2}$$

Úloha má dvě, jedno nebo žádné řešení podle toho, leží-li uvnitř polopřímky AM dva, jeden nebo žádný bod kružnice $n \equiv (P, \varrho = \frac{1}{2}AP)$, tj. podle toho, který ze vztahů $x < \varrho$, $x = \varrho$, $x > \varrho$ platí (x je vzdálenost bodu P od přímky AM; přitom je $\varrho < AP$, takže společný bod kružnice n a přímky AM může padnout jedině dovnitř polopřímky AM). Ale $x = AP.\sin\omega$, kde $\omega \equiv \sphericalangle KAM$, přičemž $\sin\omega = \frac{1}{2} v . \frac{1}{d}$; je tedy $\frac{x}{2\varrho} = \frac{v}{2d}$. Je-li tedy $\frac{v}{d} \lesseqgtr 1$ neboli $v \lesseqgtr d$, má úloha dvě, jedno anebo žádné řešení [v případech $v \leqq d$ je již splněn požadavek (2)].

Ve čtverci je výška v čtverce rovna straně a čtverce. Pomocí Pythagorovy věty v tomto případě z trojúhelníka AMB dostaneme $d = \frac{1}{2}v\sqrt{5}$; platí-li tento vztah, pak je již $v < d$ a jedním ze dvou řešení je čtverec.

Závěr. Při konstrukci bodu K jsme se omezili na jednu z opačných polorovin o hranici AM; souměrností podle přímky AM dospějeme z právě popsaných řešení k dalším (i v případě, kdy je $BC \perp AM$ neboli $v = d$) vesměs různým řešením. Pro $v = d$ jsou tedy celkem dvě řešení, pro $v < d$ celkem čtyři řešení (popřípadě včetně dvou čtverců); pro $v > d$ není žádné řešení.

Podle řešení Marie Reichlové, 11.a jsš,
Antonínská ul., Brno.



Obr. 19

Náčrt jiného řešení (*obr. 19*). Označme N střed strany CD hledaného kosočtverce $ABCD$. Je známo, že úhlopříčka AC je osou souměrnosti kosočtverce $ABCD$; v této souměrnosti jsou úsečky CB, CD a tím i body M, N souměrně sdružené útvary, tj. platí

$$AN = AM.$$

Na základě těchto vlastností provedeme *konstrukci:*

Bod K sestrojíme podle předchozího řešení (přitom hledaný bod B bude ležet na přímce $p \equiv AK$). Označme L obraz bodu K ve středové souměrnosti o středu M, takže je $KL = v$, a veďme bodem L přímku $q || p$. Opišme kružnici $n \equiv (A, d = AM)$; jeden ze společných bodů přímky q a kružnice n označme N. Osa e úsečky MN (prochází jistě bodem

A) protne přímku q v bodě C; body B, D hledaného kosočtverce leží na ose f úsečky AC a po řadě na přímkách p, q.

Důkaz. Označme S společný bod kolmic e, f. Podle konstrukce je $SA = SC$ a dále $SB = SD$, neboť přímky p, q a tím i body B, C jsou souměrně sdružené podle bodu S. Je tedy $ABCD$ rovnoběžník, jeho výška je v. Podle konstrukce je přímka AC osou souměrnosti tohoto rovnoběžníka, a proto je $CB = CD$; je tedy $ABCD$ kosočtverec (popřípadě čtverec). Protože bod M leží na ose o pásu rovnoběžek p, q, je M středem strany BC. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Při volbě jedné z polorovin vyťatých přímkou AM existuje bod K právě tehdy, jestliže je $v < 2d$. O řešitelnosti dále rozhoduje vzájemná poloha kružnice $n \equiv (A, d)$ a přímky q. Je-li $v < d$, jsou ve zvolené polorovině dvě různá řešení (v tom je též čtverec, jestliže je $d = \frac{1}{2}v\sqrt{5}$); tato řešení jsou vskutku různá, neboť body N, N' jsou různé (jsou souměrně sdružené podle přímky $o' \perp AK$, jdoucí bodem A), přičemž bod M leží uvnitř poloroviny $o'K$ (úhel $\sphericalangle MAK$ je ostrý). Je-li $v = d$, je jediné řešení, kdežto pro $v > d$ nemá úloha řešení. Závěr je v předchozím řešení.

Podle řešení Josefa Pátka,
11.a tř. jsš, Litoměřice.

4. Zistite, pre ktoré reálne čísla x je definovaná funkcia

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} -}$$

$$\overline{- \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}}}, \qquad (1)$$

a zostrojte jej graf.

Riešenie. I. Najprv rozhodneme, pre ktoré reálne čísla x má daná funkcia zmysel.

[**1**] Musí platiť $1 - \frac{x}{2}|x| \geqq 0$ čiže

$$x\,|x| \leqq 2. \qquad (2)$$

a) Pre $x < 0$ je $x\,|x| = -x^2$, čo je záporné číslo a vzťah (2) je splnený.

b) Pre $x \geqq 0$ je $x\,|x| = x^2$ a vzťah (2) možno písať $x^2 \leqq 2$, t. j.

$$x \leqq \sqrt{2}.$$

Spojením obidvoch výsledkov dostávame, že predovšetkým musí platiť

$$x \leqq \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Platnosť tohto vzťahu budeme v ďalšom predpokladať.

[2] Napíšme danú funkciu stručne v tvare $y = \sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}$, pričom je $A_1 \geqq A_2 \geqq 0$. Stačí vyšetriť len to, kedy je $A_2 \geqq 0$, t. j.

$$1 - \frac{x}{4}|x| - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} \geqq 0 ,$$

čo možno napísať

$$1 - \frac{x}{4}|x| \geqq \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} .$$

Ak x splňuje tento vzťah, je ľavá strana nerovnosti nutne nezáporné číslo a obidve strany nerovnosti môžeme umocniť na druhú. Dostaneme, že nutne platí

$$1 - \frac{x}{2}|x| + (\frac{x}{4}|x|)^2 \geqq 1 - \frac{x}{2}|x|$$

čiže

$$\left(\frac{x}{4}|x|\right)^2 \geqq 0,$$

čo však je splnené pre každé reálne x. Pre každé reálne číslo x platí teda tiež $A_2 \geqq 0$.

Tak sme zistili, že funkcia (1) je definovaná pre všetky x, pre ktoré platí (3).

II. Pre ďalšie štúdium funkcie (1) rozoznávajme možnosti:

$$\text{a) } x \leqq 0; \quad \text{b) } 0 \leqq x \leqq \sqrt{2} .$$

Prípad [*a*]. Pre $x \leqq 0$ je $x|x| = -x^2$ a pravú stranu vzťahu (1) možno písať

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}-\sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(4+x^2)+\sqrt{\frac{1}{2}(2+x^2)}}-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{4}(4+x^2)-\sqrt{\frac{1}{2}(2+x^2)}}\,.$$

Položme $2+x^2=a^2$, kde $a>0$. Po dosadení dostaneme

$$y=\sqrt{\frac{1}{4}(2+a^2)+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a\right)^2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{4}(2+a^2)-\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\,a+a^2\right]}-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\,a+a^2\right]}=$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+a\right)\right]^2}-\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-a\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+a\right)-\left|\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-a\right)\right|.$$

Pretože je $a^2\geqq 2$, je $a\geqq\sqrt{2}$ a teda $\left|\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-a\right)\right|=$ $=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{2}\right)$.

Dostaneme preto

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + a - \left(a - \sqrt{2}\right)\right] = \sqrt{2}\,.$$

Výsledok [a]. Pre $x \leqq 0$ je

$$y = \sqrt{2}\,. \tag{4}$$

Prípad [b]. Pre $x \geqq 0$ je $x|x| = x^2$ a pravá strana vzťahu (1) je

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(4 - x^2) + \sqrt{\frac{1}{2}(2 - x^2)}} -$$

$$- \sqrt{\frac{1}{4}(4 - x^2) - \sqrt{\frac{1}{2}(2 - x^2)}}\,.$$

Položme $2 - x^2 = b^2$, kde $b \geqq 0$ [viď (3)]. Po dosadení je

$$y = \sqrt{\frac{1}{4}(2 + b^2) + \sqrt{\frac{1}{2}b^2}} -$$

$$- \sqrt{\frac{1}{4}(2 + b^2) - \sqrt{\frac{1}{2}b^2}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + b\right)\right]^2} - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - b\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + b\right) - \left|\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - b\right)\right|.$$

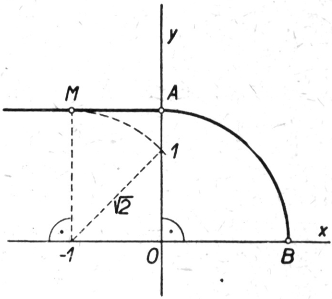
Platí však $2 \geqq b^2$, t. j. $\sqrt{2} \geqq b$ čiže $\sqrt{2} - b \geqq 0$. Preto dostaneme

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + b - \left(\sqrt{2} - b\right)\right] = b = \sqrt{2 - x^2}\,.$$

Výsledok [*b*]. Pre $x \geqq 0$ je

$$y = \sqrt{2 - x^2}\,. \tag{5}$$

Záver. Pre $x \leqq 0$ je $y = \sqrt{2}$, teda konštanta a príslušný graf je polpriamka AM, kde $A \equiv [0, \sqrt{2}]$, $M \equiv [-1, \sqrt{2}]$ (pozri *obr. 20*).



Obr. 20

Pre $x \geqq 0$ je $y = \sqrt{2 - x^2} \geqq 0$ čiže $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$. Body $[x, y]$, ktoré splňujú poslednú rovnicu, ležia na kružnici $k \equiv \left(O, \sqrt{2}\right)$, pričom v našom prípade je $x \geqq 0$ a súčasne $y \geqq 0$, čo znamená, že sa jedná o štvrťkružnicu $\widehat{AB}$, kde $A \equiv [0, \sqrt{2}]$, $B \equiv [\sqrt{2}, 0]$ so stredom $O \equiv [0, 0]$ (pozri *obr. 20*).

Tým je riešenie úlohy prevedené.

Podľa riešenia Ivana Korca, 11.a tr. jsš, Partizánske.

1. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}\,; \qquad (1)$$

b) $$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1; \qquad (2)$$

c) $$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2. \qquad (3)$$

(Přitom odmocnina má smysl jen pro nezáporná čísla.)

Řešení. I. Řešme rovnici

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = p, \qquad (4)$$

kde $p > 0$ je dané reálné číslo. Jestliže x je reálné číslo, které splňuje tuto rovnici, potom nutně platí

$$2x - 1 \geqq 0 \qquad (5')$$

neboli

$$x \geqq \frac{1}{2}\,; \qquad (5)$$

jinak by odmocnina $\sqrt{2x - 1}$ neměla smysl. Za předpokladu, že platí (5), je vzhledem k (5′) první člen součtu na levé straně rovnice (4) číslo kladné; je však třeba, aby i druhý člen levé strany rovnice (4) měl smysl, tj. aby platilo

$$x - \sqrt{2x - 1} \geqq 0 \qquad (6)$$

neboli

$$x \geqq \sqrt{2x - 1}\,.$$

V této nerovnosti jsou obě strany nezáporná čísla [viz (5) a (5′)]; proto je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$x^2 \geqq 2x - 1$$

neboli

$$(x - 1)^2 \geqq 0.$$

Avšak tato nerovnost platí pro každé reálné číslo x, a proto vztah (6) je splněn pro všechna x ze vztahu (5).

Umocněme nyní obě strany rovnice (4) na druhou; pro $p > 0$ dostáváme ekvivalentní rovnici

$$x + \sqrt{2x - 1} + x - \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} = p^2,$$

tj. rovnici

$$2x + 2\sqrt{(x - 1)^2} = p^2.$$

Protože pro reálné číslo a je $\sqrt{a^2} = |a|$, plyne z předchozí rovnice

$$2x + 2|x - 1| = p^2. \tag{7}$$

Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [**1**]. Nechť je

$$x \geqq 1; \tag{8}$$

potom rovnici (7) lze psát

$$2x + 2(x - 1) = p^2$$

neboli

$$4x = p^2 + 2$$

a tedy

$$x = \frac{p^2 + 2}{4}. \tag{9}$$

Případ [2]. Nechť je $\frac{1}{2} \leqq x < 1$; potom rovnici (7) lze psát

$$2x + 2(1 - x) = p^2$$

neboli

$$2 = p^2. \tag{7'}$$

Jestliže je tedy $p = \sqrt{2}$, je rovnice splněna pro všechna

$$\frac{1}{2} \leqq x < 1; \tag{10}$$

pro $0 < p \neq \sqrt{2}$ nemá rovnice (4) v intervalu (10) žádné řešení.

II. Nyní přejdeme k jednotlivým úlohám:

a) Pro $p = \sqrt{2}$ podle případu [1] o čísle x musí platit

$$x = \frac{2 + 2}{4}$$

neboli

$$x = 1.$$

Podle případu [2] pro každé číslo x z intervalu (10) musí být $p = \sqrt{2}$. Dosazením do rovnice (1) se přesvědčíme, že číslo x z intervalu

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$$

je řešením rovnice (1). Podle našeho postupu dospějeme ke vztahu (7′), přičemž klademe $p = \sqrt{2}$, tj. ke vztahu $2 = (\sqrt{2})^2$, který skutečně platí.

b) Pro $p = 1$ ze vztahu (9) plyne

$$x = \frac{3}{4},$$

což odporuje předpokladu (8); rovnice (2) tedy nemá řešení.

c) Pro $p = 2$ ze vztahu (9) plyne

$$x = \frac{4+2}{4}$$

neboli

$$x = \frac{3}{2},$$

což vyhovuje požadavku (8). Číslo $x = \frac{3}{2}$ je skutečně řešením rovnice (3), jak plyne z obrácení postupu nebo dosazení.

Závěr. Řešením rovnice (1) je každé číslo x, o němž platí

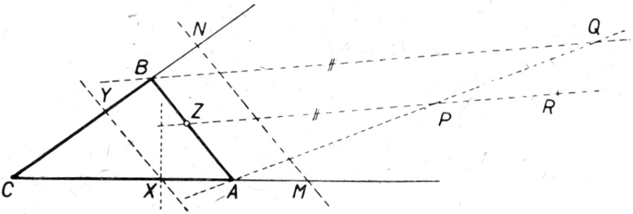
$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1.$$

Rovnice (2) nemá řešení a rovnice (3) má jediné řešení $x = \frac{3}{2}$.

2. V rovině je dán trojúhelník ABC. Uvnitř úsečky AC sestrojte bod X a uvnitř úsečky BC bod Y tak, aby platilo:

(1) $XY \| AB$,

(2) obvod trojúhelníka CXY je roven obvodu lichoběžníka $ABYX$.



Obr. 21

Řešení *(obr. 21). Rozbor.* Předpokládejme, že jsme našli přímku XY požadovaných vlastností. Trojúhelník XYC a lichoběžník $ABYX$ mají společnou stranu XY, a protože mají sobě rovné obvody, musí o jejich zbývajících stranách platit

$$XA + AB + YB = CX + CY. \tag{1}$$

Platí (úseky na polopřímkách CA, CB proťatých dvěma rovnoběžkami AB, XY)

$$XA = k.CX, \quad YB = k.CY, \tag{2}$$

kde konstanta úměrnosti $k > 0$ je nutně menší než 1;

to dokážeme takto: Ze (2) dosaďme do (1); dostaneme postupně

$$AB + k(CX + CY) = CX + CY,$$
$$AB = (1 - k)(CX + CY).$$

Přitom vždy je $AB > 0$, $CX + CY > 0$ (pokud má úloha řešení) a tím nutně též $1 - k > 0$ neboli $k < 1$, což jsme měli dokázat. Je tedy $XA < CX$, $YB < CY$.

Proto vzhledem k (1) a (2) platí

$$XA + AB = CX + CY - kCY = CX + CY(1 - k)$$

čili

$$XA + AB > CX.$$

Existuje tedy uvnitř úsečky AB bod Z takový, že platí

$$XA + AZ = CX. \tag{3}$$

Levou stranu vztahu (1) lze tedy psát

$$(XA + AZ) + (ZB + YB)$$

neboli

$$CX + (ZB + YB).$$

Tím (1) nabude tvar

$$CX + (ZB + YB) = CX + CY$$

neboli

$$ZB + BY = CY. \tag{4}$$

Ze (3), (4) plyne

$$AZ = CX - XA,$$
$$BZ = CY - YB;$$

po dosazení z (2) pak dostáváme

$$AZ = CX(1 - k),$$
$$BZ = CY(1 - k)$$

a tedy

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{CX}{CY}. \tag{5}$$

Protože je $XY \| AB$, platí podle známé věty vztah

$$\frac{CX}{CY} = \frac{CA}{CB}$$

a ve spojení s (5) platí též

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{CA}{CB}. \tag{6}$$

Sestrojme na prodloužení úsečky AC za bod A bod M tak, aby $AM = AZ$; na prodloužení úsečky BC za bod B sestrojme bod N tak, aby $BN = BZ$. Po dosazení za AM, BN do levé strany (6) dostáváme

$$\frac{AM}{BN} = \frac{CA}{CB}.$$

Podle známé věty (svazek přímek proťatý dvěma rovnoběžkami nebo stejnolehlost trojúhelníků CAB, CMN) z této rovnosti plyne

$$MN \| AB.$$

Přitom je $XM = XA + AM = XA + AZ = CX$ a podobně se dokáže, že nutně je $YN = CY$. Je tedy $XY \| AB$ střední příčkou trojúhelníka CMN. Vedle toho platí (6), takže bod Z dělí úsečku AB v poměru stran CA, CB trojúhelníka. (Poznámka. Podle známé věty o ose úhlu $\sphericalangle BCA$ je CZ osou tohoto úhlu). Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 21). Bodem A sestrojme pomocnou polopřímku APQ, která není částí přímky AB, a to tak, že o jejích bodech P, Q platí

$$AP = CA, \quad PQ = CB. \tag{7}$$

V trojúhelníku ABQ veďme příčku $PR \| QB$ a označme Z společný bod přímek PR, AB. Protože bod P leží uvnitř úsečky AQ, leží Z uvnitř AB; přitom je

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AP}{PQ}$$

neboli vzhledem k (7)

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{CA}{CB}. \tag{8}$$

Na prodloužení úsečky AC za bod A sestrojme úsečku $AM = AZ$, na prodloužení úsečky BC za bod B sestrojme úsečku $BN = BZ$. Označme po řadě X, Y středy úseček CM, CN; potom je XY hledaná přímka.

Důkaz správnosti konstrukce pro stručnost nebudeme provádět; je patrný z rozboru a z poznámek připojených ke konstrukci, viz především vztah (8).

Diskuse. Protože bod Z lze sestrojit s jediným výsledkem a protože střední příčka $XY \parallel MN$ trojúhelníku CMN existuje, má úloha vždy právě jedno řešení.

Dodatek. 1. Z „Poznámky" uvedené v textu vyplývá velmi jednoduchá konstrukce bodu Z užitím osy úhlu $\sphericalangle BCA$; tu užíváme známé věty: „Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ trojúhelníka dělí stranu AB ve dvě úsečky, o nichž platí vztah (8)."

2. Jiné řešení (užitím výpočtu) je uvedeno v učebnici Geometrie pro 9. post. ročník, vyd. z r. 1955, str. 106.

3. Nech je dané prirodzené číslo n. Dokážme:

a) Ak je číslo n párne, potom je číslo $3^n + 63$ deliteľné číslom 72.

b) Ak je číslo $3^n + 63$ deliteľné číslom 72, potom je číslo n párne.

Riešenie. a) Pretože pre $n = 2$ je tvrdenie úlohy pravdivé, predpokladajme, že je $n > 2$ a že číslo $n = 2k$, kde k je prirodzené číslo väčšie ako jedna. Platí

$$x = 3^n + 63 = (3^n - 3^2) + 72. \qquad (1)$$

Ak dokážeme, že číslo

$$y = 3^n - 3^2$$

je deliteľné číslom 72, potom bude dôkaz tvrdenia úlohy prevedený, pretože je $x = y + 72$, kde druhý sčítanec je deliteľný číslom 72.

O čísle y platí

$$y = 3^2(3^{n-2} - 1).$$

Tedy číslo y je deliteľné deviatimi, no číslo $72 = 9 . 8$ (tj. súčin dvoch nesúdeliteľných čísel), preto stačí dokázať, že číslo

$$z = 3^{n-2} - 1$$

je deliteľné ôsmimi. Číslo $n - 2$ je párne a prirodzené, takže môžeme písať $n - 2 = 2k$, kde k je prirodzené číslo. Podľa známeho vzorca platí

$$z = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1),$$

kde $3^k - 1$, $3^k + 1$ sú bezprostredne za sebou nasledujúce párne čísla v prirodzenej postupnosti čísel. O týchto je známe, že práve jedno z nich je deliteľné štyrmi a zbývajúce je deliteľné dvoma. Preto je číslo z deliteľné súčinom $4 . 2$, tj. číslom 8. Tým je tvrdenie úlohy a) dokázané.

b) Dôkaz tvrdenia úlohy prevedieme tak, že sa oprieme o dokázané tvrdenie úlohy a) a o skutočnosť, že pre prirodzené nepárne n nie je číslo $x = 3^n + 63$ deliteľné číslom 72. (Iné celé čísla x ako pre prirodzené párne alebo nepárne n totiž neprichádzajú do úvahy.)

Nech je prirodzené číslo n nepárne, takže platí $n = 2k + 1$. Môžeme predpokladať, že o prirodzenom čísle k platí $k \geqq 1$ (pre $k = 0$ je $x = 3 + 63 = 66$ a toto číslo nie je deliteľné číslom 72).

Pre $k \geqq 1$ môžeme písať [s použitím označení z úlohy a)]

$$x - 72 = y = 3^{2k+1} - 3^2 = 3^2(3^{2k-1} - 1), \qquad (2)$$

$$z = 3^{2k-1} - 1 =$$
$$= (3 - 1)(3^{2k-2} + 3^{2k-3} + \ldots + 3 + 1).$$

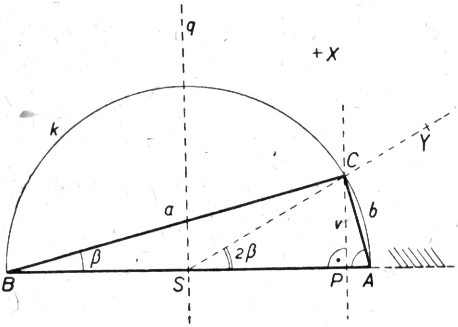
Druhý činiteľ tohto súčinu je súčtom $2k - 1$ nepárnych čísel a je teda nepárne číslo. Prvý činiteľ $3 - 1$ je deliteľný dvoma. Z obidvoch činiteľov vo vzťahu (2) je teda prvý nepárny a druhý je deliteľný dvoma, no nie ôsmimi. Číslo y nie je teda deliteľné ôsmimi a preto ani číslo x pre prirodzené nepárne n nie je deliteľné číslom 72. Ak teda číslo $3^n + 63$ (pre n prirodzené) je deliteľné číslom 72, je nutne n číslo párne.

Tým je dôkaz tvrdenia úlohy b) prevedený.

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dána jeho přepona $c = AB$, přičemž víme, že těžnice příslušná k přeponě je rovná střední geometrické úměrné obou odvěsen.

Řešení. *Rozbor.* Označme a, b, c odvěsny a přeponu hledaného trojúhelníka ABC, kde $\sphericalangle C = 90°$; dále označme α, β jeho ostré úhly, v výšku příslušnou k přeponě AB (viz obr. 22), P její patu a S střed přepony, který je středem kružnice k trojúhelníku ABC opsané. Platí $SA = SB = SC = \frac{1}{2}c$; podle textu úlohy pak platí $SC^2 = CA.CB$ neboli $(\frac{1}{2}c)^2 = ab$, tj.

$$c^2 = 4ab. \tag{1}$$



Obr. 22

Podle Pythagorovy věty platí

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2}$$

Pro obsah p trojúhelníka ABC platí $p = \frac{1}{2}ab$ a též $p = \frac{1}{2}cv$; odtud porovnáním

$$v = \frac{ab}{c}.$$

Po dosazení z (1)

$$v = \frac{c^2}{4c},$$

tj.

$$v = \frac{c}{4}. \tag{3}$$

V trojúhelníku SCP, kde $\sphericalangle P = 90°$, je $SC = \frac{1}{2}c$, $CP = \frac{1}{4}c$, takže poměr odvěsny CP a přepony SC je $1 : 2$; podle známé věty je proti odvěsně CP úhel $\sphericalangle S = 30°$. Tento úhel $\sphericalangle ASC$ je středový k obvodovému úhlu $\beta \equiv \sphericalangle ABC$, takže

$$\beta = 15°, \quad \alpha = 75°. \tag{4}$$

Toto platí při označení trojúhelníku ABC tak, že bod P je bodem úsečky SA neboli, že je $\alpha > \beta$. Pro případ $\alpha < \beta$ máme dvojici úhlů

$$\beta = 75°, \quad \alpha = 15°. \tag{5}$$

Odtud *konstrukce* (viz *obr. 22*). Zvolme polohu přepony $AB = c$ a dále zvolme polorovinu ABX, v níž má ležet hledaný trojúhelník. Opišme kružnici $k \equiv (S, \frac{1}{2}c)$ nad úsečkou AB jako průměrem a sestrojme v polorovině ABX úhel $\sphericalangle YSA = 30°$. Společný bod polopřímky SY a kružnice k je vrchol C hledaného trojúhelníka, který podle předchozího zřejmě splňuje požadavky úlohy [viz vztah (4)]. Dále označme q osu úsečky AB a dále BAC' obraz trojúhelníku ABC v souměrnosti vzhledem k ose q; trojúhelník ABC' je zřejmě při zvolené poloze úsečky AB a poloroviny ABX také řešením úlohy [viz vztah (5)].

Úloha má tedy dvě řešení.

Takto řešil úlohu
Václav Moravec, 10.a tř. 2. jsš,
České Budějovice.

Nástin jiného řešení. Ze vztahů (2), (1) porovnáním pravých stran postupně dostaneme

$$a^2 + b^2 = 4ab,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}\,. \tag{6}$$

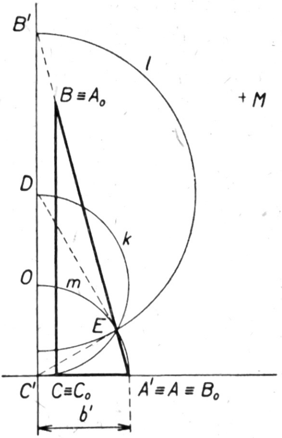
Protože $\left(\frac{a}{b}\right)_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)_2 = 1$, budou trojúhelníky $(ABC)_1$, $(BAC)_2$ příslušné kořenům (6) shodné. Omezíme se na konstrukci pro případ prvního kořene.

Konstrukce (viz *obr. 23*). Sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C' \sim ABC$, kde $\sphericalangle C' = 90°$. Zvolme úsečku $C'A' = b'$ a polorovinu $C'A'M$, v níž leží vrchol B'. Podle (6) musí být $\dfrac{C'B'}{C'A'} = 2 + \sqrt{3}\,.$

Ve zvolené polorovině sestrojme úhel $\sphericalangle A'C'D = 90°$ tak, aby $C'D = 2b'$; nad úsečkou $C'D$ jako průměrem sestrojme kružnici $k \equiv (O,\ b')$. Označme E průsečík kružnic k, $m \equiv (C', b')$, a to ten, který padne do poloroviny $C'A'M$; potom je $DE^2 = DC'^2 - C'A'^2 = 4b'^2 - b'^2 = 3b'^2$, tj. $DE = b'\sqrt{3}$. Na prodloužení úsečky DC' za bod D sestrojme úsečku $DB' = DE = b'\sqrt{3}$, takže je $C'B' = (2 + \sqrt{3})b'$ a poměr

$$\frac{C'B'}{C'A'} = \frac{(2+\sqrt{3})b'}{b'} = 2 + \sqrt{3},$$

jak mělo být. K trojúhelníku $A'B'C'$ sestrojme trojúhelník ABC stejnolehlý podle středu $A' \equiv A$ stejnolehlosti, a to takto: Na polopřímce $A'B'$ sestrojme úsečku $A'B = c$, kde c je číslo dané v textu úlohy. V uvažované stejnolehlosti přiřaďme bodu B' bod B jako obraz. Potom je ABC jedno z hledaných řešení. Druhé řešení, které odpovídá druhému kořenu (6), je trojúhelník $\triangle A_0B_0C_0 \cong \triangle BAC$ (viz *obr. 23*), jak se snadno přesvědčíme.



Obr. 23

5. Vypočítejte všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq 1. \tag{1}$$

Řešení. Předpokládejme, že reálné číslo x je řešením dané nerovnosti (1). Aby zlomky na levé straně nerovnosti měly v reálném oboru smysl, musí platit

$$1 + x > 0, \quad 1 - x > 0$$

neboli musí být

$$-1 < x < 1. \tag{2}$$

Nerovnost (1) lze uvést na tvar

$$\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \geqq 1 \tag{3}$$

a protože vzhledem ke (2) je $\sqrt{(1+x)(1-x)} > 0$, po znásobení obou stran (3) právě uvedeným číslem dostaneme

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \geqq \sqrt{1-x^2}\,. \tag{4}$$

Levá strana této nerovnosti musí být kladná, neboť je $\sqrt{1-x^2} > 0$, tj.

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} > 0$$

neboli

$$\sqrt{1-x} > \sqrt{1+x}$$

a po umocnění obou kladných stran této nerovnosti postupně dostáváme

$$1 - x > 1 + x,$$

$$0 > 2x,$$

$$x < 0;$$

spolu se vztahem (2) tedy nutně platí

$$-1 < x < 0. \tag{5}$$

Umocněním obou kladných stran nerovnosti (4) na druhou postupně obdržíme

$$1 - x + 1 + x - 2\sqrt{1 - x^2} \geqq 1 - x^2,$$
$$1 + x^2 \geqq 2\sqrt{1 - x^2}$$

a opětným umocněním na druhou (je jistě $1 - x^2 > 0$) postupně máme

$$1 + 2x^2 + x^4 \geqq 4 - 4x^2,$$

$$x^4 + 6x^2 - 3 \geqq 0,$$

$$\left(x^2 + 3 - 2\sqrt{3}\right)\left(x^2 + 3 + 2\sqrt{3}\right) \geqq 0.$$

Druhý činitel na levé straně je kladné číslo, proto první činitel musí být nezáporný, tj.

$$x^2 + 3 - 2\sqrt{3} \geqq 0. \tag{*}$$

Tu platí

$$2\sqrt{3} - 3 > 2 . 1.7 - 3 = 0{,}4 > 0;$$

proto lze vztah (*) psát

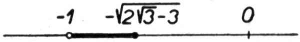
$$\left(x + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}\right)\left(x - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}\right) \geqq 0.$$

Vzhledem k požadavku (5) je druhý činitel záporné číslo, proto o prvním činiteli musí platit

$$x + \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \leqq 0$$

neboli

$$x \leqq -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}\,.$$



Obr. 24

Spojíme-li tento požadavek s (5), dostaneme (viz *obr. 24*)

$$-1 < x \leqq -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}\,. \tag{6}$$

Přitom jistě je $-1 < -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$, neboť platí

$$0 < 2\sqrt{3} - 3 < 2.1{,}8 - 3 = 0{,}6 < 1$$

a tedy

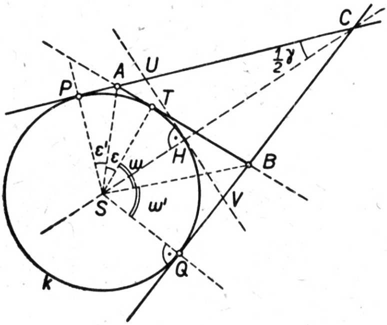
$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 1.$$

Protože pro x dané vztahem (6) lze celý postup obrátit, jsou tímto vztahem dána všechna řešení dané nerovnosti (1).

6. Daný je dutý uhol $\sphericalangle PCQ = \gamma$ a kružnica $k \equiv (S, r)$, ktorá sa dotýka priamok CP, CQ v bodoch P, Q.

Vo vnútri úsečiek CP, CQ zostrojte po rade také body A, B, že priamka AB je dotyčnicou kružnice k, pričom platí $AB = c$, kde c je dané kladné číslo.

Preveďte diskusiu riešiteľnosti úlohy vzhľadom na dané čísla c, r, γ.



Obr. 25

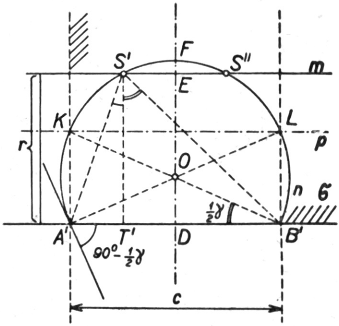
Riešenie. *Poznámka.* Uvádzame dva postupy riešenia. Je zrejmé, že môžeme predpokladať platnosť vzťahu (pozri obr. 25)

$$CA \geqq CB \tag{1}$$

čiže

$$\varepsilon = \varepsilon' \leqq \omega' = \omega; \tag{2}$$

čo vyplýva z trojuholníka ABC, pričom vzťahy (1), (2) sú ekvivalentné a prípad rovnosti nastáva v obidvoch vzťahoch. Oprávnenosť ohraničenia (1) vyplýva zo súmernosti vzhľadom k priamke SC. Ak je úsečka AB riešením úlohy, je aj jej obraz B_1A_1 (v tomto poradí bodov) v spomínanej súmernosti tiež riešením úlohy. Prípad $AB \equiv A_1B_1$ nastane práve v tom prípade, keď v (1) alebo (2) platí rovnosť.



Obr. 26

Prvý postup. *Rozbor* (viď *obr. 25*). V štvoruholníku $CPSQ$ je $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90°$ a teda $\sphericalangle PSQ = 180° -$
$- \sphericalangle PCQ = 180° - \gamma$. Ďalej je $\varepsilon = \varepsilon'$, $\omega = \omega'$ (prvý vzťah vyplýva zo súmernosti dotyčnic vedených z bodu A ku kružnici k vzhľadom na priamku AS a podobne sa odôvodní platnosť druhého vzťahu). Pritom platí

$$\sphericalangle PSQ = \varepsilon + \varepsilon' + \omega' + \omega = 2(\varepsilon' + \omega') = 180° - \gamma,$$

takže

$$\sphericalangle ASB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle PSQ = \varepsilon' + \omega' = 90° - \tfrac{1}{2}\gamma,$$

tj.

$$\sphericalangle ASB = 90° - \tfrac{1}{2}\,\gamma. \qquad (2')$$

Uhol $\sphericalangle ASB$ je teda ostrý (uhol $\frac{1}{2}\gamma$ je ostrý, pretože je polovicou dutého uhla) a práve tak aj uhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ v trojuholníku SAB sú ostré (sú to polovice dutých uhlov $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle QBA$). Trojuholník SAB je preto ostrouhlý. V tomto trojuholníku poznáme veľkosť $c = AB$ jednej strany, veľkosť uhla $\sphericalangle ASB = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ ležiaceho proti strane AB a veľkosť r výšky prislúchajúcej ku strane AB. Zostrojíme pomocný trojuholník $\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB$ a to z týchto prvkov: strany $A'B' = c$, $\sphericalangle S' = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ a výšky veľkosti r prislúchajúcej ku strane $A'B'$. Použitím trojuholníka $S'A'B'$ potom ľahko zostrojíme hľadanú úsečku AB.

Konštrukcia (pozri *obr. 26*). Zvoľme polohu úsečky $A'B' = c$ a polrovinu σ, ktorú vytína priamka $A'B'$. Hľadaný bod S' v polrovine σ dostaneme ako spoločný bod dvoch geometrických miest m, n bodov, a to:

a) priamky $m \| A'B'$, ležiacej v polrovine σ vo vzdialenosti r od priamky $A'B'$ (výška trojuholníka $S'A'B'$ ku strane $A'B'$ má byť r);

b) oblúka $n \equiv A'B'$ so stredom O ako geometrického miesta bodov v polrovine σ, z ktorých je vidieť úsečku $A'B'$ pod zorným uhlom $90° - \frac{1}{2}\gamma$ (v *obr. 26* je teda uhol $\sphericalangle B'A'O' = \frac{1}{2}\gamma$).

Pritom hneď prevedieme ohraničenie. Vieme, že trojuholník $S'A'B'$ musí byť ostrouhlý a má platiť (2), tj. $\sphericalangle A'B'S' \leqq \sphericalangle B'A'S' < 90°$. Preto bod S' musí padnúť do vnútra oblúka KF (kde $KA' \perp A'B'$ a F je spoločný bod oblúka n a osi OD úsečky $A'B'$, pričom D je stred úsečky $A'B'$). Pritom prípad $S' \equiv F$ prislúcha práve rovnosti vo vzťahu (2) [alebo (1)]; ak je S' vo vnútri oblúka KF, odpovedá to ostrej nerovnosti (2). V prvom prípade je jediné riešenie, v druhom okrem bodu S' vo vnútri oblúka KF leží jeho obraz S'' v súmernosti o osi OD vo vnútri oblúka LF, ktorý je obrazom oblúka KF v tejto súmernosti. Bod S'' vzhľadom na vzťah (2) však neuvažujeme.

Musí teda platiť

$$A'K < DE \leqq DF, \tag{3}$$

kde E je priesečík priamok m, OD. Platí však $DE = r$, $A'K = A'B' . \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma = c . \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma$, $DF = OD +$ $+ OF = OD + OA' = \frac{1}{2}c . \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}c . \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma} =$ $= \frac{1}{2}c . \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma}(1 + \sin\frac{1}{2}\gamma)$.

Vzťah (3) môžeme teda písať

$$c . \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma < r \leqq \tfrac{1}{2}\,c . \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma}(1 + \sin\tfrac{1}{2}\,\gamma). \tag{3'}$$

Vzťah (3′) upravíme, aby sme mohli vyšetriť jeho geometrický význam. Vynásobme obidve strany prvej nerovnosti číslom $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma > 0$. Dostaneme

$$c < r . \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \gamma .$$

Ďalej vynásobme obidve strany druhej nerovnosti kladným číslom

$$\frac{2(1 - \sin\frac{1}{2}\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} ;$$

dostaneme

$$2r . \frac{1 - \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \leqq c .$$

Namiesto (3′) máme teda ekvivalentné vzťahy

$$2r . \frac{1 - \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \leqq c < r . \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \gamma , \qquad (4)$$

ku ktorým sa vrátime. Ak platia tieto vzťahy, padne v prípade ostrej nerovnosti bod S' do vnútra oblúka KF a je $S'A' < S'B'$, kým v prípade rovnosti (vľavo) je $S' \equiv F$ a trojuholník $S'A'B'$ je rovnoramenný.

Označme T' pätu výšky vedenej bodom S' trojuholníka $S'A'B'$, kde $\sphericalangle B' \leqq \sphericalangle A' < 90°$ a $S'T' = r$. Vráťme sa k obr. 25, tj. k danej kružnici k, ktorá sa dotýka ramien uhla $\gamma \equiv \sphericalangle PCQ$, pričom je $CP = CQ$. Uhol $\sphericalangle PSQ$ rozdelíme polpriamkou ST (kde $ST = r$) na dva uhly, a to $\sphericalangle PST = 2. \sphericalangle A'S'T'$, $\sphericalangle QST = 2. \sphericalangle B'S'T'$, čo je podľa konštrukcie zrejme možné. Zostrojme osi SA, SB uhlov $\sphericalangle PST$, $\sphericalangle QST$, pričom A leží na priamke CP a B na priamke CQ (bod A leží zrejme vo vnútri úsečky CP a B vo vnútri úsečky CQ). Potom je úsečka AB riešením úlohy.

Dôkaz. V súmernosti o osi SA je podľa konštrukcie bod T obrazom bodu P (polpriamka SA je totiž osou uhla $\sphericalangle PST$ a $ST = SP = r$); je teda $\sphericalangle STA = 90°$. Práve tak je $\sphericalangle STB = 90°$, takže polpriamky TA, TB sú opačné a $ST \perp ATB$. Je teda AB dotyčnicou kružnice k a bod T je príslušný dotykový bod. Podľa konštrukcie je $\triangle SAT \cong \triangle S'A'T'$ (usu), pretože podľa konštrukcie je $ST = S'T'$, $\sphericalangle S = \sphericalangle S'$ a ďalej $\sphericalangle T' = \sphericalangle T = 90°$. Odtiaľ vyplýva, že je $SA = S'A'$. Rovnako sa dokáže $SB = S'B'$. Preto je $\triangle ASB \cong \cong \triangle A'S'B'$ (sus) (podľa konštrukcie je $\sphericalangle S = \sphericalangle S'$). Je teda $AB = A'B' = c$, čím je dôkaz prevedený.

Záver. Ak platí (4), má úloha riešenie, a to:

a) Ak platí vo vzťahu (4) rovnosť, existuje jediná úsečka AB, pretože $S'A'B'$ je rovnoramenný trojuholník a teda je rovnoramenný aj trojuholník SAB, ktorý má priamku SC za os súmernosti. Priamka $AB \perp SC$ je dotyčnicou kružnice k v bode H, v ktorom polpriamka SC pretína túto kružnicu [tým je daný geometrický význam výrazu na ľavej strane vo vzťahoch (4), t. j. c je dĺžka práve zostrojenej úsečky]. V *obr. 25* je dotyčnica $UV \perp SC$ touto hľadanou priamkou AB, a to pre prípad, že $c = UV$.

b) Ak neplatí v (4) rovnosť, je $CA > CB$ a okrem úsečky AB máme druhé riešenie. Je to obraz B_1A_1 úsečky AB v súmernosti o osi SC (bod B_1 je obrazom bodu A a bod A_1 obrazom bodu B). Priamky AB, SC a teda aj priamky B_1A_1, SC sú šikmé. Geometrický význam nerovnosti vpravo vo vzťahoch (4): Je $CP = SP . \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = r . \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$; musí teda byť $c < CP$, kde CP je dĺžka jednej z daných dotyčnic vedených z bodu C ku kružnici k.

Ak neplatí (4), nemá úloha riešenie.

Úlohu tákto riešili:
Jan Žofka, 11.b tr. dsš, Písek,
a Josef Gottwald, 10.a jsš,
České Budějovice

Druhý postup řešení (viz označení v *obr. 27*). *Rozbor*. Předpokládejme (stejně jako v předchozím řešení) platnost vztahu

$$CA \geqq CB. \tag{1}$$

Je $AT = AP$, $BT = BQ$, $AB = AT + TB = c$, takže obvod trojúhelníka ABC je $CA + AB + BC = (CA + AT) + (BT + BC) = CP + CQ = 2.CP$. Proto je součet

$$CA + CB = 2.CP - c,$$

kde známe velikosti CP, c. V trojúhelníku ABC známe tyto prvky: $AB = c$, součet $CA + CB = 2.CP - c$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Sestrojíme nejprve pomocný trojúhelník

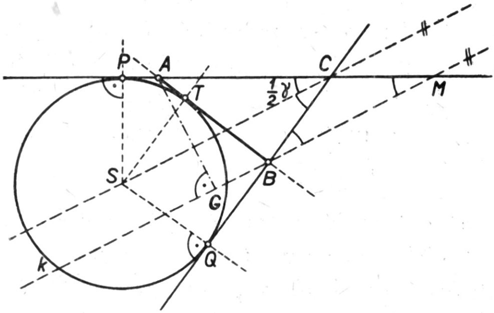
$A'B'C' \cong ABC$ tak, aby platilo: $A'B' = c$, $C'A' + C'B' = 2.CP - c$, $\sphericalangle C' = \gamma$ (viz *obr. 28*); pak teprve provedeme konstrukci úsečky AB v *obr. 27*.

Proveďme tuto úvahu (*obr. 28*): Na prodloužení strany $A'C'$ trojúhelníka $A'B'C'$ za bod C' určeme bod M' takový, že $C'M' = C'B'$; pak je trojúhelník $C'B'M'$ rovnoramenný a každý z úhlů $\sphericalangle B'$, $\sphericalangle M'$ při základně $B'M'$ je roven polovině vnějšího úhlu γ při vrcholu C', tj. $\sphericalangle B' = \sphericalangle M' = \frac{1}{2}\gamma$. V trojúhelníku $A'M'B'$ tedy je: $A'M' = 2.CP - c$, $A'B' = c$, $\sphericalangle M' = \frac{1}{2}\gamma$. Odtud konstrukce trojúhelníku $A'B'C'$ a tím i úsečka AB.

Konstrukce (viz *obr. 28*). Zvolme polohu úsečky $A'M' = 2.CP - c$ a označme σ jednu z polorovin vyťatých přímkou $A'M'$ (v polorovině σ hledáme bod B'). V polorovině σ sestrojme úhel $\sphericalangle A'M'N' = \frac{1}{2}\gamma$ a opišme kružnici $m \equiv (A', c)$. Označme G' patu kolmice vedené bodem A' k přímce $M'N'$; bod G' padne dovnitř polopřímky $M'N'$, neboť úhel $\sphericalangle A'M'N' = \frac{1}{2}\gamma$, tj. je ostrý.

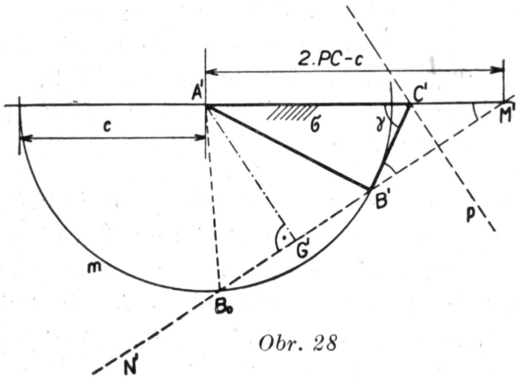
Hledaný bod B' je společným bodem polopřímky $M'N'$ a kružnice m. Z požadavku (1) plyne $C'A' \geqq C'B'$; proto hledaný bod B' musí padnout buď dovnitř úsečky $M'G'$ anebo je $B' \equiv G'$, což ihned dokážeme:

Pro $B' \equiv G'$ neboli pro $c = A'G'$ bod C' leží na ose p úsečky $M'G'$ a na přímce $A'M'$, tedy uvnitř úsečky $A'M'$ (bod C' je pak středem této úsečky). V případě, že B' leží uvnitř úsečky $M'G'$, padne průsečík C' osy p úsečky $M'B'$ a přímky $A'M'$ blíže k bodu M' než k bodu A' a protože je $C'B' = C'M'$, je $C'B' < C'A'$. (Naproti tomu pro bod B_0 v obr. 28



Obr. 27

padne průsečík C_0 osy p_0 úsečky $M'B_0$ a přímky $A'M'$ blíže k bodu A' a vzdálenost bodů C_0, A' je menší než $C_0B_0 = C_0M'$; proto bod B_0 nepřísluší k našemu řešení.) Přitom je úhel $\sphericalangle A'C'B'$ vnějším úhlem při hlavním vrcholu C' rovnoramenného trojúhelníka $C'B'M'$, v němž je $\sphericalangle B' = \sphericalangle M' = \frac{1}{2}\gamma$, a proto je $\sphericalangle A'C'B' = \gamma$, $A'B' = c$, $A'C' + C'B' = 2.CP - c$. Je tedy $A'B'C'$ hledaný pomocný trojúhelník. Přemístěme tento trojúhelník do obr. 27 takto: Bod C' splyne s bodem C, polopřímky $C'A'$, $C'B'$ po řadě s polopřímkami CP, CQ (to je možné, neboť je $\sphericalangle A'C'B' = \gamma = \sphericalangle PCQ$). Padnou tedy body A', B' po řadě dovnitř polopřímek CP, CQ a jejich nové polohy označme A, B (je tedy $CA = C'A'$, $CB = C'B'$); ze shodnosti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sus) plyne $AB =$



Obr. 28

$= A'B' = c$. Dokážeme, že úsečka AB je řešením úlohy (viz obr. 27, 28):

Důkaz. Je $AB = c$ podle konstrukce. Dále dokážeme, že daná kružnice k je vně vepsanou kružnicí trojúhelníka ABC (a to do úhlu $\sphericalangle ACB$). Užijeme této známé věty **V**: „Kružnice vně vepsaná trojúhelníku ABC, která leží v jeho úhlu $\sphericalangle ACB$, dotýká se polopřímek CA, CB po řadě v bodech P_0, Q_0, o nichž platí $CP_0 = CQ_0 = s$, kde s je poloviční obvod trojúhelníka ABC." (Důkaz je obsažen v rozboru naší úlohy.)

Podle konstrukce pro obvod $2s$ trojúhelníka ABC neboli trojúhelníka $A'B'C'$ platí $2s = A'B' + (B'C' + C'A') = A'B' + (M'C' + C'A') = A'B' + M'A' = c + (2.CP - c) = 2.CP$, tj. $s = CP$. Bod P je vzhledem k větě **V** dotykový bod kružnice trojúhelníku ABC vně vepsané, a to té, která leží v úhlu $\sphericalangle ACB$, a dotýká se obou ramen tohoto úhlu; taková kružnice je však jediná a tou je daná kružnice k. Tím je proveden důkaz, že přímka AB je tečnou kružnice k.

Všimněme si řešitelnosti úlohy: a) Je-li $B' \equiv G'$ (obr. 28), pak osa q úsečky $A'B'$ (neboli úsečky $A'G'$) prochází bodem C', takže q je osou rovnoramenného trojúhelníka $C'A'B'$ o základně $A'B'$. Je tedy SC (obr. 27) osou sestrojené úsečky AB a řešení je jediné (viz *obr. 29* pro $A \equiv U$, $B \equiv V$).

b) Je-li B' (obr. 28) vnitřním bodem úsečky $M'G'$, je $C'A' > C'B'$, a tedy $CA > CB$. Kromě úsečky AB máme druhé řešení B_1A_1, kde B_1, A_1 jsou po řadě obrazy bodů A, B v souměrnosti vzhledem k ose SC; tu je $CA_1 < CB_1$.

c) Není-li $B' \equiv G'$ nebo není-li B' vnitřním bodem úsečky $M'G'$, pak nemá úloha řešení.

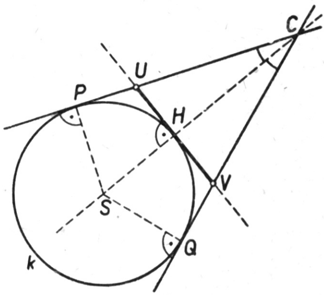
Tyto výsledky vyjádříme pomocí daných čísel c, γ, r (viz obr. 28 a 27): Platí

$$\left.\begin{aligned} CP &= r\,.\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma, \\ A'G' &= A'M'\,.\sin\tfrac{1}{2}\,\gamma = (2\,.\,CP - c)\sin\tfrac{1}{2}\,\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Kružnice m má s polopřímkou $M'N'$ společný bod B' popsané vlastnosti právě tehdy, když platí

$$A'G' \leqq c < A'M'; \quad (6)$$

přitom rovnost vede k jedinému řešení, nerovnost vlevo pak ke dvěma řešením. Vztah $A'G' \leqq c$ lze po dosazení z (5) psát



Obr. 29

$$2r\cos\tfrac{1}{2}\,\gamma - c\sin\tfrac{1}{2}\,\gamma \leqq c$$

neboli

$$2r\cos\tfrac{1}{2}\,\gamma \leqq c\,(1 + \sin\tfrac{1}{2}\,\gamma)\,.$$

Znásobme obě strany této nerovnosti kladným číslem $\dfrac{1 - \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}$; dostaneme

$$2r\,.\,\frac{1 - \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \leqq c. \quad (7)$$

Vztah $c < A'M'$ ze (6) lze psát postupně takto:

$$c < (2\,.\,CP - c), \quad c < CP,$$

$$c < r\,.\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma. \quad (8)$$

Spojením (7), (8) dostáváme

$$2r \cdot \frac{1 - \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \leqq c < r \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma,$$

což jsou vztahy (4) prvního řešení. Přitom rovnost vede k jedinému řešení, ostré nerovnosti ke dvěma; jinak není řešení.

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x} \leqq 6\sqrt{x}. \tag{1}$$

Řešení. Aby zlomek na levé straně (1) měl smysl, musí být

$$x > 0, \quad x \neq 1. \tag{2}$$

Postupně provedeme ekvivalentní úpravy:

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - 6\sqrt{x} \leqq 0 \text{ (zlomek jsme krátili číslem } x\text{)},$$

$$\frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \leqq 0.$$

Položme $\sqrt{x} = y$, kde $y > 0$, $y \neq 1$; tak máme

$$\frac{6y^2 - 5y + 1}{1 - y} \leqq 0. \tag{3}$$

Jsou dvě možnosti: $1 - y > 0$ anebo $1 - y < 0$.

Případ [1]. Nechť je $1 - y > 0$, tj. $y < 1$. Ze (3) plyne

$$6y^2 - 5y + 1 \leqq 0$$

neboli

$$(3y - 1)(2y - 1) \leqq 0;$$

musí proto platit zároveň

$$3y - 1 \geqq 0,$$

$$2y - 1 \leqq 0$$

neboli

$$\tfrac{1}{3} \leqq y \leqq \tfrac{1}{2},$$

takže pro x musí platit

$$\tfrac{1}{9} \leqq x \leqq \tfrac{1}{4}. \tag{4}$$

Obrácením postupu dospějeme k tomu, že číslo (4) vyhovuje vztahu (3).

Případ [2]. Nechť je $1 - y < 0$, tj.

$$y > 1.$$

Pak vzhledem ke (3) nutně platí

$$6y^2 - 5y + 1 \geqq 0.$$

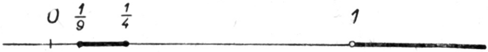
Tento vztah zřejmě platí pro všechna $y > 1$, tj. pro všechna

$$x > 1.$$

Obrácením postupu dospějeme k tomu, že toto x splňuje (3).

Závěr. Danou nerovnost (1) splňují právě tato čísla x (viz *obr. 30*):

$$\tfrac{1}{9} \leqq x \leqq \tfrac{1}{4}, \quad x > 1.$$



Obr. 30

2. Daná je polokružnica k_1 o priemere $AB = 2r$ a bod C vo vnútri úsečky AB taký, že platí $AB = 2p < r$. Na polkružnici k_1 daný je bod D taký, že je $CD \perp AB$. Nad priemerom AC je v polrovine ABD zostrojená polkružnica k_2.

Pomocou daných kladných čísel r, p vypočítajte polomer x kružnice k, ktorá sa dotýka oboch polkružníc k_1, k_2 aj úsečky CD.

Riešenie. Použijeme označenie ako v *obr. 31*. Predpokladajme, že kružnica $k \equiv (S, x)$ požadovaných vlastností existuje. Ľahko usúdime, že musí ležať v polkruhu príslušnom ku k_1, ale mimo polkruhu prislúchajúceho ku k_2. Je samozrejmé, že k musí ležať v polrovine CDA. Označme

$$ST = ST_1 = ST_2 = KC = x, \tag{1}$$

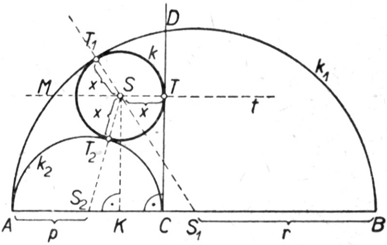
kde K je päta kolmice vedenej bodom S k priamke AB. Označme M spoločný bod polpriamky TS a polkružnice k_1, kde $TS \perp CD$ čiže $TS \| AB$. Preto zrejme je $AC > MT > 2x$, t. j. $2p > 2x$ a teda $p > x$. Bod K preto padne do vnútra úsečky CS_2 (máme teda situáciu ako na *obr. 31*).

Z vnútorného dotyku k, k_1 vyplýva

$$SS_1 = S_1T_1 - ST_1 = r - x. \tag{2}$$

Z vonkajšieho dotyku k, k_2 vyplýva

$$SS_2 = ST_2 + T_2S_2 = \\ = p + x. \tag{3}$$



Obr. 31

Ďalej z *obr. 31* vyplýva

$$KS_2 = CS_2 - KC = \\ = p - x \quad [\text{viď } (1)]. \tag{4}$$

Podľa Pythagorovej vety z trojuholníka SS_2K (kde $\sphericalangle K = 90°$) s použitím vzťahov (3), (4) dostaneme $KS^2 = SS_2^2 - KS_2^2$ čiže

$$(p + x)^2 - (p - x)^2 = 4px. \tag{5}$$

Ďalej použijeme Pythagorovu vetu pre trojuholník SS_1K (kde $\sphericalangle K = 90°$), pričom je

$$KS_1 = KC + CS_1 = x + r - 2p. \tag{6}$$

Pomocou (5), (6) dostaneme

$$SS_1^2 = KS^2 + KS_1^2 = 4px + (x + r - 2p)^2. \tag{7}$$

Zo vzťahu (2) máme

$$SS_1^2 = (r - x)^2. \tag{8}$$

Porovnaním (7), (8) potom po úprave dostávame

$$4px + (x + r - 2p)^2 - (r - x)^2 = 0,$$

odkiaľ postupne vyplýva

$$\begin{aligned}4px &+ \\ &+ [x + r - 2p + r - x] . [x + r - 2p - \\ &- (r - x)] = 0,\\ 4px &+ 2(r - p) . 2(x - p) = 0,\\ px &+ p^2 - px - pr + rx = 0,\\ &\qquad\qquad rx = p(r - p),\end{aligned}$$

$$x = \frac{p(r - p)}{r}. \tag{9}$$

Tým je polomer x vypočítaný. Ľahko zistíme, že kružnica $k \equiv (S, x)$, kde $KS = 2\sqrt{px}$, $ST = x$ (pričom je $KS \perp AB$, $ST \| AB$) splňuje požiadavky úlohy.

3. Nech sú a, b dve ľubovoľné kladné čísla. Potom platí

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leqq \frac{\sqrt{a}}{b^5 . \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a^5 . \sqrt{a}}\,; \tag{1}$$

dokážte.

Riešenie. Platí veta **V**: Ak je $a > b > 0$, potom platí $a^n > b^n > 0$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo.

Položme

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = p, \qquad \frac{1}{\sqrt{b}} = q;$$

zrejme je $p > 0$, $q > 0$. Máme dokázať vzťah

$$p^{10} + q^{10} \leqq \frac{p^{11}}{q} + \frac{q^{11}}{p}. \qquad (1')$$

Odtiaľ postupne dostaneme nerovnosti

$$\begin{aligned} p^{11}q + pq^{11} &\leqq p^{12} + q^{12}, \\ 0 &\leqq p^{11}(p - q) - q^{11}(p - q), \\ 0 &\leqq (p - q)(p^{11} - q^{11}). \qquad (2) \end{aligned}$$

Pre $p = q$ vzťah (2) zrejme platí.

Pre $p > q > 0$ je tiež $p^{11} > q^{11} > 0$ (viď vetu **V**); čísla $p - q$, $p^{11} - q^{11}$ sú teda kladné a ich súčin je preto tiež kladný. Vzťah (2) teda platí i v tomto prípade.

Pre $0 < p < q$ je tiež $0 < p^{11} < q^{11}$ (viď vetu **V**); obidve čísla $p - q$, $p^{11} - q^{11}$ sú teda záporné a ich súčin bude preto číslo kladné. Vzťah (2) opäť platí.

Obrátením postupu sa dostaneme k (1') a odtiaľ k (1). Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

4. V rovině jsou dány dvě různoběžky p_1, p_2 a mimo ně bod M.

Sestrojte dvě shodné (různé) kružnice k_1, k_2, které se navzájem dotýkají v bodě M, přičemž se kružnice k_1 dotýká přímky p_1 a kružnice k_2 se dotýká přímky p_2.

Poznámka. Při řešení je možno užít středové souměrnosti.

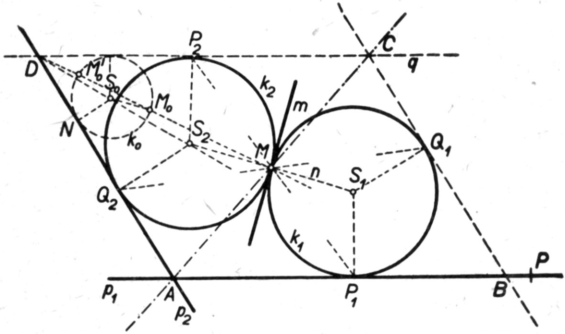
Řešení (označení v *obr. 32*; je $p_1 \equiv AP$, $p_2 \equiv AQ$). *Rozbor*. Předpokládejme, že jsme sestrojili kružnice k_1, k_2, které splňují požadavky úlohy. Je známo, že dvě shodné a navzájem se dotýkající kružnice jsou souměrně sdružené podle středu souměrnosti, kterým je bod M jejich dotyku. Proto v souměrnosti o středu M přejdou kružnice k_1, k_2 jedna ve druhou, společná jejich tečna m v bodě M přejde sama v sebe; tečna p_1 s dotykovým bodem P_1 kružnice k_1 přejde v přímku $q \| p_1$ s příslušným dotykovým bodem P_2 kružnice k_2. Kružnice k_2 se tedy dotýká přímky q a přímky p_2 (viz obr. 32); přitom prochází bodem M. Tím jsme úlohu převedli na známou úlohu: Jsou dány různoběžky q, p_2 a bod M mimo ně; sestrojte kružnici k_2, která se dotýká přímek q, p_2 a prochází bodem M. Podle toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 32). V souměrnosti o středu M sestrojme obraz C bodu A, potom je přímka $q \| p_1$ vedená bodem C obrazem přímky p_1; označme D průsečík přímek q, p_2. Bod M je středem úsečky AC a proto leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ADC$. Nyní provedeme konstrukci kružnice k_2 užitím stejnolehlosti o středu D:

Sestrojme pomocnou kružnici $k_0 \equiv (S_0, r_0)$, která leží v úhlu $\sphericalangle ADC$ a dotýká se jeho ramen (např.

zvolíme na ose tohoto úhlu bod $S_0 \neq D$ a najdeme patu N kolmice vedené bodem S_0 k přímce p_2; tu je $r_0 = S_0N$). Kružnice k_2 je stejnolehlá s k_0 podle středu D.

Polopřímka DM má s k_0 dva různé společné body M_0, M'_0.



Obr. 32

Stejnolehlost o středu D, která převádí bod M_0 v bod M, převede kružnici k_0 v kružnici k_2, bod S_0 ve střed S_2 kružnice k_2; bod S_2 je společným bodem polopřímky DS_0 a přímky $n \| S_0M_0$, vedené bodem M.

P o z n á m k a. Leží-li bod M na polopřímce DS_0, je konstrukce jednoduchá — jde o sestrojení kružnice vepsané a vně vepsané trojúhelníku o stranách v přímkách p_2, q, $m \perp DM$, kde m prochází bodem M.

Pak je $k_2 \equiv (S_2, S_2M)$ a kružnice k_1 je jejím obrazem v souměrnosti o středu M. Stejně sestrojíme kružnici $k'_2 \equiv (S'_2, S'_2M)$ a její obraz k'_1 v souměrnosti o středu M (je $S'_2M \| S_0M'_0$ atd.). Tím je konstrukce provedena.

Kružnice k_1, k_2 a k'_1, k'_2 zřejmě vyhovují požadavkům úlohy, a proto důkaz neprovádíme.

Diskuse. Platí $M_0 \not\equiv M'_0$, neboť M leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ADC$; proto jsou obě uvažované stejnolehlosti o středu D a dvojicích (M_0, M), (M'_0, M) příslušných bodů navzájem různé a tím jsou i kružnice k_2, k'_2 různé. Úloha má tedy právě dvě řešení.

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

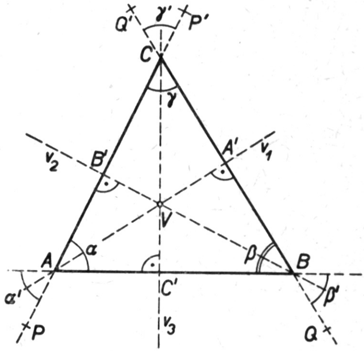
1. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle PCQ$ a bod V. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož vrchol A leží na polopřímce CP a jehož vrchol B leží na polopřímce CQ, a to takový, že bod V je průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka.

Má-li mít úloha řešení, je třeba, aby bod V měl vzhledem k danému úhlu $\sphericalangle PCQ$ určitou polohu; rozlište jednotlivé případy a konstrukci hledaného trojúhelníka proveďte pro každý případ zvlášť.

Řešení. Platí známá věta **I**: Výšky (ve významu přímek) trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem V (tzv. průsečík výšek neboli ortocentrum trojúhelníka).

Dále platí věta **II**: Je-li $\sphericalangle MUN$ dutý úhel a P pata kolmice vedené bodem M k přímce UN, potom, jestliže je úhel $\sphericalangle MUN$ ostrý, padne bod P dovnitř polopřímky UN, jestliže je úhel $\sphericalangle MUN$ tupý, padne bod P dovnitř polopřímky k polopřímce UN opačné.

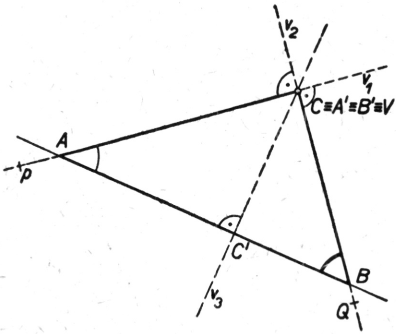
Dokážeme větu **III** (obr. 33 až 35): Ortocentrum V trojúhelníka ABC leží: a) uvnitř tohoto trojúhelníka, jestliže je trojúhelník ABC ostroúhlý; b) v jeho vrcholu C, jestliže je úhel $\sphericalangle BCA$ pravý; c) uvnitř vrcholového úhlu γ' k úhlu $\gamma \equiv \equiv \sphericalangle BCA$, jestliže je tento úhel tupý; přitom polopřímka CV dělí úhel γ' ve dva ostré úhly.



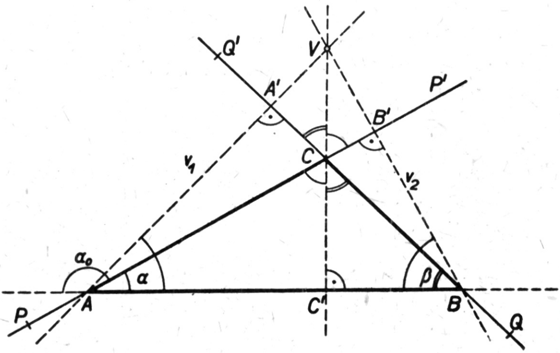
Obr. 33

Důkaz. Označme A', B', C' paty výšek trojúhelníka ABC jako v obrázcích 33 až 35; vnitřní úhly tohoto trojúhelníka označme α, β, γ.

a) Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník *(obr. 33)*. Podle věty **II** bod A' padne dovnitř ramene BC ostrého úhlu $\sphericalangle ABC$ a dále padne dovnitř ramene CB ostrého úhlu $\sphericalangle ACB$; padne tedy zároveň dovnitř každé z obou polopřímek BC, CB, tj. padne dovnitř úsečky BC. Výška AA' tedy prochází vnitřkem úhlu $\alpha \equiv \sphericalangle CAB$ a vnitřkem úhlu k němu vrcholového. Totéž platí i o výšce BB' vzhledem k úhlu $\beta \equiv$



Obr. 34



Obr. 35

$\equiv \sphericalangle ABC$. Protože podle věty I jsou přímky AA', BB' různoběžné, musí jejich společný bod V ležet uvnitř úhlů α, β. [Úhel α a úhel β', vrcholový k β, nemají totiž společného bodu; totéž platí o úhlu α' (vrcholovém k α) a úhlu β nebo o úhlech α', β'.] Avšak vnitřky úhlů α, β mají za společnou část právě vnitřek trojúhelníka ABC. Tím je důkaz části a) věty III proveden.

b) Nechť je $\gamma = 90°$; pak je zřejmě $V \equiv C$ *(obr. 34)*.

c) Nechť je $\gamma > 90°$, takže α, β jsou ostré úhly *(obr. 35)*. Stejně jako v části a) důkazu se dokáže, že přímka CC' prochází vnitřkem úhlu γ a tedy také vnitřkem úhlu γ' k němu vrcholového. Úhel β je ostrý, podle věty II padne pata A' výšky AA' dovnitř polopřímky BC. Protože ABA' je pravoúhlý trojúhelník, kde $\sphericalangle A' = 90°$, nemůže A' ležet uvnitř úsečky BC; jinak by totiž byl úhel $\sphericalangle ACB$ ostrý. Leží tedy bod A' na prodloužení úsečky BC za bod C, a proto rameno AA' ostrého úhlu $\sphericalangle BAA'$ leží v úhlu α_0 vedlejším k úhlu α (v polorovině ABC), takže polopřímka AA' nejde vnitřkem úhlu α. Přitom je $\sphericalangle BAA'$ ostrý úhel trojúhelníku ABA'. Podobně se dokáže, že polopřímka BB' leží v polorovině ABC, vně úhlu β a že úhel $\sphericalangle ABB'$ je ostrý.

Protože je $\sphericalangle BAA' + \sphericalangle ABB'$ součet ostrých úhlů, je menší než $180°$ a podle Euklidova axiomu mají polopřímky AA', BB' uvnitř poloroviny ABC společný bod V. Ten podle věty **I** leží i na přímce CC', ale vzhledem k předchozímu vně trojúhelníka ABC, tj. uvnitř úhlu γ' vrcholového k úhlu γ. Z trojúhelníka ACC' (kde $\sphericalangle C' = 90°$ a bod C' leží uvnitř úsečky AB) plyne, že úhel $\sphericalangle ACC'$ je ostrý; totéž platí i o úhlu $\sphericalangle BCC'$. Polopřímka CV tedy dělí úhel γ ve dva ostré úhly (viz obr. 35).

Tím je věta **III** dokázána.

Řešení úlohy. **I.** Daný úhel $\sphericalangle PCQ$ označme γ a úhel k němu vrcholový označme $\gamma' \equiv P'CQ'$. Dokážeme postupně tvrzení [**a**] až [**c**]:

Tvrzení [**a**]. ,,Nechť je $\gamma < 90°$. Označme $\sphericalangle QCQ''$ pravý úhel, ve kterém leží bod P a dále označme $\sphericalangle PCP''$ pravý úhel, ve kterém leží bod Q (viz *obr. 37*).

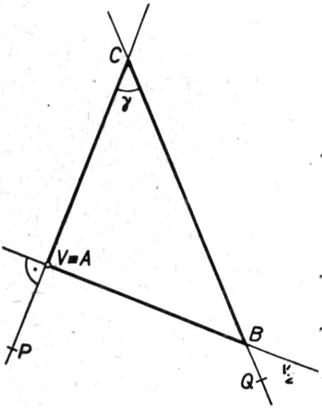
Jestliže bod V padne dovnitř úhlu $\sphericalangle P''CQ''$ (který je zřejmě tupý), potom má úloha právě jedno řešení.“

Tvrzení [**b**]. ,,Nechť je $\gamma = 90°$ a $V \equiv C$; potom má úloha nekonečně mnoho řešení (*obr. 34*).“

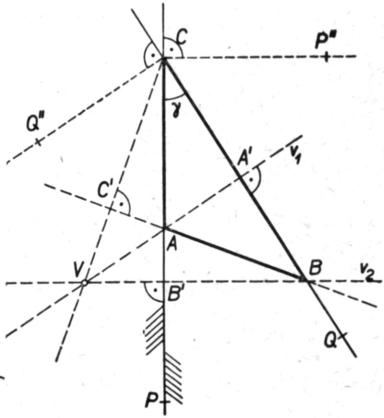
Tvrzení [**c**]. ,,Nechť je $90° < \gamma < 180°$ a nechť bod V padne dovnitř úhlu $\sphericalangle P'CQ'$, přičemž oba úhly $\sphericalangle VCP'$, $\sphericalangle VCQ'$ jsou ostré, potom má úloha právě jedno řešení (*obr. 35*).“

,,Jinak úloha nemá řešení.“

II. *Důkaz.* Případ [*a*]. Je $\gamma < 90°$. Rozeznávejme tři možnosti: (1) Bod V padne dovnitř úhlu γ; (2) bod V leží uvnitř jedné z polopřímek CP, CQ; (3) bod V padne dovnitř úhlu $\sphericalangle P''CQ''$, avšak vně úhlu γ (viz *obr. 37*).



Obr. 36



Obr. 37

Možnost (1) (viz *obr. 33*). Označme A', B' paty kolmic v_1, v_2 vedených po řadě bodem V k přímkám CQ, CP. Přímka $VA' \equiv v_1$ má s polopřímkou CP společný bod $A \not\equiv C$ a přímka $VB' \equiv v_2$ má s polopřímkou CQ společný bod $B \not\equiv C$; dokažme toto tvrzení pro bod A: Je $A' \not\equiv C$ (plyne z věty **II**, neboť úhel $\sphericalangle VCQ$ je ostrý); součet úhlů γ a $\sphericalangle VA'C = 90°$ je menší než 180°, a proto mají polopřímky CP, $A'V$ uvnitř poloroviny CQP společný bod A (Euklidův axiom).

Trojúhelník ABC tedy existuje, přímky v_1, v_2 jsou v něm výškami a jejich průsečík V je tedy ortocentrem tohoto trojúhelníka (věta **I**), který je nutně ostroúhlý. Je jediné řešení.

M o ž n o s t (2) (viz *obr. 36*). Bod $V \not\equiv C$ leží uvnitř polopřímky CP (případ, kdy V leží uvnitř CQ, se řeší obdobně). Podle věty **III** padne ortocentrum na obvod trojúhelníka jedině v pravoúhlém trojúhelníku, a to právě do vrcholu jeho pravého úhlu.

Sestrojme tedy přímku $v_2 \perp CP$ bodem $V \equiv A$. Z Euklidova axiomu plyne, že uvnitř poloroviny CPQ mají přímky v_2, CQ společný bod B. Trojúhelník ABC je jediné řešení úlohy a bod V je jeho ortocentrum.

M o ž n o s t (3) (viz *obr. 37*). Bod V leží uvnitř úhlu $\sphericalangle P''CQ''$, ale vně úhlu γ. Nechť bod V leží např. uvnitř poloroviny opačné k polorovině CPQ a tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle Q''CP$ (případ, že bod V padne dovnitř úhlu $\sphericalangle QCP''$, se řeší obdobně).

Označme B' patu kolmice $v_2 \perp CP$ vedené bodem V. Přímka v_2 a polopřímka CQ mají podle Euklidova axiomu uvnitř poloroviny $CB'Q$ společný bod B (neboť je $\gamma < 90°$ a při bodu B' je pravý úhel). Úhly trojúhelníka BCV jsou ostré (je $\sphericalangle VCQ < \sphericalangle 90°$, $\sphericalangle B$ je ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka BCB' a $\sphericalangle V$ je ostrý úhel trojúhelníka VCB'); označme A ortocentrum trojúhelníku BCV. Protože je BCV ostroúhlý trojúhelník, leží bod A uvnitř výšky CB' (tj. úsečky) trojúhelníka CVB a je $VA \perp BC$, $BAC' \perp VC$, kde C' je pata kolmice vedené bodem B k přímce CV. Je tedy V ortocentrum trojúhelníka ABC, který je jediným řešením úlohy. (Úhel $\sphericalangle A$ trojúhelníka ABC podle věty **III** je nutně tupý.)

Doplněk. Padne-li bod V na některou z polopřímek CQ'', CP'' nebo vně úhlu $\sphericalangle P''CQ''$, nemá zřejmě úloha pro $\gamma < 90°$ řešení; alespoň jedna z pat A', B' kolmic v_1, v_2 nepadne dovnitř příslušné polopřímky CP, popřípadě CQ.

Případ [**b**] Je $\gamma = 90°$ *(obr. 34)*. Je-li ABC hledaný trojúhelník, je nutně $V \equiv C$.

Je-li tedy $V \equiv C$, zvolme uvnitř polopřímek CP, CQ po řadě po jednom bodě; označme je A, B. Trojúhelník ABC má ortocentrum v bodě $C \equiv V$. Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Doplněk. Je-li $V \not\equiv C$, nemá zřejmě úloha řešení.

Případ [**c**]. Je $90° < \gamma < 180°$, bod V leží uvnitř úhlu $\gamma' \equiv \sphericalangle P'CQ'$ a úhly $\sphericalangle VCP'$, $\sphericalangle VCQ'$ jsou ostré (obr. 35); v jiném případě není podle věty **III** řešení.

Bodem V veďme přímky $v_1 \perp CQ$, $v_2 \perp CP$ a příslušné paty označme po řadě A', B'; protože je $\sphericalangle VCQ'$ ostrý, padne bod A' dovnitř polopřímky CQ' opačné k polopřímce CQ a z téhož důvodu odděluje bod C body P, B'.

Polopřímky VA', $B'CP$ mají podle Euklidova axiomu společný bod A uvnitř poloroviny $VB'C$ (neboť je $\sphericalangle CB'V = 90°$ a $\sphericalangle A'VB' < 90°$, což plyne ze čtyřúhelníka $CA'VB'$, ve kterém jsou úhly $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'$ pravé a úhel $\sphericalangle C \equiv \gamma'$ tupý). Stejně se dokáže, že polopřímky CQ, VB' mají společný bod $B \not\equiv C$ uvnitř poloroviny $VA'C$. Snadno se pak usoudí, že bod A již nutně padne dovnitř polopřímky CP a bod B dovnitř polopřímky CQ.

V trojúhelníku ABC jsou podle konstrukce přímky v_1, v_2 výškami, bod V ortocentrem, takže trojúhelník ABC je zřejmě jediným řešením úlohy.

Tím je důkaz tvrzení z odst. **I** proveden a úloha řešena.

2. Pravidelný štvorboký hranol, ktorého podstavná hrana má veľkosť a (v cm) a výška veľkosť v (v cm), má tú vlastnosť, že číslo, ktoré udáva jeho povrch (v cm^2) sa rovná číslu, ktoré udáva jeho objem (v cm^3); pritom a, v sú prirodzené čísla.

Nájdite všetky také hranoly a vypočítajte k nim prislúchajúce čísla a, v.

Riešenie. Objem V daného hranola je

$$V = a^2v; \tag{1}$$

povrch P hranola je

$$P = 4av + 2a^2. \tag{2}$$

Podľa textu úlohy platí

$$a^2v = 4av + 2a^2.$$

Vzhľadom k textu úlohy nutne platí $a > 0$, preto obidve strany poslednej rovnice môžeme deliť číslom a. Dostaneme rovnicu

$$av = 4v + 2a,$$

z ktorej za predpokladu, že je $a \neq 4$, máme

$$v = \frac{2a}{a - 4}, \tag{3}$$

čo možno postupne upraviť takto:

$$v = \frac{2(a - 4) + 8}{a - 4} = 2 + \frac{8}{a - 4},$$

čiže

$$v = 2 + \frac{8}{a - 4}. \tag{4}$$

Z geometrického významu čísla v vyplýva tiež, že je $v > 0$. Keďže čitateľ zlomku na pravej strane rovnice (3) je kladné číslo, dostaneme $v > 0$ len pre $a - 4 > 0$ čiže nutne platí $a > 4$. Podľa textu úlohy sú a, v prirodzené čísla. Do rovnice (4) dosadzujme teda postupne za a prirodzené čísla 5, 6, 7 atď. Pretože $\frac{8}{a-4}$ musí byť prirodzené číslo [pozri (4)], musí platiť

$$8 \geqq a - 4,$$

čiže

$$a \leqq 12.$$

Za a budeme teda dosadzovať len čísla od 5 do 12. Výsledky sú zrejmé z tabuľky:

a	v	Poznámka
5	10	vyhovuje
6	6	vyhovuje
7	$\frac{14}{3}$	nevyhovuje
8	4	vyhovuje
9	$\frac{18}{5}$	nevyhovuje
10	$\frac{10}{3}$	nevyhovuje
11	$\frac{22}{7}$	nevyhovuje
12	3	vyhovuje

Všetky 4 označené dvojice čísel a, v vyhovujú požiadavkám úlohy, o čom sa ľahko presvedčíme dosadením do (1), (2) a porovnaním príslušných čísel V, P.

Poznámka. Pomocou vzťahu (4) možno výpočet čísel a, v zjednodušiť takto: Číslo $\frac{8}{a - 4}$ musí byť prirodzené čiže kladné číslo $a - 4$ musí byť deliteľom čísla 8. Preto sa musí rovnať niektorému z kladných deliteľov čísla 8: 1, 2, 4, 8. Dostávame teda 4 rovnosti:

a) $a - 4 = 1$, tj. $a = 5$ a teda $v = 10$;
b) $a - 4 = 2$, tj. $a = 6$ a teda $v = 6$;
c) $a - 4 = 4$, tj. $a = 8$ a teda $v = 4$;
d) $a - 4 = 8$, tj. $a = 12$ a teda $v = 3$.

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, který má tu vlastnost, že ho lze přímkou p vedenou jedním z jeho vrcholů rozdělit na dva trojúhelníky, které jsou oba rovnoramenné.

Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka ABC, a to vzhledem k tomu, kterým z bodů A, B, C byla přímka p vedena.

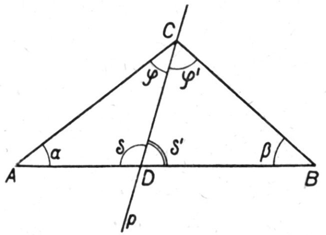
Řešení. Užijeme věty **P**: „Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné a ostré." Dále této věty **Q**: „Rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB (a tedy o hlavním vrcholu C) má osu souměrnosti $q \perp AB$, která prochází bodem C."

Úhly daného trojúhelníka ABC označme α, β, γ a podle věty **P** je

$$\alpha = \beta < 90°, \tag{1}$$

dále je $\gamma = 180° - 2\alpha$.

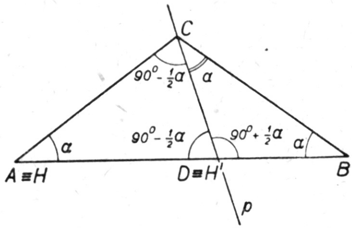
Pro polohu přímky p postačí uvažovat dvě možnosti: Přímka p prochází: [1] bodem C; [2] bodem A. Případ, že přímka p prochází bodem B, převedeme podle věty **Q** osovou souměrností na možnost [2].



Obr. 38

Přitom budeme do obrázků vpisovat velikosti úhlů, a to pomocí velikosti úhlu α; některé z obrázků neodpovídají skutečnosti, protože uvažovaná situace vůbec neexistuje.

Případ [1] (viz označení *obr. 38*). Nechť p prochází bodem C; její společný bod D se základnou AB padne dovnitř této úsečky. Podle textu úlohy dostáváme dva rovnoramenné trojúhelníky ACD, BCD; jejich hlavní vrcholy po řadě označme H, H'. Jsou tři možnosti: [1a] až [1c].

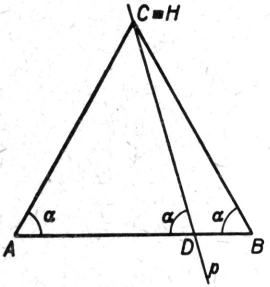


Obr. 39

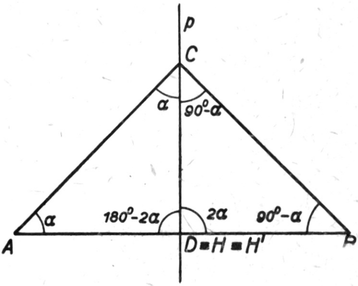
[1a] (viz *obr. 39*). Nechť je $H \equiv A$, takže podle věty **P** musí být $\delta = \varphi = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ a $\delta' = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, který je k δ vedlejší. Je tedy $\delta' > 90°$, a proto může

být jedině $H' \equiv D$. Je tedy BC základnou trojúhelníka BCD a platí $\beta = \varphi' = \frac{1}{2}\delta = 45° — \frac{1}{4}\alpha$.
Odtud a ze vztahu (1) plyne $\alpha = 45° — \frac{1}{4}\alpha$, neboli $\frac{5}{4}\alpha = 45°$ a tedy

$$\alpha = 36°, \quad \beta = 36°, \quad \gamma = 108°.$$



Obr. 40



Obr. 41

Platí skutečně

$$\delta = \varphi = 72°, \quad \beta = \varphi' = 36°, \quad \gamma = \varphi + \varphi' = 108°$$

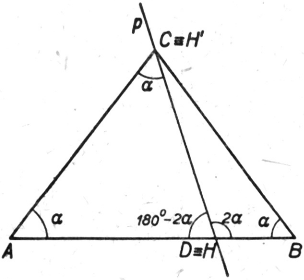
a přímka p skutečně dělí daný trojúhelník ve dva rovnoramenné trojúhelníky.

[1b] (viz *obr. 40*). Nechť je $H \equiv C$, tj. $\alpha = \delta$, přičemž δ je vnějším úhlem v trojúhelníku BCD, tj. platí $\delta = \beta + \varphi'$ (viz obr. 38); dosaďme sem $\delta = \alpha$, $\beta = \alpha$, čímž dostaneme $\alpha = \alpha + \beta'$, což je spor.

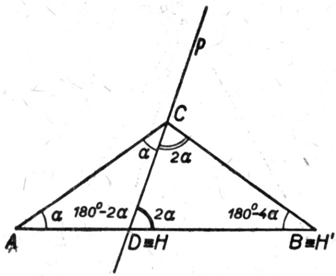
[1c] (viz *obr. 41*). Nechť je $H \equiv D$ a tedy $\varphi = \alpha$,

$\delta = 180° - 2\alpha$. Pro trojúhelník BCD mohou nastat tři možnosti [$1c_1$], [$1c_2$], [$1c_3$].

[$1c_1$] (viz *obr. 41*). Nechť je $H' \equiv D$ a tedy $\beta = \varphi' = \frac{1}{2}\delta = 90° - \alpha$, neboť je vnějším úhlem troj-



Obr. 42



Obr. 43

úhelníka BCD. Ze vztahů $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = \alpha$ dostaneme $2\alpha = 90°$ neboli

$$\alpha = 45°, \quad \beta = 45°, \quad \gamma = 90°.$$

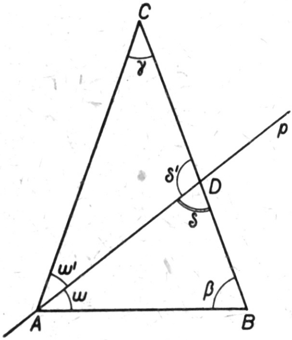
Skutečně je $\varphi = \alpha = 45°$, $\delta = 180° - 2\alpha = 90°$ a odtud $\beta = \varphi' = \frac{1}{2}\delta = 45°$; přímka p skutečně dělí daný trojúhelník ve dva rovnoramenné.

[$1c_2$] (viz *obr. 42*). Nechť je $H' \equiv B$ a tedy $\delta' = \varphi' = 2\alpha$; odtud a z trojúhelníka BCD plyne, že $\beta = 180° - 4\alpha$. Z tohoto vztahu a $\beta = \alpha$ dostaneme $\alpha = 180° - 4\alpha$ neboli

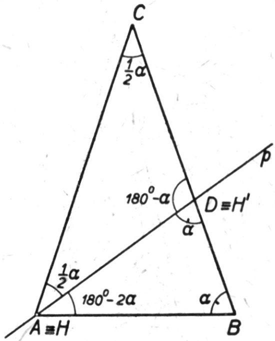
$$\alpha = 36°, \quad \beta = 36°, \quad \gamma = 108°.$$

Tato situace je souměrně sdružená s případem [1a]; porovnej obrázky 42 a 39.

[1c$_3$] (viz *obr. 43*). Nechť je $H' \equiv C$ a tedy $\delta' = \beta$,



Obr. 44



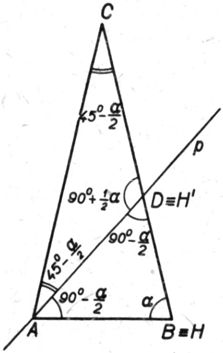
Obr. 45

tj. $\delta' = \alpha$. Úhel δ'' je vnější v trojúhelníku ACD, a proto o něm platí $\delta'' = \alpha + \varphi$ neboli $\delta'' = 2\alpha$, což je spor se vztahem $\delta'' = \alpha$.

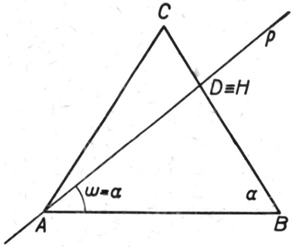
Tím je případ [1] vyřízen.

Případ [**2**] (viz *obr. 44*). Nechť přímka p prochází bodem A a protne rameno BC v bodě D, který padne dovnitř úsečky BC. Úhly δ, δ' jsou vedlejší, tj. $\delta + \delta' = 180°$. Označme hlavní vrcholy v trojúhelnících ABD, ACD po řadě H, H'. Je třeba uvažovat tři možnosti: [2a] až [2c].

[2a] (viz *obr. 45*). Nechť je $H \equiv A$ a tedy $\beta = \delta$; protože je $\beta = \alpha$, plyne odtud $\delta = \alpha$, takže vedlejší úhel $\delta' = 180° - \alpha$ je tupý a bod $D \equiv H'$. Proto v trojúhelníku DAC je $\gamma = \omega' = \frac{1}{2}\delta$ neboli $\omega' = \gamma = \frac{1}{2}\alpha$. Je $\omega = 180° - 2\alpha$, $\omega' = \frac{1}{2}\alpha$ a protože je



Obr. 46



Obr. 47

$\omega + \omega' = \alpha$, dostaneme po dosazení $(180° - 2\alpha) + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$ neboli $\frac{5}{2}\alpha = 180°$ a tím

$$\alpha = 72°, \quad \beta = 72°, \quad \gamma = 36°.$$

Skutečně je $\delta = \beta = 72°$, $\omega' = \gamma = \frac{1}{2}\delta = 36°$, $\omega = 180° - \beta - \delta = 180° - 114° = 36°$, $\alpha = \omega + \omega' = 72°$; přímka p dělí daný trojúhelník ve dva rovnoramenné.

[2b] (viz *obr. 46*). Nechť je $H \equiv B$ a tedy $\omega = \delta = 90° - \frac{1}{2}\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Úhel $\delta' = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ (vedlejší

Tabulka výsledků

Číslo případu	$\alpha = \beta$	γ	Poloha přímky p	Poznámka
1a	36°	108°	přímka jde bodem C, dělí úhel γ ve dva úhly 72°, 36°	2 případy (souměrné podle osy q základny AB)
1c	45°	90°	přímka p jde bodem C a půlí úhel γ a je kolmá na AB	1 případ
2a	72°	36°	přímka p jde bodem A (nebo B) a půlí úhel daného trojúhelníka ABC při tomto vrcholu	2 případy (souměrné)
2b	$77\frac{1}{2}°$	$25\frac{5}{7}°$	přímka p jde bodem A (nebo B) a dělí úhel při tomto vrcholu v poměru 2 : 1, přičemž větší díl je přilehlý k základně AB daného trojúhelníka ABC	2 případy (souměrné)

k δ) je tupý, takže je nutně $H' \equiv D$ a $\omega' = \gamma = \frac{1}{2}\delta = 45° - \frac{1}{4}\alpha$. Ze vztahu $\omega + \omega' = \alpha$ po dosazení máme $(90° - \frac{1}{2}\alpha) + (45° - \frac{1}{4}\alpha) = \alpha$ neboli $135° = \frac{7}{4}\alpha$; je tedy

$$\alpha = 77\tfrac{1}{7}°, \quad \beta = 77\tfrac{1}{7}°, \quad \gamma = 25\tfrac{5}{7}°.$$

Skutečně platí $\omega = \delta = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - 38\frac{4}{7}° = 51\frac{3}{7}°$. Dále je $\omega' = \alpha - \omega = 77\frac{1}{7}° - 51\frac{3}{7}° = 25\frac{5}{7}°$, tj. $\omega = \gamma$. Přímka p tedy dělí daný trojúhelník ve dva rovnoramenné. Protože je $25\frac{5}{7}^\circ . 2 = 51\frac{3}{7}^\circ$ neboli $2\omega' = \omega$, dělí přímka p úhel α v poměru $2 : 1$.

[2c] (viz *obr. 47*). Nechť je $H \equiv D$. Tato situace nemůže nastat, neboť vyžaduje vztah $\omega = \beta$ neboli $\omega = \alpha$ a zároveň $\omega < \alpha$.

Tím je případ [2] vyřízen. *Závěr* je v tabulce.

4. Daný je výraz

$V = (x + y)^2 (x - y) + (y + z)^2 (y - z) + (z + x)^2 (z + x)$, kde x, y, z sú reálne čísla.

Výraz V rozložte na súčin výrazov, ktoré sú v číslach x, y, z prvého stupňa a nájdite všetky trojice čísel x, y, z, pre ktoré je $V = 0$.

Riešenie. Upravujme postupne výraz V takto:

$$\begin{aligned} V &= (x + y)(x^2 - y^2) + (y + z)(y^2 - z^2) + \\ &\quad + (z + x)(z^2 - x^2) = \\ &= x^3 - xy^2 + y^3 - yz^2 + z^3 - zx^2 - \\ &\quad - x^3 + x^2y - y^3 + y^2z - z^3 + z^2x = \\ &= x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 + \\ &\quad + xyz - xyz, \end{aligned}$$

kde sme pripočítali $xyz - xyz = 0$, aby sme mohli previesť ďalšiu úpravu. Ďalej platí:

$$\begin{aligned} V &= xy(x - y) - xz(x - y) - yz(x - y) + \\ &\quad + z^2(x - y) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x - y)(xy - xz - yz + z^2) = \\
&= (x - y)[x(y - z) - z(y - z)] = \\
&= (x - y)(y - z)(x - z) = \\
&= -(x - y)(y - z)(z - x).
\end{aligned}
$$

Je teda

$$V = -(x - y)(y - z)(z - x).$$

Preto platí $V = 0$ práve vtedy, ak platí aspoň jeden zo vzťahov

$$x - y = 0, \; y - z = 0, \; z - x = 0$$

čiže aspoň jeden zo vzťahov

$$x = y, \; y = z, \; z = x.$$

Dostávame teda tri množiny trojíc x, y, z, pre ktoré je $V = 0$. Sú to:

x, $y = x$, z, kde x, z sú ľubovoľné reálne čísla;
x, y, $z = y$, kde x, y sú ľubovoľné reálne čísla;
$x = z$, y, z, kde y, z sú ľubovoľné reálne čísla.

Tým je riešenie úlohy prevedené.

5. V obrázku znamenajú rôzne rovnobežky m, n brehy prieplavu, ktorého pozdĺžnou osou je priamka $p \| m$. Na oboch rôznych brehoch ležia miesta A, B, ktoré sú spojené cestou $AMNB$ (lomená čiara), pričom platí:

(1) $MN \perp p$;

(2) body M, N ležia v uvedenom poradí na priamkach m, n;

(3) $AM = BN$.

Preveďte konštrukciu cesty z A do B, ak sú dané priamky $m || n$ a body A, B ako v obr. 48 a rozhodnite o riešiteľnosti úlohy.

Riešenie. *Rozbor* (obr. 48). Predpokladajme, že sme zostrojili body M, N, ktoré vyhovujú textu úlohy. Priamka p je osou úsečky MN. V súmernosti podľa osi p prejde úsečka MA do úsečky NA'. Trojuholník NBA' je rovnoramenný a jeho základňou je úsečka BA', bod N leží na osi q úsečky BA'. Podľa toho prevedieme konštrukciu.

Konštrukcia (obr. 48). Zostrojme obraz A' bodu A v súmernosti s osou p. Ďalej zostrojme os q úsečky BA' (ak ovšem je $B \neq A'$) a označme N priesečík priamok n, q a M obraz bodu N v súmernosti podľa osi p.

Dokážeme, že body M, N vyhovujú požiadavkám úlohy: Body B, A' ležia vo vnútri polroviny nB; preto bod N je rôzny od B, A'. Bod N leží na osi q úsečky BA', preto je

$$NB = NA'. \tag{1}$$

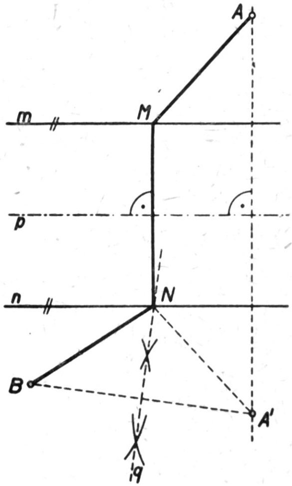
Úsečky NA', MA sú podľa konštrukcie súmerne združené podľa priamky p, preto je

$$NA' = MA\,. \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1), (2) vyplýva

$$NB = MA,$$

čo sme mali dokázať.



Obr. 48

Poznámka. Požiadavky vyslovené v úlohe strácajú praktický význam, ak priesečík N je veľmi ďaleko, ako sa ľahko overí náčrtom.

Diskusia. Riešiteľnosť úlohy záleží predovšetkým od toho, či je $B \not\equiv A'$. Ak však je $B \equiv A'$, sú body A, B súmerne združené podľa priamky p. Potom ktorýkoľvek bod priamky m môžeme považovať za hľadaný bod M (bod N je potom pätou kolmice vedenej bodom M k priamke n).

Teda, ak sú A, B súmerne združené podľa priamky p, potom má úloha nekonečne mnoho riešení.

Nech A, B nie sú podľa priamky p súmerne združené, takže $B \not\equiv A'$. Potom existuje os q úsečky BA'. Priamka q je s priamkou n rôznobežná práve vtedy, keď nie je $BA' \perp n$, tj. ak priamka AB je šikmá k priamke p (alebo k priamkam m, n). Potom má úloha jediné riešenie. Priamka q je však s n rovnobežná práve vtedy, ak je $BA' \perp n$ čiže $AB \perp p$. Vtedy sú q, n dve rôzne rovnobežky a úloha nemá riešenie.

Záver. Ak je priamka p (os pásu rovnobežiek m, n) osou úsečky AB, potom má úloha nekonečne mnoho riešení. Ak je $AB \perp p$, ale p nie je osou úsečky AB, úloha riešenie nemá. Ak sú AB, p dve šikmé priamky, má úloha jediné riešenie.

6. Jestliže je číslo p různé od čísel —1, 0, 1, potom rovnice

$$\frac{p(x-1)+p^2-x}{p(x-1)-p^2+x} = \frac{p^3-1}{p^3+1} \tag{1}$$

o neznámé x má vždycky jediné řešení; dokažte a rozhodněte, jak je tomu s řešením této rovnice v právě uvedených výjimečných případech.

Potom řešte tyto úlohy: Vypočítejte číslo p tak, aby daná rovnice měla kořen: a) $x = 5$; b) $x = -3$ a rozhodněte, je-li to možné.

Řešení. Nechť při daném reálném čísle p je x řešením rovnice (1); po znásobení obou stran rovnice číslem $(p^3 + 1)\,[p(x-1) - p^2 + x]$ dostaneme postupně

$$(p^3 + 1)[p(x - 1) + p^2 - x] =$$
$$= (p^3 - 1)[p(x - 1) - p^2 + x],$$
$$(p^3 + 1)[x(p - 1) + p(p - 1)] =$$
$$= (p^3 - 1)[x(p + 1) - p(p + 1)],$$
$$x[(p - 1)(p^3 + 1) - (p + 1)(p^3 - 1)] =$$
$$= -p(p - 1)(p^3 + 1) -$$
$$- p(p + 1)(p^3 - 1),$$
$$x(p - 1)(p + 1)[p^2 - p + 1 - (p^2 + p + 1)] =$$
$$= -p(p - 1)(p + 1)[p^2 - p + 1 + (p^2 +$$
$$+ p + 1)],$$
$$-2p(p - 1)(p + 1)x =$$
$$= -2p(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1),$$
$$-2p(p - 1)(p + 1)[x - p^2 - 1] = 0. \tag{2}$$

Rozeznávejme možnosti [1] až [4]:

[1] Nechť je $p(p - 1)(p + 1) \neq 0$ neboli nechť je

$$p \neq 1, \quad p \neq 0, \quad p \neq -1. \tag{3}$$

Potom v rovnici (2) je nutně

$$x - p^2 - 1 = 0,$$

tj.

$$x = p^2 + 1. \tag{4}$$

Zkouška. Označme po řadě L, P dosazení čísla (4) do levé a do pravé strany rovnice (1); dostáváme (je $x - 1 = p^2$):

$$L = \frac{p^3 + p^2 - p^2 - 1}{p^3 - p^2 + p^2 + 1} = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1};$$

je tedy $L = P$, pokud ovšem $p^3 + 1 \neq 0$. Řešme rovnici

$$p^3 + 1 = 0 \tag{5'}$$

neboli

$$(p + 1)(p^2 - p + 1) = 0.$$

Buď je $p + 1 = 0$, tj. $p = -1$, což vzhledem ke (3) nenastane; nebo je

$$p^2 - p + 1 = 0, \tag{5}$$

což lze psát

$$p^2 - 2p + 1 + p = 0,$$

neboli

$$(p - 1)^2 = -p.$$

Je-li $p > 0$, je $-p < 0$, kdežto $(p - 1)^2 \geqq 0$; nemůže tedy být $p > 0$.

Je-li $p < 0$, jsou všechna tři čísla na levé straně rovnice (5) kladná a jejich součet je rovněž kladný; nemůže tedy být $p < 0$.

Je-li $p = 0$, je levá strana rovnice (5) rovna číslu 1 a tudíž různá od nuly.

Rovnici (5) nelze splnit žádným reálným číslem; rovnici (5′) lze tedy splnit jedině číslem $p = -1$, které jsme předpokladem (3) vyloučili.

Výsledek I. Je-li p různé od čísel -1, 0, 1, má rovnice (1) jediné řešení $x = p^2 + 1$.

[2] Nechť je $p = 1$. Rovnice (1) pak zní

$$\frac{0}{2(x - 1)} = \frac{0}{2};$$

je zřejmě splněna každým číslem x, o němž platí

$$x - 1 \neq 0$$

neboli jejími řešeními jsou všechna reálná čísla různá od čísla 1.

Výsledek II. Pro $p = 1$ má rovnice (1) nekonečně mnoho řešení; splňuje ji každé číslo $x \neq 1$.

[3] Nechť je $p = 0$. Rovnice (1) pak zní

$$\frac{-x}{x} = -1.$$

Jejím řešením je každé číslo $x \neq 0$.

Výsledek III. Pro $p = 0$ je řešením rovnice (1) každé reálné číslo $x \neq 0$.

[4] Nechť je $p = -1$. Rovnice (1) pak zní

$$\frac{-2x + 2}{0} = \frac{-2}{0}.$$

takže ani levá ani pravá strana nemá smysl.

Výsledek IV. Pro $p = -1$ nemá rovnice (1) žádné řešení.

Přehled o výsledcích vidíme v tabulce na str. 158.

Nyní ještě odpovíme na zbývající dvě otázky a) a b):

a) Pro číslo p různé od čísel -1, 0, 1 z výsledku (4) dostáváme rovnici

$$5 = p^2 + 1$$

Číslo p	Řešení x rovnice je	Poznámka
je různé od čísel —1, 0, 1	$x = p^2 + 1$	jediné řešení
$p = -1$	x neexistuje	zlomky na obou stranách rovnice nemají smysl
$p = 0$	$x \neq 0$ je libovolné reálné číslo	nekonečný počet řešení
$p = 1$	$x \neq 1$ je libovolné reálné číslo	nekonečný počet řešení

neboli postupně

$$0 = p^2 - 4,$$

$$0 = (p - 2)(p + 2)$$

a tedy buď

$$p = 2$$

anebo

$$p = -2.$$

Přímým výpočtem [dosadíme do (1) za p číslo 2 nebo —2] dostaneme rovnici, která má skutečně kořen $x = 5$, jak se snadno přesvědčíme.

Také pro $p = 0$ nebo pro $p = 1$ dostáváme rovnice, mezi jejichž nekonečným počtem řešení je též číslo $x = 5$.

Výsledek a). Rovnice (1) má řešení $x = 5$ pro číslo p rovné jednomu z čísel: —2, 0, 1, 2.

b) Pro číslo p různé od čísel -1, 0, 1 z výsledku (4) dostáváme rovnici

$$-3 = p^2 + 1,$$

kterou nelze splnit žádným reálným číslem, neboť na levé straně je záporné číslo, na pravé je vždy číslo kladné (součet čísla 1 a nezáporného čísla p^2).

Pro $p = 0$ nebo pro $p = 1$ má rovnice (1) za řešení číslo $x = -3$.

Výsledek b). Rovnice (1) má řešení $x = -3$ jedině pro číslo $p = 0$ a pro číslo $p = 1$.

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

1. Riešte rovnicu

$$\frac{3px - 6x}{px - 2x - 1} - \frac{5px - 10x}{px - 2x + 1} = -2 \qquad (1)$$

s neznámou x, pričom p je dané reálne číslo. Udajte, pre ktoré číslo p nemá daná rovnica riešenie.

Potom nájdite také číslo p, aby rovnica mala riešenie $x = -\frac{1}{5}$.

Riešenie. a) Nech číslo x splňuje rovnicu (1). Potom postupne platí

$$\frac{3x(p-2)}{(p-2)x-1} - \frac{5x(p-2)}{(p-2)x+1} = -2, \qquad (1')$$

$$3x(p - 2)\,[(p - 2)x + 1] -$$
$$- 5x(p - 2)\,[(p - 2)x - 1] =$$
$$= -2[(p - 2)x - 1]\,[(p - 2)x + 1],$$
$$3(p - 2)^2x^2 + 3(p - 2)x - 5(p - 2)^2x^2 +$$
$$+ 5(p - 2)x = - 2[(p - 2)^2x^2 - 1],$$
$$(p - 2)^2x^2 . (3 - 5 + 2) + (p - 2)x(3 + 5) = 2,$$
$$8(p - 2)x = 2.$$

Prípad [1]. Nech je $p \neq 2$, t. j. $p - 2 \neq 0$. Potom je

$$x = \frac{1}{4(p - 2)}\,. \tag{2}$$

Teda za predpokladu, že je $p - 2 \neq 0$ čiže

$$p \neq 2 \tag{3}$$

je riešenie rovnice (1) dané vzťahom (2).

Skúšku prevedieme dosadením. Označíme L dosadenie výsledku (2) do ľavej strany rovnice (1). Použijeme k tomu tvar (1′) danej rovnice. Platí:

$$L = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4} - 1} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1 - 1 = -2.$$

Teda skutočne $L = -2$.

Prípad [2]. Nech je $p = 2$. Potom ľavá strana rovnice (1′) sa rovná nule, kým pravá strana je rovná -2. Teda rovnica (1) pre $p = 2$ nemá riešenie.

b) Má platiť $x = -\frac{1}{5}$. Po dosadení do (2) dostaneme rovnosť

$$-\frac{1}{5} = \frac{1}{4(p-2)},$$

z čoho postupne

$$p - 2 = -\frac{5}{4},$$

$$p = \frac{3}{4}. \tag{4}$$

Skúšku prevedieme tak, že do (1′) dosadíme $p = \frac{3}{4}$ a rovnicu riešime. Dostávame (pritom menovateľ každého z oboch zlomkov na ľavej strane rovnice je pre $x = -\frac{1}{5}$ rôzny od nuly)

$$\frac{-\frac{15}{4}x}{-\frac{5}{4}x - 1} - \frac{-\frac{25}{4}x}{-\frac{5}{4}x + 1} = -2.$$

Ak rozšírime zlomky číslom -4, dostaneme rovnicu

$$\frac{15x}{5x+4} - \frac{25x}{5x-4} = -2,$$

odkiaľ postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 15x(5x-4) - 25x(5x+4) &= -2(25x^2 - 16), \\ 5(15-25)x^2 - 60x - 100x &= -50x^2 + 32, \\ -160x &= 32, \\ x &= -\tfrac{1}{5}, \end{aligned}$$

čo má platiť.

Tým je skúška prevedená.

Odpoveď. Rovnice (1) má koreň $x = -\frac{1}{5}$ jedine pre $p = \frac{3}{4}$.

2. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a uvnitř této kružnice ve vzdálenosti $p \geqq 0$ od jejího středu S je dán bod T.

Užitím výpočtu sestrojte dvě shodné (různé) kružnice k_1, k_2, které procházejí bodem T, v tomto bodě se navzájem dotýkají, přičemž každá z nich se dotýká dané kružnice k.

Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k daným číslům r, p.

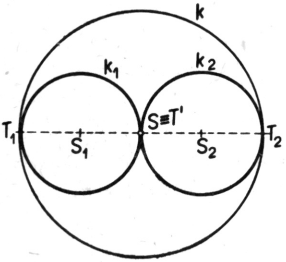
Řešení. Označme x poloměry hledaných shodných kružnic k_1, k_2. Případ, kdy je $p = 0$, tj. $T \equiv S$, je velmi jednoduchý *(obr. 49)*; zřejmě platí $x = \frac{1}{2}r$ a existuje nekonečné množství dvojic kružnic k_1, k_2, které vyhovují úloze (je-li T_1 bod kružnice k, je k_1 kružnicí sestrojenou nad úsečkou ST_1 atd.).

V dalším je $p > 0$ (viz označení v *obr. 50*). V trojúhelníku ST_1T_2 je $ST_1 = ST_2 = r$; v trojúhelníku SS_1S_2 je $SS_1 = ST_1 - S_1T_1 = r - x$, $SS_2 = ST_2 - S_2T_2 = r - x$, tj. $SS_1 = SS_2$. Je tedy SS_1S_2 rovnoramenný trojúhelník; protože je $TS_1 = TS_2 = x$, je T střed základny tohoto trojúhelníka, tj. $q \equiv ST \perp S_1S_2$ je osou souměrnosti nejen trojúhelníka SS_1S_2, ale i celého útvaru složeného z kružnic k, k_1, k_2.

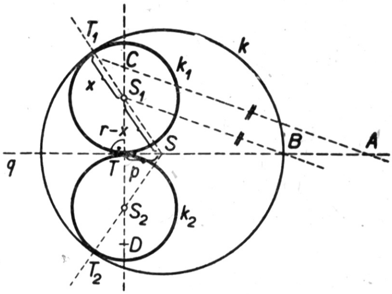
Z trojúhelníka SS_1T (kde $\sphericalangle T = 90°$) pomocí Pythagorovy věty dostaneme $ST^2 = SS_1^2 - TS_1^2$ neboli postupně

$$p^2 = (r - x)^2 - x^2,$$
$$p^2 = (r - 2x) . r,$$
$$2rx = r^2 - p^2,$$

$$x = \frac{(r - p)(r + p)}{2r}; \tag{1}$$



Obr. 49



Obr. 50

tím je výpočet proveden. Protože platí $r > p$, je $x > 0$ a číslo x má geometrický význam.

Vztah (1) lze psát

$$\frac{2r}{r + p} = \frac{r - p}{x}. \tag{2}$$

Provedeme konstrukci úsečky $TS_1 = x$ podle vztahu (2); v obr. 50 je

$$TA = 2r, \quad TB = r + p, \quad TC = TD = r - p,$$
$$BS_1 \| AC.$$

Tu platí $\triangle TBS_1 \sim \triangle TAC(uu)$ a tedy

$$TS_1 = x.$$

Je-li $T \neq S$, má úloha jediné řešení.

3. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (AB je jeho větší základna), jestliže je dáno: b (délka ramene), p (délka střední příčky), e (délka úhlopříčky).

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům b, p, e.

Řešení *(obr. 51). Rozbor.* Je-li $ABCD$ hledaný lichoběžník, sestrojme rovnoběžník $ACDE$; je

$$AD = BC = b, \quad AE = CD = c,$$
$$BE = AB + AE = a + c = 2p,$$
$$AC = DE = BD = e.$$

V rovnoramenném trojúhelníku DBE je BE základnou; jeho strany jsou

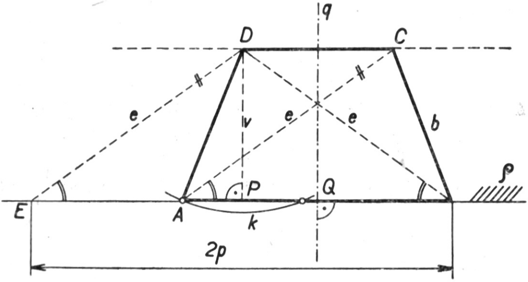
$$BE = 2p, \quad BD = ED = e.$$

Odtud *konstrukce*: Sestrojme rovnoramenný trojúhelník BED tak, aby platilo

$$BE = 2p, \quad BD = ED = e.$$

Opišme kružnici $k \equiv (D, b)$ a označme A společný bod přímky BE s touto kružnicí, a to ten, který padne dovnitř úsečky PE, kde P je pata kolmice vedené bodem D k přímce BE (existenci bodu A vyšetříme v diskusi). Dále sestrojme rovnoběžník $AEDC$; potom $ABCD$ je hledaný lichoběžník.

Důkaz. Čtyřúhelník $ABCD$ podle konstrukce je lichoběžník, neboť je: $AB \| CD$, $2p = BE = AB + AE = AB + CD$, tj. střední příčka je rovna p,



Obr. 51

rameno $AD = b$, $AC = ED = BD = e$ (podle konstrukce), $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BED = \sphericalangle ABD$ (podle konstrukce), takže úsečky AC, BD jsou souměrně sdružené podle osy q úsečky AB a tím jsou souměrně sdružené podle q i úsečky AD, BC, tj. $BC = AD = b$. Přitom je AB větší základna, neboť podle volby leží bod A uvnitř úsečky PE, a proto je $AB > BP = PE > AE = CD$ neboli $AB > CD$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Aby se dal sestrojit trojúhelník DBE, musí platit

$$BE < ED + BD$$

neboli

$$2p < 2e,$$

tj.

$$p < e. \tag{1}$$

Aby bod A padl dovnitř úsečky PE, musí platit $v = DP < DA < DE$ neboli

$$v < b < e; \tag{2}$$

z Pythagorovy věty pro trojúhelník EDP (kde $\sphericalangle P = 90°$) plyne $DP^2 = DE^2 - PE^2$ neboli $v = \sqrt{e^2 - p^2}$. Po dosazení do (2) dostaneme vztahy

$$\sqrt{e^2 - p^2} < b < e$$

neboli

$$e^2 - p^2 < b^2 < e^2. \tag{3}$$

Jsou-li vztahy (1), (3) splněny, má úloha zřejmě jediné řešení; jinak není řešení.

4. Máme m gramů p-procentního roztoku cukru ve vodě. Kolik procent váhy veškeré vody musíme z roztoku odpařit, aby vznikl roztok $2p$-procentní?

Doporučení. Úlohu nejprve řešte pro $p = 40$.

Vysvětlivka. p-procentní roztok cukru znamená, že máme-li např. 100 gramů roztoku, je v něm p gramů cukru a $100 - p$ gramů vody.

Řešení. Původní roztok nechť váží m gramů; váha jeho cukru je

$$\frac{p}{100}\,m \tag{1}$$

gramů, váha jeho vody $\dfrac{100 - p}{100}\,m$ gramů. Odpaříme-li $q\%$ z této váhy vody, zmenší se váha roztoku o $\dfrac{100 - p}{100} \cdot \dfrac{q}{100}\,m$ gramů.

Váha nového roztoku je tedy

$$m - \frac{(100 - p)q}{100^2}\,m = \frac{100^2 - (100 - p)q}{100^2}\,m$$

gramů. Je-li nový roztok $2p$-procentní, je

$$\frac{2p}{100} = \frac{p}{100}\,m : \frac{100^2 - (100 - p)q}{100^2}\,m, \tag{2}$$

neboť váhové množství (1) cukru zůstalo nezměněno. Úpravou vzorce (2) dostaneme

$$2p = \frac{100^2 p}{100^2 - (100 - p)q}\,; \tag{3}$$

odtud po úpravě máme

$$100^2 - (100 - p)q = 5 . 10^3,$$

neboli

$$q = \frac{5000}{100 - p}\,. \tag{4}$$

Má-li být úloha řešitelná, musí být zřejmě $p < 50$; pak podle vzorce (4) vyjde $q > 0$ a zároveň $q < 100$.

Číselný příklad. Pro $p = 40$ vyjde $q = 83\frac{1}{3} \doteq 83{,}3$. Chceme-li tedy z roztoku 40procentního získat roztok 80procentní, musíme odpařit $83\frac{1}{3}\%$ původního množství vody.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC o odvěsnách $CA = CB = 2$ dm. Kolem každého jeho vrcholu opíšeme kružnici o poloměru 1 dm. Oblouky těchto kružnic oddělí z trojúhelníka ABC tři kruhové výseče a z trojúhelníka zbude obrazec, jehož obsah označíme x.

Vypočtěte, kolik procent je číslo x z obsahu daného trojúhelníka.

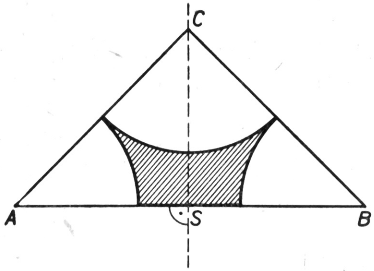
Řešení *(obr. 52)*. Označme P obsah trojúhelníka ABC a x obsah v textu uvažovaného obrazce; dále označme Q obsah tří kruhových výsečí, které od trojúhelníka ABC máme oddělit. Platí $P = \frac{1}{2}.CA.CB = \frac{1}{2}.2.2 = 2$, tedy

$$P = 2. \tag{1}$$

Obsah Q je součet obsahů tří výsečí o poloměru $r = 1$, kruh o poloměru $r = 1$ má obsah πr^2, tj. π; dvě z těchto výsečí (při vrcholech A, B) mají tedy obsahy rovné $\frac{1}{8}\pi$ a třetí výseč (při vrcholu C) má obsah $\frac{1}{4}\pi$; je tedy

$$Q = 2 \cdot \tfrac{1}{8}\,\pi + \tfrac{1}{4}\,\pi = \tfrac{1}{2}\,\pi,$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\,\pi. \tag{2}$$



Obr. 52

Z výsledků (1), (2) pro číslo $x = P - Q$ dostáváme

$$x = 2 - \tfrac{1}{2}\,\pi. \tag{3}$$

Položme přibližně $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do (3) obdržíme

$$x \doteq 2 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{22}{7} = 2 - \tfrac{11}{7} = \frac{14 - 11}{7} = \frac{3}{7},$$

tj.

$$x \doteq \tfrac{3}{7}\,. \tag{4}$$

Označme p hledaný počet procent; je

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100.$$

Dosaďme sem z (1) a (4); dostáváme přibližně

$$p \doteq \frac{3.100}{7} : 2 = \frac{3.100}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$$

nebo

$$p \doteq 21{,}43.$$

Odpověď. Hledaný obrazec je asi $21\frac{1}{2}\%$ obsahu daného trojúhelníka.

2. Kolika způsoby je možno napsat číslo 99 jako součet tří různých prvočísel? (Přitom nehledíme na pořádek sčítanců.)

Řešení. Poznámka. Prvočísla do 99 vyhledáme pomocí tzv. Eratosthenova síta, tj. tím, že postupně vyškrtáme všechny celistvé násobky (větší než jednonásobky) přirozených čísel dvojkou počínajíc; viz další tabulku (čísla „škrtnutá" jsou tištěna obyčejně, čísla „neškrtnutá" polotučně):

1,	**2,**	**3,**	4,	**5,**	6,	**7,**	8,	9,	10,
11,	12,	**13,**	14,	15,	16,	**17,**	18,	**19,**	20,
21,	22,	**23,**	24,	25,	26,	27,	28,	**29,**	30,
31,	32,	33,	34,	35,	36,	**37,**	38,	39,	40,
41,	42,	**43,**	44,	45,	46,	**47,**	48,	49,	50,
51,	52,	**53,**	54,	55,	56,	57,	58,	59,	60,
61,	62,	63,	64,	65,	66,	**67,**	68,	69,	70,

71, 72, **73,** 74, 75, 76, 77, 78, **79,** 80,
81, 82, **83,** 84, 85, 86, 87, 88, **89,** 90,
91, 92, 93, 94, 95, 96, **97,** 98, 99.

Máme tedy tato p r v o č í s l a, která mohou přijít v úvahu:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Při sestavování součtu hledaných tří prvočísel se snažíme volit prvního a druhého sčítance co nejmenšího; dvojka nemůže přijít v úvahu, neboť by se v součtu musila vyskytnout dvě sudá čísla a jedno liché číslo, avšak jediné sudé prvočíslo je číslo 2. Máme tyto součty:

3 + 7 + 89	5 + 11 + 83	7 + 13 + 79
3 + 13 + 83	5 + 23 + 71	7 + 19 + 73
3 + 17 + 79	5 + 41 + 53	7 + 31 + 61
3 + 23 + 73		
3 + 29 + 67		
3 + 37 + 59		
3 + 43 + 53		
11 + 17 + 71	13 + 19 + 67	
11 + 29 + 59		
11 + 41 + 47		
17 + 23 + 59	19 + 37 + 43	23 + 29 + 47
17 + 29 + 53		

Existuje tedy celkem 21 trojic různých prvočísel o součtu 99 (přičemž nehledíme na pořádek sčítanců — jinak by jich bylo šestkrát více.)

3. Daný je dutý uhol $\sphericalangle PAQ$ a úsečka veľkosti d. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorého vrchol B leží na polpriamke AP a vrchol D leží na polpriamke AQ, pričom vieme, že súčet veľkostí uhlopriečok AC, BD sa rovná číslu d.

Má úloha vždy riešenie? (Pozri učebnicu: Dr. J. Pírek, Geometrie pro 8. roč., SPN, vyd. z r. 1958, str. 25, príkl. 16.)

Riešenie (viď *obr. 53a*). *Rozbor.* Ak je $ABCD$ hľadaný kosoštvorec (štvorec), platí

$$AS + SB = \tfrac{1}{2}\,d.$$

V pravouhlom trojuholníku ABS je $\sphericalangle S = 90°$ a súčet jeho odvesien poznáme. Na predĺžení úsečky AS za bod S zostrojme úsečku $SE = SB$, takže je

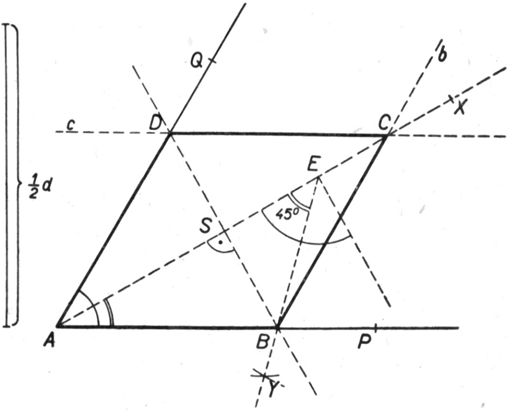
$$AE = AS + SB = \tfrac{1}{2}\,d.$$

Pritom je známe, že uhlopriečka AC v kosoštvorci (štvorci) rozpoluje jeho uhol pri vrchole A. Vieme však zostrojiť os tohto uhla a teda aj bod E.

Ďalej vidíme, že trojuholník BES je rovnoramenný a pravouhlý, lebo o uhlopriečkach kosoštvorca (štvorca) platí $AC \perp BD$. Pri základni BE má preto uhly veľkosti 45°.

Na základe toho prevedieme konštrukciu.

Konštrukcia (*obr. 53a*). Zostrojme os AX daného uhla $\sphericalangle PAQ$ a na nej úsečku $AE = \frac{1}{2}d$. V polrovine AXP zostrojme uhol $\sphericalangle AEY = 45°$. Uhol $\sphericalangle PAX$ je polovica dutého uhla a je preto menší ako 90°. Súčet



Obr. 53a

uhlov $\sphericalangle PAX$, $\sphericalangle AEY$ je teda menší ako 180° a podľa Eukleidovho axiomu majú polpriamky AP, EY vo vnútri polroviny AXP spoločný bod B.

V polrovine APX nad úsečkou AB ako stranou zostrojíme kosoštvorec (štvorec) $ABCD$, ktorého vrchol D padne na danú polpriamku AQ. Konštrukciu prevedieme takto: Na polpriamke AQ zostrojíme úsečku $AD = AB$ a trojuholník ABD doplníme na rovnobežník $ABCD$ tak, že bodom D vedieme priamku $c \| AP$ a bodom B priamku $b \| AQ$. Priesečík priamok b, c je hľadaný vrchol C. Tento rovnobežník je jediné riešenie úlohy, čo ihneď dokážeme.

Dôkaz. Podľa zostrojenia je $ABCD$ rovnobežník. Pretože je $AB = AD$, je to kosoštvorec (štvorec). Pri vrchole A má daný uhol $\sphericalangle PAQ$. Vieme, že uhlopriečka AC kosoštvorca (štvorca) rozpoluje jeho uhol pri vrchole A a preto polpriamky AC, AX splývajú, takže bod E padne na polpriamku AC. Uhlopriečky AC, BD sú na seba kolmé a pretínajú sa v strede kosoštvorca (štvorca). V trojuholníku BES je teda $\sphericalangle S = 90°$ a uhol $\sphericalangle E = 45°$ podľa konštrukcie. Preto je tretí uhol $\sphericalangle B = 45°$ a trojuholník je rovnoramenný, takže $SB = SE$. Podľa konštrukcie je $AE = \frac{1}{2}d$ čiže $AS + SE = \frac{1}{2}d$. Dosaďme za $SE = SB$ a dostaneme $AS + SB = \frac{1}{2}d$. Súčet polovíc uhlopriečok je teda $\frac{1}{2}d$ a preto sa súčet uhlopriečok AC, BD rovná d. Tým je dôkaz prevedený.

Náčrt podobného řešení. Jestliže $ABCD$ je hledaný kosočtverec, sestrojme rovnoběžník $BDCB'$ (viz *obr. 53b*); tu je

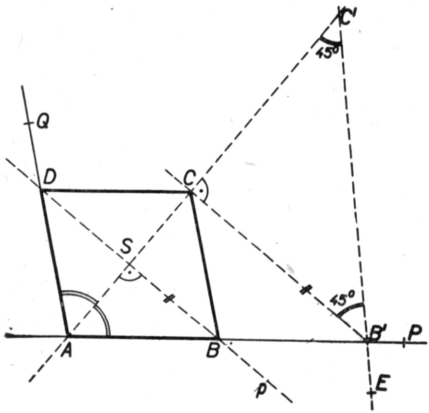
$$CB' = DB. \tag{1}$$

Přitom úhlopříčka AC kosočtverce půlí úhel $\sphericalangle DAB$; na polopřímce AC sestrojme úsečku $d = AC' =$

$= AC + DB$. Vzhledem k vztahu (1) je $CC' = AC' - AC = DB$; je tedy

$$CB' = CC'. \qquad (2)$$

Přitom je $AC \perp DB$ a tím též $CB' \perp CC'$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami DB, CB' proťatými příčkou $ASCC'$). Proto je trojúhelník $CB'C'$ pravoúhlý ($\sphericalangle C =$



Obr. 53b

$= 90°$) a rovnoramenný [viz (2)]. Z toho plyne, že $\sphericalangle CC'B' = 45°$. Na základě toho provedeme tuto *konstrukci*:

Sestrojme úhel $\sphericalangle PAQ$ a na jeho ose sestrojme úsečku $AC' = d$. V polorovině $AC'P$ sestrojme úhel

$\sphericalangle AC'E = 45°$ a označme B' společný bod polopřímek AP, $C'E$. Dále označme C patu kolmice vedené bodem B' k přímce AC'; osa p úsečky AC protne polopřímky AP, AQ po řadě v bodech B, D. Důkaz konstrukce je snadný a nebudeme jej provádět. Je $\sphericalangle PAC'$ polovina dutého úhlu, tj. menší než pravý; proto je $\sphericalangle AC'E + \sphericalangle PAC' < 45° + 90° < 180°$ a podle Euklidova axiomu mají polopřímky $AP, C'E$ vždycky společný bod B'. Proto má úloha jediné řešení.

Řešil Vlastimil Vadlejch,
8. tř. dsš, Kadaň.

4. Turistického zájazdu sa zúčastnilo 286 zamestnancov podniku. Mali k dispozícii autobusy jednak s 19 sedadlami, jednak so 17 sedadlami (riadič autobusu ani jeho sedadlo sa v úlohe neuvažujú).

Vypočítajte, koľko autobusov každého z oboch druhov sa pre zájazd použilo, ak všetky sedadlá boli obsadené.

Riešenie. Predpokladajme, že sa použilo autobusu II. typu (so 17 sedadlami). K tomu je treba aspoň toľko autobusov, koľko je 286 : 17. Platí

$$
\begin{array}{l}
286 : 17 = 16 \\
116 \\
\ \ 14
\end{array}
$$

Treba teda 16 autobusov II. typu, ale zostáva umiestniť ešte 14 osôb. Autobus I. typu (s 19 sedadlami) má o 2 sedadlá viac ako autobus II. typu, pritom je $14 : 2 = 7$. Nahraďme 7 autobusov II. typu autobusmi I. typu. Tak umiestnime práve zostávajúcich 14 osôb.

Skutočne, 7 autobusov I. typu a $16 - 7 = 9$ autobusov II. typu uvezie (ak sú všetky autobusy plne obsadené) tento počet osôb:

$$19 . 7 + 17 . 9 = 133 + 153 = 286.$$

Odpoveď. Bolo treba 7 autobusov I. typu a 9 autobusov II. typu.

5. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle APM = 45°$; na prodloužení úsečky $PA = 4$ cm za bod A je dán bod B, přičemž je $PB = 14$ cm.

Užitím osové souměrnosti sestrojte na polopřímce PM body X, Y tak, aby o čtyřúhelníku $AXYB$ platilo:

(1) $\sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB$; (2). $XY = 3$ cm.

Poznámka. Obrázek, který dostaneme, můžeme považovat za plán řezu terénu svislou rovinou ϱ. Přitom je PA řezem šikmého rovinného svahu a PM řezem vodorovné roviny; čtyřúhelník $AXYB$ je řezem průkopu ve svahu. Průkop vede kolmo k rovině

ϱ, jeho stěny mají stejné sklony a jeho vodorovná stěna má danou šířku atd.

Řešení. *Rozbor* (viz *obr. 54*). Předpokládejme, že jsme našli body X, Y, které splňují požadavky textu úlohy. Sestrojme obraz A' bodu A v souměrnosti o ose PM; obrazem úhlu $\sphericalangle AXY$ je úhel $\sphericalangle A'XY$ s ním shodný, tj.

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle A'XY. \tag{1}$$

Podle požadavku úlohy je

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB.$$

Porovnáním obou rovností dostáváme

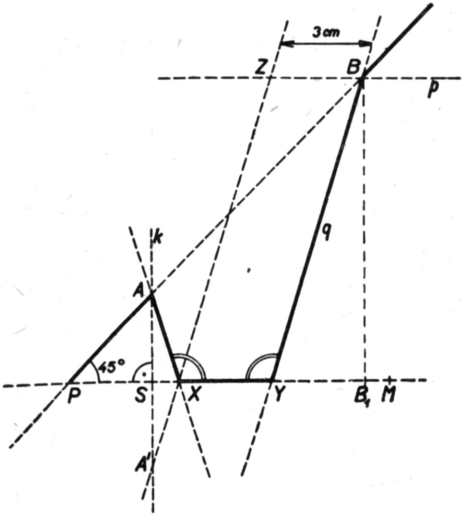
$$\sphericalangle A'XY = \sphericalangle XYB;$$

to jsou dva střídavé úhly mezi přímkami $A'X$, YB, které jsou proťaty třetí přímkou XY. Z rovností obou střídavých úhlů [viz E. Kraemer, Geometrie pro 7. roč., str. 128, vyd. 1957] plyne

$$A'X \parallel YB.$$

Trojúhelník XYB můžeme doplnit pomocí přímky $p \parallel PM$ vedené bodem B na rovnoběžník $XYBZ$; v něm jsou rovnoběžné strany $XY = 3$, BZ shodné. Avšak bod Z dovedeme z daných prvků snadno sestrojit a na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (*obr. 54a*). Sestrojme úhel $\sphericalangle APM = 45°$, kde $PA = 4$; dále sestrojme na polopřímce PA úsečku $PB = 14$. Bodem A veďme kolmici k k přímce PM a na ní určeme bod A' souměrně sdružený k bodu A vzhledem k přímce PM (v obr. 54 je tedy $SA' =$



Obr. 54a

$= SA$). Dále bodem B veďme přímku $p \| PM$ a na ní sestrojme úsečku $BZ = 3$, a to tak, aby body M, Z ležely v opačných polorovinách vyťatých přímkou PA. Body A', Z leží v opačných polorovinách o hranici PM. Proto uvnitř úsečky $A'Z$ leží bod X, který zároveň leží na přímce PM; je to průsečík přímek $A'Z$,

PM. Konečně sestrojme bodem B přímku $q || A'Z$ a označme Y průsečík přímek q, PM. Tím jsou body X, Y sestrojeny.

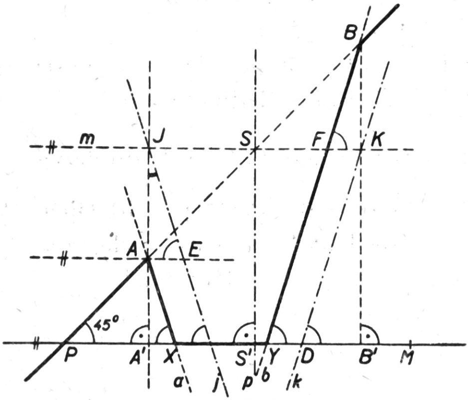
O bodech X, Y skutečně platí $XY = BZ = 3$, neboť $XYBZ$ je podle konstrukce rovnoběžník. Dále je podle konstrukce $A'Z || q$; rovnoběžky $A'Z$, q jsou proťaty přímkou XY, proto jsou střídavé úhly $\sphericalangle A'XY$, $\sphericalangle XYB$ shodné; z konstrukce bodu A' plyne shodnost souměrně sdružených úhlů $\sphericalangle AXY$, $\sphericalangle A'XY$, takže skutečně je $\sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB$. Body X, Y tedy splňují požadavky úlohy. Z konstrukce vyplývá, že daná úloha má při daných údajích právě jedno řešení.

Náčrt jiného řešení. *Rozbor* (*obr. 54b*). Mysleme si, že jsme sestrojili hledané body X, Y. Označme po řadě A', B' paty kolmic vedených body A, B k přímce PM, takže $AA'B'B$ je lichoběžník; jsou-li S, S' po řadě středy jeho ramen AB, $A'B'$, je $p \equiv SS'$ jeho střední příčka a osa úsečky $A'B'$.

Uvažujme souměrnost o středu S, ta převádí bod A v bod B a přímku AA' v přímku BB' a obráceně; přímka $m || PM$ vedená bodem S protíná přímky AA', BB' po řadě v bodech J, K, které jsou souměrně sdružené podle bodu S.

Bodem J veďme přímku $j || AX$ a označme C její průsečík s přímkou PM; bodem K veďme přímku $k || BY$ a označme D její průsečík s přímkou PM.

Z rovnosti úhlů $\sphericalangle AXY$, $\sphericalangle XYB$ a z rovnoběžností $j \| AX$, $k \| BY$ plyne, že $\sphericalangle JCD = \sphericalangle CDK$; odtud vyplývá, že lichoběžník $CDKJ$ (je $CD \| JK$) je rovnoramenný a přímka p je nutně jeho osou. Dále platí $\triangle EJA \cong \triangle FBK$ (viz *obr. 54b*, kde je $AE \| PM$),



Obr. 54b

neboť je $AJ = BK$, jak vyplývá ze souměrnosti těchto úseček podle středu S, dále je $\sphericalangle A = \sphericalangle K = 90°$, $\sphericalangle E = \sphericalangle F$; proto je $AE = KF$, a protože je $XC = AE$ a $DY = KF$, je též $XC = DY$, tj. $CD = XY = 3$. Odtud *konstrukce*:

Sestrojme střed S úsečky AB a veďme jím kolmici p k přímce PM; její patu označme S'. Na přímce PM sestrojme úsečky $S'C = S'D = 1{,}5$ (kde $C \neq D$).

Dále veďme kolmice AA', BB' k přímce PM a protněme je přímkou $m||PM$ vedenou bodem S; přímka m protne přímky AA', BB' po řadě v bodech J, K. Tím jsme sestrojili rovnoramenný lichoběžník $CDKJ$.

Nyní veďme bodem A přímku $a||JC$ a bodem B přímky $B||KD$. Přímky a, b protnou přímku PM v hledaných bodech X, Y.

Důkaz konstrukce plyne z obrácení postupu v rozboru; úloha má zřejmě jediné řešení.

Tuto konstrukci podala Věra Uldrichová,

8.a tř. osš., Perštejn nad Ohří. Podobně řešil úlohu i Karel Šulc, 8.a tř. osš, Rumburk.

6. Je dán zlomek

$$Z = \frac{[x(p+q)+pq+1]^2 - [x(pq+1)+p+q]^2}{(p+q)^2 - (pq+1)^2},$$

kde p, q jsou daná čísla.

a) Jestliže každé z čísel p, q je různé od čísel 1, —1, potom má zlomek Z smysl a po zkrácení je vidět, že nezávisí na žádném z čísel p, q; proveďte.

b) Vypočítejte všechna čísla x, pro která je $Z = 0$.

c) Vypočítejte všechna čísla x, pro která je Z záporné číslo.

Řešení. Označme A čitatele a B jmenovatele zlomku Z; výrazy A, B postupně pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ upravíme. Platí

$$\begin{aligned}
A &= [x(p + q) + pq + 1]^2 - [x(pq + 1) + p + q]^2 = \\
&= [x(p + q) + pq + 1 + x(pq + 1) + p + q] \,. \\
&\quad .[x(p + q) + pq + 1 - x(pq + 1) - p - q] = \\
&= [x(p + q + pq + 1) + (pq + p + q + 1)] \,. \\
&\quad .[x(p + q - pq - 1) - (p + q - pq - 1)] = \\
&= (p + q + pq + 1)(x + 1) \,. \\
&\quad .(p + q - pq - 1)(x - 1) = \\
&= [p(1 + q) + (1 + q)](x + 1) \,. \\
&\quad .[p(1 - q) - (1 - q)](x - 1) = \\
&= (1 + q)(p + 1).(x + 1) \,. \\
&\quad .(1 - q)(p - 1).(x - 1) = \\
&= -(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1) \,. \\
&\quad .(x + 1)(x - 1). \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (p + q)^2 - (pq + 1)^2 = \\
&= [p + q + pq + 1].[p + q - pq - 1] = \\
&= [p(1 + q) + (1 + q)].[p(1 - q) - (1 - q)] = \\
&= (1 + q)(p + 1).(1 - q)(p - 1) = \\
&= -(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Je tedy

$$Z = \frac{-(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1).(x + 1)(x - 1)}{-(p + 1)(p - 1)(q + 1)(q - 1)} \,. \qquad (3)$$

[Poznámka. Zlomek Z zřejmě ztrácí význam, jestliže některé z čísel p, q je rovno některému z čísel -1, 1.]

Všechny další úpravy provádíme za předpokladu, že ani jedno z čísel p, q není rovno některému z čísel -1, 1.

a) Protože čísla p, q jsou různá od čísel 1, -1, pak po dosazení do jmenovatele B za p, q není žádný z činitelů v součinu (2) roven nule, a proto je $B \neq 0$. Můžeme tedy čitatele i jmenovatele zlomku (3) dělit číslem B; dostaneme

$$Z = (x + 1)(x - 1). \tag{4}$$

Tento výraz skutečně neobsahuje čísla p, q, a proto zlomek Z nezávisí na číslech p, q.

b) Vzhledem k předchozí části a) je $Z = 0$ tehdy, je-li

$$(x + 1)(x - 1) = 0,$$

tj. je-li buď $x + 1 = 0$ anebo $x - 1 = 0$. Z rovnice

$$x + 1 = 0$$

dostaneme $x = -1$. Z rovnice

$$x - 1 = 0$$

dostaneme $x = 1$.

Obráceně, když do vztahu (4) dosadíme $x = -1$, dostaneme

$$Z = (-1 + 1) . (-1 - 1) = 0 . (-2) = 0;$$

podobně, když do (4) dosadíme $x = 1$, dostaneme

$$Z = (1 + 1)(1 - 1) = 2 . 0 = 0.$$

Výsledek. Zlomek $Z = 0$ jedině pro $x = -1$ a pro $x = 1$ (pokud ovšem žádné z čísel p, q není rovno některému z čísel -1, 1).

c) Máme rozhodnout, pro která čísla x je součin

$$Z = (x + 1)(x - 1)$$

záporné číslo. Součin dvou čísel je záporný, je-li jeden činitel kladný a zbývající činitel záporný. Hledáme tedy x takové, aby jedno z čísel $x + 1$, $x - 1$ bylo kladné, ale druhé záporné.

Číslo $x - 1$ je kladné pro $x > 1$; pak je $x + 1$ součet dvou kladných čísel, Z je pak součin kladných čísel a tedy je kladný.

Číslo $x - 1$ je záporné pro $x < 1$; číslo $x + 1$ je pak kladné jen tehdy, je-li $x > -1$. To znamená, že x musí být mezi čísly -1, 1, např. $\frac{3}{4}$, 0, $-\frac{2}{3}$ apod.

Pro $x = 1$ nebo -1 je jedno z čísel $x + 1$, $x - 1$ nula, a proto je $Z = 0$. Pro $x < -1$ je $x + 1$ i $x - 1$ záporné číslo a Z je součin dvou záporných čísel, tj. kladné číslo.

Výsledek. Zlomek Z je záporný pro číslo x větší než -1, ale menší než 1 (pokud obě čísla p, q jsou různá od čísel -1, 1).

Jiné řešení. Položme $a = p + q$, $b = pq + 1$; potom platí

$$Z = \frac{[ax + b]^2 - [bx + a]^2}{a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{a^2x^2 + 2abx + b^2 - (b^2x^2 + 2abx + a^2)}{a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - 1)}{a^2 - b^2}.$$

Pro $a^2 - b^2 \neq 0$ je tedy $Z = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Dále podobně jako v předchozím řešení.

Toto velmi stručné řešení podal

Petr Hataš, 8.a tř., osš, Varnsdorf.

9. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D*

1. Řešte rovnici

$$\frac{p(x - 3)}{9p^2 - 12p + 4} + \frac{p(x + 3)}{9p^2 + 12p + 4} = \frac{-4}{9p^2 - 4} \tag{1}$$

o neznámé x, přičemž p je dané číslo.

Rozhodněte, pro která čísla p nemá daná rovnice řešení.

Řešení. Danou rovnici (1) upravme takto

$$\frac{p(x - 3)}{(3p - 2)^2} + \frac{p(x + 3)}{(3p + 2)^2} = \frac{-4}{(3p + 2)(3p - 2)}. \tag{2}$$

Společný násobek jmenovatelů všech tří zlomků je

$$n = (3p - 2)^2(3p + 2)^2; \tag{3}$$

je různý od nuly, jestliže neplatí ani jedna z rovností

$$3p - 2 = 0, \quad 3p + 2 = 0.$$

Z první rovnosti plyne $p = \frac{2}{3}$, ze druhé $p = -\frac{2}{3}$. Jestliže tedy je

$$p \neq \frac{2}{3}, \quad p \neq -\frac{2}{3},$$

potom mají zlomky ve (2) smysl a je $n \neq 0$.

Znásobme obě strany rovnice (2) číslem n; obdržíme postupně rovnice

$$p(x - 3)(3p + 2)^2 + p(x + 3)(3p - 2)^2 =$$
$$= -4(3p + 2)(3p - 2),$$
$$px[(3p + 2)^2 + (3p - 2)^2] =$$
$$= -4(3p + 2)(3p - 2) +$$
$$+ 3p[(3p + 2)^2 - (3p - 2)^2],$$
$$px[9p^2 + 12p + 4 + 9p^2 - 12p + 4] =$$
$$= -4(9p^2 - 4) +$$
$$+ 3p[(9p^2 + 12p + 4) + (9p^2 - 12p + 4)],$$
$$p(18p^2 + 8)x = -4(9p^2 - 4) + 3 . 24p^2,$$
$$2p(9p^2 + 4)x = -36p^2 + 16 + 72p^2,$$
$$2p(9p^2 + 4)x = 36p^2 + 16,$$
$$p(9p^2 + 4)x = 2(9p^2 + 4).$$

[1] Protože p^2 je nezáporné číslo, je součet $9p^2 + 4$ číslem kladným. Jestliže je $p \neq 0$, je číslo $p(9p^2 + 4)$ součinem dvou čísel různých od nuly, tj. je to rovněž číslo různé od nuly; příslušné převrácené číslo je $\dfrac{1}{p(9p^2 + 4)}$. Znásobme jím obě strany poslední rovnice; po úpravě máme

$$x = \frac{2}{p}. \tag{4}$$

Zkouška. Dosaďme výsledek (4) do levé strany rovnice (1); dostáváme

$$\frac{2 - 3p}{(3p - 2)^2} + \frac{2 + 3p}{(3p + 2)^2} =$$

$$= -\frac{(3p - 2)}{(3p - 2)^2} + \frac{3p + 2}{(3p + 2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3p - 2} + \frac{1}{3p + 2} =$$

$$= \frac{-(3p + 2) + 3p - 2}{(3p - 2)(3p + 2)} = \frac{-4}{9p^2 - 4},$$

což je pravá strana rovnice (1).

[2] Jestliže je $p = 0$, levá strana rovnice (1) je

$$L = \frac{0}{4} - \frac{0}{4} = 0;$$

pravá strana je

$$\frac{-4}{-4} = 1.$$

Je tedy $L \neq P$ a rovnice (1) nemá řešení.

Odpověď. Daná rovnice má řešení $x = \dfrac{2}{p}$ pro každé číslo p, které je různé od čísel $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$; pro tato tři čísla nemá řešení.

Toto zevrubné řešení podal
Luděk Kučera, 8. tř. 5. osš,
Ústí nad Labem.

2. Dané sú kružnice $k \equiv (S, r = 7 \text{ cm})$, $k' \equiv (S', r' = 3 \text{ cm})$, ktoré majú vnútorný dotyk.

Narysujte všetky kružnice o polomere 3 cm, ktoré sa dotýkajú oboch daných kružníc k, k'; zostrojte dotykové body hľadaných kružníc s danými kružnicami.

Porovnaním dĺžky strednej kružníc k, k' a polomerov pomocných kružníc odôvodnite počet riešení danej úlohy.

Riešenie. (Dĺžky sú uvádzané v centimetroch). Je známe, že stredná dvoch kružníc, ktoré majú vonkajší dotyk, sa rovná súčtu polomerov kružníc; stredná dvoch kružníc, ktoré majú vnútorný dotyk sa rovná rozdielu $r_1 - r_2$ ich polomerov r_1, r_2, kde $r_1 > r_2$. Z toho vyplýva veta **V**: „Stredy všetkých kružníc o polomere $\varrho = 3$, ktoré sa dotýkajú danej kružnice $k \equiv (S, r)$ zvonku, vyplňujú kružnicu $v \equiv (S, r + 3)$. Stredy všetkých kružníc o polomere

3, ktoré majú s danou kružnicou $k \equiv (S, r)$ vnútorný dotyk (pričom je $r > 3$), vypĺňujú kružnicu $u \equiv \equiv (S, r — 3)$.“

Zostrojme kružnice $v \equiv (S, r + 3)$, $u \equiv (S, r — 3)$ sústredné s kružnicou k; ďalej zostrojme kružnicu $v' \equiv (S', r' + 3)$. (Poznámka: Pretože je $r' = 3$, je $r' — 3 = 0$ a teda neexistujú kružnice s polomerom 3, ktoré by mali s kružnicou k' vnútorný dotyk.)

Ak je X stredom kružnice o polomere 3, ktorá sa dotýka kružníc k, k' zvonku, potom musí bod X ležať na každej z kružníc v, v', tj. v ich spoločnom bode.

Ak je Y stredom kružnice o polomere 3, ktorá má s kružnicou k vnútorný a s kružnicou k' vonkajší dotyk, potom bod Y musí ležať v spoločnom bode kružníc u, v'.

(V našom prípade neexistuje kružnica o polomere 3, ktorá by s kružnicami k, k' mala vnútorný dotyk, viď poznámka.)

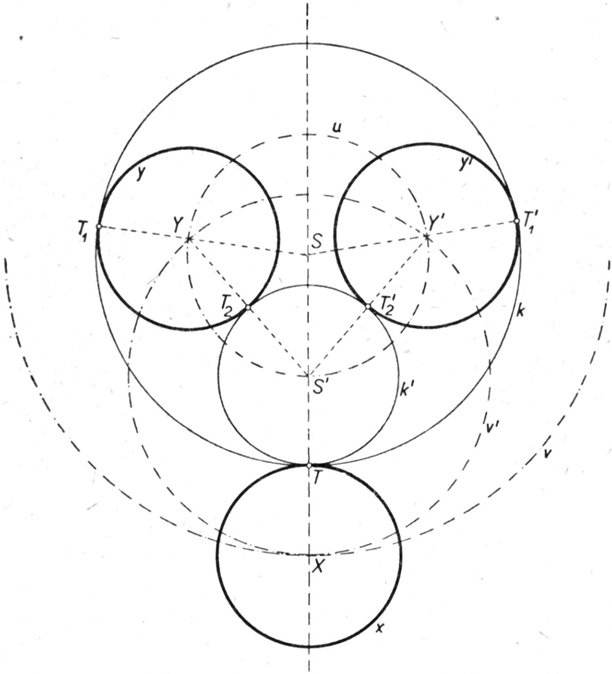
Podľa toho prevedieme konštrukciu.

Konštrukcia (obr. 55). Označme T dotykový bod daných kružníc k, k', takže je

$$ST = r = 7, \quad S'T = r' = 3, \qquad (1)$$
$$SS' = ST — S'T = 4.$$

Opíšme pomocné kružnice $v \equiv (S, r + 3 = 10)$, $u \equiv (S, r — 3 = 4)$, $v' \equiv (S', r' + 3 = 6)$.

Kružnice v, v' majú spoločný bod X. Podľa (1) je $SX = ST + 3$, $S'X = S'T + 3$ a body S, S', T, X ležia na tej istej priamke. Kružnica $x \equiv (X, \varrho = 3)$ má s kružnicami k, k' vonkajší dotyk.



Obr. 55

Kružnice u, v' sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch Y, Y'. Kružnice $y \equiv (Y, \varrho = 3)$ a $y' \equiv (Y', \varrho = 3)$

majú s kružnicou k vnútorný a s kružnicou k' vonkajší dotyk.

Tak sú zostrojené všetky kružnice (obr. 55) požadovaných vlastností: x, y, y'.

Dôkaz správnosti vyplýva z konštrukcie pomocných kružníc.

Dotykovým bodom kružnice x s kružnicami k, k' je zrejme bod T.

Dotykový bod T_1 kružníc y, k dostaneme ako spoločný bod kružnice k s polpriamkou SY; dotykový bod T_2 kružníc y, k' dostaneme ako spoločný bod kružnice k' s polpriamkou $S'Y$.

Obrazy T'_1, T'_2 bodov T_1, T_2 v súmernosti podľa osi SS' sú dotykovými bodmi dvojíc kružníc y', k a y', k'.

Diskusia. Kružnice v, v' majú strednú $SS' = 4$, polomery $r + 3 = 10$, $r' + 3 = 6$, takže je $SS' = r + 3 - (r' + 3) = 4$; preto kružnice v, v' majú vnútorný dotyk a teda jediný spoločný bod X.

Kružnice u, v' majú strednú $SS' = 4$, polomery $r_1 = r - 3 = 4$, $r_2 = r' + 3 = 6$ a preto platí

$$r_2 - r_1 < SS' < r_2 + r_1,$$

takže sa kružnice u, v' pretínajú v rôznych bodoch Y, Y'. Preto existujú dve hľadané kružnice y, y', ktoré sa dotýkajú kružnice k z vnútra a kružnice k' zvonku.

Záver. Možno zostrojiť celkom tri kružnice požadovaných vlastností: x, y, y'.

3. Máme 1500 gramov 7,2percentného roztoku kuchyňskej soli vo vode. Varením tohto roztoku sa odparí časť vody a zostane nám 1200 gramov nového roztoku.

a) Koľkopercentný je nový roztok?

b) Koľko gramov kuchyňskej soli musíme pridať do nového roztoku, aby sme z neho získali 25percentný roztok?

Vysvetlenie: p-percentný roztok kuchyňskej soli vo vode znamená, že ak máme napr. 100 gramov roztoku, je v ňom p gramov kuchyňskej soli a $100 - p$ gramov vody.

Riešenie. V 1500 gramoch pôvodného roztoku je $\frac{1500}{100} \, . \, 7{,}2 = 108$ gramov soli.

a) Je $108 : \frac{1200}{100} = 9$.

Odpoveď. Nový roztok je 9percentný.

b) Pridáme x gramov soli; získaný roztok váži $(1200 + x)$ gramov a je v ňom $(108 + x)$ gramov soli. Podľa textu úlohy pritom platí

$$(108 + x) : \frac{1200 + x}{100} = 25$$

čiže

$$(108 + x) \, . \, \frac{100}{1200 + x} = 25.$$

Úpravami tejto rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 100(108 + x) &= 25(1200 + x), \\ 4(108 + x) &= 1200 + x, \\ 3x &= 1200 - 432, \\ 3x &= 768, \\ x &= 256. \end{aligned}$$

Odpoveď. Treba pridať 256 gramov soli. Získaný roztok váži 1456 gramov.

Skúška. Je

$$364 : \frac{1456}{100} = \frac{364 . 100}{1456} = \frac{1 . 100}{4} = 25,$$

čo súhlasí s požiadavkou, aby výsledný roztok bol 25percentný.

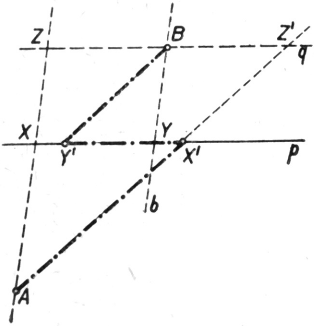
Pekné riešenie vypracoval
Jiří Pražský, 8.b dsš, Kadaň.

4. Je dána přímka p a body A, B, které jsou přímkou p navzájem odděleny. Sestrojte lomenou čáru $AXYB$, která má tyto vlastnosti:

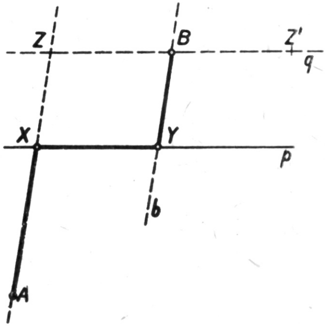
1. Body X, Y leží na přímce p.
2. Přímky AX, BY jsou navzájem rovnoběžné.
3. Úsečka XY má délku 6 cm.

Poznámka. Body A, B zvolte libovolně.

Řešení. *Rozbor.* Jestliže body X, Y na obr. 56 vyhovují požadavkům úlohy, je $XY = 6$ cm a $AX || BY$. Sestrojme rovnoběžník $XYBZ$; v něm je $BZ = XY = 6$ cm. Pomocí tohoto výsledku provedeme konstrukci.



Obr. 56



Obr. 57

Konstrukce. Sestrojme bodem B přímku $q || p$ a na ní sestrojme úsečky $BZ = BZ' = 6$ cm (přitom jsou BZ, BZ' opačné polopřímky).

Další konstrukci proveďme s bodem Z (s bodem Z' se provede obdobně): Označme X průsečík přímek p, AZ; dále bodem B veďme přímku $b || AZ$ a označme Y průsečík různoběžek p, b. Potom lomená čára $AXYB$ je jedním řešením úlohy.

Důkaz (obr. 56). Podle konstrukce je $XYBZ$ rovnoběžník; o jeho protějších stranách platí

$$XY = BZ = 6 \text{ cm},$$
$$XZ \| BY \text{ neboli } AX \| BY.$$

Přitom body X, Y leží na přímce p. Tím je důkaz proveden.

Diskuse (obr. 57). Ke každému z bodů Z, Z' přísluší jedna lomená čára, tj. dostaneme právě dvě čáry $AXYB$, $AX'Y'B$. Ty jsou skutečně různé, neboť např. úsečky AX, AX' jsou různé, což vyplývá z toho, že AZ, AZ' jsou strany trojúhelníka AZZ', a proto navzájem různé úsečky. Úloha má tedy právě dvě řešení. (Poznámka. Přitom může být $X \equiv Y'$, $Y \equiv X'$ a přesto existují dvě různé lomené čáry.)

Podobné řešení podal
Josef Dvořák, 8.a tř. osš,
Jablonné v Podještědí.