08. ročník matematické olympiády

III. Řešení úloh ze soutěže

In: Rudolf Zelinka (editor): 08. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1958-1959. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1960. pp. 30–198.

III. Řešení úloh ze soutěže

Poznámka: Odkazy na školské učebnice týkají se jejich českého znění.

I. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d. Úsečka délky p se pohybuje tak, že její krajní body leží na obvodu daného čtverce.

Jaký útvar vyplní střed pohybující se úsečky? Proveďte diskusi vzhledem k daným číslům d, p.

Řešení. Daný čtverec $ABCD$ má strany velikosti $d > 0$. Úsečku délky $p > 0$, která má krajní body na obvodu daného čtverce, označme XY a její střed Z.

Z názoru je patrné, že délka p úsečky XY musí být menší než délka úhlopříčky $AC = d\sqrt{2}$ čtverce $ABCD$; tuto domněnku dokážeme.

Důkaz. To je zřejmé, jestliže body X, Y leží na téže straně daného čtverce, např. na straně AB; pak je $XY \leqq d < d\sqrt{2}$.

Dále rozlišme dvě možnosti [**a**], [**b**].

[**a**] Body X, Y leží pořadě na dvou sousedních stranách čtverce, např. na stranách AB, BC (viz obr. 1), ale s vyloučením případu, že některý z bodů X, Y splývá s bodem B. [**b**] Body X, Y leží pořadě na protějších stranách daného

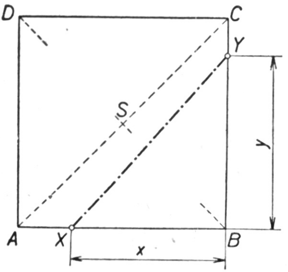
čtverce, např. na stranách AB, CD, ale s vyloučením případu, že je $XY \perp AB$ (pak je $XY = AD = d < < d\sqrt{2}$).

Případ [a] (obr. 1). Označme $BX = x$, $BY = y$, kde je

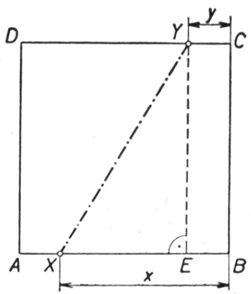
$$0 < x \leqq d,\ 0 < y \leqq d; \qquad (1')$$

pomocí Pythagorovy věty užité na trojúhelník XYB dostaneme

$$x^2 + y^2 = p^2 . \qquad (2')$$



Obr. 1



Obr. 2

Vzhledem k (1′) platí

$$x^2 + y^2 \leqq d^2 + d^2; \qquad (3')$$

ze (2′) a (3′) tedy plyne

$$p^2 \leqq 2d^2 ,$$

tj.

$$p \leqq d\sqrt{2} ,$$

což jsme měli dokázat.

Případ [**b**]. Označme $BX = x$, $CY = y$ jako v obr. 2, přičemž můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že $0 < x \leqq d$, $0 \leqq y < d$, $y < x$ [jinak bychom vyměnili vhodně označení a tím i x, y]. Označme E patu kolmice vedené bodem Y k přímce AB; je-li $E \equiv B$, je $y = 0$, jinak je $y > 0$, ale vždy platí $XE = x - y$. Pomocí Pythagorovy věty, užité na trojúhelník XYE, dostaneme

$$XE^2 + EY^2 = XY^2$$

neboli

$$(x - y)^2 + d^2 = p^2 . \tag{4'}$$

Protože je $0 < x \leqq d$, $0 \leqq y < d$, $y < x$, je $0 < x - y \leqq d$; na základě toho platí neboli

$$(x - y)^2 + d^2 \leqq d^2 + d^2 .$$

Odtud a ze (4′) dostaneme $p^2 \leqq 2d^2$

$$p \leqq d\sqrt{2} ,$$

což jsme právě měli dokázat.

Tím je důkaz proveden.

Daná úloha nemá tedy smysl pro

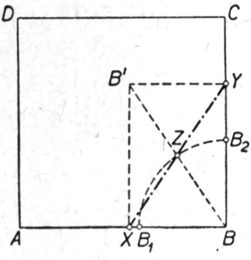
$$p > d\sqrt{2} .$$

V dalším o čísle p předpokládáme, že splňuje nerovnost

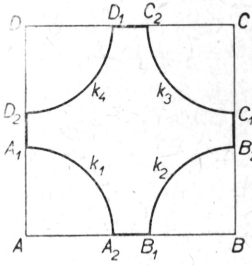
$$p \leqq d\sqrt{2} . \tag{1}$$

Rozbor úlohy rozčleníme na čtyři případy: [**1**] $p < d$; [**2**] $p = d$; [**3**] $d < p < d\sqrt{2}$; [**4**] $p = d\sqrt{2}$. (2)

Případ [**1**]. Nechť je $p < d$ (obr. 3). Všimněme si toho, že vzdálenost dvou bodů, které leží na protějších stranách čtverce $ABCD$, je rovna alespoň číslu d. V našem případě musí proto body X, Y buď ležet na téže straně čtverce — např. na AB — nebo střídavě na dvou sousedních stranách. Nyní rozlišme možnosti: a) Body X, Y leží na sousedních stranách čtverce $ABCD$; b) body X, Y leží na téže straně daného čtverce.



Obr. 3



Obr. 4

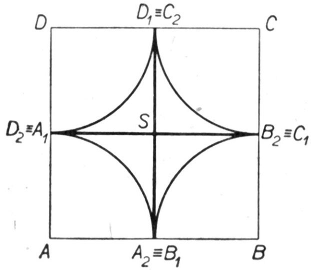
a) Nechť bod X leží uvnitř strany AB, bod Y na straně BC (viz obr. 3) — a to uvnitř této strany (z pravoúhlého trojúhelníka XYB, kde $\sphericalangle B = 90°$, plyne $BY < XY$, tj. $BY < d$, tj. $Y \not\equiv C$). Potom v trojúhelníku XYB platí pro střed Z strany XY vztahy $ZB = ZX = ZY = \frac{1}{2}p$; leží tedy bod Z na čtvrtkružnici $k \equiv (B, \frac{1}{2}p)$, která má krajní body B_1, B_2 na ramenech BA, BC pravého úhlu $\sphericalangle ABC$ a leží celá v tomto úhlu (krajní body B_1, B_2 nepočítáme). Obráceně, buď Z libovolný bod, který leží uvnitř čtvrtkružnice k a tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle ABC$. Sestrojme v tomto úhlu obdélník $BXB'Y$ (kde X leží na polopřímce BA a Y na polopřímce BC), jehož středem je bod Z; provedeme to tak, že určíme obraz B' bodu B v souměrnosti o středu Z a bodem B' pak vedeme rovnoběžky s přímkami BA, BC. O úhlopříčce BB' platí: $BB' = 2 \cdot \frac{1}{2}p = p$; avšak rozměry obdélníka jsou vždy menší než velikost jeho úhlopříčky. Je tedy $BX < p$, $BY < p$, takže body X, Y leží pořadě uvnitř úseček AB, BC; přitom je $XY = BB' = p$ a $XZ = ZY = \frac{1}{2}p$ [úhlopříčky obdélníka $BXB'Y$ jsou shodné]. Tím je obrácení provedeno.

Opakujeme-li tuto úvahu pro ostatní vrcholy čtverce $ABCD$, dospějeme (viz obr. 4) celkem ke čtyřem čtvrtkružnicím k_1, k_2, k_3, k_4 (bez krajních bodů).

b) Protože je $p < d$, leží v obr. 4 bod B_1 blíže k bodu B než k A a bod A_2 blíže k bodu A než k B. Nyní snadno usoudíme, že úsečka A_2B_1 (včetně krajních bodů) je množinou středů úseček $XY = p$, jejichž oba krajní body X, Y leží na úsečce AB.

Závěr případu [**1**]. Množinou středů všech úseček XY je čára vyznačená tučně na obr. 4.

Případ [**2**] (obr. 5). Nechť je $p = d$. Situace se tu od případu [**1**] liší takto:



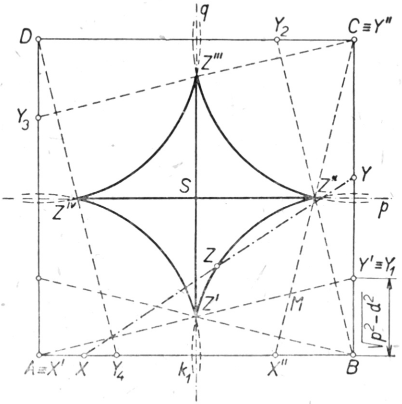
Obr. 5

a) Existuje jediná úsečka $XY = p = d$, která leží ve straně AB, totiž ta, která s úsečkou AB splývá. Je tedy $A_2 \equiv B_1$, $B_2 \equiv C_1$, $C_2 \equiv D_1$, $D_2 \equiv A_1$. Dostáváme čtyři čtvrtkružnice k_1, k_2, k_3, k_4, včetně jejich krajních bodů A_1, B_1, C_1, D_1.

b) Existují úsečky $XY = p$, kde X, Y leží na protějších stranách čtverce, např. na stranách AB, DC (mezi tyto úsečky patří i strany daného čtverce). Středy těchto úseček vyplní střední příčky A_1C_1, B_1D_1 (viz obr. 5).

Závěr případu [**2**]. Množina středů všech úseček XY je znázorněna tučně na obr. 5.

Případ [3] (obr. 6). Nechť je $d < p < d\sqrt{2}$. Pak krajní body úsečky $XY = p$ nemohou ležet v téže straně čtverce $ABCD$. Jsou tedy dvě možnosti: a) Body X, Y leží pořadě na sousedních stranách daného čtverce nebo b) leží v protějších stranách čtverce.



Obr. 6

a) Sestrojme dva pomocné pravoúhlé trojúhelníky $AY'B$, $CX''B$ o přeponách $AY' = CX'' = p$ jako v obr. 6; ukážeme ihned, že tyto trojúhelníky existují, čímž dostáváme úsečky $X'Y' = X''Y'' = p$, kde je $X' \equiv A$, $Y'' \equiv C$. Podle Pythagorovy věty o trojúhelníku $AY'B$ v obr. 6 platí $BY'^2 = AY'^2 - AB^2 =$

$= p^2 - d^2$, takže je $BY'^2 < p^2$ a $BY' < BC$; leži tedy bod Y' uvnitř úsečky BC. Stejně bod X'' leží uvnitř úsečky AB, což ostatně plyne ze souměrnosti podle přímky BD, takže

$$BX'' = BY' = \sqrt{p^2 - d^2}. \tag{3}$$

Nyní předpokládejme, že bod X úsečky $XY = p$ leží uvnitř úsečky AX'', tj. platí

$$BX'' < BX < BA .$$

Ze vztahu $BX'' < BX$ a (3) dostaneme

$$p^2 - d^2 < BX^2; \tag{4}$$

vztah $BX < BA$ lze psát ve tvaru

$$d^2 > BX^2 . \tag{5}$$

Snadno nyní dokážeme, že příslušný bod Y úsečky XY, který leží na úsečce BC, padne dovnitř úsečky $Y'C$, tj. platí

$$BY' < BY < BC . \tag{6}$$

Důkaz. V trojúhelníku XYB, kde $\sphericalangle B = 90°$, je $XY = p$ a platí (4), (5); podle Pythagorovy věty je

$$BX^2 = p^2 - BY^2 . \tag{7}$$

Odtud a z (5) plyne

$$d^2 > p^2 - BY^2$$

neboli postupně [viz (3)]

$$BY^2 > p^2 - d^2 ,$$

$$BY > BY' . \tag{8}$$

Ze vztahů (7), (4) postupně plyne

$$
\begin{aligned}
p^2 - d^2 &< p^2 - BY^2 \, , \\
BY^2 &< d^2 \, , \\
BY &< BC \, . \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Platnost vztahů (6) vyplývá ze vztahů (8), (9).

Úsečky AY', CX'' mají pořadě středy Z', Z'' a dále mají společný bod M, který leží na úsečce BD, neboť úsečky jsou souměrně sdružené podle přímky BD.

Probíhá-li bod X úsečku AX'', probíhá příslušný bod Y na úsečce BC úsečku $Y'C$ (a obráceně). Jako v případě [**1**] usoudíme, že středy těchto úseček vyplní oblouk $Z'Z''$ kružnice $k_1 \equiv (B, \frac{1}{2}p)$; tento oblouk $Z'Z''$ leží v úhlu $\sphericalangle AMC$. Přitom z vlastnosti středu kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku $AY'B$ platí o bodu Z' zřejmě $Z'A = ZY' = Z'B$ a bod Z' leží tudíž na střední příčce q čtverce $ABCD$ kolmé ke straně AB (viz obr. 6, z něhož je též patrno, že bod Z'' leží na úsečce BY_2, kde Y_2 leží na straně CD a platí $CY_2 = BY'$).

b) Nechť body X, Y úsečky XY velikosti p leží na protějších stranách AB, CD čtverce $ABCD$. Příkladem takových úseček v obrázku 6 jsou úsečky BY_2 (Y_2 leží uvnitř CD a je $CY_2 = BY' = \sqrt{p^2 - d^2}$) a DY_4 (Y_4 leží uvnitř AB a je $AY_4 = BY'$). Úsečky, které vzniknou z úsečky BY_2 posunutím ve smyslu BA — a to nejvýše o délku BY_4 — patří mezi hledané úsečky; všechny leží v rovnoběžníku BY_2DY_4. Jejich středy vyplní na střední příčce $p \parallel AB$ daného čtverce úsečku $Z''Z^{IV} = AX''$. Druhá soustava takových rovnoběžných úseček XY vznikne posunutím úsečky CX'' ve smyslu BA nejvýše o BY_4 (neboli $X''A$); jejich středy rovněž vyplní úsečku $Z''Z^{IV}$. Jiných úseček kromě zmíněných dvou soustav, které by měly krajní body na stranách AB, CD, zřejmě není.

Závěr případu [**3**]. Ze souměrnosti čtverce podle úhlopříček a středních příček plyne: Množina středů všech úseček se skládá ze čtyř oblouků a ze dvou úseček ležících na středních příčkách daného čtverce (viz tučné čáry na obr. 6).

Případ [**4**]. Nechť je $p = d\sqrt{2}$ (obr. 1). Z úvodní úvahy vyplývá, že jediné dvě úsečky XY velikosti p jsou úsečky AC, BD. Hledaná množina středů těchto úseček se skládá z jediného bodu; je jím střed S čtverce $ABCD$.

Tím je řešení úlohy provedeno.

2. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} \leqq 2\,. \tag{1}$$

Riešenie. Nech reálne číslo x splňuje nerovnosť (1), čiže nerovnosť

$$\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{x+1-\sqrt{2}} - 2 \leqq 0\,. \tag{2}$$

Označme V výraz na ľavej strane nerovnosti (2); o ňom postupne platí

$$V =$$

$$= \frac{x + 1 - \sqrt{2} + x + 1 + \sqrt{2} - 2(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2x + 2 - 2[(x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2]}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2[x + 1 - (x^2 + 2x + 1 - 2)]}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})} =$$

$$= -\frac{2(x^2 + x - 2)}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})}.$$

Po rozložení kvadratického trojčlena v čitateli dostaneme

$$V = -\frac{2(x + 2)(x - 1)}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})}. \qquad (3)$$

O čísle x platí (2); vzhľadom na výsledok (3) platí teda

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})} \geqq 0. \qquad (3')$$

M u s í t e d a o čísle x platiť:

[**1**] buď súčasne

$$(x + 2)(x - 1) \geqq 0, \qquad (3a)$$

$$(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) > 0 \qquad (3b)$$

[posledná nerovnosť je nevyhnutelne ostrá, inak by v menovateli zlomku v (3′) bola nula],

[2] buď súčasne

$$(x + 2)(x - 1) \leqq 0\,, \tag{4a}$$

$$(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) < 0 \tag{4b}$$

[kde opäť v poslednej nerovnosti nemožno pripustiť znamienko rovnosti].

Každú z oboch možností preskúmame zvlášť.

Prípad [**1**]. Zo vzťahu (3a) vyplýva, že o čísle x musí platiť práve jeden zo vzťahov:

$$\text{a) } x \geqq 1\,, \tag{5a}$$

$$\text{b) } x \leqq -2\,. \tag{5b}$$

Zo vzťahu (3b) vyplýva, že o čísle x musí platiť práve jeden zo vzťahov

$$\text{a) } x > \sqrt{2} - 1 > 0{,}4\,, \tag{6a}$$

$$\text{b) } x < -(\sqrt{2} + 1) < -2{,}4\,. \tag{6b}$$

Požiadavky (5a), (6b) alebo požiadavky (5b), (6a) nemožno splniť súčasne. Kombinovaním (5a), (6a) dostaneme, že o čísle x nevyhnutne platí

$$x \geqq 1\,. \tag{7}$$

Kombinovaním (5b), (6b) dostaneme, že o čísle x nevyhnutne platí

$$x < -(\sqrt{2} + 1)\,. \tag{7'}$$

I. Pre $x \geqq 1$ sú skutočne oba činitele v menovateli zlomku (3) kladné čísla (platí $x + 1 - \sqrt{2} \geqq 2 - \sqrt{2} > 0{,}5$, lebo $\sqrt{2} < 1{,}5$); rovnako všetky tri činitele v čitateli zlomku (3) sú nezáporné čísla. Je teda $V \leqq 0$ a číslo $x \geqq 1$ je riešením nerovnosti (1), lebo vzťah $V \leqq 0$ je ekvivalentný s nerovnosťou (1).

II. Pre $x < -(\sqrt{2} + 1)$ sú oba zlomky na ľavej strane nerovnosti (1) záporné čísla a teda aj ich súčet je záporné číslo a teda menšie než 2.

Prípad [**2**]. Zo vzťahu (4a) vyplýva, že o čísle x nevyhnutne platí jedine vzťah

$$-2 \leqq x \leqq 1\,. \tag{8}$$

Zo vzťahu (4b) vyplýva, že o čísle x musí jedine platiť

$$-(\sqrt{2} + 1) < x < \sqrt{2} - 1\,. \tag{9}$$

Avšak platí $-(\sqrt{2} + 1) < -2$, $\sqrt{2} - 1 < 1$; o čísle x, pre ktoré zároveň platia vzťahy (8), (9), platí teda nevyhnutne

$$-2 \leqq x < \sqrt{2} - 1\,. \tag{10}$$

Pre číslo x z intervalu (10) je

$$x + 1 + \sqrt{2} > 0, \quad x - (\sqrt{2} - 1) < 0$$

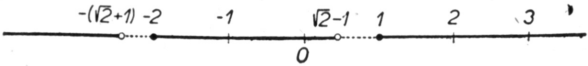
a teda menovateľ zlomku (3) je záporný. Ďalej je pre toto x

$$x + 2 \geqq 0\,, \quad x - 1 < 0$$

a teda čitateľ zlomku (3) je záporný alebo nula. Je teda zlomok vo výraze (3) nezáporný a preto o výraze V platí $V \leqq 0$. Číslo x z intervalu (10) je teda riešením nerovnosti (1).

Záver. Všetky riešenia nerovnosti (1) sú dané číslami x, ktoré ležia v jednom z intervalov (7), (7'), (10) (pozri grafické znázornenie na obr. 7), tj. v intervaloch

$$x < -(\sqrt{2} + 1), \quad -2 \leqq x < \sqrt{2} - 1, \quad x \geqq 1 .$$



Obr. 7

3. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno t_c, u_c, v_c. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům. (Daná čísla udávají pořadě velikosti těžnice, osy úhlu a výšky při vrcholu C trojúhelníka ABC.)

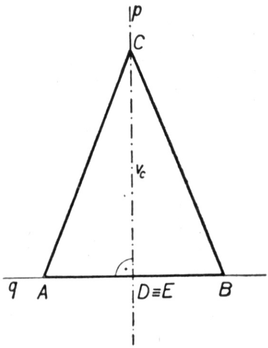
Řešení (obr. 8, 9). Místo *rozboru* dokážeme tuto *pomocnou větu* **V**: „Jestliže v trojúhelníku ABC platí $CA = CB$ neboli $a = b$, potom platí

$$t_c = u_c = v_c; \qquad (1)$$

jestliže však je $CA \neq CB$ neboli $a \neq b$, potom platí

$$t_c > u_c > v_c . \qquad (2)$$

Důkaz. Platnost vztahu



Obr. 8

(1) plyne ze souměrnosti rovnoramenného trojúhelníka ABC podle osy p jeho základny AB (obr. 8).

Nechť je nyní $a \neq b$ (obr. 9). Pro určitost předpokládejme, že platí $a < b$ neboli $\alpha < \beta$ (proti menší straně trojúhelníka leží menší úhel). Je-li $a > b$, stačí uvažovat obraz daného trojúhelníka v souměrnosti o ose p, kde p je osa úsečky AB.

Sestrojme úhel $\alpha' \equiv \sphericalangle ABB' = \alpha$. Ze vztahu $\alpha < \beta$ plyne, že polopřímka BB' prochází vnitřkem úhlu β; dále ze vztahu $\alpha < \beta$ plyne, že α je ostrý úhel. Je tedy $\alpha + \alpha' < 180°$ a polopřímky AC, BB' mají podle Euklidova axiómu uvnitř poloroviny ABC společný bod P; trojúhelník ABP je tedy rovnoramenný a osa p jeho základny AB prochází bodem P a středem E základny AB. Protože polopřímka BB' leží v úhlu β, přičemž bod P je na této polopřímce, leží tedy bod P uvnitř úsečky AC a bod C tudíž padne dovnitř poloroviny pB.

Přímka p je osou úsečky AB a proto na ní leží střed S kružnice k trojúhelníku ABC opsané. Společný bod přímky p a kružnice k, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC, označme G. Ze souměrnosti úsečky AB a kružnice k podle osy p plyne

$$\sphericalangle ASG = \sphericalangle BSG\,.$$

K těmto shodným středovým úhlům kružnice k příslušejí pořadě i shodné obvodové úhly, takže platí

$$\sphericalangle ACG = \sphericalangle BCG = \tfrac{1}{2}\gamma\,.$$

Polopřímka CG je tudíž osou úhlu γ a protne proto přímku AB v bodě F, který leží uvnitř úsečky AB; protože bod F leží uvnitř kružnice k, je bod F uvnitř úsečky CG, která až na bod G leží uvnitř poloroviny pB a proto je F vnitřním bodem úsečky EB.

Výška CD trojúhelníku ABC má na straně AB patu D, která s bodem C leží uvnitř poloroviny pB; přímky p, CD jsou tedy různé rovnoběžky. Úsečka CG až na bod C leží uvnitř poloroviny CDE a proto zde leží i bod F. Bod F leží tedy uvnitř úsečky ED. Probíhá-li bod polopřímku DE z jejího počátku D, vzrůstá i vzdálenost od bodu C [porovnej např. s textem k obr. 82 v učebnici Geometrie pro 8. roč., vydání z r. 1958, str. 44], tj. ze vztahu $DE > DF$ a $CD \perp AB$ plynou vztahy

$$CE > CF > CD$$

neboli

$$t_c > u_c > v_c\,,$$

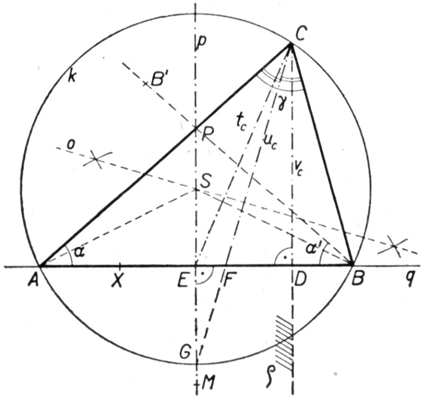
což je vztah (2), který právě jsme měli dokázat.

Jestliže tedy neplatí ani vztah (1) ani (2), nemá úloha řešení.

Konstrukce. Uvažujme dvě možnosti: **[1]** platí (1); **[2]** platí (2).

Případ [**1**]. Nechť platí $t_c = u_c = v_c$ (viz obr. 8). Sestrojme úsečku $DC = v_c$ a v bodě D sestrojme k ní kolmici q; na přímce q sestrojme úsečky $EA = EB$, přičemž bod $A \neq D$ volíme libovolně. Potom trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy.

Výsledek. Úloha má nekonečný počet řešení.



Obr. 9

Případ [**2**]. Nechť platí $t_c > u_c > v_c$ (viz obr. 9). Zvolme úsečku $DC = v_c$ a sestrojme bodem D přímku $q \perp DC$. Požadujme, aby střed E strany AB hledaného trojúhelníka ABC padl dovnitř jedné z polorovin vyťatých přímkou DC (tuto polorovinu označme ϱ); to znamená vzhledem k provedenému důkazu věty **V**, že i bod F padne dovnitř poloroviny ϱ. Sestrojme tedy podle věty Ssu v polorovině ϱ trojúhelník CFD, kde $CF = u_c$, $\sphericalangle D = 90°$; bod F leží tedy na přímce q. Dále sestrojme v polorovině ϱ trojúhelník CED, kde $CE = t_c$, $\sphericalangle D = 90°$; bod E tedy padne na polopřímku DF. Bodem E veďme přímku $p \perp ED$ a označme G společný bod přímek CF, p. Dále sestrojme osu o úsečky CG a označme S společný bod přímek p, o. Opišme kružnici $k \equiv (S, SC)$ a označme A, B její průsečíky s přímkou q. Potom trojúhelník ABC je řešením dané úlohy; přitom nebudeme přihlížet k možné výměně označení bodů A, B.

Důkaz. Body E, S leží na přímce p; proto je E středem tětivy AB kružnice k; podle konstrukce je $CE = t_c$, takže velikost těžnice CE v trojúhelníku ABC je t_c. Ze souměrnosti kružnice k i úsečky AB podle přímky p plyne, že je $\sphericalangle ASE = \sphericalangle BSE$; proto o obvodových úhlech příslušných k těmto středovým úhlům v kružnici k platí $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF$. Je tedy CF osa úhlu a podle konstrukce je $CF = u_c$. Konečně je $CD \perp AB$, $CD = v_c$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Vzhledem k platnosti vztahu (2) existují oba trojúhelníky CFD, CED [podle věty Ssu] a pořádek bodů je D, F, E. Úhel $\sphericalangle CFD$ je úhel pravoúhlého trojúhelníka CFD; je tedy ostrý a proto i úhel k němu vrcholový je ostrý. Proto podle Euklidova axiómu má polopřímka CF s přímkou p společný bod G uvnitř poloroviny opačné k polorovině DFC. Přímka DF odděluje tedy body C, G a bod F leží uvnitř tětivy CG kružnice k a tedy i uvnitř k. Je tedy i přímka DFE sečnou (obsahuje bod F) kružnice k, tj. přímka $q \equiv DFE$ je sečnou kružnice k a body A, B proto existují.

Při zvoleném umístění úsečky $DC = v_c$ a bodu E uvnitř poloroviny ϱ existuje tedy při platnosti vztahu (2) jediný trojúhelník ABC (nehledíme na možnou záměnu označení bodů A, B).

Závěr. Jestliže platí $t_c = u_c = v_c$, potom při zvoleném umístění lze sestrojit nekonečně mnoho trojúhelníků; jestliže platí $t_c > u_c > v_c$, lze při zvoleném umístění sestrojit právě jeden trojúhelník.

4. Řešte soustavu rovnic

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y \,, \tag{1}$$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} y \,, \tag{2}$$

kde x, y jsou neznámé.

Řešení. Nechť dvojice čísel x, y splňuje rovnice soustavy. Znásobme navzájem jednak levé a jednak pravé strany rovnic (1), (2). Dostaneme

$$\cos x \sin x + \frac{1}{\cos x \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{9}{2} .$$

Obě strany nové rovnice znásobme číslem $\cos x \sin x$; po úpravě dostaneme

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 0$$

neboli

$$(\cos x \sin x)^2 - \frac{9}{2} \cos x \sin x + 2 = 0 .$$

Podle známého vzorce je $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$; po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{1}{4} \sin^2 2x - \frac{9}{4} \sin 2x + 2 = 0$$

neboli

$$\sin^2 2x - 9 \sin 2x + 8 = 0$$

neboli

$$(\sin 2x - 1)(\sin 2x - 8) = 0 .$$

O čísle x musí tedy platit buď $\sin 2x - 8 = 0$ anebo $\sin 2x - 1 = 0$.

Ze vztahu

$$\sin 2x = 1$$

plyne

$$2x = 90° + 2k \cdot 180° ,$$

kde k je libovolné celé číslo, tj.

$$x = 45° + k \cdot 180° . \qquad (3)$$

Vzhledem k tomu, že pro každé reálné číslo α je $|\sin\alpha| \leqq 1$, nelze vztah

$$\sin 2x = 8\,,$$

splnit žádným reálným číslem x.

O čísle x podle (3) musí tedy platit buď

$$x = 45° + 2n\,.\,180° \tag{3a}$$

anebo

$$x = 225° + 2n\,.\,180°\,, \tag{3b}$$

kde n je libovolné celé číslo.

Dále uvažujme každou z těchto možností odděleně.

Případ [**1**]. Nechť platí (3a); potom je

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \qquad \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{4}$$

a po dosazení do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 9\,\mathrm{tg}\,y\,.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = 9\,\mathrm{tg}\,y\,,$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\,\mathrm{tg}\,y\,,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} = \mathrm{tg}\,y\,. \tag{5}$$

Položme $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$, pak je

$$\operatorname{tg} y \doteq \frac{1}{6} \,.\, 1{,}414$$

neboli

$$\operatorname{tg} y \doteq 0{,}236$$

a z tabulek pro y dostaneme přibližnou hodnotu

$$y \doteq 13°10' + k \,.\, 180°\,, \qquad (4a)$$

kde k je libovolné celé číslo.

Dvojice čísel x, y daných vztahy (3a), (4a) je řešením soustavy. To je podle výpočtu čísla y zřejmé o rovnici (1). Dosaďme tuto dvojici (x, y) ze vztahů (3a), (5) do (2). Vzhledem ke (4) na levé straně rovnice (2) dostaneme

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

neboli

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;$$

na pravé straně vzhledem k tomu, že pro y platí vztah (5), obdržíme postupně

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

Tím je zkouška provedena.

P ř í p a d [2]. Nechť platí (3b); potom je

$$\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad (6)$$

a po dosazení do (1) dostaneme

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=9\operatorname{tg}y\,,$$

tj.

$$\operatorname{tg}y=-\frac{\sqrt{2}}{6}\,, \tag{7}$$

neboli

$$\operatorname{tg}y \doteq -0{,}236\,.$$

Stejně jako prve obdržíme

$$y \doteq 166°50' + k\,.\,180°\,, \tag{7a}$$

kde k je libovolné celé číslo.

Dvojice čísel (x, y) ze vztahů (3b), (7a) jistě vyhovuje rovnici (1). Porovnáním vztahů (3a), (3b) a dále vztahů (5), (7a) je patrné, že dvojice čísel (x, y) ze (3b), (7a) obsahuje právě opačná čísla k dvojici čísel ze vztahů (3a), (5); je však $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{cotg}(-y) = -\operatorname{cotg}y$. Dosadíme-li tedy dvojici (x, y) ze vztahů (3b), (7a) do (2), znamená to dosazení dvojice (x, y) ze vztahů (3a), (5) do (2) a znásobení obou stran rovnice (2) číslem -1. Avšak čísla (x, y) ze (3a), (5) splňují (2) a proto ji splňují i čísla (x, y) ze vztahů (3b), (7a).

Závěr. Tím je řešení úlohy provedeno. Všechna řešení soustavy (1), (2) jsou dvojice čísel (x, y) daných buď vztahy (3a), (5) anebo vztahy (3b), (7a).

5. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel x, y, o ktorých platí

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} . \tag{1}$$

Riešenie. Nech x, y sú celé čísla, ktoré vyhovujú rovnici (1). Potom čísla x, y musia byť celé nezáporné (predpokladáme, že druhá odmocnina je definovaná len z nezáporných čísel). Potom z (1) vyplýva

$$\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x} .$$

Umocnením oboch strán na druhú dostaneme rovnicu

$$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} , \tag{1'}$$

čiže

$$2\sqrt{50x} = 50 + x - y .$$

Číslo na pravej strane tejto rovnice je celé, preto aj ľavá strana tejto rovnice je celé číslo a, t. j. platí

$$2\sqrt{50x} = a .$$

Číslo na ľavej strane je nezáporné, teda je tiež $a \geqq 0$.

Ak umocníme obe strany tejto rovnice na druhú, dostaneme

$$2 \,.\, 10^2 \,.\, x = a^2 ,$$

čiže

$$2x = \left(\frac{a}{10}\right)^2 . \tag{2}$$

Číslo a musí byť násobkom čísla 10, t. j.

$$a = 10b ,$$

kde b je celé nezáporné číslo. Po dosadení do (2) dostaneme

$$2x = b^2 . \tag{3}$$

Číslo b nemôže byť nepárne*), lebo jeho druhá mocnina je párne číslo. Číslo b musí byť teda párne*), t. j. musí platiť

$$b = 2c ,$$

kde c je celé nezáporné číslo. Po dosadení do (3) dostaneme, že o čísle x musí platiť

$$2x = 4c^2 ,$$

čiže

$$x = 2c^2 . \tag{4}$$

Ešte si všimnime, že pre $x > 50$ je $\sqrt{x} > \sqrt{50}$; preto o celom nezápornom čísle x nevyhnutne platí

$$0 \leqq x \leqq 50 ,$$

čiže

$$0 \leqq 2c^2 \leqq 50$$

a teda

$$0 \leqq c^2 \leqq 25 ,$$

čiže

$$0 \leqq c \leqq 5 .$$

Zostavme pre celé nezáporné číslo c tabuľku. Tabuľku hneď doplňme celým nezáporným číslom y,

---

*) *Párne* znamená česky sudé, *nepárne* liché.

ktoré dostaneme po dosadení čísla x do pravej strany rovnice (1'):

c	0	1	2	3	4	5
x	0	2	8	18	32	50
y	50	32	18	8	2	0

Ak teda existuje dvojica (x, y) celých nezáporných čísel x, y, ktoré vyhovujú rovnici (1), je to niektorá zo šiestich dvojíc tejto tabuľky. Ľahko sa presvedčíme dosadením do (1), že každá z týchto šiestich dvojíc vyhovuje rovnici (1). Danej úlohe vyhovuje teda šesť dvojíc celých nezáporných čísel (x, y), uvedených v tabuľke a žiadna iná dvojica celých nezáporných čísel. Tým je úloha rozriešená.

6. Je dán trojúhelník ABC o úhlech α, β, γ a poloměru r kružnice opsané. Nechť M, N, P jsou pořadě středy stran BC, CA, AB.

Dokažte: Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, potom existuje čtyřstěn $MNPQ$, jehož síť tvoří trojúhelníky MNP, NPA, PMB, MNC; jeho objem je

$$V = \tfrac{1}{3} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} .$$

Není-li trojúhelník ABC ostroúhlý, pak takový čtyřstěn neexistuje.

Řešení I. V trojúhelníku ABC o stranách a, b, c

jsou úsečky NP, PM, MN středními příčkami, takže jsou pořadě rovnoběžné se stranami BC, CA, AB (obr. 12). Označme pořadě o_1, o_2, o_3 kolmice vedené vrcholy A, B, C k protějším stranám trojúhelníka ABC; jejich paty na protějších stranách označme pořadě V_1, V_2, V_3. Dále buďte O_1, O_2, O_3 průsečíky dvojic přímek (o_1, NP), (o_2, PM), (o_3, MN). Konečně položme

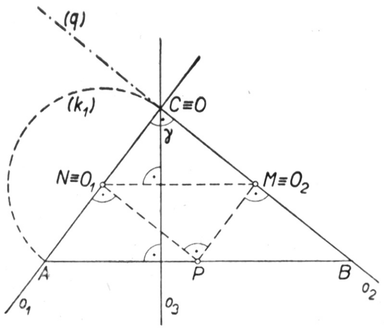
$$AV_1 = v_1, \qquad BV_2 = v_2, \qquad CV_3 = v_3\,.$$

Platí, že $\sphericalangle NPM = \sphericalangle BCA = \gamma$ atd.

Všimněme si tohoto faktu (srovnej s obr. 12): Buď $MNPQ$ libovolný čtyřstěn. Otočme pořadě trojúhelníky NPQ, PMQ, MNQ i s jejich rovinami kolem přímek NP, PM, MN do roviny MNP, a to pořadě do polorovin opačných k polorovinám NPM, PMN, MNP; přejdou do poloh NPA, PMB, MNC. Bod Q se při těchto rotačních pohybech otáčí pořadě v rovinách $\omega_1 \perp NP$, $\omega_2 \perp PM$, $\omega_3 \perp MN$; jejich průsečnice s rovinou MNP jsou pořadě o_1, o_2, o_3 a středy příslušných kružnic k_1, k_2, k_3 otáčení (ty leží pořadě v rovinách ω_1, ω_2, ω_3) jsou body O_1, O_2, O_3; poloměry těchto kružnic otáčení kolem os NP, PM, MN jsou pořadě

$$O_1Q = O_1A,\ O_2Q = O_2B,\ O_3Q = O_3C\,.$$

Přímka $q \equiv QO \perp MNP$, kde O je pata této kolmice, leží v rovinách ω_1, ω_2, ω_3 a tudíž bod O je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC. Tohoto výsledku užijeme k důkazu, že naše úloha nemá řešení, jestliže trojúhelník ABC není ostroúhlý.

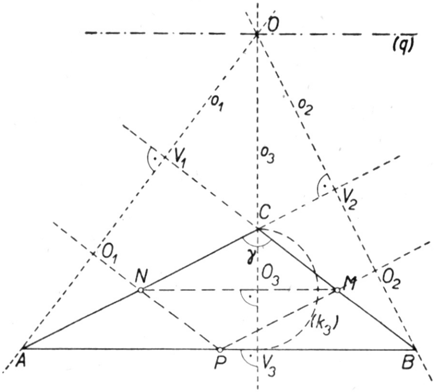


Obr. 10

Případ [1] (obr. 10). Nechť je $\gamma = 90°$. Tu je $O \equiv C$ a $N \equiv O_1$ a kružnice k_1 má průměr AC, tj. má s přímkou $q \perp MNP$ (jdoucí bodem O) společný jen bod C a ten leží v rovině MNP, takže neexistuje hledaný čtyřstěn $MNPQ$.

Případ [2] (obr. 11). Nechť je $\gamma > 90°$, takže průsečík O výšek trojúhelníka ABC padne vně trojúhelníka. Kružnice k_3 otáčení má průměr CV_3 a nemá zřejmě společný bod s přímkou $q \perp MNP$ vedenou bodem O.

P ř í p a d [3] (obr. 12). Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, takže průsečík O jeho výšek padne dovnitř tohoto trojúhelníka, tedy např. dovnitř úsečky AV_1.

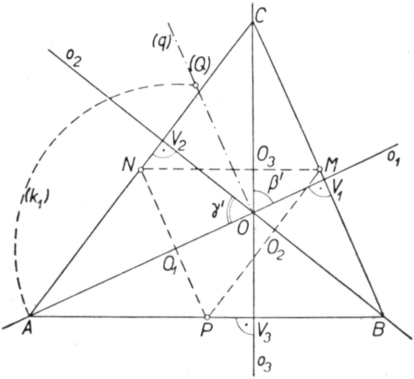


Obr. 11.

Je tedy poloměr $O_1A = O_1Q$ kružnice otáčení k_1 bodu A větší než vzdálenost O_1O a přímka $q \perp MNP$ vedená bodem O má s kružnicí k_1 společný bod Q, který neleží v rovině MNP. Půjde o to dokázat, že každá z kružnic k_1, k_2, k_3 tímto bodem Q prochází; to dokážeme tak, že určíme velikost v úsečky OQ, kterou jsme sestrojili pomocí kružnice k_1.

V obr. 12 je písmeny v kulaté závorce znázorněna situace v rovině ω_1, totiž kružnice (k_1), přímka (q), bod (Q), přičemž trojúhelník $AV_1(Q)$ má podle Thaletovy věty při vrcholu (Q) pravý úhel; o velikosti v jeho výšky $O(Q)$ podle Euklidovy věty o výšce platí

$$v^2 = OA \,.\, OV_1 \,. \tag{1}$$



Obr. 12

Platí (z trojúhelníka AOV_2, kde $\sphericalangle V_2 = 90°$, $\sphericalangle O =$ $= \gamma$)

$$OA = \frac{AV_2}{\sin\gamma}\,,$$

(z trojúhelníka ABV_2, kde $\sphericalangle V_2 = 90°$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \alpha$)

$$AV_2 = c \,.\, \cos\alpha$$

a tedy

$$OA = c \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} . \qquad (2)$$

Dále platí (z trojúhelníka OCV_1, kde $\sphericalangle V_1 = 90°$, $\sphericalangle O = \beta$)

$$OV_1 = CV_1 \, . \, \mathrm{cotg}\beta ,$$

(z trojúhelníka ACV_1, kde $\sphericalangle V_1 = 90°$, $\sphericalangle C = \gamma$, $AC = b$)

$$CV_1 = b \, . \, \cos\gamma$$

a tedy

$$OV_1 = b \, . \, \mathrm{cotg}\beta \, . \, \cos\gamma \, . \qquad (3)$$

Po dosazení z (2), (3) do (1) dostáváme

$$v^2 = bc \, . \, \cos\alpha \, . \, \mathrm{cotg}\beta \, . \, \cos\gamma \cdot \frac{1}{\sin\gamma} . \qquad (4)$$

Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Podle věty sinové užité na trojúhelník ABC platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

neboli

$$b = 2r \sin\beta , \qquad c = 2r \sin\gamma ; \qquad (5)$$

po dosazení za b, c do (4) dostaneme

$$v^2 = 4r^2 \, . \, \cos\alpha \, . \, \cos\beta \, . \, \cos\gamma$$

neboli

$$v = 2r\sqrt{\cos\alpha \, . \, \cos\beta \, . \, \cos\gamma} \, . \qquad (6)$$

Číslo v se nezmění, jestliže místo kružnice k_1 užijeme některé z kružnic k_2, k_3, neboť vztah (6) zůstává týž, provedeme-li záměnu úhlů α, β, γ. Z toho plyne, že sestrojeným bodem Q procházejí všechny tři kružnice k_1, k_2, k_3, což právě jsme měli dokázat.

II. Obsah p trojúhelníka ABC je např.

$$\tfrac{1}{2}bc \sin\alpha$$

a po dosazení za b, c z (5)

$$2r^2 . \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma ;$$

obsah p trojúhelníka MNP je roven $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníka ABC, tj.

$$p = \tfrac{1}{2}r^2 \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \tag{7}$$

Objem V čtyřstěnu $MNPQ$ je

$$V = \tfrac{1}{3}p . v$$

čili po dosazení

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}r^2 \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . 2r\sqrt{\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma}$$

neboli

$$V = \tfrac{1}{3}r^3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sqrt{\cos\alpha \ \cos\beta \ \cos\gamma} .$$

Tím je řešení celé úlohy provedeno.

2. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A*

1. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané t_c, v_c, γ (t_c je dĺžka ťažnice príslušnej k vrcholu C; v_c je výška príslušná k tomu istému vrcholu; $\gamma = \sphericalangle BCA$). Urobte diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 13, 14). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili trojuholník ABC požadovaných vlastností. Označme M stred strany AB, ďalej P pätu kolmice vedenej bodom C k priamke AB. Je teda

$$CM = t_c\,, \quad CP = v_c\,, \quad \sphericalangle BCA = \gamma < 180^\circ\,.$$

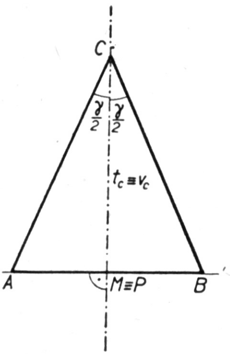
Sú dve možnosti: [**1**] $M \equiv P$ a teda $t_c = v_c$ (obr. 13); v tomto prípade je ABC rovnoramenný trojuholník, ktorý pri umiestení úsečky MC a bodu A v jednej z polrovín vyťatých priamkou MC možno zostrojiť s jediným výsledkom. Tým považujeme tento prípad za vyriešený.

[**2**] $M \not\equiv P$. Trojuholník CMP má uhol $\sphericalangle P = 90^\circ$ (obr. 14), preto je $CM > CP$, čiže nevyhnutne platí

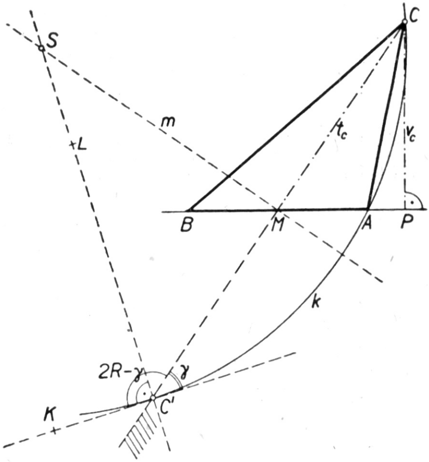
$$t_c > v_c\,. \tag{1}$$

(V prípade $t_c < v_c$ zrejme nemá úloha riešenie.) Zostrojme rovnobežník $ACBC'$, ktorého stredom je bod M. O ňom platí $CC' = 2t_c$, $\sphericalangle CAC' = 180^\circ - \gamma$; jeden z bodov A, B (pri vhodnom označení je to bod A) padne dovnútra polpriamky MP. Z toho vyplýva *konštrukcia:*

Zostrojme trojuholník CMP, kde $CP = v_c$, $\sphericalangle P = 90^\circ$, $CM = t_c$. Požadujme, aby bod A padol dovnútra polroviny CMP. Na predĺžení úsečky CM za bod M zostrojme úsečku $MC' = t_c$. Označme k oblúk v polrovine CMP, z ktorého vidieť úsečku CC'



Obr. 13



Obr. 14

pod uhlom $180° - \gamma$. Stred S oblúka k zostrojíme takto: a) zostrojíme os m úsečky CC'; b) v polrovine opačnej k polrovine CMP zostrojíme úsekový uhol $\sphericalangle CC'K = 180° - \gamma$ a priamku $C'L \perp C'K$. Potom je $S \equiv (m \,.\, C'L)$. Polomer oblúka je SC.

Označme ďalej A spoločný bod polpriamky MP a oblúka k. Bod B je obraz bodu A v súmernosti so stredom M. Potom je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz (obr. 14). Bod M je podľa konštrukcie stredom úsečiek CC', AB, takže $ACBC'$ je rovnobežník, v ktorom podľa konštrukcie je $\sphericalangle A = 180° - \gamma$ a teda $\sphericalangle C = \gamma$. Trojuholník ABC má vzhľadom k strane AB výšku $CP = v_c$ a ťažnicu $CM = t_c$. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia (obr. 14). Trojuholník CMP za predpokladu (1) možno zostrojiť, takže priamky CM, MP sú rôzne. Oblúk k tiež (pre $\gamma < 180°$) existuje. Bod M podľa konštrukcie leží vnútri kružnice (S, SC) a teda polpriamka MP nevyhnutne obsahuje práve jeden bod oblúka k, totiž bod $A \not\equiv M$. Úloha má teda pri zvolenom umiestení práve jedno riešenie.

Záver. Pre $t_c \geqq v_c$, $\gamma < 180°$ má úloha práve jedno riešenie; inak nemá riešenie.

2. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1\,. \tag{1}$$

(Poznámka. Najprv určte všetky x, pre ktoré nemá ľavá strana nerovnosti zmysel.)

Riešenie. Upravme čitateľa aj menovateľa zlomku Z na ľavej strane vzťahu (1). Platí (použijeme vzorce pre súčet funkcií $\sin\alpha + \sin\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$):

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (\sin x + \sin 5x) + \\ + \sin 3x = 2\sin 3x \,.\, \cos 2x + \sin 3x = \\ = \sin 3x\,(1 + 2\cos 2x)\,, \tag{2}$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = (\cos x + \cos 5x) + \\ + \cos 3x = 2\cos 3x \,.\, \cos 2x + \cos 3x = \\ = \cos 3x\,(1 + 2\cos 2x)\,. \qquad (3)$$

I. Zlomek Z vzhľadom na (3) stráca zmysel, ak platí jeden zo vzťahov:

$$\cos 3x = 0\,, \qquad (4)$$

$$1 + 2\cos 2x = 0\,. \qquad (5)$$

Zo vzťahu (4) vyplýva: buď je $3x = 90° + n\,.\,4R$, alebo je $3x = 270° + n\,.\,4R$ (kde n je ľubovoľné celé číslo); teda

$$x = 30° + n\,.\,120° \quad \text{a} \quad x = 90° + n\,.\,120°\,,$$

čiže

$$x = \alpha + k\,.\,4R \qquad (6)$$

(kde k je ľubovoľné celé číslo), pričom α je ktorékoľvek z čísel

$$30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°\,. \qquad (6')$$

Zo vzťahu (5) vyplýva: $2\cos 2x = -1$, čiže $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ a teda: buď je

$$2x = (180° - 60°) + m\,.\,4R\,, \qquad (7)$$

buď je

$$2x = (180° + 60°) + m\,.\,4R\,, \qquad (7')$$

kde m je ľubovoľné celé číslo. Zo (7), (7′) vyplýva jednak

$$x = 60° + m\,.\,2R\,,$$

jednak

$$x = 120° + m \,.\, 2\text{R};$$

je teda

$$x = \beta + p \,.\, 4\text{R} \tag{8}$$

(kde p je ľubovoľné celé číslo), pričom β je ľubovoľné z týchto čísel:

$$60°, 120°, 240°, 300° \,. \tag{8'}$$

Vzhľadom na vzťahy (6), (6′) a (8), (8′) stráca zlomok Z zmysel pre

$$x = \gamma + q \,.\, 4\text{R} \tag{9}$$

(kde q je ľubovoľné celé číslo), pričom γ je ľubovoľné z týchto čísel:

$$30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°, 240°, 270° \\ 300°, 330° \,. \tag{9'}$$

II. Nech x je číslo, ktoré vyhovuje nerovnosti (1), takže je rôzne od všetkých čísel zo vzťahu (9), (9′). Podľa (2) a (3)

$$Z = \frac{\sin 3x\,(1 + \cos 2x)}{\cos 3x\,(1 + \cos 2x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x \,.$$

Vzťah (1) možno teda písať v tvare

$$\operatorname{tg} 3x > 1 \,. \tag{10}$$

Nerovnosť tg $\varphi > 1$, kde φ leží v intervale $\langle 0°, 180° \rangle$, má riešenie

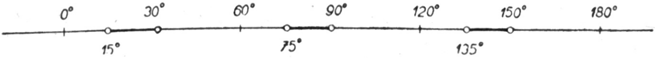
$$45° < \varphi < 90° \,,$$

nerovnosť (10) teda splňujú práve tie čísla x, o ktorých platí

$$45^\circ + r \,.\, 180^\circ < 3x < 90^\circ + r \,.\, 180^\circ \,,$$

kde r je ľubovoľné celé číslo, t. j.

$$15^\circ + r \,.\, 60^\circ < x < 30^\circ + r \,.\, 60^\circ \,. \qquad (11)$$



Obr. 15

Všetky čísla (9) možno písať v tvare $x = m \,.\, 30^\circ$ (kde m je celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 6). Medzi číslami x z nerovností (11) nie je žiadne z týchto čísel. Robili sme ekvivalentné úpravy danej nerovnosti. Čísla (11) sú preto riešeniami danej nerovnosti a neexistuje žiadne iné riešenie.

Záver. V intervale $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ dostaneme podľa (11) práve tieto riešenia x (obr. 15):

$$\begin{aligned} 15^\circ &< x < 30^\circ \,, \\ 75^\circ &< x < 90^\circ \,, \\ 135^\circ &< x < 150^\circ \,. \end{aligned} \qquad (12)$$

Všetky riešenia nerovnosti (1) sú čísla tvaru

$$x + s \,.\, 2\mathrm{R} \,,$$

kde x je jedno z čísel (12) a s je ľubovoľné celé číslo.

3. Je dána tato funkce y proměnné x (kde x je reálné číslo):

$$y = \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p}}, \text{ kde } p = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Na základě úpravy daných výrazů načrtněte graf této funkce a dále rozhodněte, pro která x není funkce definována; pomocí tohoto grafu určete ta x, pro která nabývá y nejmenší kladné hodnoty.

Řešení. Nejprve vyšetříme, pro která x mají smysl odmocniny $\sqrt{1+p}$, $\sqrt{1-p}$; platí:

$$1 + p = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1},$$

což je nezáporné číslo pro každé reálné x;

$$1 - p = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1},$$

což je nezáporné číslo pro každé reálné x.

Dále vyšetříme, pro která x je $\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p} = 0$ neboli $\sqrt{1+p} = \sqrt{1-p}$ a tedy $1 + p = 1 - p$, tj. $p = 0$. Avšak $p = 0$ právě pro $x = 0$. Pro $x = 0$ není tedy y definováno.

V dalším předpokládáme, že reálné x je různé od nuly, takže je příslušné y definováno. Upravujme výraz:

$$y = \frac{\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})^2}{(\sqrt{1+p} - \sqrt{1-p})\,(\sqrt{1+p} + \sqrt{1-p})} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{(1+p)\,(1-p)}}{1 + p - (1-p)} = \frac{2\left(1 + \sqrt{1-p^2}\right)}{2p} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1-p^2}}{p}\,.$$

Protože je $1 - p^2 = 1 - \frac{(2x)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$,

je $\sqrt{1-p^2} = \frac{|x^2-1|}{x^2+1}$; dostáváme tedy

$$y = \frac{1 + \frac{|x^2-1|}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}} = \frac{x^2 + 1 + |x^2 - 1|}{2x}\,,$$

tj.

$$y = \frac{x^2 + 1 + |x^2 - 1|}{2x}\,.$$

Zřejmě musí být $x \neq 0$. Nyní jsou dvě možnosti:

[1] Nechť je $x^2 - 1 \geqq 0$, tj. buď je $x \geqq 1$ anebo $x \leqq -1$. Potom je $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ a

$$y = \frac{x^2 + 1 + x^2 - 1}{2x} = x$$

neboli

$$y = x\,.$$

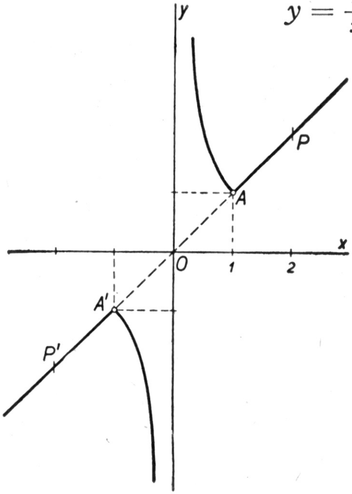
Pro $|x| \geqq 1$ se graf funkce skládá z polopřímek AP, $A'P'$ souměrně sdružených podle počátku O souřadnic; přitom je $A \equiv [1, 1]$, $P \equiv [2, 2]$.

[2] Nechť je $x^2 - 1 \leqq 0$, ale $x \neq 0$, tj. $-1 \leqq x \leqq \leqq 1$, $x \neq 0$; potom je $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ a

$$y = \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

neboli

$$y = \frac{1}{x}.$$



Obr. 16

V tomto případě jsou grafem dva oblouky rovnoosé hyperboly (viz grafické znázornění nepřímé úměrnosti), a to pro $|x| \leqq 1$, $x \neq 0$.

Z obrázku 16 je patrný průběh naší funkce; z něho je vidět, že nejmenší kladnou hodnotu $y = 1$ dostaneme pro $x = 1$. Tím je řešení provedeno.

4. Trojboký jehlan má za podstavu rovnostranný trojúhelník o straně velikosti p. Pobočné stěny svírají s jeho podstavou pořadě ostré úhly α, β, γ.

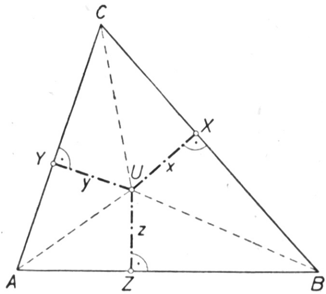
Je-li $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, potom poloměr kulové plochy jehlanu vepsané je

$$\varrho = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha\;\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\beta\;\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\gamma;$$

dokažte.

Řešení. Označme V hlavní vrchol jehlanu a S střed kulové plochy jehlanu (v podstatě čtyřstěnu $VABC$) vepsané; je známo, že bod S existuje. Označme U patu kolmice vedené bodem S k rovině ABC (obr. 17). Bod S leží v rovinách, které půlí úhly α, β, γ; snadno se zjistí, že bod S leží uvnitř kolmé hranolové plochy sestrojené nad trojúhelníkem ABC a proto bod U padne dovnitř tohoto trojúhelníka.

Označme X, Y, Z paty kolmic vedených bodem U k přímkám BC, CA, AB a položme $UX = x$, $UY = y$, $UZ = z$; podle předchozího jsou x, y, z kladná čísla (bod U neleží na obvodu trojúhelníka ABC). Vznikají trojúhelníky



Obr. 17

$$SXU,\ SYU,\ SZU,$$

kde

$$\sphericalangle U = 90°,\ \sphericalangle X = \tfrac{1}{2}\alpha,\ \sphericalangle Y = \tfrac{1}{2}\beta,\ \sphericalangle Z = \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$SU = \varrho\,.$$

O těchto trojúhelnících platí

$$x = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad y = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta, \qquad z = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma \,. \quad (1)$$

Obsah P rovnostranného trojúhelníka ABC se stranou p je

$$P = \tfrac{1}{4}p^2\sqrt{3}\,. \qquad (2)$$

Zároveň je obsah P roven součtu obsahů trojúhelníků UBC, UCA, UAB (obr. 17), tj.

$$P = \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{2}py + \tfrac{1}{2}pz$$

neboli

$$P = \tfrac{1}{2}p(x + y + z)\,. \qquad (3)$$

Porovnáním (2), (3) dostaneme po snadné úpravě

$$x + y + z = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\,.$$

Po dosazení za x, y, z ze vztahů (1) obdržíme

$$\varrho(\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma) = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}$$

neboli

$$\varrho = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma}\,.$$

Jestliže je tvrzení úlohy správné, musí být

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma}$$

neboli

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma = \\ = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma\,.$$

Jestliže je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pak tento vztah skutečně platí, jak ihned dokážeme.

Důkaz. Podle textu úlohy platí $\frac{1}{2}\gamma = R - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)$. Nyní postupně upravujme:

$$(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta) + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma \, . \, \sin[90° - \frac{1}{2}\gamma] + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma \, . \, \cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{[\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta] \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{\{\sin[90° - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)] + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta\} \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

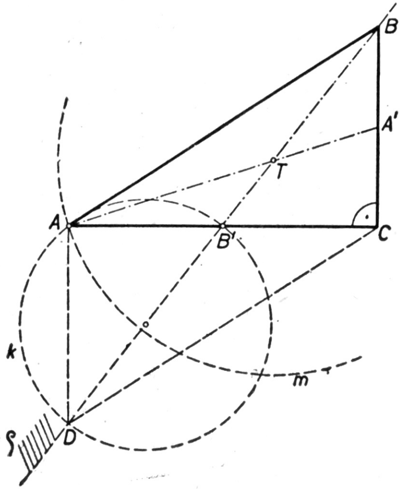
$$= \frac{[\cos(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta] \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{[\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta] \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma\,,$$

což právě jsme měli dokázat. Tím je řešení úlohy provedeno.

1. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (kde úhel $\sphericalangle BCA = 90°$), jsou-li dány délky těžnic t_1, t_2 příslušných k vrcholům A, B. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům t_1, t_2. (Lze řešit doplněním na rovnoběžník.)



Obr. 18

Řešení. *Rozbor* (obr. 18). Předpokládejme, že jsme našli trojúhelník, který splňuje požadavky úlohy. Označme T těžiště hledaného trojúhelníka a sestrojme rovnoběžník $ABCD$; jeho střed B' je zároveň středem odvěsny CA hledaného trojúhelníku ABC. Tu platí

$$TA = \tfrac{2}{3}t_1, \quad TD = \tfrac{4}{3}t_2, \quad B'D = BB' = t_2, \quad TB' = \tfrac{1}{3}t_2 .$$

Ze souměrnosti rovnoběžníka $ABCD$ podle jeho středu B' plyne, že

$$\sphericalangle B'AD = \sphericalangle B'CB = 90^\circ .$$

Bod A leží proto na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou DB' jako průměrem, přičemž je $TA = \frac{2}{3}t_1$. Odtud *konstrukce* (obr. 18):

Sestrojme úsečku BD délky $2t_2$; označme B' její střed a na polopřímce BD sestrojme úsečku $BT = \frac{2}{3}t_2$. Zvolme polorovinu ϱ o hranici BD. Nad úsečkou DB' jako průměrem sestrojme Thaletovu kružnici k a opišme kružnici $m \equiv (T, \frac{2}{3}t_1)$; označme A ten společný bod (pokud existuje) obou kružnic k, m, který padne dovnitř poloroviny ϱ. Dále sestrojme obraz C bodu A v souměrnosti o středu B'. Potom trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce jsou D, B' různé body (čísla t_2 i t_1 jsou kladná). Předpokládali jsme, že bod A padne dovnitř poloroviny ϱ, která má hranici DB. Proto existuje trojúhelník ABD a tedy i trojúhelník ABC; o něm podle konstrukce platí:

a) Bod B' je středem strany CA a úsečka BB'

(shodná s úsečkou $DB' = t_2$) je tedy těžnicí trojúhelníka ABC a má délku t_2.

b) Podle konstrukce je $BT = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}t_2$; protože úsečka BB' je těžnicí trojúhelníka ABC, je T těžištěm tohoto trojúhelníka.

c) Podle konstrukce je $TA = \frac{2}{3}t_1$, přičemž T je těžištěm; proto těžnice trojúhelníka ABC příslušná k vrcholu A má délku t_1.

d) Podle konstrukce leží bod A na kružnici k, je tedy $\sphericalangle DAB' = 90°$; obrazem tohoto úhlu v souměrnosti o středu B' je úhel $\sphericalangle BCA$, který je proto rovněž pravý.

Trojúhelník ABC splňuje tedy všechny požadavky vyslovené v textu úlohy.

Diskuse. Řešitelnost úlohy podle provedené konstrukce a důkazu závisí na existenci bodu A uvnitř poloroviny ϱ. Zřejmě se tedy jedná o to, aby se kružnice k, m protínaly ve dvou různých bodech; tyto body jsou, pokud existují, souměrně sdružené podle přímky DB, takže jen jediný z průsečíků padne dovnitř poloroviny ϱ.

Kružnice k, m mají pořadě poloměry $r = \frac{1}{2}t_2$, $\varrho_0 = \frac{2}{3}t_1$ a střednou délky $\frac{5}{6}t_2$; kružnice k, m mají dva různé společné body právě tehdy, jestliže o jejich středné platí

$$\varrho_0 - r < \frac{5}{6}t_2 < \varrho_0 + r$$

neboli

$$\tfrac{2}{3}t_1 - \tfrac{1}{2}t_2 < \tfrac{5}{6}t_2 < \tfrac{2}{3}t_1 + \tfrac{1}{2}t_2 .$$

Odtud dostáváme dvě nerovnosti

$$4t_1 < 8t_2, \quad 2t_2 < 4t_1$$

neboli

$$t_1 < 2t_2, \quad t_2 < 2t_1;$$

to lze vyslovit takto:

Každá z daných těžnic musí být menší než dvojnásobek druhé z nich. Jedině za tohoto předpokladu má úloha řešení, a to jediné; jinak úloha řešení nemá.

Tím je řešení dané úlohy provedeno.

Podle řešení s. Jitky Klánské,
11.b tř. 16. jsš, Praha 13-Vršovice,
a s. Jiřího Součka 10.a tř. 21. jsš,
Praha 16, Na Santošce 1.

2. Ak o reálnych číslach a, b, c platia tri nerovnosti

$$a + b + c > 0 , \qquad (1)$$

$$ab + bc + ca > 0 , \qquad (2)$$

$$abc > 0 , \qquad (3)$$

potom sú a, b, c kladné čísla. Dokážte to.

Riešenie. Z nerovnosti (3) vyplýva, že čísla a, b, c sú všetky rôzne od nuly a ďalej, že sú práve dve možnosti: [1] Čísla a, b, c sú všetky kladné. [2] Dve z čísel a, b, c sú záporné a tretie je kladné.

Dokážeme, že prípad [2] nemôže nastať, čím bude dokázaná správnosť tvrdenia danej úlohy.

Dôkaz. Nech je $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ (to možno v prípade [2] dosiahnuť vhodnou zámenou označenia uvažovaných čísel).

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$ab > -c(a+b); \tag{4}$$

zo vzťahu (1) vyplýva

$$a + b > -c. \tag{5}$$

Znásobme obe strany nerovnosti (5) číslom $-c$, ktoré je kladné; dostaneme

$$-c(a+b) > c^2. \tag{6}$$

Z nerovností (4), (6) dostaneme

$$ab > c^2. \tag{7}$$

Avšak tento vzťah neplatí, lebo je $ab < 0$, ale $c^2 > 0$. Tým sme urobili dôkaz, že prípad [2] nemôže nastať.

Upravené podľa riešenie s. Čä Zong Rjonga, žiaka 11.a tr. jsš, Brandýs nad Labem.

Jiné řešení. Nechť tvrzení úlohy neplatí, tj. nechť některé z čísel a, b, c není kladné (dokážeme, že to není možné); můžeme předpokládat, že je to číslo a (pro čísla b, c by se úvaha provedla podobně). Předpokládejme tedy, že platí

$$a \leqq 0. \tag{4}$$

Nemůže být $a = 0$, jinak by neplatilo $abc > 0$. Je tedy

$$a < 0 .$$

Ze vztahu $abc > 0$ potom dostaneme

$$bc < 0 . \tag{5}$$

Z nerovnosti (1) dostaneme

$$a > -(b + c) ,$$

takže platí

$$-(b + c) < a < 0$$

a tedy též

$$-(b + c) < 0,$$

z čehož

$$b + c > 0 .$$

Protože je $a < 0$, plyne z předchozí nerovnosti vztah

$$a(b + c) < 0; \tag{6}$$

ze vztahů (5), (6) vyplývá, že platí též nerovnost

$$a(b + c) + bc < 0$$

neboli

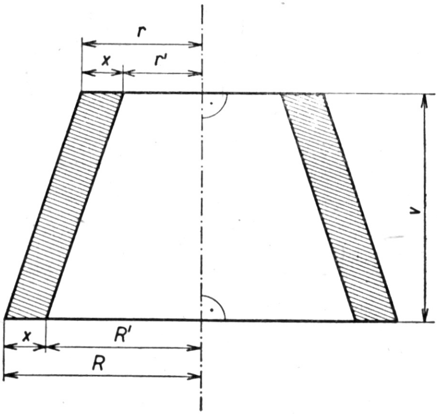
$$ab + bc + ca < 0 .$$

To však není možné, neboť platí nerovnost (2).

Není tedy $a \leqq 0$, tj. platí $a > 0$. Protože stejnou úvahu můžeme provést i pro čísla b, c, je důkaz tvrzení úlohy proveden.

Podle řešení s. Kamila Johna, 11.b tř. 14. jsš, Praha 12, W. Piecka 2.

3. Z polotovaru tvaru komolého rotačního kužele, jehož podstavy mají poloměry R, r, byla zhotovena součástka tak, že do něho byla vyvrtána dutina tvaru souosého komolého kužele, jak je vidět z nákresu osového řezu; tím se hmota kusu zmenšila na polovinu. Vypočítejte poloměry otvorů vzniklých v podstavách součástky. Rozhodněte, pro který poměr $\frac{R}{r}$ má úloha řešení.



Obr. 19

Řešení (obr. 19). Předpokládejme, že vzhledem k významu čísel R, r je

$$R > r > 0 \,. \qquad (1)$$

Kuželová dutina má tvar rotačního komolého kužele o poloměrech podstav

$$R' = R - x, \qquad r' = r - x; \tag{2}$$

jeho objem označme V_1, objem daného kužele označme V_2. Podle textu úlohy má platit

$$V_2 = 2V_1$$

neboli

$$2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi[(R - x)^2 + (R - x)(r - x) + (r - x)^2] = \\ = \tfrac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)\,.$$

Má-li úloha řešení, musí číslo x splňovat předchozí rovnici, kterou upravíme postupně takto:

$$2(R^2 - 2Rx + x^2 + Rr - Rx - rx + x^2 + \\ + r^2 - 2rx + x^2) = R^2 + Rr + r^2\,,$$

$$6x^2 - 6(R + r)x + R^2 + Rr + r^2 = 0\,. \tag{3}$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = 36(R + r)^2 - 24(R^2 + Rr + r^2) = \\ = 12(3R^2 + 6Rr + 3r^2 - 2R^2 - 2Rr - 2r^2) = \\ = 12(R^2 + 4Rr + r^2);$$

vzhledem k vztahům (1) je $D > 0$ a tedy

$$D = 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}\,.$$

Kořeny $x_{1,2}$ rovnice (3) jsou

$$x_{1,2} = \frac{6(R + r) \pm 2\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{12}$$

neboli

$$x_{1,2} = \frac{3(R + r) \pm \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6}\,. \tag{4}$$

Číslo x_1 (které přísluší ke znaménku plus) je větší než $\frac{3(R+r)}{6} = \frac{R+r}{2}$ a toto číslo je větší než r [viz (1)]; je tedy $x_1 > r$ a rozdíl $r - x_1$ je číslo záporné. Nepřichází tedy x_1 pro naši úlohu v úvahu.

Má-li úloha řešení, pak hledaným číslem x může být jen kořen x_2. Platí, že $x_2 > 0$, jak ihned dokážeme. Užijeme této pomocné věty **V**: „Jsou-li a, b nezáporná čísla a platí-li $a^2 \geqq b^2$, potom je $a \geqq b$." Položme $a = 3(R + r)$, $b = \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}$ a utvořme rozdíl $a^2 - b^2$; je

$$[3(R + r)]^2 - [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2 =$$
$$= 9(R^2 + 2Rr + r^2) - 3(R^2 + 4Rr + r^2) =$$
$$= 6R^2 + 6Rr + 6r^2,$$

což je vzhledem k vztahům (1) kladné číslo. Je tedy $x_2 > 0$.

Pro čísla R', r' dostaneme pro $x = x_2$ ze (4) tyto výsledky

$$R' = \frac{3(R - r) + \sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}}{6},$$
$$r' = \frac{-3(R - r) + \sqrt{3(R^2 + Rr + r^2)}}{6}. \qquad (5)$$

Číslo R' je vzhledem k (1) kladné. Jedná se o to, za kterých podmínek je též r' kladné číslo; to nastane právě tehdy, jestliže bude

$$\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)} > |-3(R - r)|.$$

Podle věty **V** utvořme rozdíl Q druhých mocnin čísla na levé a pravé straně poslední nerovnosti; je

$$\begin{aligned} Q &= [\sqrt{3(R^2 + 4Rr + r^2)}]^2 - [-3(R - r)]^2 = \\ &= 3(R^2 + 4Rr + r^2) - 9(R^2 - 2Rr + r^2) = \\ &= -6R^2 + 30Rr - 6r^2 = \\ &= -6(R^2 - 5Rr + r^2) . \end{aligned}$$

Číslo Q musí být kladné neboli musí být

$$R^2 - 5Rr + r^2 < 0 . \tag{6}$$

Rovnice $y^2 - 5y + 1 = 0$ o neznámé y má kořeny $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$; proto lze vztah (6) psát ve tvaru

$$\left(R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21}\right)\left(R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21}\right) < 0 . \tag{7}$$

Přitom první činitel levé strany vztahu (7) je větší o $r\sqrt{21}$ než druhý; vztah (7) lze tedy splnit jedině takto

$$R - \frac{5r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{21} > 0 ,$$

$$R - \frac{5r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{21} < 0$$

neboli

$$\left.\begin{aligned} \frac{R}{r} &> \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) , \\ \frac{R}{r} &< \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Obráceným postupem z obou vztahů (8) plyne, že je $Q > 0$ a tím $r' > 0$. Přitom první vztah (8) je vzhledem k vztahu (1) vždy splněn.

Odtud *výsledek*: Úloha má řešení právě tehdy, jestliže platí nerovnosti

$$1 < \frac{R}{r} < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}).$$

Podle řešení s. Karla Šmuka, 11.b tř. jsš, Ostrava VIII - Hladnov.

4. Najděte všechny dvojice čísel x, y (ve stupních), které vyhovují soustavě rovnic

$$\sin(x + 150°) = \cos(y - 75°) \tag{1}$$

$$\cos x + \sin(y - 225°) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \tag{2}$$

Řešení. A. Předpokládejme, že dvojice čísel x, y splňuje obě dané rovnice (1), (2).

V dalším užijeme známého vzorce

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \tag{3}$$

a potom věty ***V***: „Jestliže platí $\cos\beta = \cos\gamma$, potom o úhlech β, γ platí buď $\beta = \gamma + k \,.\, 360°$ anebo $\beta = - \gamma + k \,.\, 360°$, kde k je celé číslo.“

Užitím vzorce (3) na levou stranu rovnice (1) dostaneme

$$\cos[90° - (x + 150°)] = \cos(y - 75°).$$

Musí tedy podle věty ***V*** platit:

a) buď

$$90° - (x + 150°) + k \,.\, 360° = y - 75°,$$

kde k je libovolné celé číslo. Odtud

$$y = 15° - x + k \,.\, 360° \,. \tag{4}$$

b) anebo

$$x + 150° - 90° + k \,.\, 360° = y - 75° \,,$$

kde k je libovolné celé číslo. Odtud

$$y = x + 135° + k \,.\, 360° \,. \tag{5}$$

B. Užitím vzorce (3) upravíme výraz $\sin(y - 225°)$; platí $\sin(y - 225°) = \cos(y - 225° - 90°) = = \cos(y - 225° - 90° + 360°) = \cos(y + 45°)$.

Po dosazení tohoto výsledku za $\sin(y - 225°)$ do rovnice (2) obdržíme

$$\cos x + \cos(y + 45°) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,. \tag{6}$$

C. K této rovnici připojme jednou výsledek (4) [viz část I], podruhé výsledek (5) [viz část II].

I. Po dosazení ze (4) do (6) dostaneme

$$\cos x + \cos(60° - x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

neboli

$$\cos x + \cos(x - 60°) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,;$$

užitím vzorce pro součet kosinů dostáváme dále:

$$2\cos(x - 30°) \,.\, \cos 30° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,,$$

$$2\cos(x - 30°) \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,,$$

$$2\cos(x - 30°) = -1 \,,$$

$$\cos(x - 30°) = -\tfrac{1}{2} \,.$$

Musí tedy platit: [**a**] buď
$$x - 30° = 120° + m \,.\, 360° \qquad (7)$$
(kde m je libovolné celé číslo);
[**b**] anebo
$$x - 30° = 240° + p \,.\, 360° \qquad (8)$$
(kde p je libovolné celé číslo).

Možnost [**a**]. Ze vztahu (7) plyne
$$x = 150° + m \,.\, 360°;$$
po dosazení do (4)
$$y = -135° + n \,.\, 360° = 360° - 135° + p \,.\, 360° = \\ = 225° + p \,.\, 360°\,,$$
kde $p = n - 1$ je libovolné celé číslo. Dostáváme dvojici
$$x = 150° + m \,.\, 360°, \qquad y = 225° + p \,.\, 360° \qquad (9)$$
(čísla m, p jsou libovolná celá), o níž se přesvědčíme dosazením do rovnic (1), (2), že je splňuje. Označme L_1, P_1 dosazení do levé, popř. pravé strany rovnice (1) a L dosazení do levé strany rovnice (2). Dostáváme:
$$L_1 = \sin 300° = -\sin 60° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$
$$P_1 = \cos 150° = -\cos 30° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$
$$L = \cos 150° + \sin 0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\cos 30° + \\ + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0\,.$$

Je tedy $L_1 = P_1$ a $L = 0$, takže všechny dvojice (9) jsou řešením dané soustavy rovnic (1), (2).

Možnost [**b**]. Ze vztahu (8) plyne

$$x = 270° + p \, . \, 360°;$$

po dosazení tohoto výsledku do vztahu (4) dostáváme

$$y = -\, 255° + (k - p) \, . \, 360°$$

neboli

$$y = 105° + q \, . \, 360°$$

(kde q je libovolné celé číslo). Dostáváme tedy dvojici

$$x = 270° + p \, . \, 360°, \; y = 105° + q \, . \, 360° \qquad (10)$$

(kde p, q jsou libovolná celá čísla). Přesvědčíme se dosazením do jednotlivých stran rovnic (1), (2), že uvedená dvojice tyto rovnice splňuje; užijeme stejného označení jako při možnosti [**a**]:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}; \\ P_1 &= \cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}; \\ L &= \cos 270° + \sin(-\,120°) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \\ &= -\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0\,. \end{aligned}$$

Platí tedy $L_1 = P_1$, $L = 0$, takže všechny dvojice (10) jsou řešením soustavy rovnic (1), (2). Tím je část I provedena.

II. Po dosazení z (5) do levé strany rovnice (6) dostaneme postupně

$$\cos x + \cos(x + 180°) = \cos x - \cos x = 0;$$

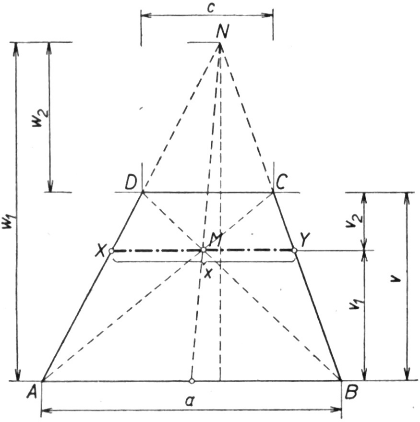
naproti tomu je pravá strana rovnice (6) různá od nuly. Soustava rovnic (5), (6) tedy řešení nemá.

Závěr. Tím jsou všechny možnosti vyčerpány a všechna řešení dané soustavy rovnic jsou dána čísly x, y ze vztahů (9) a (10).

Podle řešení s. Jiřího Moudrého,
11.c tř. 1. jsš, Pardubice.

1. V lichoběžníku $ABCD$ s větší základnou AB označme M průsečík úhlopříček. Buď $XY \parallel AB$ příčka vedená bodem M (body X, Y leží pořadě uvnitř ramen AD, BC lichoběžníka).

Vyjádřete poměr obsahů lichoběžníků $ABYX$, $XYCD$ pomocí čísel $a = AB$, $c = CD$.



Obr. 20

Řešení (zaveďme označení v obr. 20). Podle zavedeného označení o obsazích P_1, P_2 lichoběžníků

$ABYX$, $XYCD$ platí

$$P_1 = \tfrac{1}{2}(a + x)v_1\,, \tag{1}$$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}(x + c)v_2\,. \tag{2}$$

Protože je $AB \parallel CD \parallel XY$, platí

$$\triangle\, MAB \sim \triangle\, MCD\,(\text{uu})\,, \tag{3}$$

$$\triangle\, NAB \sim \triangle\, NDC\,(\text{uu})\,, \tag{4}$$

$$\triangle\, NAB \sim \triangle\, NXY\,(\text{uu})\,, \tag{5}$$

přičemž i příslušné výšky těchto trojúhelníků jsou v témže poměru jako příslušné strany [viz Geometrie pro 9. ročník, příklad 9, str. 63, vydání z r. 1955].

Podle obr. 20 platí

$$v = v_1 + v_2 = w_1 - w_2\,. \tag{6}$$

Ze vztahu (3) plyne

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{c}$$

neboli

$$v_1 = ka, \qquad v_2 = kc\,, \tag{7}$$

kde $k > 0$ je poměr podobnosti; vzhledem k prvnímu vztahu (6) je $v = ka + kc$, neboli

$$k = \frac{v}{a + c}\,. \tag{7'}$$

Ze vztahu (4) plyne

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{c}$$

neboli

$$w_1 = k'a, \qquad w_2 = k'c\,, \tag{8}$$

kde $k' > 0$ je poměr podobnosti; vzhledem k druhému vztahu (6) je $v = k'a - k'c$, neboli

$$k' = \frac{v}{a - c} \tag{8'}$$

(přitom je v lichoběžníku $a > c$ a tedy $a - c > 0$).

Ze vztahu (5) plyne

$$\frac{x}{a} = \frac{w_1 - v_1}{w_1}$$

neboli vzhledem k (7), (8)

$$x = a \cdot \frac{k'a - ka}{k'a}$$

a tedy

$$x = \frac{1}{k'} \cdot (k' - k)a\,.$$

Dosaďme sem za k', k ze (7'), (8'); dostaneme postupně

$$x = \frac{a - c}{v} \cdot \left(\frac{v}{a - c} - \frac{v}{a + c}\right) \cdot a =$$
$$= a(a - c) \cdot \frac{a + c - (a - c)}{(a - c)(a + c)} = \frac{2ac}{a + c},$$

tj.

$$x = \frac{2ac}{a + c}. \tag{9}$$

Vzhledem k (1), (2) platí

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a + x}{c + x} \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Po dosazení za v_1, v_2 ze (7) obdržíme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a + x}{c + x} \cdot \frac{a}{c}.$$

Nyní dosaďme za x ze vztahu (9), čímž dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[a\left(a + \frac{2ac}{a + c}\right)\right] : \left[c\left(c + \frac{2ac}{a + c}\right)\right],$$

neboli

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a[a(a + c) + 2ac]}{a + c} : \frac{c[c(a + c) + 2ac]}{a + c}$$

a postupně dále

$$\frac{P_1}{P_2} = [a(a^2 + 3ac)] : [c(c^2 + 3ac)] = [a^2(a + 3c)] : [c^2(c + 3a)];$$

odtud konečně dostáváme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2(a + 3c)}{c^2(3a + c)}$$

čímž je řešení úlohy provedeno.

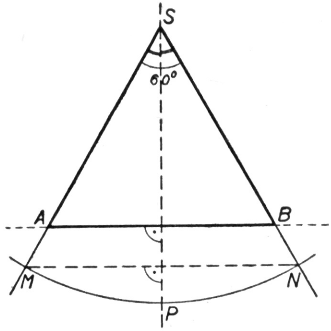
2. Kruhový výsek so stredovým uhlom 60° rozdeľme priamkou kolmou k osi tohto uhla na dve části, ktorých obvody sa navzájom rovnajú.

Ktorá z týchto dvoch častí má menší obsah?

Riešenie. Zaveďme označenie ako na obr. 21, kde S je stred kruhového oblúka výseku, $SM = SN = r$ (polomer výseku), SP je os stredového uhla výseku. Obvod rovnostranného trojuholníka SMN je $3r$, obvod úseče odťatej priamkou MN je $r + \frac{1}{6} . 2\pi r = \frac{1}{3}r . (3 + \pi)$. Teraz platí

$$3r - r . \frac{3 + \pi}{3} = \frac{9 - (3 + \pi)}{3} r = \frac{6 - \pi}{3} r ;$$

je teda obvod trojuholníka SMN väčší než obvod úseče (MPN). Predpokladajme, že daná úloha má riešenie. Potom hľadaná priamka $AB \perp SP$ musí



Obr. 21

podľa predošlého mať od bodu S menšiu vzdialenosť než priamka MN (pozri obr. 21). Táto priamka teda rozdeľuje výsek na dve časti, z ktorých jednou je rovnostranný trojuholník SAB, ktorého strany majú veľkosť x. Jeho obvod je $3x$; obvod druhej časti je $x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r$. Podľa textu úlohy sa oba obvody rovnajú, t. j. platí

$$3x = x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r\,.$$

To je rovnica prvého stupňa pre neznámu x. Postupne dostaneme

$$4x = 2r + \frac{1}{3}\pi r\,,$$

$$x = \frac{1}{12}(6 + \pi)r\,.$$

Obsah trojuholníka SAB je $P_1 = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$; obsah druhej časti je $P_2 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$. Vypočítame $P_1 - P_2$; platí

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12^2}(6 + \pi)^2 r^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{48}(36 + 12\pi + \pi^2)\sqrt{3} - \pi\right]r^2 =$$

$$= \frac{1}{6\,.\,48}[(36 + 12\pi + \pi^2)\sqrt{3} - 48\pi]r^2\,. \qquad (1')$$

Stačí rozhodnúť, či výraz V v lomenej zátvorke vo vzťahu (1′) je kladný alebo záporný, alebo sa rovná nule. Platí

$$V = (36\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\pi + \pi^2\sqrt{3}) - 48\pi\,. \qquad (1)$$

Pokúsime sa dokázať, že V je záporné číslo. Za tým účelom si pripomeňme, že je

$$3 < \pi\,, \qquad (2)$$

$$\pi < 3{,}2\,, \qquad (3)$$

$$\sqrt{3} < 1{,}733\,. \qquad (4)$$

Keď niektoré z čísel v zátvorke na pravej strane vzťahu (1) zväčšíme, dostaneme namiesto čísla V

nové číslo, ktoré je väčšie než V. Tento postup použijeme niekoľkokrát. Postupne teda platí

$$
\begin{aligned}
V &= 12\,.\,3\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\,\pi + \pi^2\sqrt{3} - 48\pi < \\
&< 12\underline{\underline{\pi}}\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\,\pi + \pi^2\sqrt{3} - 48\pi = && \text{[pozri (2)]} \\
&= 24\sqrt{3}\pi + \pi^2\sqrt{3} - 48\pi = \\
&= \pi\sqrt{3}(24 + \pi) - 48\pi < \\
&< \pi\sqrt{3}(24 + \underline{\underline{3{,}2}}) - 48\pi = && \text{[pozri (3)]} \\
&= \pi\sqrt{3}\,.\,27{,}2 - 48\pi < \\
&< \pi\,.\,1{,}733\,.\,27{,}2 - 48\pi = && \text{[pozri (4)]} \\
&= \pi(1{,}733\,.\,27{,}2 - 48)\,,
\end{aligned}
$$

čiže

$$V < \pi(1{,}733\,.\,27{,}2 - 48)\,. \tag{5}$$

Urobme výpočet:

$$
\begin{array}{l}
1{,}733\,.\,27{,}2 \\
\hline
3\,466 \\
1\,2131 \\
3466 \\
\hline
47{,}1376
\end{array}
$$

Číslo z vyjadrené v zátvorke vo vzťahu (5) sa teda rovná

$$z = 47{,}1376 - 48$$

a je zrejme záporné. Je teda aj číslo $\pi z < 0$ a preto je aj $V < 0$. Je teda záporný aj výraz (1′) a teda

$$P_1 - P_2 < 0\,,$$

čiže $$P_1 < P_2 .$$

Záver. Časť podoby rovnostranného trojuholníka má menší obsah než druhá časť výseku.

Iný spôsob odhadu výrazu V. V zátvorke vzťahu (1) nahraďme čísla $\sqrt{3}$ a π podľa vzťahov

$$\sqrt{3} < 1{,}74 ,$$
$$\pi < 3{,}15$$

a číslo -48π nahraďme číslom $-48 \,.\, 3{,}14$. Namiesto V dostaneme číslo väčšie. Teda

$$V < (36 + 12 \,.\, 3{,}15 + 3{,}15^2) \,.\, 1{,}74 - 48 \,.\, 3{,}14 <$$
$$< 83{,}73 \,.\, 1{,}74 - 48 \,.\, 3{,}14 =$$
$$= 145{,}6902 - 150{,}72 < 0 ,$$

[pozri „Výpočty" dolu]

čiže $V < 0$.

Je teda $P_1 - P_2 < 0$, t. j.

$$P_1 < P_2 .$$

Výpočty:		Súčet:
3,15 . 12	$3{,}15^2$	36
630	94 5	37,80
37,80	1 575	9,9225
	9,9225	83,7225 < 83,73
	83,73 . 1,74	48 . 3,14
	58 611	1256
	3 3492	2512
	145,6902	150,72

3. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže jsou dány velikosti strany $AB = c$, úhlu $\sphericalangle CAB = \alpha$ a jestliže platí, že průsečík V jeho výšek půlí výšku procházející vrcholem A.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k velikosti úhlu α.

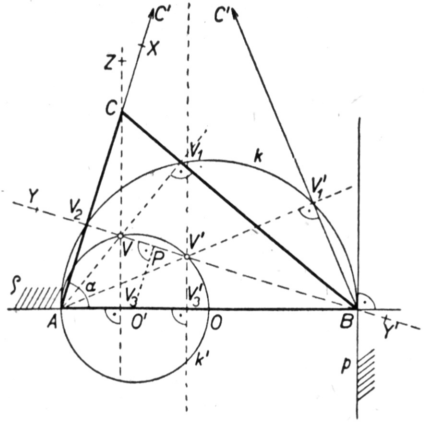
Řešení. *Rozbor.* Zaveďme označení jako v obr. 22, 23, kde V_1, V_2, V_3 jsou pořadě paty výšek na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC. Předpokládejme, že jsme sestrojili trojúhelník ABC, v němž je $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = c$ a v němž o průsečíku V výšek platí (obr. 22)

$$AV = VV_1 \,. \tag{1}$$

Označme $k \equiv (O, \frac{1}{2}c)$ kružnici sestrojenou nad úsečkou $AB = c$ jako průměrem, takže O je středem úsečky AB. Na kružnici k leží body V_1, V_2, což plyne z věty Thaletovy.

Uvažujme stejnolehlost o středu A a koeficientu stejnolehlosti $\lambda = \dfrac{AV}{AV_1} = \dfrac{1}{2}$. Tato stejnolehlost vzhledem k vztahu (1) převádí bod V_1 v bod V a kružnici k v kružnici $k' \equiv (O', \frac{1}{4}c)$ opsanou nad úsečkou AO jako průměrem; bod O' je tedy středem úsečky AO. Obraz V bodu V_1 v této stejnolehlosti vzhledem ke vztahu (1) leží nutně na kružnici k'. Přitom je V bodem přímky $BV_2 \perp AC$ a tedy společným bodem kružnice k' a přímky BV_2. Odtud plyne konstrukce.

Konstrukce (obr. 22). Sestrojme úsečku $AB = c$ a označme ϱ jednu z polorovin vyťatých přímkou AB. Označme O střed úsečky AB a nad úsečkou AO jako



Obr. 22

průměrem sestrojme kružnici $k' \equiv (O', \frac{1}{4}c)$. V polorovině ϱ sestrojme úhel $\sphericalangle BAX = \alpha$ a označme V_2 patu kolmice vedené bodem B k přímce AX. Společné body přímky BV_2 s kružnicí k' označme V, V' (pokud existují).

Další část konstrukce proveďme pro bod V (pro bod V' se provede obdobně). Na polopřímce AV sestrojme úsečku

$$AV_1 = 2AV\,.$$

Společný bod polopřímek AX, BV_1 označme C; potom trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy.

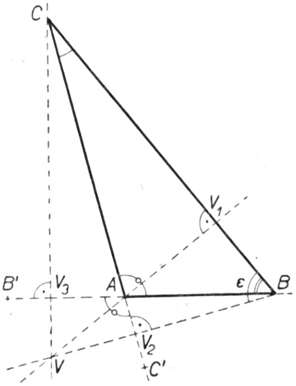
Důkaz. V trojúhelníku ABC (pokud existuje) je $BV_2 \perp AC$, $AV_1 \perp BC$, takže AV_1, BV_2 jsou jeho výšky a o jejich průsečíku V platí podle konstrukce $AV = VV_1$. Přitom, pokud C leží v polorovině ϱ, je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AB = c$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. **I.** Nejprve dokážeme: „Úloha nemá řešení, je-li v trojúhelníku ABC úhel $\alpha \geqq 90°$, tj. má-li úloha řešení, musí být úhel α nutně ostrý.“ Rozeznávejme dva případy:

Případ [**1**]. Nechť je $\alpha = 90°$. V takovém trojúhelníku je $V \equiv A$ a požadavek (1) nelze splnit.

Případ [**2**] (obr. 23). Nechť je $180° > \alpha > 90°$. Potom jsou úhly $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ trojúhelníka ABC ostré. Proto pata V_1 kolmice vedené bodem A k přímce BC padne dovnitř úsečky BC [viz příklad 17 na str. 112 učebnice Geometrie pro 7. ročník, vyd. z r. 1955; bod V_1 musí totiž padnout dovnitř každé z obou polopřímek BC, CB]. Proto přímka AV_1 prochází úhlem $\sphericalangle BAC$ a úhlem $\sphericalangle B'AC'$ k němu vrcholovým. Protože je $\sphericalangle A$ trojúhelníka ABC tupý, padne pata B_2 kolmice vedené bodem B k přímce CA na polopřímku opačnou k polopřímce AC, takže bod A leží uvnitř úsečky CV_2. Z trojúhelníka BCV_2 plyne, že úhel

$\sphericalangle B = \varepsilon$ v tomto trojúhelníku je ostrý, takže součet úhlů $\sphericalangle AV_1B = 90°$, ε je menší než 180°; podle Euklidova axiómu mají polopřímky V_1A, BV_2 spo-



Obr. 23

lečný bod V. Ten však nutně leží v úhlu $\sphericalangle B'AC'$, neboť úsečky AV_1, BV_2 nemohou mít společný bod (jsou odděleny přímkou AB); bod A odděluje tedy body V, V_1 a bod V nemůže být středem úsečky AV_1.

Tím je důkaz proveden.

II. V dalším proto předpokládáme, že úhel α je ostrý, takže polopřímka $BV_2 \perp AX$ až na bod B padne dovnitř poloroviny ϱ. Nejprve rozhodneme o existenci bodů V, V'. Platí: Přímka BV_2 je a) sečnou, b) tečnou, c) nesečnou kružnice k' podle toho, zda platí (obr. 22)

$$\text{a) } O'P < \tfrac{1}{4}c, \quad \text{b) } O'P = \tfrac{1}{4}c, \quad \text{c) } O'P > \tfrac{1}{4}c\,, \tag{2}$$

kde P je pata kolmice vedené bodem O' k přímce BV_2 [známá věta o vzájemné poloze přímky a kružnice; viz učebnice Geometrie pro 8. ročník, vydání z r. 1958, věta 6, str. 44]; bod P s polopřímkou BV_2 leží zřejmě uvnitř poloroviny ϱ. Ze stejnolehlosti trojúhelníků $BO'P$, BAV_2 (koeficient stejnolehlosti je $\frac{3}{4}$) podle středu B plyne, že $O'P = \frac{3}{4}AV_2 = \frac{3}{4}\,c\,.\cos\alpha$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka ABV_2 o přeponě $AB = c$; po dosazení do (2) dostaneme pořadě podmínky

$$\cos\alpha \lesseqqgtr \tfrac{1}{3}$$

neboli pro ostrý úhel α dostáváme pořadě podmínky

$$\alpha \gtreqqless \varepsilon\,,$$

kde ostrý úhel ε je dán vztahem

$$\cos\varepsilon = \tfrac{1}{3} \tag{3}$$

(platí $65°40' < \varepsilon < 65°50'$).

V případě $\alpha > \varepsilon$ existují body $V \not\equiv V'$, v případě $\alpha = \varepsilon$ existuje jediný bod V společný přímce BV_2 a kružnici k'. Přímky BV_2, AV_1 jsou různoběžky o průsečíku V; jsou tedy i přímky $AV_2 \perp BV_2$, $BV_1 \perp AV_1$ různoběžky o společném bodě C [viz větu 6 v učebnici Geometrie pro 7. ročník, vydání z r. 1955, str. 134]. Bod C tedy existuje a leží zřejmě uvnitř poloroviny ϱ [to plyne z Euklidova axiómu].

Závěr. Úloha má při zvoleném umístění úsečky AB a úhlu α dvě řešení (viz trojúhelníky ABC, ABC' na obr. 22), jestliže je $\alpha > \varepsilon$; má řešení jediné, jestliže je $\alpha = \varepsilon$, jinak nemá řešení. Přitom ε je ostrý úhel daný vztahem (3).

4. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí

$$\frac{1}{\sqrt{x} + p} + \frac{1}{\sqrt{x} - p} = \frac{x + p^2}{x - p^2}, \tag{1}$$

kde p je dané reálné číslo.

Řešení. Buď x reálné číslo, které splňuje rovnici (1); tu platí postupně

$$\frac{\sqrt{x} - p + \sqrt{x} + p}{(\sqrt{x} + p)(\sqrt{x} - p)} = \frac{x + p^2}{x - p^2},$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + p)(\sqrt{x} - p)} = \frac{x + p^2}{(\sqrt{x} - p)(\sqrt{x} + p)}. \tag{1'}$$

Znásobíme-li obě strany této rovnice číslem $(\sqrt{x} - p) \,.\, (\sqrt{x} + p)$, dostaneme postupně rovnice

$$2\sqrt{x} = x + p^2, \tag{2}$$

$$x - 2\sqrt{x} + p^2 = 0.$$

Položme

$$\sqrt{x} = y \text{ neboli } y^2 = x; \tag{3}$$

dostaneme tak rovnici

$$y^2 - 2y + p^2 = 0$$

o kořenech

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{1 - p^2}. \tag{4}$$

Protože $y = \sqrt{x}$, musí být čísla y_1, y_2 nezáporná, tedy jistě reálná. Proto musí být především $1 - p^2 \geqq 0$, jinak by číslo $\sqrt{1 - p^2}$ nebylo reálné. Ze vztahu $1 - p^2 \geqq 0$ neboli $(1 - p)(1 + p) \geqq 0$ plyne, že o číslu p platí

$$-1 \leqq p \leqq 1. \tag{5}$$

Je tedy za předpokladu (5)

$$y_1 > 0. \tag{6}$$

Protože je nutně $y_2 \geqq 0$, musí vzhledem ke (4) platit $1 - \sqrt{1 - p^2} \geqq 0$ neboli $1 \geqq \sqrt{1 - p^2}$; obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla a proto i o jejich druhých mocninách musí platit $1 \geqq 1 - p^2$ neboli $p^2 \geqq 0$; to je vzhledem k (5) splněno. Platí-li tedy (5), je $y_2 \geqq 0$.

Podle (3) příslušejí k číslům y_1, y_2 podle vztahu (3) pořadě čísla $x_1 = y_1^2$, $x_2 = y_2^2$ neboli

$$x_1 = (1 + \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}, \tag{7}$$

$$x_2 = (1 - \sqrt{1 - p^2})^2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}. \tag{8}$$

Jestliže rovnice (1) má řešení, mohou to být jen čísla x_1, x_2.

Aby tato čísla splňovala rovnici (1), musí mít především tyto vlastnosti:

Čísla $\sqrt{x} + p$, $\sqrt{x} - p$, $x - p^2 = (\sqrt{x} - p)(\sqrt{x} + p)$ pro $x = x_1$, $x = x_2$ musí být různá od nuly; jinak by některý ze zlomků v rovnici (1) neměl smysl. Zřejmě stačí požadovat, aby bylo $x - p^2 \neq 0$ a dále $x \geqq 0$.

Podle (7), (8) je

$$x - p^2 = 2(1 - p^2 + \varepsilon\sqrt{1 - p^2}),$$

kde $\varepsilon = 1$ pro x_1 a $\varepsilon = -1$ pro x_2. Dále platí

$$x - p^2 = 2\sqrt{1 - p^2}(\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon) . \tag{9}$$

Protože toto číslo musí být různé od nuly, musí být každý z činitelů na pravé straně různý od nuly. Je-li však $\sqrt{1 - p^2} = 0$, je $1 - p^2 = 0$ neboli $(1 - p)(1 + p) = 0$, tj. buď $p = 1$ nebo $p = -1$. Proto vzhledem k (5) musí o čísle p platit

$$-1 < p < 1 . \tag{10}$$

Rovněž druhý činitel na pravé straně vztahu (9) musí být různý od nuly. Rovnost

$$\sqrt{1 - p^2} + \varepsilon = 0$$

však nenastane pro $\varepsilon = 1$, neboť je $\sqrt{1 - p^2} \geqq 0$. Pro $\varepsilon = -1$ máme pak rovnici

$$\sqrt{1 - p^2} - 1 = 0$$

neboli postupně

$$\sqrt{1 - p^2} = 1\,,$$
$$1 - p^2 = 1\,,$$
$$p = 0\,.$$

Skutečně pro $p = 0$ je $x_2 = 0$ a jmenovatelé v (1) jsou rovny nule.

Čísla x_1, x_2 mohou být kořeny rovnice (1) pro všechna čísla p ze vztahů (10) s výjimkou čísla x_2, které se dostane pro $p = 0$. To ovšem platí za předpokladu, že je $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, o čemž se musíme ještě přesvědčit:

a) Protože nutně platí vztah (10), je $2 - p^2 > 0$ a protože je $2\sqrt{1 - p^2} \geqq 0$, je zřejmě $x_1 > 0$.

b) Čísla $a = 2 - p^2$, $b = 2\sqrt{1 - p^2}$ jsou nezáporná (první je dokonce kladné); rozhodněme, které je větší. Platí věta **V**: „Jsou-li a, b nezáporná čísla, pak ze vztahu $a \geqq b$ plyne $a^2 \geqq b^2$ a obráceně.“

Platí

$$(2 - p^2)^2 = 4 - 4p^2 + p^4, \quad (2\sqrt{1 - p^2})^2 = 4 - 4p^2,$$

takže je

$$a^2 - b^2 = p^4\,.$$

Protože je $p^4 \geqq 0$, je $a^2 \geqq b^2$ a tím $a \geqq b$; je tedy $x_2 \geqq 0$.

Nyní provedeme zkoušku, že čísla x_1, x_2 (za předpokladů, o nichž jsme mluvili) jsou kořeny rovnice (1). Stačí, když se omezíme na porovnání čitatelů v rovnici

(1'), neboť jsme zjistili, že jmenovatelé v (1') jsou si rovni a různí od nuly. Dokážeme tedy, že platí $2\sqrt{x} = x + p^2$ pro $x = x_1$ a $x = x_2$. Víme však, že je $x_1 > 0$, $x_2 \geqq 0$; proto čísla $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $x_1 + p^2$, $x_2 + p^2$ jsou nezáporná čísla a pro vzájemné porovnání užijeme věty **V** (ovšem pro případ rovnosti), tj. porovnáme druhé mocniny těchto čísel, tj. čísla $4x$, $(x + p^2)^2$. Pro stručnost pišme

$$x = 2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2},$$

kde pro $\varepsilon = 1$ dostaneme x_1 a pro $\varepsilon = -1$ dostaneme x_2. Je:

$$(x + p^2)^2 = (2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2})^2 =$$
$$= 4(2 - p^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 - p^2}),$$
$$4x = 4(2 - p^2 + \varepsilon\sqrt{1 - p^2}),$$

čímž je zkouška provedena. *Výsledek* je přehledně patrný z tabulky:

Číslo p je v intervalu	Řešení rovnice (1)
$p \leqq -1$	nemá řešení
$-1 < p < 0$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}$, $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$
$p = 0$	$x_1 = 4$
$0 < p < 1$	$x_1 = 2 - p^2 + 2\sqrt{1 - p^2}$, $x_2 = 2 - p^2 - 2\sqrt{1 - p^2}$
$1 \leqq p$	nemá řešení

5. Jsou dány dvě různé přímky $a \parallel b$; na přímce a je dán bod A, na přímce b bod B.

Sestrojte všechny kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv \equiv (S_2, r_2)$, které mají tyto vlastnosti:

(1) Kružnice k_1 se dotýká přímky a v bodě A, kružnice k_2 se dotýká přímky b v bodě B.

(2) Obě kružnice k_1, k_2 se navzájem dotýkají.

(3) Platí $r_1 = 2r_2$.

Řešení. V dalším podáváme stručné řešení úlohy; zevrubněji provedeme jen poslední možnost označenou **[2b]** (δ). Viz obr. 24—34.

Vzdálenost přímek $a \parallel b$ označme $v > 0$, dále $AB = d > 0$; je tedy $v \leqq d$. Poloroviny aB, bA označme pořadě ϱ, σ a ϱ', σ' poloroviny k nim opačné. Kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ musí ležet v jedné z polorovin ϱ, ϱ', kružnice $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ musí ležet v jedné z polorovin σ, σ'. Kružnice k_1, k_2 mají dotyk v bodě T, v němž mají společnou tečnu $t \perp S_1S_2$ (jistě je $S_1 \not\equiv \not\equiv S_2$); bod T leží na přímce S_1S_2.

Kombinujeme každou z polorovin ϱ, ϱ' s každou z polorovin σ, σ', přičemž hned vyloučíme kombinaci (ϱ', σ'), neboť poloroviny ϱ', σ' nemají společný bod; dostaneme tři dvojice

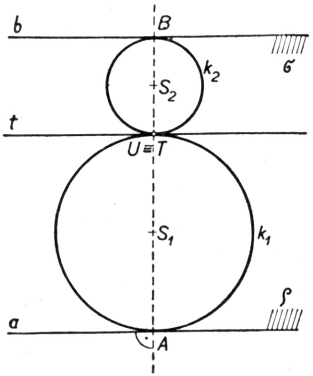
$$(\varrho, \sigma), (\varrho, \sigma'), (\varrho', \sigma)\,. \tag{1}$$

K těmto kombinacím přistupuje ještě požadavek, aby kružnice k_1, k_2 měly dotyk vnější anebo vnitřní.

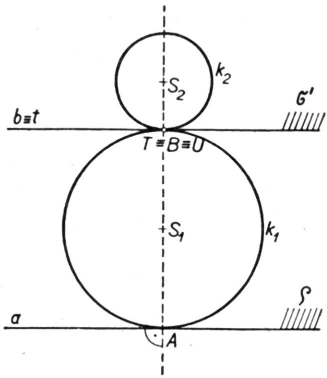
Ještě zaveďme toto označení: Nechť značí U, V pořadě vnitřní a vnější střed stejnolehlosti kružnic k_1, k_2; koeficienty těchto stejnolehlostí jsou pořadě $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. V dalším uvidíme, že jeden z bodů U, V lze sestrojit ihned; podstata konstrukce spočívá v určení druhého z obou bodů U, V.

Řešení úlohy rozdělíme na dvě části: [**1**] Je $v = d$, tj. $AB \perp a$. [**2**] Je $v < d$, tj. přímky AB, a jsou kosé.

Případ [**1**], kdy $v = d$, jen načrtneme. Body S_1, S_2 leží nutně na přímce AB, neboť přímky a, b jsou pořadě tečnami kružnic k_1, k_2; tím i bod T leží na přímce AB. Nyní uvažujme kombinace (1) a druh dotyku:

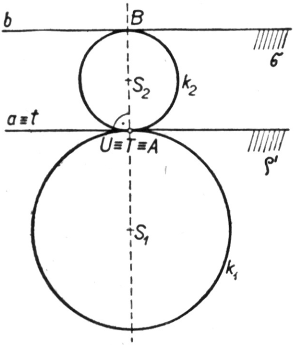


Obr. 24

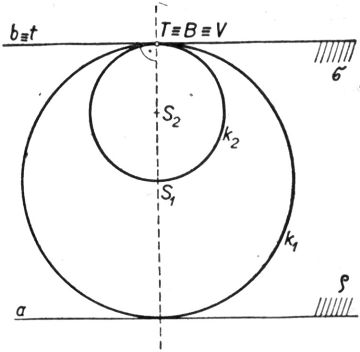


Obr. 25

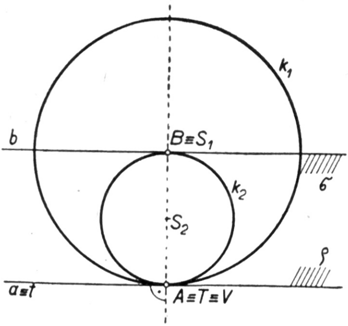
[**1a**] Nechť k_1, k_2 mají *vnější dotyk*, takže je $T \equiv U$. Pak každá z dvojic (1) vede k řešení. Viz obr. 24, kde $r_2 = \frac{1}{6}v$; dále viz obr. 25, kde $r_2 = \frac{1}{4}v$, a konečně viz obr. 26, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$.



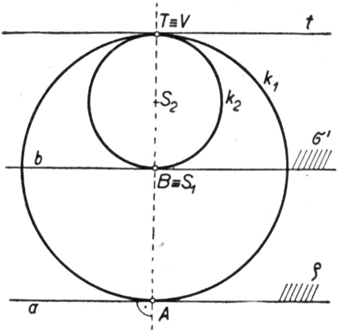
Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28



Obr. 29

[**1b**] Nechť k, k_2 mají *dotyk vnitřní*, takže je $T \equiv V$. Tu dvojice (ϱ', σ) nevede k řešení, neboť kružnice k_2 — až na bod T — musí ležet uvnitř kružnice k_1, která má větší poloměr. Dostáváme: a) řešení z obr. 27, kde $r_2 = \frac{1}{4}v$; b) řešení z obr. 28, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$; c) řešení z obr. 29, kde $r_2 = \frac{1}{2}v$.

Případ [**2**], kdy je $v < d$; označme $s \perp a$ přímku jdoucí bodem A. Ze stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 plynou vztahy

$$VS_2 = \tfrac{1}{2}VS_1\,, \quad US_2 = \tfrac{1}{2}US_1\,,$$

přičemž bod V leží na prodloužení úsečky S_1S_2 za bod S_2, kdežto bod U leží uvnitř úsečky S_1S_2. Nyní rozlišme možnosti podle druhu dotyku kružnic k_1, k_2.

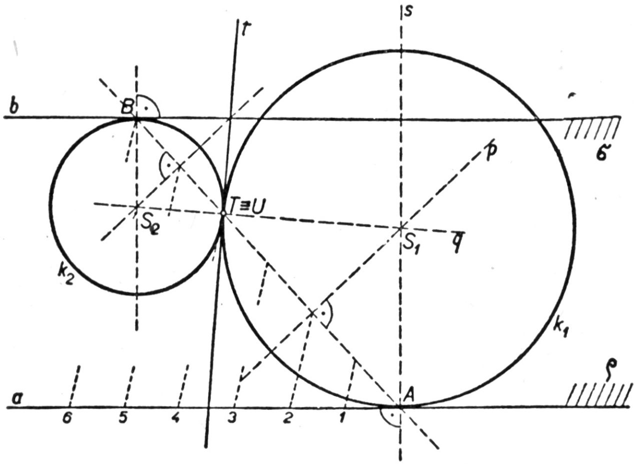
[**2a**] *Dotyk vnější*; je $T \equiv U$.

(α) Kombinace (ϱ, σ) — viz obr. 30. Nutně je $AS_1 \uparrow\downarrow BS_2$, přičemž přímka b s bodem B jsou obrazy přímky a s bodem A ve stejnolehlosti (T) o středu T a koeficientu $-\frac{1}{2}$. Odtud konstrukce:

Uvnitř úsečky AB sestrojme bod T tak, že je

$$\frac{BT}{AT} = \frac{1}{2}\,;$$

bod S_1, je společným bodem přímek s, p, kde p je osou úsečky AT. Sestrojme kružnici $k_1 \equiv (S_1, S_1A)$; kružnice k_2 je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti (T). Důkaz je snadný; bod T existuje a tím i jediná dvojice k_1, k_2 kružnic.



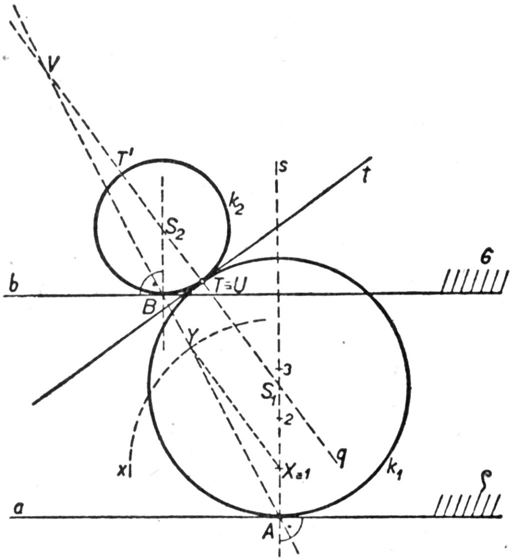
Obr. 30.

(β) Kombinace (ϱ, σ'), (ϱ', σ) znázorněné pořadě v obr. 31, 32. Nutně je $AS_1 \uparrow\uparrow BS_2$ a jedná se o stejnolehlost (V) o středu V a o koeficientu $\frac{1}{2}$. Buď T' obraz bodu T ve stejnolehlosti (V); odtud plynou vztahy

$$VT' = \tfrac{1}{2}VT, \qquad \tfrac{1}{2}S_1T = S_2T' = S_2T = r_2, \qquad \tfrac{1}{2}VA = VB,$$

takže T' je středem úsečky VT, tj. $VT' = 2r_2 = S_1A = r_1$, $VS_1 = 6r_2$. O stranách trojúhelníka AS_1V platí

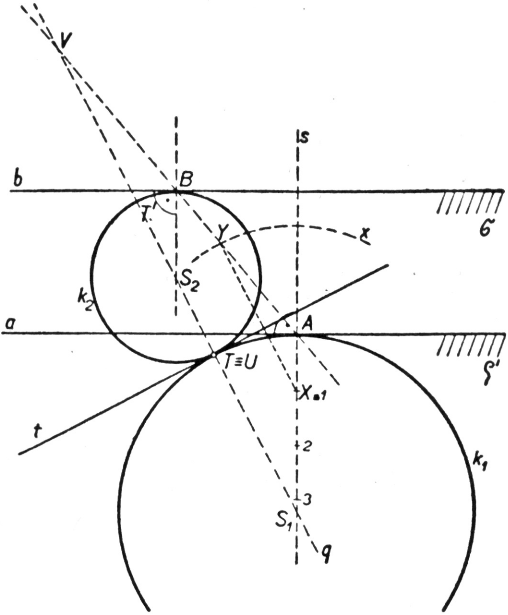
$$\frac{S_1A}{S_1V} = \frac{1}{3}\,.$$



Obr. 31

Odtud *konstrukce*: Na prodloužení úsečky AB za bod B určeme bod V tak, aby $BV = AB$, takže $VA = 2VB$. Na přímce s zvolme úsečku AX (viz obr. 31

v polorovině ϱ; dále obr. 32 v polorovině ϱ'). Podle věty Ssu o určenosti trojúhelníka sestrojme trojúhelník AXY, kde Y leží na polopřímce AB a platí $XY =$

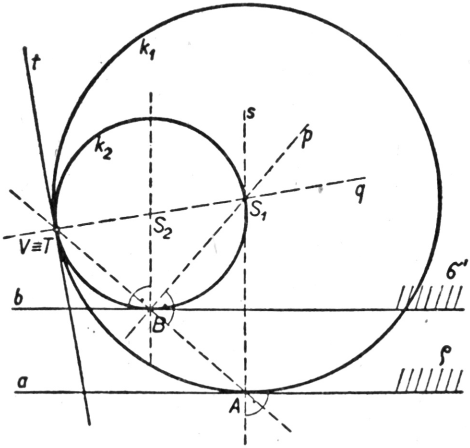


Obr. 32

$= 3AX$; ke konstrukci užijeme kružnice $x \equiv$ $\equiv (X, 3AX)$. Bodem V veďme přímku $q \parallel XY$ a označme S_1 společný bod přímek q, s. Ke kružnici

$k_1 \equiv (S_1, S_1A)$ sestrojme obraz k_2 ve stejnohlehosti (V) o středu V a o koeficientu $\frac{1}{2}$. Důkaz konstrukce je snadný; úloha má zřejmě jediné řešení.

[2b] *Dotyk vnitřní*, takže je $T \equiv V$; kombinace (ϱ', σ) zřejmě odpadá.



Obr. 33

(γ) Kombinace (ϱ, σ') je znázorněna v obr. 33. Nutně je $AS_1 \uparrow\uparrow BS_2$, $TB = \frac{1}{2}TA$. Odtud *konstrukce*: Na prodloužení úsečky AB za bod B sestrojme úsečku $BT = BA$ a označme S_1 společný bod různoběžek s, p, kde p je osou úsečky AT. Ve stejnolehlosti (V)

o středu V a o koeficientu $\frac{1}{2}$ sestrojme obraz k_2 kružnice $k_1 \equiv (S_1, S_1A)$; kružnice k_2 prochází zřejmě bodem S_1. Úloha má jediné řešení.

(δ) Kombinace (ϱ, σ) je znázorněna v obr. 34. *Rozbor*. Nutně je $AS_1 \uparrow\downarrow BS_2$ a vnitřní střed U stejnolehlosti (U) kružnic k_1, k_2 leží uvnitř úsečky AB tak, že platí

$$UB = \tfrac{1}{2}UA\,.$$

Protože je $r_1 = 2r_2$ a kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk, leží bod S_1 na kružnici k_2. Buď $T' \equiv S_1$ obrazem bodu $T \equiv V$ ve stejnolehlosti (U) s koeficientem $-\frac{1}{2}$, takže je $S_1U = \frac{1}{3}S_1T = \frac{2}{3}r_2$, $S_1A = 2r_2$. Je tedy

$$\frac{S_1U}{S_1A} = \frac{1}{3}\,. \tag{2}$$

Buď X patou kolmice s vedené bodem A k přímce b, takže je $AX = v$. Ve stejnolehlosti o středu A nechť bodu S_1 přísluší bod X a bodu U bod Y polopřímky AB, takže podle (2) je

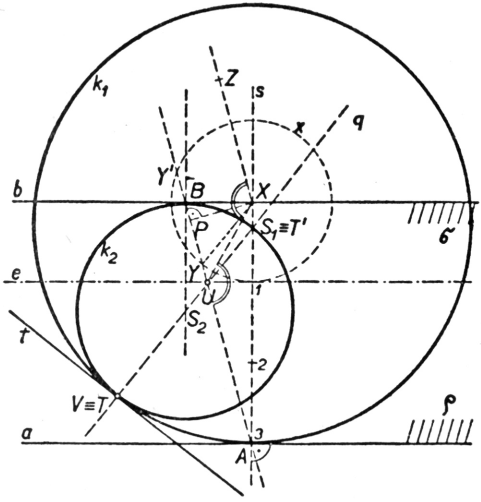
$$\frac{XY}{AX} = \frac{S_1U}{S_1A} = \frac{1}{3} \text{ neboli } XY = \frac{1}{3}AX$$

a tedy

$$XY = \frac{1}{3}v, \quad AX = v\,. \tag{3}$$

Odtud *konstrukce* (obr. 34): Uvnitř úsečky AB sestrojme úsečku $BU = \frac{1}{2}UA = \frac{1}{3}AB$ a opišme kružnici $x \equiv (X, \frac{1}{3}v)$; označme Y jeden ze společných bodů kružnice x a polopřímky AB (pokud existuje).

Bodem U veďme přímku $q \parallel XY$ a označme S_1 společný bod přímek q, s. Označme k_2 obraz kružnice $k_1 \equiv (S_1, S_1A)$ ve stejnolehlosti (U) s koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pak k_1, k_2 je dvojice hledaných kružnic.



Obr. 34

Důkaz. Podle provedené konstrukce platí (3) neboli $S_1U = \frac{1}{3}r_1$ (je $r_1 = S_1A$), $S_2U = \frac{1}{2}S_1U = \frac{1}{6}r_1$, $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. Bod U leží uvnitř úsečky S_1S_2 a tedy $S_1S_2 = S_1U + S_2U = \frac{1}{2}r_1$, takže k_2 prochází bodem S_1. Označme

$T \not\equiv S_1$ společný bod polopřímky S_1S_2 s kružnicí k_1; je $S_1T = r_1$ a protože je $S_1S_2 = \frac{1}{2}r_1$, je S_2 středem úsečky TS_1 a kružnice k_1, k_2 mají vskutku v bodě T vnitřní dotyk. Ve stejnolehlosti (U) je b s bodem B obrazem přímky a s bodem A; proto se kružnice k_2 dotýká přímky b v bodě B.

Diskuse. Nejprve vypočteme velikost výšky $y = XP$ v trojúhelníku ABX, kde $\sphericalangle X = 90°$. Je $\triangle XBP \sim$ $\sim \triangle ABX$ (uu) a tedy

$$\frac{XP}{XB} = \frac{AX}{AB}$$

neboli

$$\frac{y}{\sqrt{d^2 - v^2}} = \frac{v}{d}$$

a tedy

$$y = \frac{v}{d}\sqrt{d^2 - v^2}\,. \qquad (4')$$

Nyní rozhodněme, kdy je přímka AB sečnou, tečnou nebo nesečnou kružnice x, jejíž poloměr je $\frac{1}{3}v$; to nastane, jak známo, jestliže platí pořadě vztah

$$y < \tfrac{1}{3}v,\ y = \tfrac{1}{3}v,\ y > \tfrac{1}{3}v\,. \qquad (4)$$

Užitím (4′) lze tyto podmínky uvést na tvar

$$d \lesseqqgtr \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\,v\,.$$

Ještě dokážeme, že bod S_1 padne skutečně dovnitř polopřímky AX (jinak by kružnice k_1 neexistovala). Označme $e \parallel a$ přímku vedenou bodem U (přímka e

leží uvnitř pásu rovnoběžek a, b, takže má od přímky b vzdálenost $\frac{1}{3}v$); ta je tečnou kružnice x. Proto bod Y padne dovnitř poloroviny eX, tj. dovnitř polopřímky UB. Buďte $\sphericalangle XUA$, $\sphericalangle UXZ$ dva shodné střídavé úhly, tj. platí $XZ \uparrow\downarrow UA$; bod Y leží zřejmě uvnitř úhlu $\sphericalangle UXZ$. Proto bod S_1 (kde $US_1 \uparrow\downarrow XY$) padne dovnitř úhlu $\sphericalangle XUA$ a tedy dovnitř úsečky AX, čímž je důkaz proveden.

Závěr. Je-li $AB \perp a$, lze sestrojit šest dvojic kružnic. Není-li $AB \perp a$, existují takové dvojice alespoň čtyři; k nim se řadí další dvě, jedna nebo žádná dvojice podle toho, zda platí první, druhý či třetí vztah (4).

6. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq \sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Riešenie. Nech reálne číslo x je riešením nerovnosti (1). Potom musí platiť $1 - x > 0$, $1 + x > 0$, t. j.

$$-1 < x < 1\,, \tag{2}$$

inak by zlomky na ľavej strane vzťahu (1) nemali zmysel. Upravme ľavú stranu nerovnosti (1). Dostaneme

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\,.\sqrt{1+x}} \geqq \sqrt{2}\,. \tag{1'}$$

Vzhľadom na požiadavku (2) je menovateľ na ľavej strane (1′) kladné číslo. Pretože na pravej strane (1′) je kladné číslo, musí byť čitateľ zlomku na ľavej strane (1′) tiež kladný, t. j. musí platiť $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0$, čiže $\sqrt{1+x} > \sqrt{1-x}$. Pretože obe čísla v poslednej nerovnosti sú kladné, musí o ich druhých mocninách platiť $1 + x > 1 - x$, čiže $x > 0$. Ak pripojíme k tomu požiadavku (2), musí o čísle x platiť

$$0 < x < 1 . \tag{3}$$

Znásobme teraz obe strany nerovnosti (1′) číslom $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} > 0$; dostávame

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geqq \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} . \tag{4}$$

Vzhľadom na požiadavky (3) sú obe strany tejto nerovnosti kladné čísla; preto po umocnení oboch strán vzťahu (4) na druhú dostaneme postupne

$$1 + x + 1 - x - 2\sqrt{1-x^2} \geqq 2(1 - x^2) ,$$

$$x^2 \geqq \sqrt{1-x^2} .$$

Obe strany tejto nerovnosti sú vzhľadom na (3) kladné čísla. Umocnením na druhú postupne dostávame

$$x^4 \geqq 1 - x^2 ,$$

$$x^4 + x^2 - 1 \geqq 0 . \tag{5}$$

Trojčlen $y^2 + y - 1$ možno rozložiť na súčin

$$[y + \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)]\,[y - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)];$$

nerovnosť (5) možno teda napísať v tvare

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)]\,[x^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)] \geqq 0 .$$

Prvý činiteľ ľavej strany je kladný; preto druhý činiteľ musí byť nezáporný, t. j. platí nevyhnutne

$$x^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \geqq 0\,. \tag{6}$$

Pretože je $\sqrt{5} - 1 > 0$, je číslo

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} \tag{7'}$$

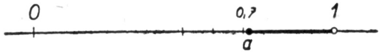
kladné. Nerovnosť (6) možno písať v tvare

$$(x + a)(x - a) \geqq 0\,. \tag{7}$$

Vzhľadom na požiadavku (3) je prvý činiteľ na ľavej strane vzťahu (7) kladný; preto musí byť $x - a \geqq 0$, čiže $x \geqq a$. Ak pripojíme k tomu požiadavku (3), dostaneme, že o čísle x nevyhnutne platí

$$a \leqq x < 1\,, \tag{8}$$

kde číslo a je dané vzťahom (7').



Obr. 35

Ešte ide o to, či je skutočne $a < 1$, t. j. či je $a^2 < 1$. Tu platí $a^2 - 1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - 1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 3) < 0$, t. j. skutočne je $a^2 < 1$ a teda $a < 1$. Interval (8) teda existuje.

Číslo x zo vzťahu (8) splňuje požiadavky (2), (3). Pri našich úpravách sme všade prihliadali k ekvivalencii; preto všetky čísla x z intervalu (8) sú riešenia nerovnosti (1) a neexistuje žiadne ďalšie (pozri obr. 35).

1. V oboru reálných čísel řešte nerovnost

$$\frac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x} \leqq 1; \tag{1}$$

dále určete všechna x, pro která nastává rovnost.

Řešení. Nechť je x řešením nerovnosti (1); nutně je

$$x \neq 0\,. \tag{2}$$

Aby odmocnina $\sqrt{1-2x^2}$ měla smysl, je dále nutně $1-2x^2 \geqq 0$ neboli

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \text{kde}\ \frac{\sqrt{2}}{2} < 1\,; \tag{3}$$

pro tato x má odmocnina skutečně smysl.
Platí tyto ekvivalentní úpravy nerovnosti (1):

$$\frac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x} - 1 \leqq 0\,,$$

$$\frac{1-x-\sqrt{1-2x^2}}{x} \leqq 0\,,$$

$$\frac{\sqrt{1-2x^2}+x-1}{x} \geqq 0\,. \tag{4}$$

Jsou dvě možnosti: [**1**] Je $x > 0$; [**2**] je $x < 0$.

Případ [**1**]. Nechť je [viz (3)] .

$$0 < x \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5}$$

Ze (4) plyne, že nutně je

$$\sqrt{1-2x^2} \geqq 1-x\,.$$

Poněvadž je $1 - x \geqq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, plyne odtud postupně

$$
\begin{aligned}
1 - 2x^2 &\geqq 1 - 2x + x^2\,, \\
0 &\geqq x(3x - 2)\,, \\
0 &\geqq 3x - 2\,, \\
\tfrac{2}{3} &\geqq x\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Protože $\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0{,}7 > \frac{2}{3}$, plyne z (5), (6), že o čísle x nutně platí

$$0 < x \leqq \tfrac{2}{3}\,. \tag{7}$$

V tomto případě nastane v (1) rovnost pro $x = \frac{2}{3}$.

Případ [**2**]. Nechť je [viz (3)]

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq x < 0\,; \tag{8}$$

potom ze (4) plyne

$$\sqrt{1 - 2x^2} \leqq 1 - x\,,$$

kde $1 - x > 0$. Odtud dostaneme postupně

$$
\begin{aligned}
1 - 2x^2 &\leqq 1 - 2x + x^2 \\
0 &\leqq x(3x - 2)\,, \\
0 &\geqq 3x - 2 \\
\tfrac{2}{3} &\geqq x\,.
\end{aligned}
$$

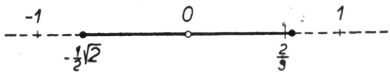
Toto je splněno pro každé x z (8). V tomto případě [**2**] nemůže v (1) nastat rovnost.

Čísla x daná vztahem (7) nebo (8) jsou skutečně řešením dané nerovnosti.

Závěr (obr. 36). Všechna řešení x nerovnosti (1) jsou dána intervaly

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq x < 0, \quad 0 < x \leqq \frac{2}{3}.$$

Rovnost v (1) nastane právě tehdy, je-li $x = \frac{2}{3}$.



Obr. 36

2. Do daného obdélníka $ABCD$, kde $AB > BC$, je vepsán osmiúhelník $JKLMNOPQ$, jak je naznačeno na obrázku 37; osmiúhelník vznikl ze dvou obdélníků $JKNO$, $JMNQ$ o společné úhlopříčce JN, přičemž bod J je středem úsečky AD a N středem úsečky BC. Vypočtěte obsah osmiúhelníka pomocí rozměrů $a = AB$, $b = BC$ daného obdélníka.

Řešení. Konstrukce osmiúhelníka je patrná z obr. 37. Při označení z obr. 37 položme $LT = x$, $LS = y$, $KT = t$. Obsah p obdélníka $JKNO$ je $p = JN \,.\, JD$ neboli

$$p = \tfrac{1}{2}ab\,.$$

Obsah r kosočtverce $JLNP$ je

$$r = ay\,,$$

takže obsah s osmiúhelníka je $s = 2p - r$ neboli

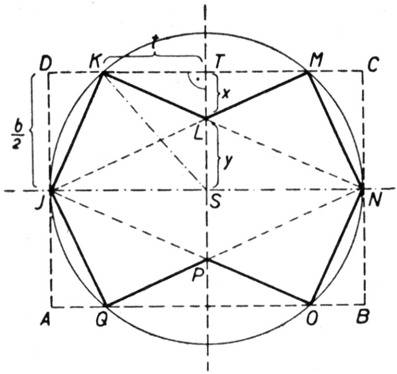
$$s = a(b - y)\,. \tag{1}$$

Vypočítáme y. V trojúhelníku SKT je $\sphericalangle T = 90°$, $SK = \frac{1}{2}a$; podle Pythagorovy věty dostaneme

$$t^2 = SK^2 - ST^2$$

neboli

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\,. \tag{2}$$



Obr. 37

Ze stejnolehlosti o středu L trojúhelníků LNS, LKT plyne

$$\frac{TL}{TK} = \frac{SL}{SN}$$

neboli

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\frac{1}{2}a}\,.$$

Po dosazení ze (2) a snadné úpravě obdržíme

$$x = \frac{2yt}{a} = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

neboli

$$x = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a} . \tag{3}$$

Vedle toho platí $TL + LS = \frac{1}{2}b$ neboli

$$x + y = \frac{b}{2} ;$$

dosadíme-li sem ze vztahu (3), dostáváme postupně

$$y\left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) = \frac{b}{2} ,$$

$$y \, . \, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{2} ,$$

$$y = \frac{ab}{2\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)} .$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$s = a\left(b - \frac{ab}{2\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)}\right)$$

neboli

$$s = \frac{ab\left(a + 2\sqrt{a^2 - b^2}\right)}{2\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)} ,$$

což lze popřípadě násobením $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ v čitateli i jmenovateli upravit na tvar

$$s = \frac{a\left(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}\right)}{2b} .$$

Tím je řešení provedeno.

3. Dokážte, že pre každú trojicu kladných čísel a, b, c platí vzťah

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,. \tag{1}$$

Nájdite všetky trojice, pre ktoré nastáva rovnosť.

Riešenie. Daná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 \geqq 0\,;$$

jej ľavú stranu označme L. Postupne platí:

$$L = (a + b + c)\,.\,\frac{bc + ca + ab}{abc} - 9 =$$

$$= \frac{a^2c + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 + 3abc - 9abc}{abc} =$$

$$= \frac{a^2c + ac^2 + b^2a + ba^2 + c^2b + cb^2 - 6abc}{abc} =$$

$$= \frac{a^2c - 2abc + b^2c + b^2a - 2abc + ac^2 + c^2b - 2abc + ba^2}{abc} =$$

$$= \frac{c(a^2 - 2ab + b^2) + a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ac + a^2)}{abc} =$$

$$= \frac{c(a - b)^2 + a(b - c)^2 + b(c - a)^2}{abc}\,.$$

Je teda

$$L = \frac{a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2}{abc}\,, \tag{2}$$

kde a, b, c sú kladné čísla. Menovateľ abc zlomku je kladné číslo. Čitateľ zlomku je súčet troch nezáporných čísel, lebo napr. $a(b - c)^2$ je súčin čísla $a > 0$

a čísla $(b - c)^2 \geqq 0$. Preto je čitateľ nezáporný a tým aj zlomok (2). Tým je platnosť vzťahu (1) dokázaná.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane práve vtedy, keď sú tri nezáporné sčítance v čitateli zlomku (2) všetky rovné nule, t. j. keď platí

$$a(b - c)^2 = 0, \qquad b(c - a)^2 = 0, \qquad c(a - b)^2 = 0 .$$

Pretože je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, je nevyhnutne

$$b - c = 0, \quad c - a = 0, \quad a - b = 0 ,$$

čiže

$$a = b = c .$$

Rovnosť vo vzťahu (1) skutočne nastane, ak trojica má tvar (a, a, a), kde a je ľubovoľné kladné číslo. Tým je riešenie ukončené.

4. Daná je úsečka AB veľkosti 1. Označme P obsah spoločnej časti dvoch kruhov opísaných okolo bodov A, B s polomerom $r = 1$.

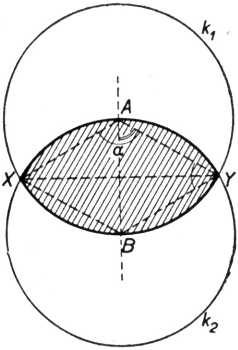
Vyjadrite obsah P v percentách (s presnosťou na jednotky) vzhľadom na obsah jedneho z uvažovaných kruhov ako základ.

Riešenie (pozri obr. 38). Označme X, Y priesečníky kružníc $(A, 1)$, $(B, 1)$, takže ABX je rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. Jeho obsah je

$$t = \tfrac{1}{4}\sqrt{3} . \tag{1}$$

Preto je $\alpha \equiv \sphericalangle XAY = 120° = \frac{1}{3} . 360°$. Obsah p úseče s tetivou XY a oblúkom XBY je (obsah q jedneho z oboch kruhov je $q = \pi$)

$$p = \tfrac{1}{3}\pi - t\,,$$



Obr. 38

lebo trojuholníky ABX, AXY majú rovnaké obsahy. Po dosadení zo vzťahu (1) máme

$$p = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,.$$

Obsah P spoločnej časti oboch kruhov je $2p$, čiže

$$P = \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Pomer $\frac{P}{q}$ násobený číslom 100 udáva hľadaný počet x percent, t. j. platí

$$x = 100\left(\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) : \pi\,,$$

čiže

$$x = 100\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right);$$

pritom je

$$\tfrac{2}{3} = 0{,}\bar{6}; \qquad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733; \qquad 3{,}141 < \pi < 3{,}142\,.$$

Číslo $y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ máme určiť na dve desatinné miesta presne. Platí

$$a = 0{,}666 - \frac{1{,}733}{2 . 3{,}141} < y < 0{,}667 - \frac{1{,}732}{2 . 3{,}142} = b\,.$$

Vypočítame približné hodnoty oboch zlomkov z predošlých výrazov:

$$\begin{array}{lll}
1{,}733 : 6{,}282 < 0{,}276 & \qquad & 1732 : 6284 > 0{,}275 \\
\underline{1{,}2564} & & \underline{12568} \\
\quad 47660 & & 47520 \\
\quad \underline{43974} & & \underline{43988} \\
\qquad 36860 & & \quad 35320
\end{array}$$

Platí teda

$$0{,}666 - 0{,}276 < a\,,$$
$$b < 0{,}667 - 0{,}275\,,$$

čiže

$$0{,}390 < a\,,$$
$$b < 0{,}392\,.$$

Je teda

$$0{,}390 < a < y < b < 0{,}392;$$

čiže

$$0{,}390 < y < 0{,}392$$

a teda

$$39{,}0 < x < 39{,}2\,.$$

Odpoveď. Obsah P je asi 39 % obsahu kruhu s polomerom $r = 1$.

1. Máme v zásobě litrové láhve 14%ního, 11%ního a 9%ního roztoku kyseliny octové (dostatečný počet od každého druhu).

Kolik plných lahví každého z těchto roztoků bude třeba smísit, abychom dostali 30 litrů 12%ního roztoku, přičemž máme použít roztoků všech tří druhů. Udejte všechny možnosti.

Řešení. Předpokládejme, že úloha má řešení a že přirozená čísla x, y, z udávají pořadě počet lahví roztoku 14%ního, 11%ního a 9%ního, jichž při mísení užijeme. Láhve jsou litrové a obsahují tedy celkem $x + y + z$ litrů roztoku; tento součet je podle požadavku úlohy roven 30 litrům. Platí tedy

$$x + y + z = 30 . \qquad (1'')$$

Láhve s prvním roztokem obsahují $\frac{14}{100}x$ litrů kyseliny octové,

láhve s druhým roztokem obsahují $\frac{11}{100}y$ litrů kyseliny octové,

láhve s třetím roztokem obsahují $\frac{9}{100}z$ litrů kyseliny octové.

Vzniklá směs obsahuje celkem $\frac{12}{100} . 30$ litrů kyseliny octové.

Musí platit

$$\frac{14}{100}x + \frac{11}{100}y + \frac{9}{100}z = \frac{12}{100} \cdot 30 \qquad (2'')$$

neboli po znásobení obou stran této rovnice číslem 100

$$14x + 11y + 9z = 360\,.$$

Dostáváme dvě rovnice

$$x + y + z = 30\,, \tag{1}$$
$$14x + 11y + 9z = 360\,, \tag{2}$$

které musí přirozená čísla x, y, z splňovat. Nyní je naším úkolem najít všechny trojice x, y, z přirozených čísel, z nichž každé musí být menší než 30; dokonce každé z nich musí být menší než 29.

Vylučme z rovnic (1), (2) číslo z [obě strany rovnice (1) znásobme číslem -9 a přičtěme je k příslušným stranám rovnice (2)]; dostaneme

$$5x + 2y = 90$$

neboli

$$y = 45 - \tfrac{5}{2}x\,. \tag{3}$$

Odtud plyne, že x musí být sudé; položme proto

$$x = 2n\,,$$

kde n je přirozené číslo. Ze (3) a (1) po dosazení $x = 2n$ dostáváme celkem

$$x = 2n\,, \tag{1'}$$
$$y = 5(9 - n)\,, \tag{2'}$$
$$z = 3(n - 5)\,. \tag{3'}$$

Z (2′) vidíme, že $9 - n$ musí být přirozené číslo, tj. $9 - n > 0$ (jinak by y nebylo kladné číslo) a dále $9 - n < 6$ (jinak by y bylo větší než 29). Z obou nerovností plyne

$$3 < n < 9 . \qquad (4)$$

Ze (3′) vidíme, že musí být $n - 5 > 0$ a $n - 5 < 10$ (jinak by z bylo větší než 29). Z obou nerovností dostáváme

$$5 < n < 15 . \qquad (5)$$

Spojením (4) a (5) obdržíme požadavek, který nutně splňuje číslo n:

$$5 < n < 9 .$$

V úvahu tedy přicházejí jen čísla 6, 7, 8. Dosazujme za n do (1′), (2′), (3′) postupně čísla 6, 7, 8. Výsledky jsou v této tabulce:

n	6	7	8
x	12	14	16
y	15	10	5
z	3	6	9

Trojice čísel x, y, z z této tabulky skutečně splňuje rovnice (1), (2), jak se přesvědčíme dosazením; proto splňuje i výchozí rovnice (1″), (2″), neboť (1″), (1) je táž rovnice a (2″) vznikne z (2) násobením obou jejich stran číslem $\frac{1}{100}$.

Odpověď. Požadovanou směs obdržíme tak, že vezmeme pořadě

$$12, 15, 3 \text{ lahví}$$

nebo

$$14, 10, 6 \text{ lahví}$$

nebo

$$16, 5, 9 \text{ lahví}$$

jednotlivých druhů.

2. Daný je lichobežník $ABCD$, v ktorom je $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

Aký geometrický útvar vyplnia všetky body X roviny lichobežníka, o ktorých platia vzťahy

$$AX < BX < CX < DX\,. \qquad (1)$$

Urobte diskusiu vzhľadom na veľkosti uhlov $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

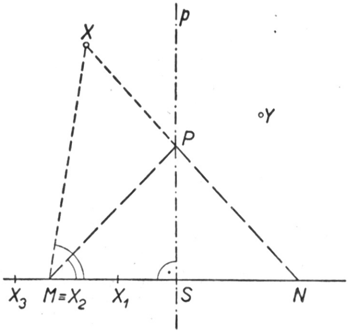
Riešenie. Najprv dokážeme dve pomocné vety **U**, **V**.

Veta **U**: „V rovine nech je daná úsečka MN so stredom S a s osou p. Množinou všetkých bodov v rovine, ktoré majú od bodu M menšiu vzdialenosť než od bodu N, je vnútro polroviny pM."

Dôkaz (obr. 39). Toto tvrdenie sa ľahko dokáže pre body priamky MN (všetky body požadovanej vlastnosti na tejto priamke ležia vnútri polpriamky

SM; pozri body X_1, X_2, X_3 v obr. 39). Nech teraz X je bod vnútri polroviny pM, ktorý neleží na priamke MN. Potom priamka p oddeľuje body N, X a vnútri úsečky NX leží bod P priamky p. Úsečky PM, PN sú súmerne združené podľa p a teda

$$MP = NP\,. \tag{2}$$



Obr. 39

O stranách trojuholníka MPX platí

$$MX < MP + PX$$

(súčet dvoch strán je väčší než tretia strana). Po dosadení z (2) dostaneme

$$MX < NP + PX\,,$$

čiže

$$MX < NX\,. \tag{3}$$

Ak je Y bod vnútri polroviny pN, potom sa rovnako dokáže vzťah

$$MY > NY . \tag{4}$$

Pre bod P osi p platí

$$MP = NP . \tag{5}$$

Vzťahmi (3), (4), (5) je veta **U** dokázaná, lebo sme tým vyčerpali všetky body roviny.

Ďalej dokážeme vetu **V** (pozri obr. 41—43): „Nech $ABCD$ je lichobežník, v ktorom AB je väčšia základňa, P_1, P_3 stredy a p_1, p_3 osi základní. Potom platí:

a) $p_1 \parallel p_3$ (pozri učebnicu Geometrie pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, príklad 7, str. 134).

b) Ak o uhloch α, β pri vrcholoch A, B lichobežníka platí:

[1] $\alpha = \beta$, potom je $p_1 \equiv p_3$;

[2] $\alpha < \beta$, potom bod P_3 a s ním priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1B;

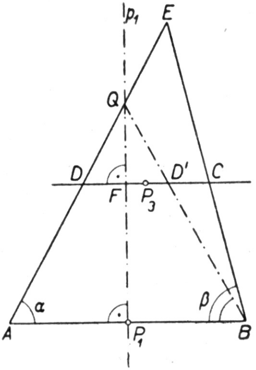
[3] $\alpha > \beta$, potom bod P_3 a s ním priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1A.

Dôkaz. Tvrdenie [1] vyplýva zo súmernosti lichobežníka $ABCD$ podľa p_1.

Dôkaz tvrdenia [2] (pozri obr. 40). V trojuholníku ABE platí

$$BE < AE , \tag{6}$$

lebo je $\alpha < \beta$ (proti väčšiemu uhlu trojuholníka ABE leží väčšia strana). Zo vzťahu (6) vyplýva podľa vety **U**, že bod E padne dovnútra polroviny p_1B; preto vnútri úsečky AE leží bod Q priamky p_1. Ak je D bodom úsečky QE, je tvrdenie [2] samozrejmé, lebo celá úsečka DC leží v polrovine p_1B. Nech D leží vnútri



Obr. 40

úsečky AQ. Označme $D' \neq D$ jeho obraz v súmernoti s osou p_1 a F stred úsečky DD' (ten leží na p_1). Polpriamka BQ leží v uhle β a teda D' vnútri úsečky FC. Je teda

$$DD' < DC$$

a

$$\tfrac{1}{2}DD' < \tfrac{1}{2}DC\,,$$

t. j.

$$DF < DP_3\,.$$

Z toho vyplýva, že P_3 leží vnútri úsečky FC a tým vnútri polroviny p_1B a s ním aj priamka $p_3 \parallel p_1$. Tým je tvrdenie [2] dokázané.

Dôkaz tvrdenia [3] sa prevedie na dôkaz tvrdenia [2] pomocou súmernosti podľa osi p_1.

Poznámka. Dôkaz tvrdenia [2] možno urobiť použitím faktu, že bod P_3 leží vnútri úsečky P_1E, ktorá s výnimkou bodu P_1 leží celá vnútri polroviny p_1B. To predpokladá znalosť vety o podobnosti trojuholníkov AP_1E, DP_3E a BP_1E, CP_3E.

Riešenie danej úlohy (pozri obr. 41, 42, 43). (Pre jednoduchosť predpokladajme, že vo vzťahoch (1), ktoré máme skúmať, sa jedná o vzdialenosti bodov, takže pripúšťame napr. aj možnosť $AX = 0$, t. j. $A \equiv X$ atď.) Označme p_1, p_2, p_3 (v tomto poradí) osi strán AB, BC, CD lichobežníka $ABCD$.

Bod X, o ktorom podľa (1) platí $AX < BX$, leží podľa vety **U** vnútri polroviny p_1A;

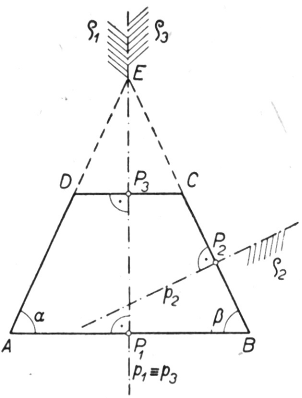
bod X, o ktorom platí $BX < CX$, leží vnútri polroviny p_2B;

bod X, o ktorom platí $CX < DX$, leží vnútri polroviny p_3C.

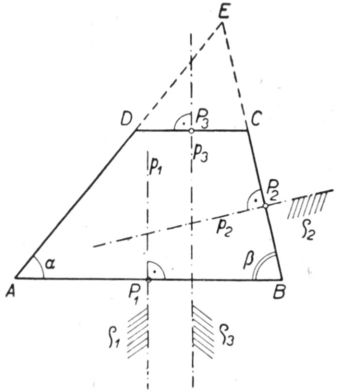
Ide o to, či vnútrajšky polrovín p_1A, p_2B, p_3C majú spoločné body. O tom rozhodneme podľa vety **V**.

Prípad [**1**]. Nech je $\alpha = \beta$ (obr. 41). Potom je $p_1 \equiv p_3$ a p_1A, p_3C sú opačné polroviny, ktoré nemajú žiadny vnútorný bod spoločný. Bod X, o ktorom platí (1), teda neexistuje.

Prípad [**2**]. Nech je $\alpha < \beta$ (obr. 42). Priamka p_3 a s ňou celá polrovina p_3C leží vnútri polroviny p_1B, takže polroviny p_1A, p_3C nemajú žiadny spoločný bod. Preto bod X s vlastnosťami (1) neexistuje.



Obr. 41

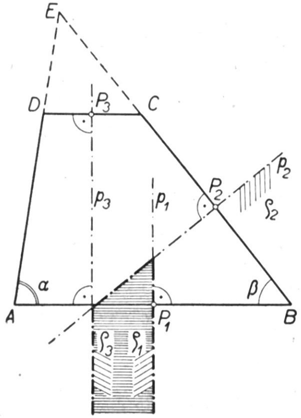


Obr. 42

Prípad [**3**]. Nech je $\alpha > \beta$ (pozri obr. 43). Priamka p_3 leží vnútri polroviny p_1A a vnútrajšky polrovín p_1A, p_3C majú spoločné tie body, ktoré ležia vnútri pásu rovnobežiek p_1, p_3. Priamky BA, BC sú rôznobežné; preto sú rôznobežné aj priamky $p_1 \perp BA$, $p_2 \perp BC$ [pozri Geometrii pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, veta 6, str. 134] (a teda aj priamky p_2, p_3

sú rôznobežné). Vnútrajšok polroviny p_2B má s vnútrajškom pásu rovnobežiek p_1, p_3 spoločné body, ktoré sú v obrázku 43 naznačené šrafovaním.

Tým je úloha rozriešená.



Obr. 43

Záver. Body požadovanej vlastnosti existujú jedine v prípade, keď je $\alpha > \beta$.

3. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré je zlomok

$$Z = \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18}$$

väčší než číslo $\frac{3}{2}$.

Riešenie. Daný zlomok Z upravujme postupne takto:

$$Z = \frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18} = \frac{3(4x^2 - 12x + 9)}{2(4x^2 - 9)} =$$

$$= \frac{3(2x - 3)^2}{2(2x + 3)(2x - 3)} = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)} = \frac{3(2x + 3 - 6)}{2(2x + 3)} =$$

$$= \frac{3(2x + 3)}{2(2x + 3)} - \frac{3 \, . \, 6}{2(2x + 3)} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2x + 3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}} .$$

Aby platilo $Z > \frac{3}{2}$, musí byť

$$- \frac{\frac{9}{2}}{x + \frac{3}{2}} \tag{1}$$

kladné číslo; to znamená, že číslo $x + \frac{3}{2}$ musí byť záporné, t. j. $x < - \frac{3}{2}$.

Pre $x < - \frac{3}{2}$ je každý z výrazov $2x + 3$, $2x - 3$ rôzny od nuly (prvý výraz sa rovná nule pre $x = - \frac{3}{2}$, druhý pre $x = \frac{3}{2}$) a zlomok Z má zmysel. Pre tieto x je zlomok (1) kladný a teda $Z > \frac{3}{2}$.

Tým je úloha rozriešená.

Iné riešenie. Podľa predošlého riešenia je

$$Z = \frac{3(2x - 3)}{2(2x + 3)} ,$$

čiže

$$Z = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x - 3}{2x + 3} . \tag{2}$$

Požadujeme, aby platilo $Z > \frac{3}{2}$. O zlomku

$$z = \frac{2x - 3}{2x + 3} \tag{3}$$

musí teda platiť, že je väčší než 1. Obrátene, ak bude $z > 1$, bude tiež $Z > \frac{3}{2}$. Určíme preto všetky čísla x také, že pre ne je $z > 1$. Vzhľadom na to, že čitateľ aj menovateľ zlomku (3) musia byť súčasne kladné čísla alebo súčasne záporné čísla, rozdeľme úlohu na dve časti:

Časť [**1**]. Nech sú $2x - 3$, $2x + 3$ kladné čísla. Ak má byť $z > 1$, musí byť $2x - 3 > 2x + 3$. To však nie je možné splniť, lebo číslo $2x - 3$ je o 6 menšie než $2x + 3$.

Časť [**2**]. Nech $2x - 3$, $2x + 3$ sú záporné čísla. Číslo $2x + 3$, čiže číslo $3 + 2x$ je záporné pre všetky čísla $2x < -3$, t. j. pre $x < -\frac{3}{2}$ (to ľahko nahliadneme, keď na číselnej osi znázorníme číslo 3). Pre tieto čísla je záporný nielen výraz $2x + 3$, ale aj výraz $2x - 3 = 2x + (-3)$, ktorý je totiž potom súčtom záporných čísel $2x$, -3.

Ešte ide o to, či pre

$$x < -\frac{3}{2}$$

je zlomok z väčší než číslo 1. Rozšírme zlomok (3) číslom -1. V zlomku

$$z = \frac{3 - 2x}{-3 - 2x}$$

sú potom čitateľ aj menovateľ kladné čísla. Aby bolo $z > 1$, musí byť čitateľ väčší než menovateľ a to skutočne pre $x < -\frac{3}{2}$ je, lebo rozdiel

$$3 - 2x - (-3 - 2x)$$

sa rovná číslu 6, ako sa ľahko presvedčíme.

Záver. Zlomok Z je väčší než $\frac{3}{2}$ pre všetky čísla $x < -\frac{3}{2}$ a žiadne iné.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a v ní středový úhel $\omega \equiv ASB$ (dutý nebo přímý), přičemž A i B jsou body kružnice k.

Na její tečně t sestrojené v bodě B najděte bod X tak, aby druhý průsečík Y přímky AX s kružnicí k byl hlavním vrcholem rovnoramenného trojúhelníka YBX.

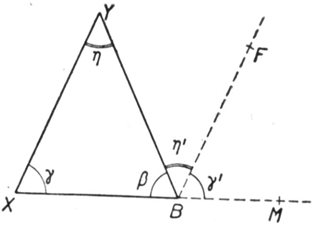
Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k velikosti úhlu ω.

Řešení. Užijme této věty **P** (viz označení v obr. 44): V rovnoramenném trojúhelníku BXY o hlavním vrcholu Y veďme polopřímku $BF \uparrow\uparrow XY$. Potom je $\eta' = \eta$, $\gamma' = \gamma$. Obráceně, jestliže v polorovině MBY, kde bod M leží na prodloužení úsečky XB za bod B, sestrojíme úhel $\gamma' \equiv \sphericalangle MBF = \gamma$, potom je $XY \parallel BF$. (Důkaz je snadný.)

Jsou dvě možnosti: a) Je $0 < \omega < 180°$; b) $\omega = 180°$ (řešení jen naznačíme).

Nechť je ω dutý úhel (obr. 45 až 47): Druhý středový úhel ASB označme ω'; platí

$$\omega + \omega' = 360^\circ, \qquad \omega < \omega' .$$



Obr. 44

Příslušné obvodové a dále úsekové úhly při vrcholu B označme φ, φ' a ε, ε'; platí

$$\varphi = \varepsilon = \tfrac{1}{2}\omega, \quad \varphi' = \varepsilon' = \tfrac{1}{2}\omega', \quad \varepsilon < 90^\circ < \varepsilon' .$$

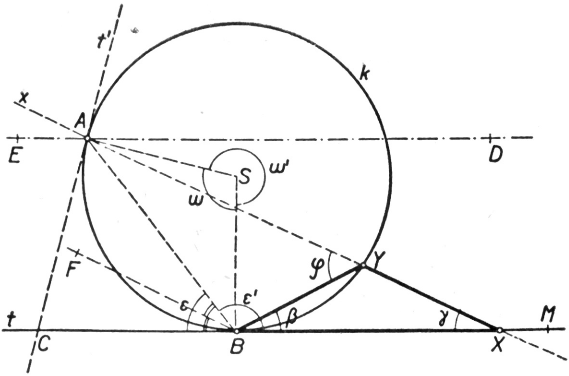
Tečny t, t' v bodech B, A kružnice k mají společný bod C, přičemž je $\varepsilon = \sphericalangle CBA$; BC, BM jsou opačné polopřímky. Dále je $DAE \uparrow\uparrow MBC$.

Nyní jsou možné dvě situace: Bod X padne dovnitř: [**1**] polopřímky BM; [**2**] polopřímky BC (přitom musí být X různý od bodů B, C; pro $X \equiv C$ je přímka $AX \equiv t'$ a nemá s kružnicí k další společný bod).

Případ [**1**] (viz obr. 45). V rovnoramenném trojúhelníku YBX je φ vnějším úhlem, neboť Y leží uvnitř úsečky AX; je tedy

$$\beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Osa BF úhlu ε je tedy podle věty **P** rovnoběžná s $x \equiv AYX$. Odtud *konstrukce* (viz obr. 45):

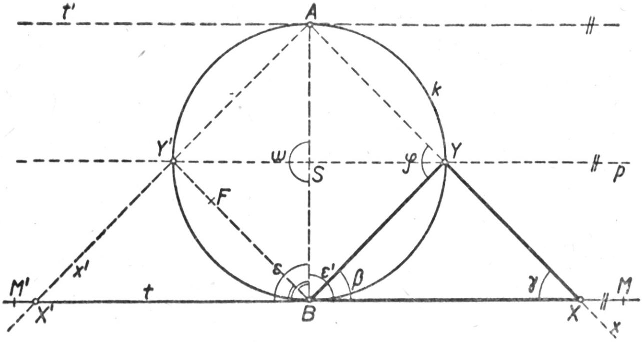


Obr. 45

Bodem A veďme $x \parallel BF$, kde BF je osa úhlu ε. Označme pořadě X, $Y \not\equiv A$ společné body přímky x s t, k; pak X vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz a diskuse. Je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD$ (střídavé úlohy mezi rovnoběžkami). Protože BF je osou prvního z těchto úhlů, leží v přímce x osa druhého úhlu

$\sphericalangle BAD$; z toho plyne, že x, t jsou různoběžky a bod X existuje, takže i bod $Y \not\equiv A$ existuje. Podle konstrukce je $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$, $\beta = \varphi - \gamma$ (podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka) a tedy $\frac{1}{2}\varepsilon = \gamma$.



Obr. 46

Výsledek [1]. Na polopřímce BM leží právě jeden požadovaný bod.

Poznámka. K témuž výsledku dospějeme i v tom případě, že $\omega = 180°$ (viz obr. 46); ze souměrnosti kružnice k a přímky t podle osy SB plyne, že úloha má v tomto případě dvě řešení. Bod Y leží na průměru $p \parallel t$ vedeném bodem S a bod Y' je na kružnici k k bodu Y protilehlý.

Případ [2] (viz obr. 47, 48). Vyloučili jsme možnost, že by platilo $X \equiv C$ (pak přímka AX nemá s k další společný bod a je nutně $\beta = \gamma = \sphericalangle BAC = 60°$, $\omega = 120°$).

Jsou dvě možné situace: a) Viz obr. 47, kde X je vnitřní bod úsečky BC a Y vnitřní bod menšího oblouku AB kružnice k; v hledaném rovnoramenném trojúhelníku YBX platí

$$\beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\varphi' = \tfrac{1}{2}\varepsilon' . \tag{1}$$

Je-li BF' osou úhlu ε', je $\sphericalangle MBF' = \frac{1}{2}\varepsilon'$ a podle věty **P** je

$$XA \parallel BF' . \tag{2}$$

b) Viz obr. 48, kde X je na prodloužení úsečky BC za bod C a bod Y pak nutně leží na větším oblouku AB kružnice k. Označme φ' úhel vedlejší k obvodovému úhlu $\varphi \equiv \sphericalangle AYB$; pak je $\varphi' = \varepsilon'$, kde $\varepsilon' \equiv \sphericalangle MBA$. Platí stejně jako v předchozí situaci vztahy (1) a o ose BF' úhlu ε' platí

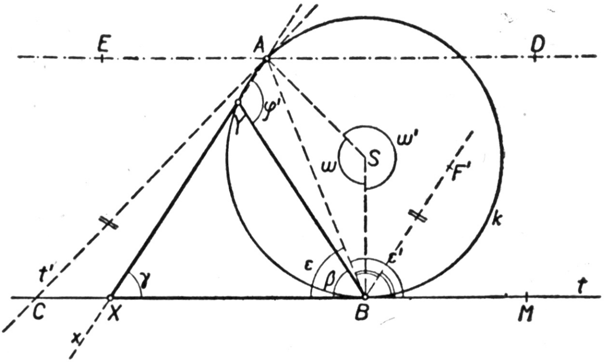
$$XA \parallel BF' . \tag{3}$$

Ze vztahů (2), (3) plyne táž *konstrukce*: Bodem A veďme přímku $x \parallel BF'$, kde BF' je osou úsekového úhlu ε'; nechť přímka x má s přímkou t společný bod $X \not\equiv C$, s kružnicí k společný bod $Y \not\equiv A$. Potom bod X vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz a diskuse (obr. 47, 48). Je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle MBA \equiv \varepsilon'$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami

$BM \uparrow\downarrow AE$); jejich osy leží pořadě v přímkách x, BF'. Odtud plyne, že bod X padne dovnitř polopřímky BC. Je $\sphericalangle BAC = \varepsilon$, $\sphericalangle BAX = \frac{1}{2}\varepsilon'$. Jsou tři možnosti:

α) Je $\varepsilon > \frac{1}{2}\varepsilon'$ neboli postupně $\omega > \frac{1}{2}\omega'$,



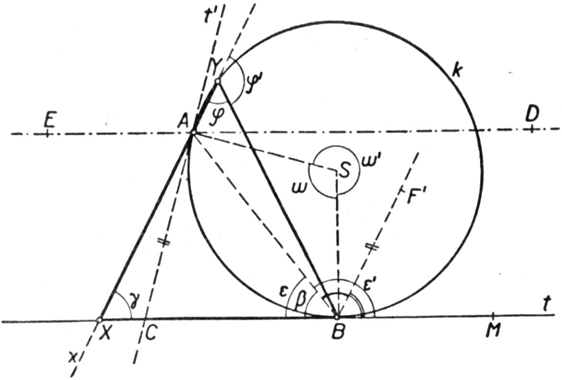
Obr. 47

$\omega > \frac{1}{2}(360° - \omega)$, $\omega > 120°$; potom vskutku X leží mezi body B, C a Y na menším oblouku AB (obr. 47). Platí $\beta = \varphi' - \gamma$ (věta o vnějším úhlu trojúhelníka YBX) neboli $\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon' = \gamma$.

β) Je $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$ a tedy $\omega = 120°$; pak je $Y \equiv A$, což jsme vyloučili; trojúhelník ABC je rovnostranný.

γ) Je $\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon'$ neboli $\omega < 120°$ (viz obr. 48); potom leží přímka x v úhlu $\sphericalangle CAE$ i v úhlu k němu vrcholovém. Bod X padne na prodloužení úsečky BC za bod C a bod Y na větší oblouk $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k.

Je $\beta = \varphi' - \gamma$ (viz označení z obr. 48) neboli $\beta = \varepsilon' - \frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon' = \gamma$.



Obr. 48

Závěr. Na každé z opačných polopřímek BC, BM leží právě jeden bod X, který má požadované vlastnosti. Jedině v případě $\omega = 120°$ je $X \equiv C$ a $Y \equiv A$, což jsme vyloučili, kdežto řešení na polopřímce BM existuje.

5. Kolik čtveřic celých čísel a, b, c, d má tyto vlastnosti:

(1) Žádná dvě z čísel a, b, c, d si nejsou rovna.

(2) Platí $a + b + c + d = 0$.

(3) Každé z čísel a, b, c, d má absolutní hodnotu menší než pět. (Čtveřici 1, 2, -3, 4 považujte za různou od čtveřice 2, -3, 4, 1 apod.)

Řešení. Úlohu rozdělme na dvě části: [**1**] Hledejme čtveřice, o nichž platí, že jedna dvojice čísel ze čtveřice má součet nula. [**2**] Žádná dvě čísla čtveřice nemají součet nula.

Případ [**1**]. Nechť o dvou číslech čtveřice, např. o číslech c, d, platı, že jejich součet je nula.

Tu nemůže být např. $d = 0$; jinak by bylo $c + d = 0$, tj. $c = 0$. Dvojici $c = 0$, $d = 0$ vylučujeme, neboť čísla čtveřice mají být vesměs navzájem různá.

Tabulka č. 1

I	II	III	IV
$5 > a > d$	b	c	$5 > d > 0$
2	-2	-1	1
3	-3	-1	1
4	-4	-1	1
3	-3	-2	2
4	-4	-2	2
4	-4	-3	3

Sestavme nyní tabulku (číslo 1) čísel a, b, c, d tak, aby bylo $d > 0$ (tj. hledejme čtveřice, v nichž je $d > 0$) a aby v tabulce postupně d vzrůstalo; dále učiňme úmluvu, že v tabulce je $a > d$.

Za daných předpokladů dostaneme právě 6 čtveřic (a, b, c, d). Nyní uvažujme takto:

Vlastnost čísla d, kterou jsme požadovali, může mít kterékoli z čísel a, b, c, d; to tedy jsou

$$4 \text{ možnosti} . \qquad (1)$$

Zbudou nám tři z čísel a, b, c, d; vlastnosti, které jsme připsali číslu c (tj. $c + d = 0$), mohou mít kterákoli tři z nich; tc jsou

$$3 \text{ možnosti} , \qquad (2)$$

přičemž kteroukoli možnost (1) lze spojit s kteroukoli možností (2); to je tedy

$$4 \,.\, 3 = 12 \text{ možností} . \qquad (3)$$

Nyní nám zbývají ze čtveřice a, b, c, d dvě čísla; vlastnost, jež mělo číslo a může mít jedno z nich; to jsou

$$2 \text{ možnosti} ,$$

z nichž každou lze spojit s 12 možnostmi (3). Dostaneme tedy

$$12 \,.\, 2 = 24 \text{ možností} .$$

Dostaneme tedy celkem 24 tabulek typu č. 1. To je

$$6 \,.\, 24$$

různých čtveřic dané vlastnosti.

Případ [2]. Nechť o číslech čtveřice (a, b, c, d) platí

$$|a| > |b| > |c| > |d| . \qquad (4)$$

Sestavujme tabulku (číslo 2) tak, že volíme číslo a, k němu volme číslo b tak, aby platilo (4) a pak volme číslo c zase podle (4), načež číslo d určíme podle vztahu $a + b + c + d = 0$; přitom čísla a, b, c, d musí být různá. Dostaneme:

Tabulka č. 2

I	II	III	IV
a	b	c	d
4	−3	−2	1
−4	3	2	1
4	−3	−1	0
−4	3	1	0
3	−2	−1	0
−3	2	1	0

V tabulce je tedy 6 čtveřic čísel. Vlastnost, kterou má číslo a v tabulce č. 2, může mít opět kterékoli z čísel a, b, c, d; to jsou 4 možnosti. Vlastnost čísla b může mít kterékoli ze tří zbývajících čísel, to jsou 3 možnosti; tedy $4 . 3 = 12$ možností. Zbudou dvě čísla a jedno z nich volíme (jako číslo c v tabulce číslo 2); to jsou dvě možnosti, tedy $12 . 2 = 24$ možností. Dostaneme tedy 24 tabulek tvořených týmž postupem jako tabulka čís. 2; obdržíme tedy

$$6 \,.\, 24 \text{ čtveřic}\,. \tag{5}$$

Protože uvedenými případy [**1**], [**2**] jsou všechny možnosti vyčerpány, dostaneme [viz (4), (5)] celkem

$$6 \,.\, 24 + 6 \,.\, 24 = (6 + 6) \,.\, 24$$

čtveřic neboli $12 \,.\, 24 = 288$ různých čtveřic.

Odpověď. Různých čtveřic, majících vlastnosti požadované textem dané úlohy, je 288.

6. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a v ní průměr AB; dále je dáno kladné číslo m.

Na tečně t sestrojené v bodě B kružnice k určete bod X tak, že pro druhý průsečík Y přímky AX s kružnicí k platí vztah

$$XY = m\,.$$

(Nejprve vypočítejte velikost úsečky XA a na základě výpočtu proveďte konstrukci.)

Řešení. V obr. 49 označme

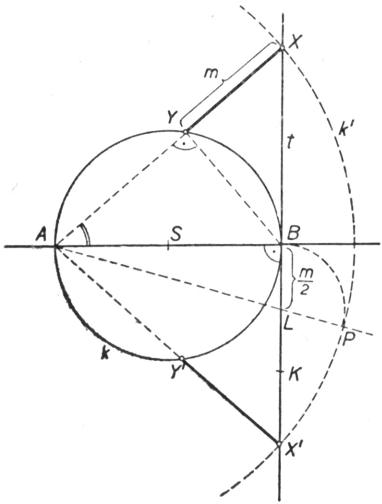
$$SA = SB = r, \quad XY = m, \quad AX = x, \qquad AY = x - m; \tag{1}$$

přitom r, m jsou daná kladná čísla a $x > 0$ je neznámé číslo, jež vypočítáme.

Platí

$$\triangle\, ABY \sim AXB \text{ (uu)}\,, \tag{2}$$

neboť se tyto pravoúhlé trojúhelníky shodují v úhlech.



Obr. 49

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{AY}{AB} = \frac{AB}{AX} \tag{2'}$$

neboli vzhledem k (1)

$$\frac{x - m}{2r} = \frac{2r}{x}\,.$$

Znásobme obě strany této rovnice číslem $2rx$; postupně dostaneme

$$x(x - m) = 4r^2\,,$$

$$x^2 - mx = 4r^2\,,$$

$$x^2 - 2\cdot\frac{m}{2}\cdot x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = D\,, \tag{3}$$

kde jsme položili

$$4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = D > 0\,. \tag{3'}$$

Rovnici (3) lze upravit dále takto:

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = (\sqrt{D})^2\,,$$

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - (\sqrt{D})^2 = 0\,,$$

$$\left[\left(x - \frac{m}{2}\right) + \sqrt{D}\right]\cdot\left[\left(x - \frac{m}{2}\right) - \sqrt{D}\right] = 0\,.$$

Jeden z obou činitelů na levé straně této rovnice musí být roven nule [viz učebnici Algebra pro 9. ročník, vydání z r. 1955, str. 8, řádek 4; str. 78, odstavec 1], tj.

$$x - \frac{m}{2} + \sqrt{D} = 0, \qquad x - \frac{m}{2} - \sqrt{D} = 0$$

neboli

$$x = \frac{m}{2} - \sqrt{D}\,, \tag{4}$$

$$x = \frac{m}{2} + \sqrt{D}\,. \tag{5}$$

Případ (4) nepřichází v úvahu; ze (3′) totiž plyne, že je $D > (\frac{1}{2}m)^2$ a tedy $\sqrt{D} > \frac{1}{2}m$, takže ve (4) je $x < 0$ a proto nemá geometrický význam.

Případ (5) má význam, neboť x je součtem dvou kladných čísel; na základě výsledku (5) provedeme konstrukci.

Konstrukce (viz obr. 49). Sestrojme trojúhelník ABL, kde $\sphericalangle B = 90°$, $AB = 2r$, $BL = \frac{1}{2}m$. Podle věty Pythagorovy z tohoto trojúhelníka plyne

$$AB^2 + BL^2 = AL^2$$

neboli

$$4r^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = AL^2\,,$$

přičemž porovnáním se vztahem (3′) dostáváme

$$AL = \sqrt{D}\,.$$

Na prodloužení úsečky AL za bod L sestrojme úsečku $LP = \frac{1}{2}m$, takže je $AP = x$, kde x je dáno vztahem (5). Dále opišme kružnici $k' \equiv (A, r' = AP)$, která protíná přímku t v hledaných bodech X, X'. Uvnitř úseček AX, AX' a na kružnici k leží pak pořadě body Y, Y', přičemž platí

$$XY = X'Y' = m\,.$$

Důkaz. Stačí se omezit na úsečku XY, neboť úsečka $X'Y'$ je obrazem úsečky XY v souměrnosti o ose AB.

Podle konstrukce je $AX = AP = x$, což je číslo ze vztahu (5). Vztahy (2), (2′) platí, neboť trojúhelníky ABY, AXB jsou pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu A. Musíme dokázat, že je $XY = m$.

Ze vztahu (2′) plyne $AX \,.\, AY = AB^2$ neboli

$$AY = \frac{4r^2}{AX}\,. \tag{6}$$

Uvažujme úsečku $AY_0 = AX - m$, takže vzhledem k (5) je

$$AY_0 = \sqrt{D} - \frac{m}{2}\,, \quad AX = \sqrt{D} + \frac{m}{2}\,.$$

Proto je

$$AY_0 \,.\, AX = (\sqrt{D})^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

neboli

$$AY_0 \,.\, AX = 4r^2;$$

je tedy

$$AY_0 = \frac{4r^2}{AX}\,. \tag{7}$$

Porovnáním (6), (7) dostáváme

$$AY_0 = AY\,,$$

takže rozdíl velikostí sestrojených úseček AX, AY je skutečně m.

Diskuse. Úloha má vždy dvě řešení, neboť podle konstrukce je $AB < AL < AP$, takže vzdálenost bodu A od přímky t je menší než poloměr r' kružnice

k'; je tedy t sečnou kružnice k'. Protože přímka AX není kolmá k přímce AB, není tečnou kružnice k v bodě A, tj. je sečnou (bodem A na kružnici k prochází jediná tečna, ostatní přímky jsou sečny kružnice).

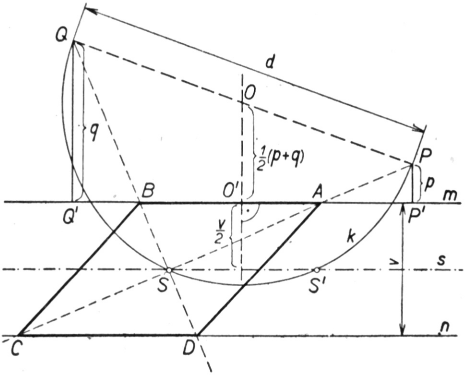
7. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C*

1. Daná je priamka m. Vnútri jednej z polrovín vyťatých priamkou m je vo vzdialenosti v daná priamka $n \parallel m$; vnútri opačnej polroviny sú dané dva rôzne body P, Q. Vzdialenosti bodov P, Q od priamky m označme (v tomto poradí) p, q; ďalej označme $PQ = d$. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorého strana AB leží na priamke m a strana CD na priamke n; pritom bod P leží na priamke AC a bod Q na priamke BD. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na čísla (kladné) d, p, q, v.

Riešenie. *Rozbor* (obr. 50). Označme S stred hľadaného kosoštvorca $ABCD$ (presnejšie: rovnostranného rovnobežníka). Potom je $\sphericalangle PSQ = 90°$. Pritom bod S leží na strednej priečke $s \parallel AB$, čiže $s \parallel m$. Vzdialenosť priamok s, m je $\frac{1}{2}v$. Z toho vyplýva *konštrukcia*:

Zostrojme os $s \parallel m$ súmernosti páru rovnobežiek m, n. Označme O stred úsečky PQ a opíšme kružnicu

$k \equiv (O, \frac{1}{2}d)$ nad úsečkou PQ ako priemerom. Ďalej označme S spoločný bod (ak existuje) priamky s s kružnicou k. Zostrojme priamky SP, SQ. Označme A, C spoločné body priamky SP (v tomto poradí)



Obr. 50

s priamkami m, n a ďalej B, D spoločné body priamky SQ (v tomto poradí) s tými istými priamkami m, n. Potom štvoruholník $ABCD$ vyhovuje požiadavkám úlohy.

Dôkaz. Bod S má podľa konštrukcie priamky s navzájom rovnaké vzdialenosti od rovnobežiek m, n. V súmernosti so stredom S sú priamky m, n súmerne združené a tým aj dvojica bodov A, C a dvojica bodov B, D. Bod S teda rozpoľuje uhlopriečky AC, BD

štvoruholníka $ABCD$, takže je to rovnobežník. Pretože S leží na Thaletovej kružnici k, je $\sphericalangle PSQ = 90°$ a uhlopriečky AC, BD rovnobežníka $ABCD$ sú na seba kolmé. Je teda napr. priamka AC osou súmernosti tohto rovnobežníka, t. j. platí $AB = AD$ a rovnobežník je rovnostranný. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia (pozri označenia z obr. 50). Riešiteľnosť úlohy závisí od toho, či priamka s a kružnica k majú spoločné body. Pokiaľ nie je $PQ \perp m$, existuje lichobežník (resp. obdĺžnik keď $PQ \parallel m$) $PQQ'P'$, kde $PP' \perp m$, $QQ' \perp m$ a body P', Q' ležia na priamke m. Jeho stredná priečka $OO' = \frac{1}{2}(PP' + QQ') = = \frac{1}{2}(p + q)$. Vzdialenosť stredu O od priamky m je teda $\frac{1}{2}(p + q)$. Pretože body P, Q ležia vnútri tej istej polroviny mP (opačnej k polrovine mC), vzdialenosť bodu O od priamky s sa rovná $o = \frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}v = = \frac{1}{2}(p + q + v)$. Polomer kružnice k je $\frac{1}{2}d$. Úloha má dve rôzne, jedno alebo žiadne riešenie, podľa toho, či vzdialenosť bodu O od priamky s je menšia, rovná sa alebo je väčšia než polomer $\frac{1}{2}d$ kružnice k, t. j. či platí (v tomto poradí):

$$o < \tfrac{1}{2}d, \qquad o = \tfrac{1}{2}d, \qquad o > \tfrac{1}{2}d\,,$$

kde $o = \frac{1}{2}(p + q + v)$.

Avšak to platí aj pre prípad, že je $PQ \perp m$, kedy úloha nemá riešenie.

Tým je úloha rozriešená.

2. Písařka píše na psacím stroji těsně za sebou přirozená čísla

$$123456789101112 \text{ atd.}$$

bez mezer a čárek; celkem takto napsala 1000 číslic.

Vypočítejte, kolik přitom napsala sedmiček.

Řešení. Nejprve určíme to přirozené číslo, jehož cifra při uvedeném psaní číslic bude stát na tisícím místě. Počítejme postupně napsané cifry:

Napišme čísla:	Napsali jsme tím tento počet číslic:
1 až 9	9
10 až 99	180
100 až 199	300
200 až 299	300
Přitom jsme napsali celkem	789 číslic.

Máme ještě napsat 211 číslic. Napíšeme-li $\frac{210}{3} = 70$ dalších (trojciferných) čísel, napíšeme 210 číslic; jedná se o napsání čísel od 300 až do 369. Zbývá napsat ještě další číslici (tisící) a tou je číslice 3 čísla 370.

Nyní vypočítáme, kolik napíšeme sedmiček, když napíšeme bezprostředně po sobě následující přirozená čísla od 1 až do 369.

V každé desítce od 1 do 100 napíšeme jednu sedmičku, která stojí na místě jednotek, tj. celkem 10 sedmiček; při psaní desítek čísel 70, 71 atd. až 79 napíšeme rovněž celkem 10 sedmiček. Při psaní čísel od 1 do 100 napíšeme tedy úhrnem 20 sedmiček. Totéž platí při psaní čísel od 101 do 200 a od 201 do 300.

K napsání čísel od 1 do 300 napíšeme 60 sedmiček. Při napsání čísel 301 až 369 napíšeme 7 sedmiček.

Odpověď. Při výkonu popsaném v úloze napíše písařka 67 sedmiček.

3. Jsou dány dva přilehlé úhly $\sphericalangle MPQ$, $\sphericalangle PQN$, z nichž každý je pravý; dále je dáno kladné číslo p. Na polopřímkách PM, QN sestrojte pořadě body A, B a na úsečce PQ bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný se stranou velikosti p.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům p, $d = PQ$.

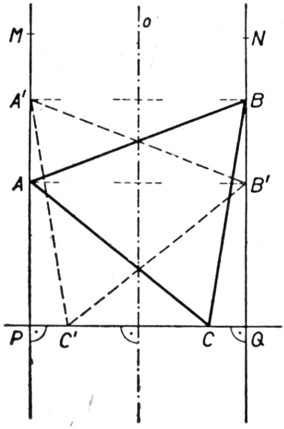
Řešení (obr. 51). Při řešení užijeme známé věty **V**: Je-li $\sphericalangle PQY = 90°$ (viz obr. 52) a $QY < QT$, potom je $PY < PT$ a $\sphericalangle PYQ > \sphericalangle PTQ$ a obráceně.

Rozbor. Nechť ABC je trojúhelník, který splňuje požadavky dané úlohy. Označme o osu úsečky PQ; přímka o je osou souměrnosti útvaru, který se skládá z úsečky PQ a obou polopřímek PM, QN. Označme $B'A'C'$ (v napsaném pořadí) obraz trojúhelníka ABC v souměrnosti o ose o; body B', A', C' leží pořadě na polopřímkách QN, PM a úsečce PQ. Trojúhelník tedy také splňuje požadavky úlohy. Označme a, b pořadě vzdálenosti bodů A, B od přímky PQ; tu tedy B', A' mají od přímky PQ pořadě rovněž vzdálenosti a, b.

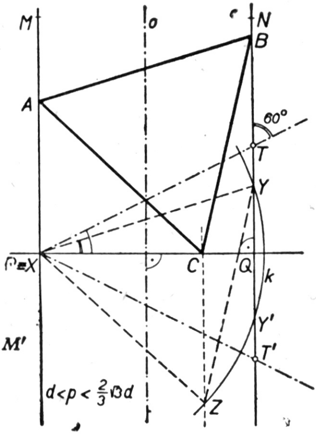
Proto v celém dalším řešení můžeme předpokládat, že je

$$a \leqq b;$$

jinak totiž místo trojúhelníka ABC stačí uvažovat jeho obraz $B'A'C'$ v souměrnosti o ose o.



Obr. 51



Obr. 52

Posuňme trojúhelník ABC o délku a ve směru MP (i co do smyslu — viz obr. 52), čímž dostaneme shodný trojúhelník XYZ (je $X \equiv P$). Jsou dvě možnosti: **[1]** Je $a = b$ a tedy $Y \equiv Q$, tj. $d = p$; v tomto případě je zřejmě jediné řešení ABC (viz obr. 53) a je $AB \parallel PQ$, přičemž je $C \equiv (PQ \,.\, o)$. **[2]** Je $a < b$, takže existuje pravoúhlý trojúhelník PYQ s přeponou $PY = p$ a odvěsnou $PQ = d$, takže je

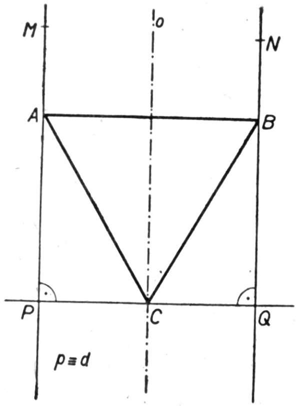
$$d < p\,. \tag{1}$$

(Je zřejmé, že pro $d > p$ nemá úloha řešení.) Přitom bod C leží na úsečce PQ a tudíž bod Z v pásu rovnoběžek PM, QN. Bod Z náleží úhlu $\sphericalangle PYQ$, neboť musí být $60° = \sphericalangle PYZ \leqq \sphericalangle PYQ$; je tedy $\sphericalangle YPQ \leqq \leqq 30°$ a proto polopřímka PZ prochází vnitřkem pravého úhlu $\sphericalangle QPM'$, kde PM', PM jsou opačné polopřímky. Sestrojme rovnostranný trojúhelník PTT', v němž je úsečka PQ výškou a bod T leží na polopřímce QN; je $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,PT$ neboli $d = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,PT$ a tedy

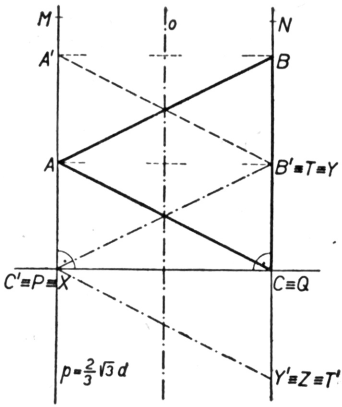
$$PT = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,d.$$

Protože $\sphericalangle QTP = 60°$, padne nutně bod $Y \not\equiv Q$ na úsečku QT. Podle věty **V** pro $Y \equiv T$ je totiž $PT = p$, $\sphericalangle PYZ \equiv \sphericalangle PYQ = 60°$, kdežto pro vnitřní bod Y úsečky QT je $p = PY < PT$, $\sphericalangle PYQ > > \sphericalangle PTQ = 60°$; v prvním případě padne bod Z na polopřímku TQ, v druhém případě padne bod Z dovnitř úhlu $\sphericalangle PTQ$. Vhledem k (1) a právě odvozeným vztahům je

$$d < p \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}\,d\,. \tag{2}$$



Obr. 53



Obr. 54

Konstrukce (viz obr. 52, 54). Kolem bodu $P \equiv X$ opíšeme kružnici $k \equiv (P,\ p)$; vzhledem k (2) je přímka QN sečnou této kružnice. Označme Y společný bod polopřímky QN s touto kružnicí. Bod $Y \not\equiv Q$ náleží úsečce QT, takže podle věty **V** je $\sphericalangle PYQ \geqq 60°$. Rovnostranný trojúhelník XYZ sestrojený v polorovině XYQ má stranu p; bod Z náleží úhlu $\sphericalangle PYQ$ a tím pásu rovnoběžek PM, QN. Označme C patu kolmice vedené bodem Z k přímce PQ a posuňme trojúhelník XYZ o délku ZC ve směru PM (i co do smyslu) do polohy ABC. Z předchozího plyne, že trojúhelník ABC vyhovuje požadavkům úlohy. Obraz $B'A'C'$ trojúhelníka ABC

v souměrnosti o ose o vyhovuje rovněž úloze, přičemž oba trojúhelníky jsou různé; úsečka XY a její obraz v souměrnosti o ose o jsou totiž dvě různé úsečky a tím i úsečky AB, $B'A'$ jsou různé, přičemž úsečka $B'A'$ není stranou trojúhelníka ABC.

Důkaz konstrukce vyplývá z předchozího. Podmínkou řešitelnosti je vztah (2).

Protože od trojúhelníka ABC lze k pomocnému trojúhelníku XYZ přejít jediným způsobem (příslušné posunutí je zcela určeno) a protože od sestrojeného trojúhelníka XYZ lze podle naznačené konstrukce dospět opět jediným způsobem k trojúhelníku ABC, který úloze vyhovuje, má úloha dvě různá řešení.

Závěr. Je-li $d = p$, má úloha jediné řešení. Platí-li vztahy (2) jsou dvě různá řešení. Pro $d > p$ nebo pro $p > \frac{2}{3}\sqrt{3}d$ není řešení.

4. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}, \qquad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

je väčší. (Návod: Utvorte napr. ich rozdiel.)

Riešenie. Rozdiel zlomkov sa postupne rovná

$$r = \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} =$$

$$= \frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1) - (100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}.$$

Ak bude čitateľ posledného zlomku kladné číslo, bude prvý z daných zlomkov väčší. Označme tohto čitateľa x. Platí postupne:

$$\begin{aligned} x &= 100^{189} + 100^{100} + 100^{89} + 1 - \\ &- (100^{189} + 100^{99} + 100^{90} + 1) = \\ &= 100^{100} + 100^{89} - 100^{99} - 100^{90} = \\ &= 100^{100}\left(1 + \frac{1}{100^{11}} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^{10}}\right). \end{aligned}$$

Číslo v zátvorke je zrejme kladné, takže x je kladné číslo.

Odpoveď. Prvý z daných zlomkov je väčší než druhý.

1. Je dán výraz

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}\,.$$

Zjednodušte jej a dokažte, že je kladný. Co musí platit o číslech a, b, c, aby daný výraz měl smysl?

Řešení. I. Označme V daný výraz. Upravme menovatele ve zlomcích výrazu V pořadě takto:

$$\left.\begin{aligned}(a-b)(a-c)&=-(a-b)(c-a)\,,\\(b-a)(b-c)&=-(a-b)(b-c)\,,\\(c-a)(c-b)&=-(c-a)(b-c)\,.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Vidíme nyní, že jmenovatelé našich zlomků vznikly jako součiny vždy dvou z těchto výrazů

$$a-b,\qquad b-c,\qquad c-a \tag{1'}$$

a ještě dalšího činitele, jímž je číslo -1. Výraz

$$n=(a-b)(b-c)(c-a) \tag{2}$$

je zřejmě společným násobkem výrazů (1), neboť platí např.

$$\frac{n}{(a-b)(a-c)}=-(b-c) \tag{3}$$

atd. Je tedy výraz n skutečně společným násobkem našich jmenovatelů.

Převeďme nyní zlomky ve výrazu V na jmenovatele n; musíme je vzhledem k (1) a (3) rozšířit pořadě těmito výrazy:

$$-(b-c), \qquad -(c-a), \qquad -(a-b);$$

postupně pak obdržíme tyto úpravy:

$$V = \frac{-(b-c)(a-1)^2}{n} + \frac{-(c-a)(b-1)^2}{n} + \\ + \frac{-(a-b)(c-1)^2}{n} =$$

$$= -\frac{1}{n}[(b-c)(a^2-2a+1)+(c-a)(b^2-2b+1)+ \\ +(a-b)(c^2-2c+1)]; \qquad (4)$$

tu jsme ze zlomků vytkli $-\frac{1}{n}$. Proveďme nyní násobení v lomené závorce a potom sečtěme. Označme L výraz v lomené závorce; dostaneme postupně

$$L = a^2b - 2ab + b - a^2c + 2ac - c + \\ + b^2c - 2bc + c - ab^2 + 2ab - a + \\ + ac^2 - 2ac + a - bc^2 + 2bc - b = \\ = (a^2b - ab^2) + (b^2c - bc^2) + (c^2a - a^2c)\,. \qquad (5)$$

Proveďme dále násobení na pravé straně rovnosti (2); dostaneme postupně

$$n = (a-b)(b-c)(c-a) = \\ = (ab - ac - b^2 + bc)(c-a) = \\ = abc - ac^2 - b^2c + bc^2 - \\ - a^2b + a^2c + ab^2 - abc = \\ = -(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2) = -L$$

[viz vztah (5)]. Platí tedy

$$n = -L\,.$$

Dosaďme tento výsledek do (4); obdržíme

$$V = -\frac{1}{-L}\cdot L = 1\,, \tag{6}$$

tj.

$$V = 1\,.$$

Výsledek. Výraz V je roven číslu 1 a tím kladný pro všechna čísla a, b, c, pro něž má smysl.

Obdobné řešení vypracoval
Lubomír Vašek, 8.d tř. 1. jsš,
Gottwaldov.

II. Musíme ještě zjistit, kdy výraz V ztrácí smysl. To nastane tehdy, je-li jeden z jmenovatelů (1) daného výrazu roven nule, tj. jestliže platí alespoň jeden ze vztahů

$$\left.\begin{aligned}(a-b)(c-a) &= 0\,,\\ (a-b)(b-c) &= 0\,,\\ (c-a)(b-c) &= 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Z rovnic (7) plyne, že nutně musí platit alespoň jedna rovnost [viz učebnice Algebra pro 8. roč., str. 24 a následující, vydání z r. 1959]

$$a - b = 0,\quad b - c = 0,\quad c - a = 0$$

neboli

$$a = b,\quad b = c,\quad c = a\,. \tag{8}$$

Skutečně, když platí jeden ze vztahů (8), je jeden ze jmenovatelů (1) roven nule a výraz V nemá pak smyslu.

Odpověď. Jestliže současně platí

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a, \tag{9}$$

má výraz V smysl; jinak smysl nemá.

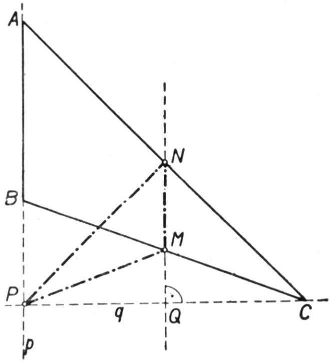
Za předpokladu, že platí (9), je vzhledem ke vztahu (2) číslo n různé od nuly (tím je též $L \neq 0$) a proto lze provést krácení naznačené ve vztazích (6).

Tím je úloha rozřešena.

Obdobné řešení vypracovala Jitka Državová, 8. tř. 4. osš, Přerov.

2. Zvoľte trojuholník MNP. Narysujte taký trojuholník ABC, aby bod M bol stredom strany BC, bod N stredom strany CA, a aby bod P bol pätou výšky vedenej: a) bodom C, b) bodom A. (Každú z oboch úloh narysujte zvlášť.)

Riešenie. a) Na obrázku 55 máme trojuholník ABC a body M, N, ktoré sú (v tomto poradí) stredmi strán BC, CA, takže MN je strednou priečkou; preto je $MN \parallel AB$. Ďalej P je päta výšky vedenej bodom C. Bod P môže splynúť nanajvýš s jedným z bodov A, B. Predpokladajme, že je napr. $P \not\equiv B$. Potom v trojuholníku BCP je úsečka $MQ \parallel BP$ (Q je priesečník priamok MN a CP), lebo je $MN \parallel AB$. Je teda MQ stredná priečka v tomto trojuholníku a Q je teda stred úsečky CP. Vedľa toho je $MQ \parallel BP$, $CP \perp BP$; ak je priamka CP kolmá k jednej z rovnobežiek, je kolmá aj k druhej [pozri učebnicu Geometrie pro 7. ročník, vydanie z r. 1955, str. 134, druhá veta zhora]. V trojuholníku CMQ je teda $\sphericalangle Q = 90°$. Podľa toho urobíme konštrukciu.



Obr. 55

Konštrukcia (obr. 55). Zvoľme trojuholník MNP. Bodom P veďme priamku $p \parallel MN$. V bode P zostrojme kolmicu q k priamke p a označme Q spoločný bod priamok q, MN. Na predĺžení úsečky PQ za bod

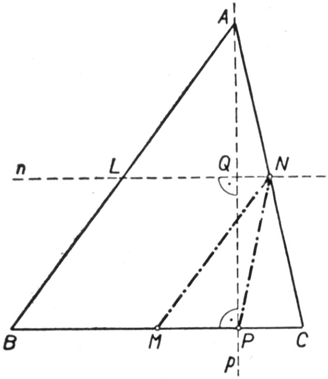
Q zostrojme úsečku $QC = QP$. Zostrojme polpriamky CM, CN; ďalej označme (v tomto poradí) B, A spoločné body týchto polpriamok s priamkou p. Potom ABC je hľadaný trojuholník.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Pretože MNP je trojuholník, neleží bod P na priamke MN a preto MN, p sú dve rôzne rovnobežky a tým aj body P, Q sú rôzne; bod C sa dá teda zostrojiť. Priamka CM pretína priamku MN v bode M; preto pretína aj priamku p, ktorá je s MN rovnobežná [keď CM pretína jednu z rovnobežiek, pretína aj druhú; pozri učebnicu Geometrie pro 7. roč., vydanie z r. 1955, str. 133, veta 5]. Bod B sa teda dá zostrojiť a rovnako aj bod A. Úloha má teda riešenie, a to jediné.

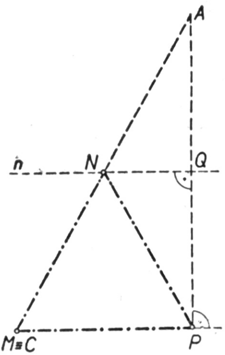
b) V obrázku 56 máme trojuholník ABC; body M, N sú (v tomto poradí) stredy strán BC, CA. Bod P je pätou výšky vedenej bodom A, t. j. $p \perp PM$. Úsečka MN je strednou priečkou a preto je $MN \parallel AB$. Priamka $n \parallel MP$ (čiže $n \parallel BC$) prechádza bodom N a preto na nej leží stredná priečka $LN \parallel BC$, kde L je stred strany AB. Bod P môže splynúť nanajvýš s jedným z bodov B, C. Predpokladajme, že je $P \neq B$. Potom v pravouhlom trojuholníku ABP ($\sphericalangle P = 90°$) je $LQ \parallel BP$ a bod Q je stredom úsečky PA. Z toho vyplýva konštrukcia.

Konštrukcia (obr. 56). Zvoľme trojuholník MNP

Bodom N veďme priamku $n \parallel MP$. Bodom P zostrojme priamku $p \perp MP$. Priesečník priamok n, p označme Q. Na predĺžení úsečky PQ za bod Q zo-



Obr. 56



Obr. 57

strojme úsečku $QA = QP$. Polpriamka AN má s priamkou MP spoločný bod C. Na predĺžení úsečky CM za bod M zostrojme úsečku $MB = MC$. Potom ABC je hľadaný trojuholník.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Bod Q je podľa konštrukcie stredom úsečky PA a preto je N stredom úsečky AC [buď je $N \equiv Q$, alebo, ak je $N \not\equiv Q$, je QN strednou priečkou v trojuholníku CAP a teda N je stred strany AC]. Podľa konštrukcie sú body M, N

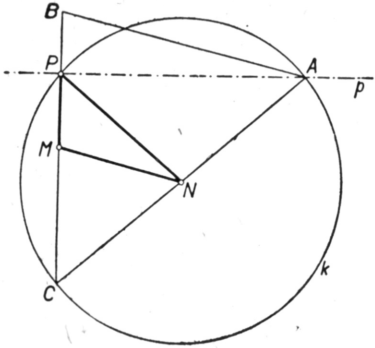
stredmi strán a P päta výšky vedenej bodom A Avšak ak je $C \equiv M$, čo nastane, keď je $MN = NP$ (pozri obr. 57), nemá úloha riešenie (bolo by $B \equiv C$). Inak má úloha jediné riešenie (to platí aj v prípade, keď je $\sphericalangle PMN = 90°$, t. j. $P \equiv B$).

Jiné řešení. *Rozbor.* Na obr. 57a máme hledaný trojúhelník ABC. Trojúhelník ACP má úhel $\sphericalangle P =$ $= 90°$ a proto je bod N středem jeho přepony AC. Proto kružnice $k \equiv (N, NP)$ prochází body A, C (kružnice Thaletova). Přitom přímka $p \perp PM$, která prochází bodem P, prochází zároveň bodem A. Odtud *konstrukce* (obr. 57a):

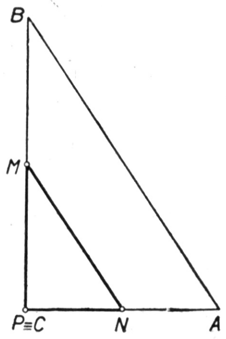
Opišme kružnici $k \equiv (N, NP)$ a bodem P veďme přímku $p \perp MP$. Jestliže přímka p protne kružnici k v bodě A různém od P, potom sestrojme průměr ANC kružnice k, kde C je druhý průsečík přímky NA s kružnicí k. Na přímce MC sestrojme bod B tak, aby bod M byl středem úsečky CB. Pak je ABC hledaný trojúhelník.

Důkaz. Podle konstrukce platí: (1) Bod A leží na kolmici p, takže AP je výškou trojúhelníka ABC. (2) Bod N je středem úsečky AC. (3) Bod M je středem úsečky BC.

Diskuse. Přímka p není tečnou kružnice k (takže je $A \not\equiv P$), neboť jinak by bod M ležel na přímce NP, což je proti předpokladu, že je dán trojúhelník MNP.



Obr. 57a



Obr. 57b

Bod B se dá sestrojit právě tehdy, je-li $M \not\equiv C$. Jestliže je M bodem kružnice k (tj. $MN = NP$), nemá úloha řešení.

V našem rozboru jsme předpokládali, že je $P \not\equiv C$, tj., že není $\sphericalangle NPM = 90°$; v tomto případě však je jediné řešení, jak se snadno zjistí (viz obr. 57b).

Podle řešení Jana Šenftuka, 8.b tř. osš „Julia Fučíka", Kladno.

3. Pomyslite si, že máte napísať všetky prirodzené čísla od 1 do 5555. Koľko deviatok pritom napíšete?

Riešenie. K napísaniu čísel od 1 do 100 potrebujeme 20 deviatok. Ten istý počet deviatok je potrebný k napísaniu čísel od 101 do 200. To isté platí o číslach od 201 do 300, od 301 do 400, . . ., od 701 do 800. K napísaniu čísel od 1 do 800 treba 20 . 8 deviatok, t. j. 160 deviatok.

Ak však píšeme čísla od 801 do 900, potrebujeme 21 deviatok (číslo 900 potrebuje k zápisu jednu deviatku).

Každé číslo od 901 do 999 (je ich 99) sa začína deviatkou; podľa predošlého (pozri čísla od 1 do 99) treba teda 20 + 99, t. j. 119 deviatok

K napísaniu čísel od 1 do 1000 treba teda 160 + + 21 + 119 = 300 deviatok.

Rovnaký počet deviatok treba k napísaniu čísel od 1001 do 2000, ďalej od 2001 do 3000, ďalej od 3001 do 4000 a konečne od 4001 do 5000. Teda celkom 300 . 5 = 1500 deviatok.

K napísaniu čísel od 5001 do 5500 treba ten istý počet deviatok, ako k napísaniu čísel od 1 do 500, t. j. 20 . 5 = 100 deviatok.

K napísaniu čísel od 5501 do 5555 potrebujeme ten istý počet deviatok ako k napísaniu čísel od 1 do 55, t. j. 5 deviatok.

K napísaniu čísel od 1 do 5555 treba preto

$$1500 + 100 + 5 = 1605 \text{ deviatok}.$$

Tým je úloha rozriešená.

4. V našem obrázku 58 jsou dány soustředné kružnice $k_1 \equiv (S, x)$, $k_2 \equiv (S, y)$, přičemž je $x > y$.

Úsečka AB je průměrem kružnice k_1, bod C leží na kružnici k_2 a uvnitř úsečky SB. Nad úsečkami AC, BC jako průměry opíšeme kružnice k_3, k_4.

Součet $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ obsahů vodorovně vyčárkovaných ploch je roven součtu $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ obsahů ploch vyčárkovaných svisle. Dokažte.

Řešení (viz obr. 58). Obsahy kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 označme pořadě p_1, p_2, p_3, $p_4 = \boldsymbol{N}$. Poloměry kružnic k_3, k_4 jsou pořadě $r_3 = \frac{1}{2}AC$, $r_4 = \frac{1}{2}CB$, kde $AC = AS + SC = x + y$, $CB = SB - SC = x - y$; proto je

$$r_3 = \tfrac{1}{2}(x + y), \qquad r_4 = \tfrac{1}{2}(x - y)\,.$$

Je proto

$$p_1 = \pi x^2,\ p_2 = \pi y^2,\ p_3 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2,\ p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2.$$

Je tedy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 &= p_1 - p_3 - p_4 = \\ &= \frac{\pi}{4}\,[4x^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2] = \\ &= \frac{\pi}{4}\,[2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2}(x^2 - y^2)\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Dále je

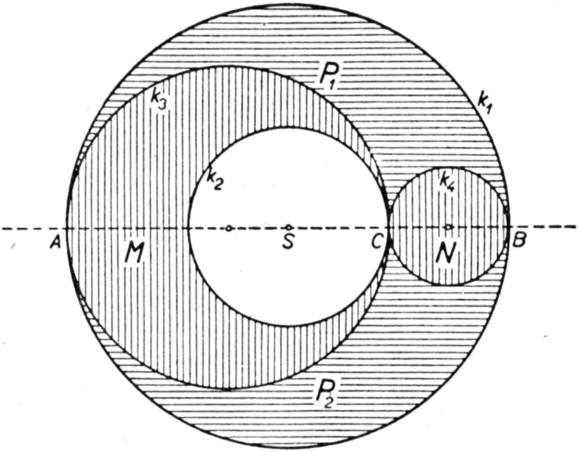
$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= p_3 - p_2 = \frac{\pi}{4}(x + y)^2 - \pi y^2 = \\ &= \frac{\pi}{4}\,[(x + y)^2 - 4y^2]\,,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{N} = p_4 = \frac{\pi}{4}(x - y)^2$$

a tedy

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = \frac{\pi}{4}\,[(x + y)^2 - 4y^2 + (x - y)^2] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,[2x^2 - 2y^2] = \frac{\pi}{2}\,(x^2 - y^2)\,. \qquad (2)$$



Obr. 58

Porovnáním výsledků (1), (2) vyplývá

$$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Obdobné řešení vypracoval
V. Klouček, 8. tř. 81. osš, Praha 13.

5. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC byla menší než odvěsna CA. Uvnitř úsečky BC zvolte bod X a uvnitř úsečky AB najděte bod Y tak, že platí $XY = XB$. Bodem Y veďte kolmici k přímce XY; její průsečík s přímkou AC označte Z.

Přesvědčte se o tom, že obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je stále týž, ať zvolíme bod X kdekoli uvnitř úsečky BC.

Vypočtěte tento obvod pomocí stran trojúhelníka ABC.

Řešení (viz označení z obr. 59). **I.** Označme $BC = a$, $CA = b$; podle textu úlohy je

$$a < b\,. \tag{1''}$$

Bod X jsme podle textu úlohy zvolili uvnitř úsečky BC. Mysleme si, že sestrojení bodů X, Z lze provést tak, jak je naznačeno v obrázku 58, tj., že je

$$XY = XB\,, \tag{*}$$

přičemž bod Y leží uvnitř úsečky BA, a dále, že je

$$YZ \perp XY\,,$$

přičemž bod Z padne dovnitř úsečky CA. Podle (*) je trojúhelník XBY rovnoramenný a úhly β, β' při jeho základně BY jsou shodné; je tedy

$$\beta' = \beta\,. \tag{1}$$

Dále podle konstrukce kolmice k je

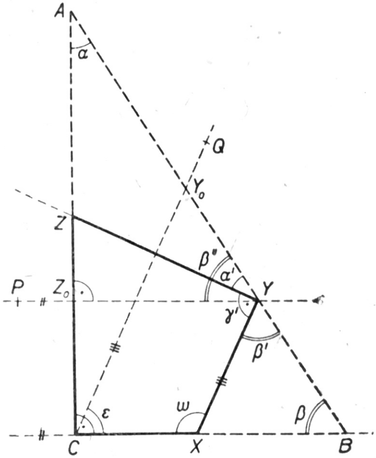
$$\gamma' = 90°\,. \tag{2}$$

Vypočítejme nyní velikost úhlu α'. Víme, že v daném trojúhelníku ABC je $\gamma = 90°$ a tedy

$$\alpha + \beta = 90° \qquad (3)$$

(součet ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku je 90°). Je tudíž

$$\alpha' = 180° - \beta' - \gamma'$$



Obr. 59

neboli [dosazujeme sem ze vztahů (1), (2)]

$$\alpha' = 180° - \beta - 90°$$

a tedy

$$\alpha' = 90° - \beta .$$

Ze vztahu (3) plyne, že $\alpha = 90° - \beta$; odtud porovnáním obou posledních vztahů dostáváme

$$\alpha' = \alpha \,. \tag{3'}$$

Z této rovnosti (podle známé věty o úhlech a protějších stranách trojúhelníka) plyne pro trojúhelník AYZ, že je

$$ZY = ZA \,. \tag{**}$$

Nyní vyjádříme obvod p čtyřúhelníka $CXYZ$; je

$$p = (CX + XY) + (CZ + ZY) \,.$$

Dosaďme sem za XY ze vztahu (*) a za ZY ze vztahu (**); dostaneme

$$p = (CX + XB) + (CZ + ZA) \,. \tag{4}$$

Podle obr. 59 však platí

$$CX + XB = CB = a \,,$$
$$CZ + ZA = CA = b \,.$$

Dosaďme tyto výsledky do (4); dostaneme

$$p = a + b \,.$$

Odpověď. Obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je roven součtu odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníka ABC.

II. Než ukončíme řešení, musíme ještě dokázat, že při volbě bodu X uvnitř úsečky CB (viz obr. 59)

[1] bod Y padne dovnitř úsečky AB ,

[2] bod Z padne dovnitř úsečky CA .

Důkaz (viz označení z obrázku 59). V polorovině BCA sestrojme polopřímku $CQ \parallel XY$. Vnější úhel ω rovnoramenného trojúhelníka XBY je roven $\beta + \beta'$

a protože je $\beta' = \beta$ [viz (1)], platí

$$\omega = 2\beta\,. \qquad (5)$$

O přilehlých úhlech ε, ω mezi rovnoběžkami CQ, YX platí $\varepsilon + \omega = 180°$; dosaďme sem ze vztahu (5). Dostaneme $\varepsilon + 2\beta = 180°$; proto je

$$\varepsilon = 2\alpha\,,$$

neboť $2\,(\alpha + \beta) = 2\,.\,90°$ [viz vztah (3)]. Ale $\alpha < 45°$, $\beta > 45°$, neboť v daném trojúhelníku ABC je $a < b$, $\gamma = 90°$; je tedy $\varepsilon = 2\alpha < 90°$ a polopřímka CQ leží v pravém úhlu γ. Proto společný bod Y_0 polopřímky CQ a úsečky AB padne dovnitř této úsečky. Leží tedy celá přímka $XY \parallel CY_0$ uvnitř poloroviny CY_0B a bod Y padne tudíž vždy dovnitř úsečky Y_0B a tím také dovnitř úsečky AB.

Nyní sestrojme přímku $YP \parallel BC$; je tedy $CA \perp \perp YP$. Protože přímka YP leží uvnitř poloroviny BCA a protože bod Y je vnitřním bodem úsečky AB, padne společný bod Z_0 kolmic CA, YP dovnitř úsečky CA. V trojúhelníku AYZ_0 je úhel $\sphericalangle Z_0 = 90°$ a úhel $\beta'' = 90° - \alpha$, tj. $\beta'' = \beta$. Protože je $\alpha < \beta$, je podle (3′) též $\alpha' < \beta''$ a polopřímka YZ leží v úhlu β'' a tudíž bod Z padne dovnitř úsečky Z_0A; tato úsečka však padne do úsečky CA a proto bod Z leží též uvnitř úsečky CA, což jsme měli dokázat.

Tím je důkaz proveden.

Podobné řešení podal Karel Tregl,
8. tř. osš, Střítež nad Bečvou.

6. Máme 12 stejných kostek, z nichž každá je kvádrem o rozměrech 2 cm, 3 cm a 4 cm. Ze všech těchto kostek sestavíme velký kvádr tak, že přikládáme vždy shodné stěny dvou kostek k sobě tak, aby se jedna stěna s druhou kryla. Takových velkých kvádrů je možno sestavit větší počet. Udejte rozměry všech těchto kvádrů. Zároveň rozhodněte, které z nich je možno sestavit několika odlišnými způsoby.

Řešení. Všechna čísla, o nichž budeme v dalším mluvit, jsou přirozená. Označme x, y, z rozměry některého z velkých kvádrů, který dostaneme skládáním kostek; x, y, z jsou přirozená čísla, jak snadno usoudíme. Přitom x označme rozměr, který vzniká tím, že přikládáme ty hrany kostek, které mají délku $a = 2$ cm; podobně y je rozměr, který vzniká přikládáním hran délky $b = 3$ cm a potom je z ten rozměr, který dostaneme přikládáním hran délky $c = 4$ cm. Je tedy nutně x součinem čísla 2 a jakéhosi čísla x_1, které je přirozené (toto číslo udává, kolik kostek jsme ve směru hrany délky x k sobě přiložili). Je proto $x =$ $= 2x_1$; podobně je $y = 3y_1$, $z = 4z_1$, takže máme

$$x = 2x_1, \qquad y = 3y_1, \qquad z = 4z_1\,. \tag{1}$$

Čísla x_1, y_1, z_1 pořadě udávají, že jsme hranu délky $a = 2$ cm „nastavili“ v celkovém počtu x_1, hranu $b = 3$ cm v počtu y_1 a hranu c v počtu z_1. (Dále neuvádíme již rozměry; velikosti délek udáváme v centimetrech, objemy kvádrů v cm^3.) Objem jedné kostky je $2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$ (cm^3), kostek je 12; proto objem V velkého kvádru je

$$V = 24 \,.\, 12 \,. \tag{2}$$

Protože velký kvádr má podle (1) rozměry x, y, z, je jeho objem xyz neboli podle (1)

$$V = 2x_1 \,.\, 3y_1 \,.\, 4z_1$$

a tedy

$$V = 24x_1y_1z_1 \,. \tag{3}$$

Když porovnáme výsledky (2), (3), dostaneme

$$x_1y_1z_1 = 12 \,. \tag{4}$$

Naším úkolem je najít tři přirozená čísla x_1, y_1, z_1 taková, aby měla součin 12. Nehledíme-li na pořádek činitelů, existují právě tyto čtyři rozklady čísla 12 v součin tří přirozených čísel: $1 \,.\, 1 \,.\, 12$; $1 \,.\, 2 \,.\, 6$; $1 \,.\, 3 \,.\, 4$; $2 \,.\, 2 \,.\, 3$; přitom v našem případě je třeba pro součin $x_1y_1z_1$ v těchto rozkladech vystřídat všechna možná pořadí činitelů. Příslušné kvádry budeme hledat postupně, jak je patrno z tabulky č. 1; v ní uvádíme nejprve pořadové číslo kvádru, dále čísla x_1, y_1, z_1 a konečně rozměry velkého výsledného kvádru, který k těmto číslům přísluší.

Tabulka

Kvádr číslo	Originál typu	x_1	y_1	z_1	x $(2x_1)$	y $(3y_1)$	z $(4z_1)$	Počet způsobů, jimiž lze takový kvádr složit
1	I	1	1	12	2	3	48	1
2	II	1	12	1	2	36	4	1
3	III	12	1	1	24	3	4	2
4	IV	1	2	6	2	6	24	1
5	V	1	6	2	2	18	8	1
6	(III)	2	1	6	4	3	24	viz č. 3
7	VI	2	6	1	4	18	4	1
8	VII	6	1	2	12	3	8	2
9	VIII	6	2	1	12	6	4	3
10	IX	1	3	4	2	9	16	1
11	X	1	4	3	2	12	12	1
12	XI	3	1	4	6	3	16	1
13	(VIII)	3	4	1	6	12	4	viz č. 9
14	(VII)	4	1	3	8	3	12	viz č. 8
15	XII	4	3	1	8	9	4	2
16	(VIII)	2	2	3	4	6	12	viz č. 9
17	(XII)	2	3	2	4	9	8	viz č. 15
18	XIII	3	2	2	6	6	8	1
	13 typů							18 případů

Výsledek. Lze tedy z daných kostek složit 18 kvádrů, ale některé z nich mají stejné rozměry; je 13 kvádrů, které nemají stejné rozměry, tj. nejsou shodné. Počet způsobů, jimiž lze kvádr určitých rozměrů z kostek složit, je uveden v posledním sloupci tabulky.

Obdobná řešení podali Monika Fetterová, 8. tř. 81. osš, Praha 13 a Karel Tregl, 8. tř. osš, Střítež n. Bečvou, který zhotovil i příslušné modely.

9. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D*

1. Je dán výraz

$$\frac{a^3 - b^2c - bc^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3 - c^2a - ca^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3 - a^2b - ab^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Zjednodušte jej.

Co musí platit o číslech a, b, c, aby daný výraz měl smysl?

Řešení. I. Označme V daný výraz. Jmenovatelé jeho tří zlomků jsou

$$\left.\begin{aligned} x &= (a-b)(a-c) = -(a-b)(c-a), \\ y &= (b-a)(b-c) = -(b-c)(a-b), \\ z &= (c-a)(c-b) = -(c-a)(b-c). \end{aligned}\right\} (1)$$

Z pravých stran těchto rovností vidíme, že tyto výrazy vznikly jako součiny vždy dvou z těchto tří čísel

$$a - b, \quad b - c, \quad c - a$$

a třetího čísla, jímž je číslo -1. Proto výraz

$$n = (a - b)(b - c)(c - a)$$

je společným násobkem čísel (1). Přitom platí

$$\left.\begin{aligned} n &= -x(b - c), \\ n &= -y(c - a), \\ n &= -z(a - b). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Abychom zlomky daného výrazu V uvedli na společného jmenovatele, rozšíříme je pořadě čísly

$$-(b - c), \quad -(c - a), \quad -(a - b).$$

Dostaneme

$$V = -\frac{1}{n}[(a^3 - b^2c - bc^2)(b - c) + (b^3 - c^2a - ca^2)(c - a) +$$

$$+ (c^3 - a^2b - ab^2)(a - b)] = -\frac{1}{n} \cdot U,$$

kde

$$\begin{aligned} U = a^3b - b^3c - b^2c^2 - a^3c + b^2c^2 + bc^3 + \\ + b^3c - ac^3 - a^2c^2 - ab^3 + a^2c^2 + a^3c + \\ + ac^3 - a^3b - a^2b^2 - bc^3 + a^2b^2 + ab^3 = \\ = a^3b - a^3b + b^2c^2 - b^2c^2 + bc^3 - bc^3 + \\ + b^3c - b^3c + a^2c^2 - a^2c^2 + a^3c - a^3c + \\ + ac^3 - ac^3 + a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3 - ab^3 = 0, \end{aligned}$$

tj. $U = 0$.

Je tedy
$$V = -\frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$
pro všechna čísla a, b, c, pro která má každý ze zlomků daného výrazu význam.

II. Jestliže jmenovatel některého zlomku výrazu V je roven nule, ztrácí výraz V smysl. Ptáme se tedy, pro která čísla a, b, c je některé z čísel x, y, z [viz (1)] rovno nule. Ze vztahů
$$(a - b)(c - a) = 0\,,$$
$$(b - c)(a - b) = 0\,,$$
$$(c - a)(b - c) = 0$$
plyne, že musí platit jedna z těchto rovností:
$$a - b = 0, \quad b - c = 0, \quad c - a = 0$$
neboli jedna z rovností
$$a = b, \quad b = c, \quad c = a\,. \tag{3}$$
Platí-li jedna z uvedených rovností, jsou dvě z čísel x, y, z [viz (1)] rovna nule; tím ztrácejí dva zlomky ve výrazu V smysl.

Jestliže neplatí ani jeden vztah (3), má výraz V smysl.

Odpověď. Daný výraz V má smysl pro každá tři čísla a, b, c, z nichž žádná dvě si nejsou rovna; pro tato čísla je $V = 0$. Jsou-li dvě z čísel a, b, c sobě rovna, ztrácí výraz V smysl.

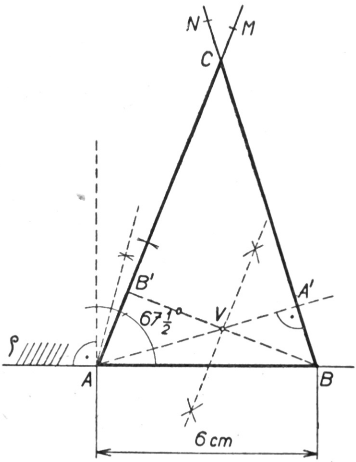
Řešení podala P. Goliášová, 8. tř.
2. jsš, Gottwaldov.

2. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $AB = 6$ cm, $\sphericalangle CAB = 67\frac{1}{2}°$, ak viete, že priesečník všetkých troch výšok tohto trojuholníka ABC rozpoľuje výšku vedenú vrcholom B.

Riešenie. *Rozbor.* Myslime si, že trojuholník ABC v obr. 60 vyhovuje požiadavkám úlohy, t. j. že platí

$$AB = 6 \text{ cm}, \quad \sphericalangle CAB = 67\tfrac{1}{2}°, \quad VB = VB', \qquad (1)$$

kde V je priesečník výšok a B' je päta výšky vedenej bodom B na stranu CA. Potom je $BC \perp AV$. Podľa toho urobíme *konštrukciu:*



Obr. 60

Zvolíme úsečku AB dĺžky 6 cm. Jednu z polrovín vyťatých priamkou AB označíme ϱ. V polrovine ϱ zostrojíme euklidovsky (pomocou pravítka a kružidla) uhol $\sphericalangle MAB = 67\frac{1}{2}°$. Bodom B zostrojíme kolmicu k priamke AM a označíme B' jej pätu. Zostrojíme stred V úsečky BB'. Bodom B zostrojíme kolmicu k priamke AV a označíme na nej bod N, ktorý leží vnútri polroviny ϱ. Spoločný bod C polpriamok AM, BN je tretí vrchol hľadaného trojuholníka.

Dôkaz. Podľa konštrukcie o trojuholníku ABC platia vzťahy (1); ďalej je $BB' \perp AC$, $AA' \perp BC$, takže priesečník V priamok AA', BB' je priesečníkom výšok trojuholníka ABC.

Diskusia. Uhol $\sphericalangle MAB = 67\frac{1}{2}°$ je ostrý; preto bod B' leží vnútri polpriamky AM [pozri učebnicu Geometrie pro 7. roč., vydanie z r. 1955, str. 112, príklad 17]. Bod B' a s ním aj stred V úsečky BB' leží preto vnútri polroviny ϱ. Bod V a s ním polpriamka AV leží v uhle $\sphericalangle BAM$; je teda uhol $\sphericalangle BAV$ menší než $67\frac{1}{2}°$ a preto pravouhlý trojuholník ABA' s preponou AB leží v polrovine ϱ. Pritom je uhol $\sphericalangle ABA'$ tretím vrcholom pravouhlého trojuholníka ABA' a je teda ostrý. Súčet ostrých uhlov $\sphericalangle BAM$, $\sphericalangle ABA'$ je preto menší než 180°. Z toho podľa Euklidovej axiómy vyplýva, že polpriamky AM, BN

majú v polrovine ϱ spoločný bod C. Trojuholník ABC sa teda z daných prvkov dá zostrojiť. Pri zvolenom umiestení sa teda dá zostrojiť jediný trojuholník ABC.

Tým je riešenie úlohy hotové.

Pekné riešenie vypracovala Adéla Benešová, 8. tr. 5. osš, Gottwaldov a ďalej Pavel Bureš, 8. tr. školy pri Gottwaldovej detskej liečebni v Luži-Košumberku.

3. Narysujte pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s preponou $AB = 0{,}7$ dm. Okolo bodov A a B opíšte kružnice s polomerom $\frac{1}{2}AB$. Označte x obsah (v dm^2) tej časti trojuholníka ABC, ktorá leží zvonku oboch týchto kružníc.

a) Vypočítajte číslo x.

b) Koľko percent z obsahu trojuholníka ABC je obsah x?

Riešenie (obr. 61). a) Obsah P trojuholníka ABC je

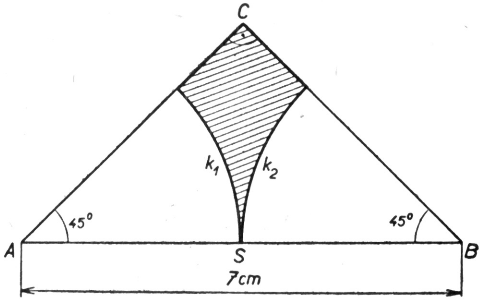
$$P = \tfrac{1}{2}AB \,.\, SC\,,$$

kde $AB = 0{,}7$, $SC = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7$. Je teda

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}7\,,$$

čiže $$P = \tfrac{1}{4} \cdot 0{,}7^2 . \tag{1}$$

Výseky so stredmi A, B majú polomer $r = \frac{1}{2}AB = = \frac{1}{2} . 0{,}7$. Ich stredové uhly sú 45°. Súčet oboch výsekov je štvrťkruh s obsahom



Obr. 61

$$Q = \tfrac{1}{4}\pi r^2 = \tfrac{1}{4}\pi \left(\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}7\right)^2 = \tfrac{1}{4}\pi \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 0{,}7^2 = $$
$$= \tfrac{1}{16}\pi . 0{,}7^2 ,$$

t. j.

$$Q = \tfrac{1}{16}\pi . 0{,}7^2 .$$

Obsah $x = P - Q$, čiže

$$x = \tfrac{1}{16} \cdot 0{,}7^2(4 - \pi) . \tag{2}$$

Platí

$$4 - \pi \doteq 4 - 3{,}1416 = 0{,}8584 \tag{2'}$$

a teda

$$x \doteq \tfrac{1}{16} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}8584 = \tfrac{1}{16} \cdot 0{,}49 . 0{,}8584 .$$

Výpočty:

$$
\begin{array}{r}
0{,}49\ .\ 0{,}8584 \\
\hline
3\ 4336 \\
77256 \\
\hline
0{,}4\ 20616
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
0{,}4206\ 16 : 16 = 0{,}026\ 288\ 5 \\
\quad 100 \\
\qquad 46 \\
\qquad 141 \\
\qquad\ \ 136 \\
\qquad\quad 80
\end{array}
$$

$$x \doteq 0{,}0262885 \doteq 0{,}0263\ (\mathrm{dm}^2)\,.$$

Odpoveď. Obsah $x \doteq 0{,}0263\ \mathrm{dm}^2$, t. j. asi $2{,}6\ \mathrm{cm}^2$.

b) Označme p hľadaný počet percent. Percentová časť je daná vzťahom (2), základ P je daný vzťahom (1). Platí

$$p = \frac{x}{P} \cdot 100 = 100x \cdot \frac{1}{P}\,. \tag{3}$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že

$$\frac{1}{P} = \frac{4}{0{,}7^2}\,. \tag{4}$$

Dosaďme zo vzťahov (2), (4) do vzťahu (3); dostaneme

$$p = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot 0{,}7^2\,(4 - \pi) \cdot \frac{4}{0{,}7^2} = 25(4 - \pi)\,.$$

Podľa (2′) je teda

$$p \doteq 25\ .\ 0{,}8584\,.$$

Výpočet:

$$
\begin{array}{r}
25\ .\ 0{,}8584 \\
\hline
1\ 7168 \\
42920 \\
\hline
21{,}4600
\end{array}
$$

Je teda $p \doteq 21{,}46 \doteq 21{,}5$.

Odpoveď. Obsah x uvažovaného obrazca je asi 21,5% obsahu daného trojuholníka ABC.

Riešenia podali Juraj Milian, 8. tr. jsš, Štúrovo a B. Martišová, 8. tr. 4. osš, Gottwaldov.

4. Pavel měl u sebe přesně 40 Kčs (vesměs v papírových penězích). Chtěl si koupit knížku za 30 Kčs. Nemohl ji však zaplatit, protože prodavač neměl nazpět drobné a částka 30 Kčs se nedala Pavlovými penězi vyplatit.

Určete, kolik korun, tříkorun, pětikorun atd. měl Pavel u sebe. Odpověď odůvodněte.

Řešení. I. V dalším značka $^3/_{10}$ znamená tři desetikoruny; podobně $^4/_3$ značí čtyři tříkoruny a $^5/_1$ značí pět jednokorunových státovek.

Zjistíme všechny možnosti, jimiž lze ze čtyřiceti korun (v československých papírových penězích) vyplatit částku 10 Kčs nebo částku 30 Kčs; částka 10 Kčs by totiž po zaplacení nákupu Pavlovi zbyla. Nebudeme však všechny tyto možnosti vyhledávat se vší zevrubností, spokojíme se s určitými skupinami možností, kdy lze provést výplatu 30 Kčs popřípadě 10 Kčs (ostatně viz tabulku č. 1).

Vyjdeme od takové situace, kdy je počet papírových peněz co nejmenší, takže k sestavení částky 40 Kčs užíváme peněz co největších. Pod názvem např. „možnost č. 1“ rozumíme řadu možností, kdy je mezi penězi $^1/_{25}$, $^1/_{10}$ a kdy nás další peníze nezajímají; stejně tomu je i u dalších možností.

Při našich úsudcích užijeme několikrát této věty ***P***: „Máme-li částku alespoň 10 Kčs v tříkorunách a v jednokorunách, přičemž počet jednokorun je alespoň jedna, potom můžeme vyplatit částku 10 Kčs.“

Důkaz. Představme si, že postupně z dané částky vytváříme hromádky po třech korunách (to znamená, že na hromádce je buď jedna tříkoruna anebo tři jednokoruny); pak na poslední hromádce jsou buď tři koruny nebo jen dvě anebo pouze jedna. Přitom můžeme vytvoření hromádek provést tak, že tu jednokorunovku, která podle předpokladu je v dané částce (viz předpoklad naší věty ***P***), zařadíme právě do poslední hromádky. Protože máme částku alespoň 10 Kčs, vzniknou nejméně 4 hromádky, přičemž jedině poslední hromádka může být neúplná. Vezmeme 3 první hromádky a připojíme k nim jednu jednokorunovku z poslední hromádky; tím vznikne hledaná částka 10 Kčs, čímž je důkaz věty ***P*** proveden.

II. Řešení dané úlohy. V připojené tabulce máme vypsány možnosti složení Pavlových peněz. Otazníky v tabulce značí zcela určité přirozené číslo nebo nulu; jeden takový řádek přitom popřípadě značí řadu mož-

Tabulka

Pořadové číslo možnosti	Máme tento počet					Způsob jak vyplatíme částku		Poznámka
	25-korun	10-korun	5-korun	3-korun	1-korun	10 Kčs	30 Kčs	
1	1	1	?	?	?	1/10		
2	1	0	alespoň 1	—	—		1/25 + 1/5	
3	1	0	0	právě 5	0	nejde	nejde	To je právě hledaný případ, kdy nelze vyplatit ani 30 Kčs ani 10 Kčs
4	1	0	0	? (méně než 5 kusů)	? (alespoň 1 kus)	podle věty ***P***		Máme alespoň 10 Kčs ve 3-korunách a v 1-korunách; viz větu ***P***
5	0	alespoň 1	?	?	?	1/10		
6	0	0	alespoň 2	?	?	2/5		
7	0	0	právě 1	?	?*)	podle ***P***		*) Pavel má právě 1/5 a ještě 35 Kčs (tj. tříkoruny a jednokoruny); nemůže mít jen samé tříkoruny (tj. má alespoň 1/1).
8	0	0	0	?	?**)	podle ***P***		**) Pavel má jen tříkoruny a jednokoruny, ale má nutně alespoň 1/1.

ností, neboť otazníky lze různým způsobem vhodně doplnit, aby hodnota peněz byla v řádku právě 40 Kčs.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány. Podle tabulky Pavel měl tedy právě jednu dvacetipětikorunu a 5 tříkorun; skutečně je

$$25 + 15 = 40\,.$$

Částku 30 Kčs však Pavel nemůže ze svých peněz vyplatit, neboť je $25 + 3 = 28$ a $25 + 3n > 30$ pro přirozené číslo $n > 1$. Tím je řešení úlohy provedeno.

Jiný postup řešení. I. Dokážeme, že situace líčená v textu úlohy může nastat jedině tehdy, má-li Pavel $^1/_{25}$.

Důkaz. Předpokládejme, že nemá $^1/_{25}$; dokážeme, že může vyplatit 10 Kčs nebo 30 Kčs.

Má-li alespoň $^1/_{10}$ nebo alespoň $^2/_5$, může vyplatit 10 Kčs.

Má-li $^1/_5$ a nemá ani $^1/_{25}$ ani $^1/_{10}$, má částku 35 Kčs ve tříkorunách a korunách; protože je $35 = 33 + 2$, musí mít alespoň $^2/_1$. Ze zbytku peněz (33 Kčs) si udělá hromádky po 3 Kčs (buď pomocí $^1/_3$ nebo $^3/_1$) vezme 3 hromádky a $^1/_1$, čímž dostane 10 Kčs.

Nechť nemá ani $^1/_{25}$ ani $^1/_{10}$ ani $^1/_5$, tj. má jen tříkoruny a koruny. Protože je $40 = 39 + 1$, má alespoň $^1/_1$ a stejně jako v předchozím odstavci pomocí tříkorunových hromádek a $^1/_1$ vytvoří částku 10 Kčs.

Tím je důkaz proveden.

II. Nechť Pavel má $^1/_{25}$.

Má-li $^1/_{10}$ nebo alespoň $^1/_5$, může vyplatit částku 10 Kčs, popřípadě 30 Kčs (je $25 + 5 = 30$).

Nechť nyní má $^1/_{25}$, ale nemá ani $^1/_{10}$ ani $^1/_5$, tj. má jen tříkoruny a koruny. Má-li alespoň $^1/_1$, tj. má $^1/_{25}$ a $^1/_1$, tedy dohromady 26 Kčs, zbývá mu 14 Kčs; z této částky utvoří 3 tříkorunové hromádky a ke třem z nich připojí $^1/_1$, takže může vyplatit 10 Kčs. Zbývá nám tedy možnost, že nemá ani $^1/_1$, takže musí mít $^1/_{25}$ a $^5/_3$.

Tu platí skutečně $25 + 3 \,.\, 5 = 40$.
Částku 10 Kčs nelze vyplatit pomocí tříkorun a proto nelze vyplatit ani částku 30 Kčs.

Odpověď. Pavel měl dvacetipětikorunu a pět tříkorun.