V úloze č. 9 (jejíž první část byla důkazová) šlo v podstatě také o technickou záležitost: rozstříhat vypuklý pětiúhelník podél jeho úhlopříček a popsat vzniklé útvary.

Některé úlohy V. ročníku se ukázaly méně vhodné. Tak podle zpráv z okresů špatně dopadla úloha č. 4 o páté mocnině přirozeného čísla. Přes to, že byl v textu úlohy dán návod, ukázal se požadovaný důkaz jako příliš obtížný pro žáky 8. tříd.

Nyní ještě několik slov o nedostatcích, které se projevily v žákovských pracích kategorie D. Podle zpráv z okresů asi třetina žáků neumí dobře rýsovat. Rysy byly neúplné nebo neměly žádný popis a kótování; budily vůbec dojem, že byly prováděny ve spěchu.

Pokud se týče numerického počítání, upozorňují České Budějovice, že nejvíce chyb nadělají žáci při dělení. Logický úsudek ustupuje u mnoha řešitelů často do pozadí před šablonovitým počítáním; žák se hlavně zajímá „kolik vyšlo“, místo aby si kladl otázky „proč“ a „jak“. Doufáme, že nedostatky, které se takto prostřednictvím matematické olympiady dostaly na program širších učitelských shromáždění, se našim učitelům podaří postupně odstranit.

Závěrem děkujeme všem pracovníkům okresních výborů MO a všem učitelům matematiky, kteří se o zdar soutěže přičinili za jejich obětavou práci, a úspěšným řešitelům v kategorii D přejeme, aby se dobře umístili i v následujících ročnících naší soutěže.

IV. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. Úlohy I. kola kategorie A.

1. Nazveme střední příčkou čtyrstěnu $ABCD$ úsečku, která spojuje středy dvou protějších hran čtyrstěnu (tedy na př. hran AB a CD).

Dokažte:

a) Všechny tři střední příčky čtyrstěnu se navzájem půlí.

b) Jestliže o hranách čtyrstěnu $ABCD$ platí

$$AB = CD,\ AC = BD,\ AD = BC,$$

potom jsou jeho střední příčky navzájem kolmé.

c) Jestliže střední příčky čtyrstěnu $ABCD$ jsou navzájem kolmé, potom platí

$$AB = CD,\ AC = BD,\ AD = BC.$$

Řešení. Užijeme označení z obr. 1, kde M, N, P, Q_1, Q_2, Q_3 jsou středy hran čtyrstěnu $ABCD$.

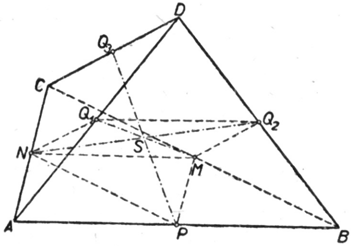
a) Dokážeme, že úsečky MQ_1, NQ_2 mají společný bod S, který je středem každé z nich.

Důkaz. Úsečka MN je střední příčkou trojúhelníka ABC a přísluší ke straně AB; proto platí

$$MN \parallel AB,\ MN = \tfrac{1}{2} \,.\, AB. \tag{1}$$

Podobně úsečka Q_1Q_2 je střední příčkou trojúhelníka ABD a přísluší ke straně AB; proto platí

$$Q_1Q_2 \parallel AB,\ Q_1Q_2 = \tfrac{1}{2} \,.\, AB. \tag{2}$$



Obr. 1.

Je tedy podle (1), (2)

$$MN \parallel Q_1Q_2,\ MN = Q_1Q_2; \tag{3}$$

přitom body N, Q_1 leží v poloprostoru $BCDA$. Proto jsou polopřímky MN, Q_2Q_1 souhlasných smyslů a neleží v téže přímce. Odtud a ze vztahu (3) plyne podle známé věty z planimetrie (viz učebnice Geometrie pro 8. roč., str. 167), že čtyrúhelník MNQ_1Q_2 je rovnoběžník; jeho úhlopříčky MQ_1, NQ_2 se navzájem půlí v bodě, který označíme S. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Stejně se dokáže, že i úsečky NQ_2, PQ_3 se navzájem půlí; jejich společný bod je však střed úsečky NQ_2, který jsme označili S.

Odtud plyne, že bod S je společným středem všech tří středních příček MQ_1, NQ_2, PQ_3, což jsme měli dokázat.

Protože body M, N, P jsou vrcholy trojúhelníka v rovině ABC, která neobsahuje bod S, neleží přímky SM, SN, SP v téže rovině.

b) Dokážeme, že přímky MQ_1, NQ_2 jsou navzájem kolmé.

Důkaz. Podle výsledku úlohy a) je MNQ_1Q_2 rovnoběžník se středem S. Přitom platí

$$MN = \tfrac{1}{2} \, . \, AB, \; NQ_1 = \tfrac{1}{2} \, . \, CD \tag{4}$$

($MN \parallel AB$ je střední příčkou v trojúhelníku ABC, $NQ_1 \parallel CD$ je střední příčkou v trojúhelníku ACD); podle předpokladu však je $AB = CD$, proto ze vztahu (4) plyne $MN = NQ_1$. Je tedy MNQ_1Q_2 kosočtverec; avšak úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo, proto je $MQ_1 \perp NQ_2$, což jsme měli dokázat. Stejně se dokáže, že platí $MQ_1 \perp PQ_3$, $NQ_2 \perp PQ_3$.

c) Nechť každé dvě ze středních příček MQ_1, NQ_2, PQ_3 čtyrstěnu $ABCD$ (viz obr. 1) stojí na sobě kolmo; z výsledku a) víme, že tyto tři úsečky mají společný bod S, který je středem každé z nich. Máme dokázat, že protější hrany čtyrstěnu $ABCD$ jsou shodné.

Důkaz. Podle výsledku úlohy a) je čtyrúhelník MNQ_1Q_2 rovnoběžník. Podle předpokladu úlohy je $MQ_1 \perp NQ_2$; podle známé věty z planimetrie rovnoběžník, který má kolmé úhlopříčky, je kosočtverec. Je tedy

$$MN = NQ_1.$$

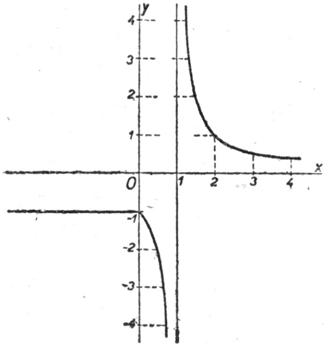
Stejně jako v úloze b) platí vztahy (4); protože je $MN = NQ_1$, plyne ze vztahů (4), že $AB = CD$, což jsme měli dokázat.

Stejně se dokáže, že platí $AC = BD$, $AD = BC$; tím je důkaz tvrzení úlohy c) proveden.

2. V rovine pravouhlých súradníc zostrojte graf funkcie

$$y = \frac{2}{x + |x| - 2}.$$

Odôvodnite urobenú konštrukciu.



Obr. 2.

Riešenie. 1. Ak je $x \geqq 0$, je $|x| = x$, teda $x + |x| - 2 = 2x - 2 = 2(x - 1)$. Ak je okrem toho $x \neq 1$, je $f(x) = \dfrac{2}{2(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$; pre $x = 1$ nie je funkcia definovaná.

2. Ak je $x < 0$, je $|x| = -x$, teda $x + |x| - 2 = x - x - 2 = -2 \neq 0$. V tomto prípade je teda $f(x) = \dfrac{2}{-2} = -1$.

Graf funkcie je na pripojenom obrázku 2. Podľa predošlého sa skladá z grafov funkcií $y = -1$ pre $x \leqq 0$, $y = \dfrac{1}{x-1}$ pre $0 \leqq x < 1$ a pre $x > 1$. Pre $x = 1$ nie je funkcia $f(x)$ definovaná.

3. Dokažte:

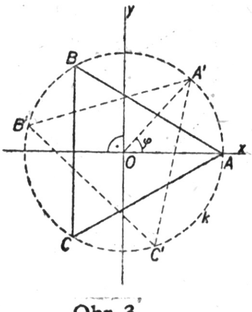
a) Jestliže obrazy komplexních jednotek a, b, c jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka, potom platí

$$a + b + c = 0.$$

b) Jestliže o komplexních jednotkách a, b, c platí vztah

$$a + b + c = 0,$$

potom obrazy čísel a, b, c jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.



Obr. 3.

Řešení. a) Nechť daný rovnostranný trojúhelník ABC má polohu jako v obr. 3. Potom o komplexních jednotkách a, b, c platí

$$a = 1, \quad b = \cos 120° + \mathrm{i} \sin 120°, \quad c = \cos 240° + \mathrm{i} \sin 240°$$

neboli

$$a = 1, \quad b = \tfrac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}), \quad c = -\tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

Pak zřejmě platí

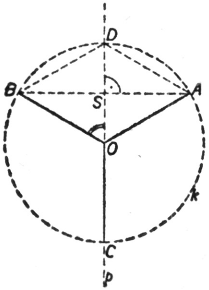
$$a + b + c = 0. \tag{1}$$

Každý jiný rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$, vyhovující podmínkám úlohy, dostaneme z trojúhelníka ABC rotací o úhel velikosti φ okolo počátku O; při tom body A', B', C' vznikly po řadě rotací bodů A, B, C. Při této rotaci přechází bod Z, který je obrazem komplexního čísla z v bod Z', který je obrazem čísla

$$z' = z(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Proto body A', B', C' jsou obrazy čísel

$$a' = a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \; b' = b(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$
$$c' = c(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{2}$$



Obr. 4.

Tu platí

$$a' + b' + c' = (a + b + c) \,.\, (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

takže vzhledem k (1) je

$$a' + b' + c' = 0, \tag{3}$$

což jsme měli dokázat. Vztahy (1), (3) potvrzují správnost tvrzení úlohy.

b) Nechť o obrazech A, B, C komplexních jednotek a, b, c platí vztah

$$a + b + c = 0; \tag{4}$$

přitom body A, B, C leží na jednotkové kružnici (obr. 4) $k \equiv (O, 1)$. Alespoň dvě z čísel a, b, c jsou různá, neboť pro $a = b = c$ ze vztahu (4) dostaneme $3a = 0$, t. j. $a = 0$, což je proti předpokladu. Nechť je na př. $a \neq b$, t. j. $A \not\equiv B$. Čísla a, b nemohou být opačná; kdyby totiž platilo $a = -b$ neboli $a + b = 0$, potom bychom ze vztahu (4) dostali $c = -(a + b)$, t. j. $c = 0$, což je proti předpokladu. Nejsou tedy body A, B, krajními body průměru kružnice k; proto je úhel $\sphericalangle AOB$ dutý. Uvažujme kosočtverec $AOBD$; bod D je obrazem komplexního čísla $d = a + b$. Protože podle (4) je $c = -(a + b)$, jsou c, d opačná čísla; protože bod C leží na kružnici k, leží i bod D na této kružnici. Bod D je tedy společným bodem osy p úsečky AB a kružnice k; označme S střed kosočtverce $AOBD$. Platí $OS = \frac{1}{2} r$, $OB = r$, takže pravoúhlý trojúhelník OBS je známý trojúhelník, v němž je $\sphericalangle OBS = 30°$, $\sphericalangle BOS = 60°$. Odtud plyne, že $\sphericalangle AOB = 120°$. Ze souměrnosti podle přímky p snadno dokážeme, že $\sphericalangle BOC = 120°$, $\sphericalangle COA = 120°$, při čemž oba tyto úhly leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou p. Z toho plyne, že $AB = BC = CA$ (souměrnost podle přímky p), což jsme měli dokázat.

Jiné řešení.

a) Obrazy čísel a, b, c označme A, B, C. Protože ABC je rovnostranný trojúhelník, jsou nejen body A, B, C, ale i čísla a, b, c vesměs různá. Ze vztahů $AB = BC = CA$ plyne (viz učebnice Trigonometrie pro 10. a 11. post. ročník, str. 20)

$$|a - b| = |b - c| = |c - a| \,. \tag{1}$$

Proto platí též

$$|a - b|^2 = |b - c|^2 = |c - a|^2$$

neboli

$$(a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = (b - c)(\bar{b} - \bar{c}) = (c - a)(\bar{c} - \bar{a}). \tag{2}$$

Přitom jsme užili jednak vztahu $z\bar{z} = |z|^2$, jednak na př. vztahu $\overline{(a - b)} = \bar{a} - \bar{b}$.

Ze vztahů (2) vynásobením dostaneme

$$a\bar{a} + b\bar{b} - (a\bar{b} + \bar{a}b) = b\bar{b} + c\bar{c} - (b\bar{c} + \bar{b}c) = c\bar{c} + a\bar{a} - \\ - (c\bar{a} + \bar{c}a).$$

Protože však je $|a| = |b| = |c| = 1$, je též

$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1 \tag{3}$$

a z předchozích vztahů dostaneme

$$a\bar{b} + \bar{a}b = b\bar{c} + \bar{b}c = c\bar{a} + \bar{c}a.$$

Odtud dostaneme tyto tři vztahy

$$a(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a}(c - b),$$

$$b(\bar{c} - \bar{a}) = \bar{b}(a - c),$$

$$c(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{c}(b - a).$$

Dosaďme sem za $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ze vztahů (3); dostaneme

$$\frac{a}{bc}(c - b) = \frac{1}{a}(c - b) \text{ atd.}$$

a protože platí $c - b \neq 0$ atd., plyne z předchozího

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{a} \quad \text{atd.,}$$

t. j.

$$a^2 = bc, \quad b^2 = ca, \quad c^2 = ab.$$

Odečtením levých i pravých stran každých dvou těchto rovností, dostaneme

$$a^2 - b^2 = - c(a - b) \text{ atd.}$$

neboli

$$(a + b)(a - b) = - c(a - b) \quad \text{atd.,}$$

a protože je $a - b \neq 0$ atd., obdržíme dále

$$a + b = -c \quad \text{atd.}$$

Každý z posledních vztahů vede k výsledku

$$a + b + c = 0, \tag{4}$$

který jsme měli dokázat.

b) Podle předpokladu platí

$$|a| = |b| = |c| = 1 \tag{5}$$

a tím i vztahy (3) a dále platí vztah (4). Přitom každá dvě z čísel a, b, c jsou od sebe různá (i různá od nuly). To dokážeme nepřímo: Nechť je $a = b$. Potom ze vztahu (4) plyne $2a + c = 0$ neboli $c = -2a$ a tedy $|c| = 2 \,.\, |a|$ čili $|c| = 2$, což je spor vzhledem ke vztahu (5). Proto je

$$a - b \neq 0, \text{ a podobně } b - c \neq 0, \; c - a \neq 0.$$

Z těchto výsledků a ze vztahů (3) snadno usoudíme, že celý postup v předchozí úloze a) lze obrátit až dospějeme ke vztahům (1). Ty však říkají, že o obrazech A, B, C čísel a, b, c platí

$$AB = BC = CA,$$

při čemž body A, B, C jsou vesměs různé. Tím je důkaz tvrzení úlohy b) proveden.

4. Je daná postupnosť $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}\,.$$

Dokážte, že táto postupnosť má najväčší člen a určte ho.

Riešenie. Pre všetky prirodzené čísla n platí zrejme $a_n > 0$. Pritom je

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = 1, \; a_3 = \frac{9}{8}, \; a_4 = 1, \; a_5 = \frac{25}{32}, \; \ldots\ .$$

Pokúsime sa dokázať, že sa členy danej postupnosti $\{a_n\}$ od člena a_3 zmenšujú, t. j. že platí

$$a_n > a_{n+1} \text{ alebo } a_n - a_{n+1} > 0$$

pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$.

Označme $d = a_n - a_{n+1}$; tu platí postupne

$$d = \frac{n^2}{2^n} - \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}},$$

$$d = \frac{2n^2 - (n^2 + 2n + 1)}{2^{n+1}},$$

$$d = \frac{n^2 - 2n - 1}{2^{n+1}}.$$

Chceme dokázať, že platí $d > 0$. To bude platiť, keď dokážeme, že čitateľ $x = n^2 - 2n - 1$ posledného zlomku je kladné číslo pre všetky $n \geqq 3$.

Platí

$$x = n^2 - 2n + 1 - 2$$

alebo

$$x = (n-1)^2 - 2.$$

Avšak pre $n \geqq 3$ je $n - 1 \geqq 2$. Druhé mocniny prirodzených čísel väčších než 1 sú väčšie než 2 a preto je číslo x skutočne kladné pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$. Teda je aj $x > 0$ pre $n \geqq 3$ a skutočne platí $a_n > a_{n+1}$ pre $n \geqq 3$.

Člen $a_3 = \frac{9}{8}$ danej postupnosti je teda jej najväčším členom, čo sme mali dokázať.

5. V rovine pravouhlých súradníc preskúmajte množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktoré vyhovujú vzťahu

$$\cos 2ax = \sin 2by, \tag{1}$$

kde a, b sú dané reálne čísla.

Urobte diskusiu vzhľadom na dané čísla a, b.

Riešenie. Daný vzťah možno písať v ekvivalentnom tvare

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2ax\right) - \sin 2by = 0\,. \tag{1'}$$

Ľavú stranu upravíme pomocou známého vzorca pre $\sin\alpha - \sin\beta$; dostaneme rovnicu

$$2\sin\left[\tfrac{1}{4}\pi - (ax + by)\right] . \cos\left[\tfrac{1}{4}\pi - (ax - by)\right] = 0. \tag{2}$$

Aby tento vzťah platil, je nutné a stačí, aby sa druhý alebo tretí činiteľ na ľavej strane rovnal nule; rozlíšime obidve možnosti.

Prípad [1]. Nech je

$$\sin\left[\tfrac{1}{4}\pi - (ax + by)\right] = 0\,. \tag{3}$$

Tento vzťah platí práve vtedy, ak je

$$\tfrac{1}{4}\pi - (ax + by) = k\pi,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Odtiaľ vyplýva

$$ax + by = \pi\left(n + \tfrac{1}{4}\right), \tag{4}$$

kde n je ľubovoľné celé číslo.

Diskusia výsledku (4):

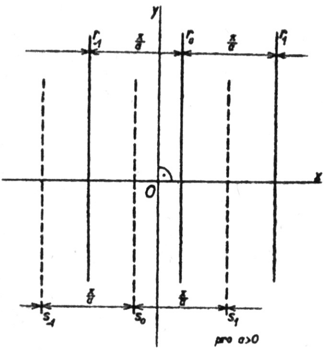
a) Ak je $a = b = 0$, ľavá strana rovnice (1) sa rovná jednej pre každé x, kdežto pravá strana sa rovná nule pre každé y. V tomto prípade rovnica (1) nemá riešenie.

b) Ak neplatí súčasne $a = 0$, $b = 0$, uvažujme dve možnosti:

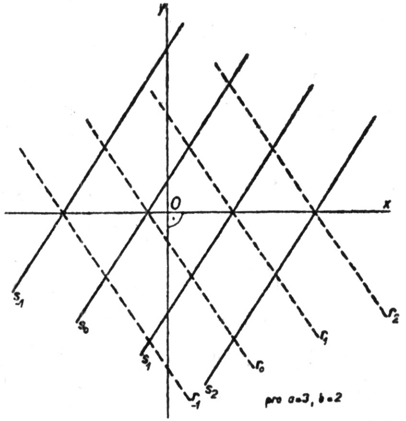
α) Nech $b = 0$, $a \neq 0$. Potom všetky riešenia x, y vzťahu (4) sú dané takto:

$x = \dfrac{\pi}{a}\left(n + \tfrac{1}{4}\right)$, kde n je ľubovoľné celé číslo, y je ľubovoľné reálne číslo.

Pre dané celé číslo n obrazom dvojíc x, y vyhovujúcich rovnici (4) v pravouhlých súradniciach x, y je priamka $r_n \perp x$. Pre všetky celé čísla n dostaneme teda sústavu rovnobežiek, kolmých na os x, prechádzajúcich bodmi $\left[x = \frac{\pi}{a}(n + \frac{1}{4})\,;\ y = 0\right]$ na osi x. Príslušný graf pre $a > 0$ je na obr. 5.



Obr. 5.



Obr. 6.

β) Nech $b \neq 0$. Potom všetky riešenia x, y vzťahu (4) sú dané takto:

x je ľubovoľné reálne číslo, $y = \frac{1}{b}\left[\pi\left(n + \frac{1}{4}\right) - ax\right]$, kde n je ľubovoľné celé číslo.

Pre dané celé číslo n je obrazom rovnice (4) priamka r_n, ktorá má smernicu $-\frac{a}{b}$ a prechádza bodom $\left[x = 0,\ y = \frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{4}\right)\right]$. Pre všetky celé čísla n dostaneme teda sústavu rovnobežiek so smernicou $-\dfrac{a}{b}$. Príslušný graf pre $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$ je na obr. 6.

Tým je prípad [1] vybavený.

P r í p a d [2]. Nech je

$$\cos\left[\tfrac{1}{4}\pi - (ax - by)\right] = 0. \tag{5}$$

Tento vzťah platí práve vtedy, ak je

$$\frac{1}{4}\pi - (ax - by) = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Stade dostávame

$$ax - by = \pi\left(n - \tfrac{1}{4}\right), \tag{6}$$

kde n je ľubovoľné celé číslo.

D i s k u s i a v ý s l e d k u (6):

a) Ak $a = b = 0$, nemá rovnica (1) riešenie.

b) Ak neplatí súčasne $a = b = 0$, uvažujme o dvoch možnostiach:

α) Nech $b = 0$, teda $a \neq 0$. Potom všetky riešenia vzťahu (6) sú dané takto:

$x = \dfrac{\pi}{a}\left(n - \tfrac{1}{4}\right)$, kde n je ľubovoľné celé číslo, y je ľubovoľné reálne číslo.

Pre dané celé číslo n je obrazom dvojíc x, y vyhovujúcich rovnici (6) priamka $s_n \perp x$. Pre všetky celé čísla n dostaneme sústavu rovnobežiek kolmých na os x; prechádzajú bodmi $\left[x = \frac{\pi}{a}(n - \frac{1}{4}); y = 0\right]$ na osi x (pre $a > 0$ pozri obr. 5).

β) Nech $b \neq 0$. Potom všetky riešenia x, y vzťahu (6) sú dané takto:

x je ľubovoľné reálne číslo, $y = \frac{1}{b}\left[ax - \pi(n - \frac{1}{4})\right]$, kde n je ľubovoľné celé číslo.

Pre dané celé číslo n je obrazom rovnice (6) priamka s_n, ktorá má smernicu $\frac{a}{b}$ a prechádza bodom $\left[x = 0; y = = -\frac{\pi}{b}(n - \frac{1}{4})\right]$.

Pre všetky celé čísla n dostaneme tedy sústavu rovnobežiek so smernicou $\frac{a}{b}$ (pre $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ pozri obr. 6).

Tým je prípad [2] vybavený.

Záver. Rovnica (1) nemá v prípade $a = b = 0$ riešenie. Inak má nekonečne mnoho riešení. Ak $a \neq 0$, $b = 0$, sú riešenia znázornené dvoma sústavami rovnobežiek kolmých na os x. Ak $b \neq 0$, sú riešenia znázornené dvoma sústavami rovnobežiek so smernicami $\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}$. Rovnobežky sústav delia rovinu na pásy rovnobežiek s rovnakými vzdialenosťami.

6. Buďte dány dva střídavé úhly $\sphericalangle BAK = \alpha$, $\sphericalangle ABL = \beta$, při čemž je $\alpha \neq \beta$. Uvnitř úsečky AB je dán bod O; označte $a = OA$, $b = OB$.

Sestrojte na přímce AK bod X různý od bodu A a na přímce BL bod Y tak, aby bod X, O, Y ležely v přímce a aby platilo $AX = BY$.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy.

Řešení. Rozbor (obr. 7, 8, 9). Předpokládejme, že úloha má řešení, t. j. že existuje přímka p, která prochází bodem O a přímky AK, BL protíná po řadě v bodech $X \not\equiv A$, Y tak, že platí $AX = BY$. Označme

$$OA = a, OB = b; \tag{1}$$

dále buďte AK, AK' a BL, BL' dvojice opačných polopřímek. Konečně označme

$$\begin{gathered}\sphericalangle BAK = \alpha,\ \sphericalangle BAK' = \alpha' = 180° - \alpha,\\ \sphericalangle ABL = \beta,\ \sphericalangle ABL' = \beta'.\end{gathered} \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že je $\alpha \neq \beta$, je $\alpha' + \beta \neq 180°$. Proto můžeme předpokládat, že platí

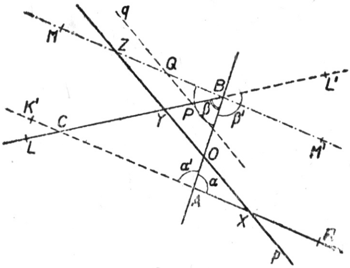
$$\alpha' + \beta < 180°; \tag{3}$$

jinak bychom zaměnili navzájem tyto dvojice názvů prvků: α, α'; β, β'; L, L'; K, K'. Ze vztahu (3) podle Eukleidova postulátu plyne, že polopřímky AK', BL mají uvnitř poloroviny ABL společný bod C, takže existuje trojúhelník ABC (viz obr. 7 až 10).

Bodem B veďme přímku $BM \parallel AK$, kde M je bod ležící uvnitř poloroviny ABL; označme BM' polopřímku opačnou k polopřímce BM. Protože je $\alpha \neq \beta$, jsou BM, BL různé přímky.

Uvažujme stejnolehlost o středu O, která převádí bod A v bod B; její koeficient je záporné číslo. Přímce AK v ní přísluší přímka BM a bodu X bod Z, který leží na přímce $BM \parallel AK$. Protože je $X \not\equiv A$, je $Z \not\equiv B$. Ze stejnolehlosti plyne $\frac{AX}{BZ} = \frac{OA}{OB}$. Odtud vzhledem k (1) dostaneme

$$\frac{BY}{BZ} = \frac{a}{b}. \tag{4}$$



Obr. 7.

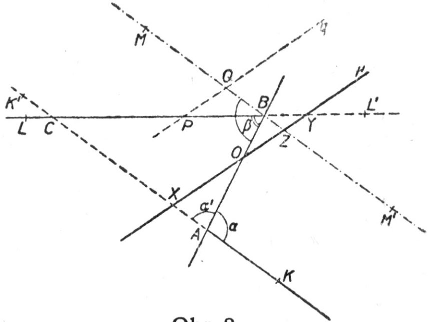
Na polopřímce BM sestrojme úsečku $BQ \simeq b$ a uvažujme stejnolehlost o středu B, v níž bodu Z přísluší bod Q. V této stejnolehlosti přímce p přísluší přímka $q \parallel p$, při čemž q prochází bodem Q; na přímce q leží obraz P bodu Y v této stejnolehlosti. Z této stejnolehlosti plyne

$$\frac{BY}{BZ} = \frac{BP}{BQ}. \tag{5}$$

Ze vztahů (4), (5) a $BQ = b$ dostaneme $BP = a$. Platí tedy nutně $BP = a$, $BQ = b$, $p \parallel PQ$. Odtud plyne konstrukce.

Konstrukce (obr. 7 až 10). Sestrojme přímku $MBM' \parallel AK$, kde M leží uvnitř poloroviny ABL; při tom je $BM \not\equiv BL$. Na polopřímkách BL, BL' sestrojme po řadě úsečky $BP = a$ (viz obr. 7, 8), $BP' = a$ (viz obr. 10). Tu jistě platí $P \not\equiv Q \not\equiv P'$, takže existují přímky $q \equiv PQ$, $q' \equiv P'Q$, které jsou různoběžné.

Bodem O veďme dále přímky $p \parallel q$, $p' \parallel q'$, které jsou různoběžné. Označme X, Y, Z průsečíky přímky p po řadě s přímkami AK, BL, BM a dále po řadě X', Y', Z' průsečíky přímky p' s přímkami AK, BL, BM. Jestliže je $X \neq A$, $X' \neq A$, potom jsou X, Y a X', Y' hledané body, pro něž platí $AX = BY$, $AX' = BY'$.



Obr. 8.

Důkaz provedeme společně s diskusí, abychom mohli rozlišit jednotlivé možnosti.

D ů k a z. Naznačenou konstrukci přímek q, q' lze vždy provést. Uvidíme, že pro diskusi je podstatný fakt, že úsečka PQ leží celá uvnitř poloroviny ABL, kdežto body P', Q úsečky $P'Q$ jsou přímkou AB odděleny. V č á s t e c h I, II probereme každý z těchto případů zvlášť.

P o z n á m k a 1. Všimněme si toho, že trojúhelníky BPQ, $BP'Q$, právě sestrojené, vždycky existují, takže žádná z přímek q, q' neprochází bodem B.

P o z n á m k a 2. Jestliže jsou dány přímky $m \parallel n$ a bod S, který na žádné z těchto přímek neleží, potom existuje jediná stejnolehlost o středu S, která převádí přímku m v přímku n. Jestliže je $m \equiv n$, potom je tato stejnolehlost identitou.

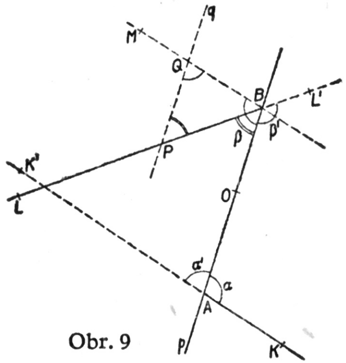
Část I. Uvažujme stejnolehlost $\mathbf{B}$ o středu B, která přímce $q \equiv PQ$ (kde P, Q jsou body ležící uvnitř poloroviny ABL) přiřazuje přímku $p \parallel q$, kde p prochází bodem O. Protože přímka q bodem B neprochází, existuje tato stejnolehlost právě tehdy, jestliže přímka p bodem B rovněž neprochází. Musíme proto rozeznávat dvě možnosti: [1] Nechť je $p \equiv OB$; [2] nechť je $p \not\equiv OB$.

V případě [1] je $p \equiv OB$, takže je $X \equiv A$, $Y \equiv B$ a úloha vzhledem k požadavkům vysloveným v textu nemá řešení. Dokážeme, že tento případ nastane právě tehdy, jestliže platí (obr. 9)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}.$$

a) Nechť je $p \equiv OB$, t. j. nechť je $PQ \parallel AB$. Protože platí vztah (3), je α vnějším úhlem v trojúhelníku ABC a proto platí $\alpha > \beta$. Proto polopřímka BL leží v úhlu $\sphericalangle ABM$ a máme situaci jako na obr. 9. Užitím vět o střídavých a přilehlých úhlech vzhledem k tomu, že je $PQ \parallel AB$, platí o úhlech trojúhelníka BPQ (obr. 9)

$$\sphericalangle P = \beta, \quad \sphericalangle Q = 180^\circ - \alpha. \tag{6}$$



Obr. 9

Užijme nyní na trojúhelník BPQ sinové věty; dostáváme

$$\frac{\sin \sphericalangle Q}{\sin \sphericalangle P} = \frac{BP}{BQ}. \tag{7}$$

Vzhledem k tomu, že $BP = a$, $BQ = b$, a vzhledem ke vztahům (6), odtud dostaneme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} . \tag{8}$$

b) Nechť obráceně o číslech a, b, α, β, příslušných k daným útvarům, platí vztah (8); potom o bodech P, Q, sestrojených dříve uvedeným postupem, platí $PQ \parallel OB$, t. j. úloha nemá řešení, které by příslušelo přímce $q \equiv PQ$. To dokážeme takto: Veďme bodem Q přímku $q_0 \parallel AB$; přímka q_0 leží celá uvnitř poloroviny ABL a protože je stejně jako přímka AB různoběžná s přímkou BL, protne ji v bodě P_0, který nutně leží uvnitř poloroviny ABL. Proto o úhlech $\sphericalangle P_0$, $\sphericalangle Q$ v trojúhelníku BP_0Q platí vztahy obdobné ke vztahům (6), v nichž místo P nutno psát P_0. Použijeme-li na trojúhelník BP_0Q sinovou větu, dostaneme

$$\frac{BP_0}{BQ} = \frac{\sin \sphericalangle Q}{\sin \sphericalangle P_0}$$

neboli

$$BP_0 = b \, . \, \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} . \tag{9}$$

Z daného vztahu (8) vzhledem k tomu, že $BQ = b$, vypočteme

$$BP = b \, . \, \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} . \tag{10}$$

Porovnáním vztahů (9), (10) dostaneme $BP = BP_0$; protože body P, P_0 leží na polopřímce BL, plyne odtud $P \equiv P_0$ a tedy $PQ \parallel OB$. Úloha tedy nemá řešení.

Tím je důkaz tvrzení vysloveného na počátku případu [1] proveden.

V případě [2] je $p \not\equiv OB$. Stejnolehlost **B** bodům $P \not\equiv Q$ přímky q po řadě přiřazuje body $Y \not\equiv Z$ na přímce $p \parallel q$ (viz obr. 7 a 8).

Body P, Q leží uvnitř poloroviny ABL. Ze stejnolehlosti **B** plyne, že i oba body Y, Z leží současně buď v polorovině ABL nebo v polorovině ABK. Dále z této stejnolehlosti plyne, že

$$\frac{BY}{BZ} = \frac{PB}{BQ}$$

neboli

$$BY = \frac{a}{b} \,.\, BZ \,. \tag{11}$$

Nyní uvažujme stejnolehlost **O** o středu O, která převádí bod B v bod A. Její koeficient je záporný, a proto bodu Z přímky BM v ní přísluší bod X přímky $AK \parallel BM$; je tedy bod X od bodu Z a tím i od bodu Y oddělen bodem O, takže OX, OY jsou opačné polopřímky. Ze stejnolehlosti **O** plyne

$$\frac{AX}{BZ} = \frac{OA}{OB}$$

neboli

$$AX = \frac{a}{b} \,.\, BZ \,. \tag{12}$$

Porovnáním vztahů (11), (12) dostaneme $AX = BY$.

Protože přímka PQ existuje jediná a protože existují stejnolehlosti **B**, **O**, plyne z celého postupu, že úloha má jediné řešení. Tím je provedeno řešení případu [2].

Z výsledku *části* I [1] plyne: Bodem O lze sestrojit jedinou přímku $p \equiv XOY$, kde X, Y jsou body požadované úlohou, právě tehdy, jestliže platí vztah

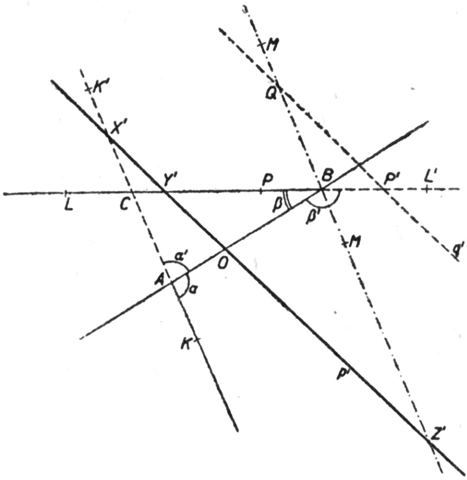
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \neq \frac{a}{b} \,. \tag{13}$$

Tím jsme provedli řešení *části* I.

Část II (obr. 10). Uvažujme stejnolehlost **B**$'$ o středu B, která přímce $q' \equiv P'Q$ přiřazuje přímku $p' \parallel q$, kde p' prochází bodem O. Při tom přímka $P'Q$ neprochází bodem B

a body P', Q jsou přímkou AB odděleny (viz Poznámku 1); z toho plyne, že stejnolehlost $\mathbf{B}'$ existuje. Tato stejnolehlost bodům $P' \neq Q$ přímky q' přiřazuje po řadě body $Y' \neq Z'$ na přímce $p' \parallel q$; při tom jsou body Y', Z' rovněž přímkou AB odděleny. Úsečka $P'Q$ leží v úhlu $\sphericalangle MBL'$ a přímka $Y'Z'$ prochází bodem O, který leží v úhlu $\sphericalangle M'BL$ k předchozímu vrcholovém; proto úsečka $Y'Z'$ leží v úhlu $\sphericalangle M'BL$, takže bod Y' padne do poloroviny ABL a bod Z' do poloroviny ABK. Ze stejnolehlosti $\mathbf{B}'$ plyne $\dfrac{BY'}{BZ'} = \dfrac{BP'}{BQ}$ neboli

$$BY' = \frac{a}{b} \, . \, BZ' \, . \tag{14}$$



Obr. 10.

Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathbf{O}'$ o středu O, která převádí bod B v bod A; její koeficient je záporný a proto bodu Z'

přímky BM přísluší bod X' přímky $AK \parallel BM$, který je od bodu Z' oddělen bodem O. Leží proto bod X' uvnitř poloroviny ABL zároveň s bodem Y'; z toho plyne, že body X', Y' leží v polorovině ABC a polopřímky OX', OY' splývají. Ze stejnolehlosti $\mathbf{O}'$ pak plyne $\frac{AX'}{BZ'} = \frac{OA}{OB}$ neboli

$$AX' = \frac{a}{b} \, . \, BZ' \, . \tag{15}$$

Porovnáním vztahů (14), (15) dostáváme $AX' = BY'$.

Protože přímka $P'Q$ existuje jediná a protože existují stejnolehlosti $\mathbf{B}'$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}'$ plyne z celého postupu, že úloha má jediné řešení. Tím je provedeno řešení *části* II.

Závěr řešení. Úloha má dvě řešení, jestliže platí vztah (13); jestliže tento vztah neplatí, má jediné řešení.

7. Jestliže ve čtyrstěnu $ABCD$ je

$$AB = CD, \; AC = BD, \; AD = BC,$$

dokažte, že potom platí:

a) Lze sestrojit kvádr tak, že v každé stěně tohoto kvádru právě jedna ze stěnových úhlopříček splývá s jednou hranou čtyrstěnu.

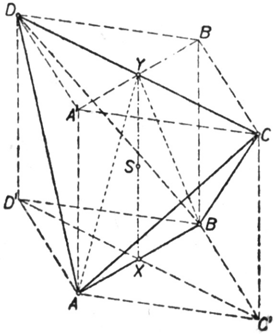
b) Střed kulové plochy opsané čtyrstěnu $ABCD$ splývá se středem kulové plochy čtyrstěnu vepsané (t. j. ležící uvnitř čtyrstěnu a dotýkající se rovin jeho stěn).

Řešení (obr. 11). a) Nejprve dokážeme pomocnou větu: „Jestliže ve čtyrstěnu $ABCD$ platí $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, potom každá ze středních příček čtyrstěnu je kolmá k těm jeho hranám, které půlí.“ Při tom na př. střední příčka XY spojuje středy protějších hran AB, CD.

Důkaz. Platí

$$\triangle BCD \cong \triangle ADC \,(sss);$$

proto je též $BY = AY$ (to jsou těžnice v těchto trojúhelnících, které příslušejí ke společné straně CD). Je tedy trojúhelník YAB rovnoramenný a AB je jeho základna. Přímka XY je osou souměrnosti tohoto trojúhelníka, a proto platí $XY \perp AB$. Stejně se dokáže, že platí $XY \perp CD$. Tím je pomocná věta dokázána.



Obr. 11.

Nyní provedeme řešení úlohy a) tak, že sestrojíme kvádr, o němž se mluví v textu úlohy. Podle pomocné věty o střední příčce XY čtyrstěnu $ABCD$ platí $AB \perp XY$, $CD \perp XY$. V rovinách ABY, CDX sestrojme postupně obdélníky $ABB'A'$, $CDD'C'$, které mají střední příčku XY; protože je $AB = CD$, $BB' = XY = DD'$, jsou tyto obdélníky shodné. Při tom jsou přímky AB, $C'D'$ různoběžné (jinak by přímky AB, CD nebyly mimoběžné). Proto platí

$$XA = XB = XC' = XD' = \tfrac{1}{2}\,AB = \tfrac{1}{2}\,CD = YA' = \\ = YB' = YC = YD,$$

takže čtyrúhelníky $AC'BD'$, $A'CB'D$ mají vesměs shodné úhlopříčky a body X, Y jsou po řadě středy těchto úhlopříček.

Z toho plyne, že tyto čtyrúhelníky jsou obdélníky. Ale podle konstrukce je

$$AX \parallel A'Y, \; D'X \parallel DY; \tag{1}$$

proto o rovinách $\varrho \equiv AC'BD'$, $\sigma \equiv A'CB'D$ platí $\varrho \parallel \sigma$. Ze vztahů (1) dále snadno plyne $\sphericalangle AXC' = \sphericalangle A'YC$ a tedy $\triangle AXC' \cong \triangle A'YC$ (*sus*) a tím $AC' = A'C$; stejně se dokáže, že je $AD' = A'D$. Odtud plyne, že obdélníky $AC'BD'$, $A'CB'D$ jsou shodné.

Podle konstrukce platí $XY \perp AB$, $XY \perp C'D'$ (neboť je $XY \perp CD$, $C'D' \parallel CD$); je tedy $XY \perp \varrho$ a protože je $\varrho \parallel \sigma$, je též $XY \perp \sigma$. Odtud plyne, že obdélníky $AC'BD'$, $A'CB'D$ jsou protějšími stěnami kvádru $AC'BD'A'CB'D$, v němž je $AA' \parallel C'C \parallel BB' \parallel D'D$. Vrcholy daného čtyrstěnu $ABCD$ leží skutečně ve vrcholech právě sestrojeného kvádru. Tím je úloha a) rozřešena.

Poznámka. Všimněme si, že z vlastnosti právě sestrojeného kvádru vyplývá, že střed S střední příčky XY je středem tohoto kvádru a tím i středem kulové plochy opsané kvádru i čtyrstěnu. Při tom bod S je vnitřním bodem úsečky XY a tím i vnitřním bodem každého z poloprostorů $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $BCDA$; avšak průnik vnitřků těchto poloprostorů je vnitřek čtyrstěnu $ABCD$. Leží tedy bod S uvnitř čtyrstěnu $ABCD$. Tohoto výsledku užijeme v úloze b).

b) Dokážeme pomocnou větu (obr. 12): „Buď dán čtyrstěn $SABC$, o němž platí

$$SA = SB = SC = r. \tag{2}$$

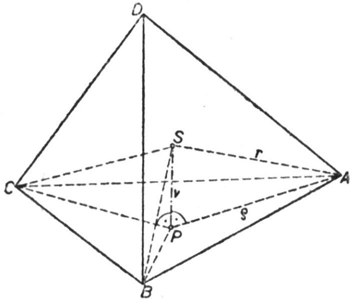
Označme P patu kolmice vedené bodem S k rovině ABC, takže $v = SP > 0$ je výška čtyrstěnu příslušná k bodu S.

Potom platí

$$v^2 = r^2 - \varrho^2 \tag{3}$$

kde ϱ je poloměr kružnice k opsané trojúhelníku ABC ze středu P."

Důkaz. Ze stereometrie je známo, že pata P kolmice vedené bodem S k rovině ABC je ze všech bodů této roviny nejbližší k bodu S. Protože v našem případě je ABC trojúhelník, jsou body A, B, C vesměs různé; protože platí (2), je nutně každý z nich různý od bodu P, takže platí $r > v$. Protože je



Obr. 12.

$SP \perp ABC$, mají trojúhelníky SAP, SBP, SCP (které jistě existují) při bodu P pravé úhly; dále mají společnou odvěsnu SP a podle (2) se shodují v přeponách. Jsou tedy shodné podle věty (*Ssu*). Odtud plyne, že platí

$$PA = PB = PC = \varrho.$$

Je tedy P středem kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Užijeme-li Pythagorovy věty na trojúhelník SAP, dostaneme

$$v^2 = r^2 - \varrho^2.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

Nyní provedeme řešení úlohy b). Je známo, že čtyrstěnu lze opsat jedinou kulovou plochu, a dále, že čtyrstěnu lze vepsat jedinou kulovou plochu, jejíž střed leží uvnitř čtyrstěnu.

Označme $\varkappa \equiv (S, r)$ kulovou plochu opsanou danému čtyrstěnu $ABCD$, takže platí vztahy (2). Máme dokázat, že bod S je zároveň středem kulové plochy tomuto čtyrstěnu vepsané. Stačí tedy dokázat, že bod S leží uvnitř čtyrstěnu, a dále, že má od čtyř rovin stěn čtyrstěnu sobě rovné vzdálenosti.

Důkaz. Že bod S leží uvnitř čtyrstěnu plyne z „Poznámky" připojené k řešení úlohy a). Dokážeme tedy pouze, že bod S má od rovin

$$ABC,\ ABD,\ ACD,\ BCD \tag{4}$$

sobě rovné vzdálenosti.

Protože o čtyrštěnu $ABCD$ platí $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, jsou trojúhelníky (4) vesměs shodné. Proto jsou shodné i kružnice těmto trojúhelníkům opsané; označme ϱ jejich poloměry. Podle pomocné věty platí pro vzdálenost bodu S od rovin (4) vztahy (3), z nichž vzhledem ke vztahům (2) plyne, že bod S má od rovin (4) vesměs sobě rovné vzdálenosti, což jsme měli dokázat. Tím je proveden důkaz a úloha b) řešena.

Podle řešení prvního vítěze V. ročníku MO s. Břetislava Nováka, žáka 11b JSŠ v Chrudimi.

8. Ktoré tri navzájom rôzne (celé) nesúdeliteľné čísla môžeme pokladať za prvé tri členy aritmetickej postupnosti a zároveň (v inom poradí) za prvé tri členy inej, geometrickej postupnosti?

Riešenie. Označme hľadané čísla po rade

$$b_1, b_2, b_3\,. \tag{1}$$

Položme $b_2 = a$ a označme d diferenciu aritmetickej postupnosti. Pretože čísla b_1, b_2, b_3 majú tvoriť aritmetickú postupnosť, musí platiť

$$b_1 = a - d, \quad b_2 = a, \quad b_3 = a + d.$$

Aby čísla (1) boli nesúdeliteľné, musia byť čísla a, $d \neq 0$ nesúdeliteľné.

Pri vhodnom poriadku indexov čísel (1) má platiť

$$b_i^2 = b_j \cdot b_k, \tag{2}$$

kde i, j, k sú navzájom rôzne čísla a rovnajú sa niektorému z čísel 1, 2, 3.

Pritom nemôže byť $i = 2$, lebo potom by bolo $b_2^2 = a^2$, $b_1 b_3 = a^2 - d^2$ a teda $a^2 = a^2 - d^2$, čo možno splniť len pre $d^2 = 0$ alebo $d = 0$, čo je proti predpokladu.

Teraz uvažujme o dvoch možnostiach.

Prípad [1]. Nech $i = 1$. Zo vzťahu (2) dostaneme

$$(a - d)^2 = a(a + d)$$

a teda $d^2 = 3ad$ a pretože $d \neq 0$, dostaneme

$$d = 3a.$$

Túto rovnicu má splňovať nesúdeliteľná dvojica čísel a, d. Tu je

a) buď $a = 1$ a tým $d = 3$,
b) buď $a = -1$ a tým $d = -3$.

Hľadané čísla sú

a) buď $b_1 = -2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 4$,
b) buď $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = -4$.

V prípade a) dostaneme:

aritmetickú postupnosť: $-2, 1, 4, 7, 10, \ldots$;
geometrické postupnosti: α) $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ (kvocient $q = -2$);

β) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ $(q = -\frac{1}{2})$.

V prípade b) dostaneme:

aritmetickú postupnosť: 2, -1, -4, -7, $-10, \ldots$;
geometrické postupnosti: α) $-1, 2, -4, 8, -16, \ldots$
$(q = -2)$;

β) $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots (q = -\frac{1}{2})$.

Prípad [2]. Nech je $i = 3$. Zo vzťahu (2) dostaneme

$$(a + d)^2 = a(a - d)$$

a teda $d^2 = -3ad$ a pretože $d \neq 0$, dostaneme

$$d = -3a.$$

Túto rovnicu má splňovať dvojica nesúdeliteľných čísel a, d. Tu je

a) buď $a = 1$ a tým $d = -3$,

b) buď $a = -1$ a tým $d = 3$.

Hľadané čísla sú

a) buď $b_1 = 4$, $b_2 = 1$, $b_3 = -2$,

b) buď $b_1 = -4$, $b_2 = -1$, $b_3 = 2$.

V prípade a) dostaneme:
aritmetickú postupnosť: 4, 1, -2, -5, $-8, \ldots$;
geometrické postupnosti:

α) $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots (q = -\frac{1}{2})$;

β) $1, -2, 4, -8, 16, \ldots (q = -2)$.

V prípade b) dostaneme:

aritmetickú postupnosť: -4, -1, 2, 5, $8, \ldots$;

geometrické postupnosti:

α) $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots (q = -\frac{1}{2})$;

β) $-1, 2, -4, 8, -16, \ldots \quad (q = -2)$.

Tým je úloha rozriešená.

9. Je dán výraz

$$z = 1 - \sin^2 x - \sin^2 y, \tag{1}$$

kde x, y jsou reálná čísla; dále je dáno reálné číslo a.

Určete všechny dvojice čísel x, y, pro něž platí

$$x + y = a \tag{2}$$

a pro něž výraz z nabývá hodnoty: a) maximální, b) minimální.*)

Proveďte diskusi vzhledem k číslu a.

Řešení. Postupně platí identicky (při jedné úpravě užíváme vzorce $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$):

$$z = 1 - \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y =$$

$$= (\cos x + \sin y)(\cos x - \sin y) =$$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin y\right] . \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin y\right] =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x - y}{2}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x + y}{2}\right) .$$

$$. \, 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x + y}{2}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x - y}{2}\right) =$$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{2} - (x - y)\right] . \sin\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] =$$

$$= \cos(x - y) . \cos(x + y).$$

Vzhledem ke (2) tedy platí

$$z = \cos(x - y) . \cos a. \tag{3}$$

Nyní se jedná o stanovení maximální a minimální hodnoty pravé strany vztahu (3). Rozlišujeme d v ě m o ž n o s t i.

---

*) Maximem a minimem tu rozumíme ostré maximum a ostré minimum.

Případ [1]. Nechť je $\cos a = 0$ neboli $a = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$, kde n je celé číslo. Pak je $z = 0$ a nelze mluvit ani o maximu, ani o minimu.

Skutečně pro tento případ čísla a je $y = a - x$ a

$$\sin y = \sin\left[\frac{2n+1}{2}\pi - x\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x\right) =$$
$$= \cos(x - n\pi);$$

pro n sudá je $\sin y = \cos x$, pro n lichá je $|\sin y| = |\cos x|$, takže $\sin^2 y = \cos^2 x$. Pak podle (1) je

$$z = 1 - \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

a pro každé x úloha nemá řešení.

Případ [2]. Nechť je číslo a takové, že pro kterékoli celé číslo n platí

$$a \neq \frac{2n+1}{2} \cdot \pi. \tag{4}$$

Potom je $\cos a \neq 0$ a v podstatě jde o vyšetření maxima a minima výrazu

$$\cos(x - y)$$

za současné platnosti podmínky (2), tedy o maximum a minimum výrazu

$$\zeta = \cos(2x - a).$$

Tento výraz má maximum právě tehdy, jestliže je

$$2x - a = 2k\pi, \tag{5}$$

kde k je libovolné celé číslo; minimum má právě tehdy, jestliže je

$$2x - a = (2k' + 1)\pi, \tag{6}$$

kde k' je libovolné celé číslo.

Ze vztahu (5) plyne

$$x = \frac{a}{2} + k\pi, \tag{5'}$$

ze vztahu (6) plyne

$$x = \frac{a}{2} + \left(k' + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{6'}$$

Pro čísla x daná vztahem (5′) je $\zeta = 1$, pro čísla x daná vztahem (6′) je $\zeta = -1$.

Nyní se vraťme k vyšetření maxima a minima výrazu $z = \zeta \, . \cos a$. Rozeznávejme dva případy [a] a [b].

Případ [a]. Nechť je $\cos a > 0$. Tento vztah platí právě tehdy, jestliže číslo a leží v otevřeném intervalu

$$\left((2m - \tfrac{1}{2})\,\pi, (2m + \tfrac{1}{2})\,\pi\right), \tag{7}$$

kde m je jisté celé číslo.

Pak pro čísla x ze vztahu (5′) nastává maximum rovné číslu $\cos a > 0$ výrazu z a pro hodnoty x ze vztahu (6′) minimum rovné číslu $-\cos a < 0$.

Případ [b]. Nechť je $\cos a < 0$. Tento vztah platí právě tehdy, jestliže číslo a leží v otevřeném intervalu

$$\left((2m + \tfrac{1}{2})\pi, \; (2m + \tfrac{3}{2})\,\pi\right),$$

kde m je jisté celé číslo.

Pak pro čísla x ze vztahu (6′) nastává maximum rovné číslu $|\cos a| > 0$, pro čísla x ze vztahu (5′) nastává minimum $-|\cos a| < 0$.

Závěr. Výraz z daný vztahem (1) za současné platnosti vztahu (2) má:

a) maximum $|\cos a| > 0$ (je to číslo kladné) pro čísla x daná:

α) vztahem (5′), jestliže číslo a je z otevřeného intervalu (7);

β) vztahem (6'), jestliže číslo a je z otevřeného intervalu (8);

b) minimum $-|\cos a| < 0$ pro čísla x daná:

α) vztahem (6'), jestliže číslo a je z otevřeného intervalu (7);

β) vztahem (5'), jestliže číslo a je z otevřeného intervalu (8).

Při tom čísla k, k' ve vztazích (5'), (6') jsou libovolná celá čísla; rovněž m v otevřených intervalech (7), (8) je jisté celé číslo.

10. Určete všechna komplexní čísla u, která vyhovují rovnici

$$u = a \cdot \bar{u}, \tag{1}$$

kde a je dané komplexní číslo a $\bar{u}$ je komplexní číslo sdružené s číslem u.

Řešení. Položme

$$u = r\varepsilon, \tag{2}$$

kde $r \geqq 0$ je reálné číslo a $\varepsilon \neq 0$ je komplexní jednotka, kterou lze psát

$$\varepsilon = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi. \tag{3}$$

Potom je

$$\bar{u} = r \cdot \bar{\varepsilon}$$

neboli

$$\bar{u} = r \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dosaďme tento výsledek do dané rovnice (1); dostaneme

$$r\varepsilon = \frac{ar}{\varepsilon}$$

neboli

$$r\left(\varepsilon - \frac{a}{\varepsilon}\right) = 0. \tag{4}$$

Buď musí být $r = 0$, t. j. $u = \bar{u} = 0$, anebo je $r \neq 0$. Předpokládejme nadále, že $r \neq 0$. Potom ze vztahu (4) plyne, že musí platit

$$\varepsilon^2 = a.$$

Ze vztahu (3) podle Moivreovy věty dostaneme pro ε^2

$$\cos 2\varphi + \mathrm{i} \, . \sin 2\varphi = a; \tag{5}$$

to znamená, že dané číslo a musí být komplexní jednotkou. Označíme-li α amplitudu čísla $a = \cos\alpha + \mathrm{i} \, . \sin\alpha$, potom vzhledem k (5) musí zřejmě platit

$$2\varphi = \alpha + 2k\pi,$$

kde k je jisté celé číslo, neboli

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,\alpha + k\pi. \tag{6}$$

Stačí uvažovat dva případy, a to $k = 0$, $k = 1$; musí tedy podle (2), (3) a (6) být buď $u = u_1$ anebo $u = u_2$, kde

$$u_1 = r\,(\cos \tfrac{1}{2}\,\alpha + \mathrm{i} \, . \sin \tfrac{1}{2}\,\alpha), \tag{7}$$

$$u_2 = r\,[\cos (\tfrac{1}{2}\,\alpha + \pi) + \mathrm{i} \, . \sin (\tfrac{1}{2}\,\alpha + \pi)], \tag{7'}$$

kde $r > 0$ je libovolné reálné číslo. Zřejmě je $u_2 = -\,u_1$.

Obráceně čísla $u = u_1$, $u = u_2$, kde $r \geqq 0$, jsou řešením rovnice (1). Jestliže je $u = 0$, je to zřejmé. Jestliže je $u \neq 0$, jsou rovnice $u = a\bar{u}$, $u^2 = au\bar{u}$ ekvivalentní. Snadno dokážeme, že čísla (7′), (7) pro $r \neq 0$ tuto poslední rovnici splňují.

Důkaz. Podle Moivreovy věty platí

$$u_1^2 = r^2\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha), \quad u_2^2 = r^2\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

neboli

$$u_1^2 = ar^2, \quad u_2^2 = ar^2.$$

Dále je $au_1\bar{u}_1 = a \, . \, (u_1\bar{u}_1) = ar^2$ a podobně $au_2\bar{u}_2 = ar^2$. Tím je důkaz proveden.

Závěr. Jestliže je $|a| \neq 1$, pak rovnice (1) má jediný kořen $u = 0$. Jestliže je $|a| = 1$, potom má rovnice (1) nekonečně mnoho řešení, daných vztahy (7), (7'), kde $r \geqq 0$ je libovolné reálné číslo a α amplituda čísla a.

Geometrický význam. Jestliže je $|a| \neq 1$, pak obrazem kořenu $u = 0$ je počátek O Gaussovy roviny.

Jestliže je $|a| = 1$, pak obrazy všech čísel $u = u_1$ ze vztahu (7) vyplňují polopřímku OU_1, kde $U_1 \equiv [\cos \frac{1}{2}\alpha, \sin \frac{1}{2}\alpha]$, a obrazy všech čísel $u = u_2$ ze vztahu (7') vyplňují polopřímku OU_2, kde $U_2 \equiv [-\cos \frac{1}{2}\alpha, -\sin \frac{1}{2}\alpha]$. Příslušné obrazy tedy vyplňují přímku U_1OU_2.

11. Buďte a, b daná reálná čísla, která nejsou současně rovna nule. Pro která x, kde $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, má výraz

$$y = a \cos x + b \sin x$$

největší hodnotu. (Všimněte si řešení rovnice (1) na str. 76 v učebnici Trigonometrie pro 10. a 11. ročník středních škol.)

Řešení. Protože je vyloučen případ $a = b = 0$, budeme rozlišovat těchto osm možností:

(1) $a = 0,\ b > 0$;
(2) $a > 0,\ b > 0$;
(3) $a > 0,\ b = 0$;
(4) $a > 0,\ b < 0$;
(5) $a = 0,\ b < 0$;
(6) $a < 0,\ b < 0$;
(7) $a < 0,\ b = 0$;
(8) $a < 0,\ b > 0$.

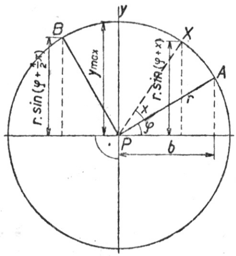
Označení nyní $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je tedy $r > 0$. Podmínkám

$$a = r \sin \varphi, \qquad b = r \cos \varphi, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

vyhovuje jediný úhel φ. Náš výraz můžeme pak psát takto

$$y = a \cos x + b \sin x = r(\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x) =$$
$$= r \sin(\varphi + x).$$

(1) Je-li $a = 0$, $b > 0$, je $r = b$, $\varphi = 0$ a daný výraz má tvar $y = r \sin x$. Největší hodnotu dostáváme pak pro $x = \frac{1}{2}\pi$ a příslušné maximum je $y_{\max} = b = r$.



Obr. 13.

(2) Je-li $a > 0$, $b > 0$, je $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Protože $\sin(x + \varphi) = 1$ právě tehdy, je-li $x + \varphi = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ (kde k je vhodné celé číslo), dostáváme pro $x = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ maximální hodnotu $y_{\max} = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Na obr. 13 je pro určitost znázorněna situace, kdy $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. V obrázku je úhel $\sphericalangle APB$ pravý. Platí $r = 2$, $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ a největší hodnoty je dosaženo pro $x = \frac{1}{3}\pi$.)

(3) Je-li $a > 0$, $b = 0$, má náš výraz tvar $y = a \cos x$. Největší hodnotu dostáváme pro $x = 0$ a příslušné maximum je $y_{\max} = a = r$.

(4) Je-li $a > 0$, $b < 0$, je $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$. Zde maximální hodnoty je dosaženo pro $x = 0$ a toto maximum je $y_{\max} = r \sin \varphi = a$.

(5) Je-li $a = 0$, $b < 0$, pracujeme s výrazem $y = b \sin x$. Největší hodnoty dosáhneme pro $x = 0$; hodnota $y_{\max} = 0$.

(6) Je-li $a < 0$, $b < 0$, je $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Budeme zde ještě

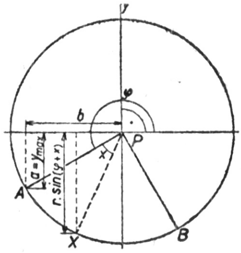
rozlišovat tři případy:

a) $\pi < \varphi < \frac{5}{4}\pi$, t. j. $a > b$;

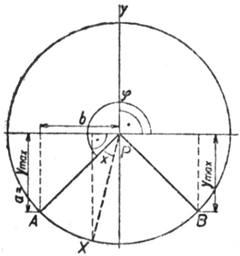
b) $\varphi = \frac{5}{4}\pi$, t. j. $a = b$;

c) $\frac{5}{4}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, t. j. $a < b$.

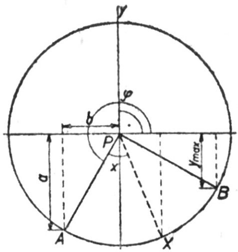
V případě a) dostáváme největší hodnotu pro $x = 0$ a toto maximum je $y_{\max} = r \sin \varphi = a$. (Na obr. 14 je narýsován případ $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$; pak $\varphi = \frac{7}{6}\pi$.)



Obr. 14.



Obr. 15.



Obr. 16.

V případě b) dostáváme pro $x = 0$ i pro $x = \frac{1}{2}\pi$ stejné hodnoty y. Tato společná hodnota je hledané maximum; platí $y_{\max} = a = b$. (Viz obr. 15.)

V případě c) se dosáhne největší hodnoty pro $x = \frac{1}{2}\pi$. Toto maximum je $y_{max} = r \cos \varphi = b$. (Na obr. 16 je znázorněna situace $a = -\sqrt{3}$, $b = -1$, tedy $\varphi = \frac{4}{3}\pi$.)

(7) Je-li $a < 0$, $b = 0$, pracujeme s výrazem $y = a \cos x$. Největší hodnoty se dosáhne pro $x = \frac{1}{2}\pi$ a bude $y_{max} = 0$.

(8) Konečně je-li $a < 0$, $b > 0$, platí $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Maxima se dosáhne pro $x = \frac{1}{2}\pi$ a bude $y_{max} = r \cos \varphi = b$. (Potřebný obrázek si načrtne už čtenář sám.)

12. Nech je daný štvorsten $ABCD$, v ktorom splýva stred S guľovej plochy tomuto štvorstenu opísanej so stredom guľovej plochy štvorstenu vpísanej.

a) Dokážte, že každá trojuholníková stena tohto štvorstena má tú vlastnosť, že stred kružnice tomuto trojuholníku opísanej je vnútorným bodom tohto trojuholníka. Ďalej dokážte, že tieto kružnice sú pre všetky štyri steny štvorstena navzájom zhodné.

b) Dokážte, že v trojuholníkoch ABC, ABD sú uhly pri vrcholoch C, D zhodné.

c) Dokážte, že všetky steny štvorstena sú zhodné.

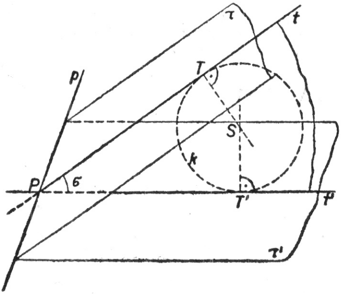
d) Dokážte, že o hranách štvorstena platí

$$AB = CD, \quad AC = BD, \quad AD = BC.$$

Riešenie. Poznámka. Dotyková rovina τ v bode T guľovej plochy $\varkappa \equiv (S, r)$ so stredom S a polomerom r stojí kolmo na priamku ST. Okrem bodu T nemajú plochy τ, $\varkappa$ žiadny iný spoločný bod (obr. 17).

Nech τ, τ' sú dve rôznobežné dotykové roviny guľovej plochy $\varkappa$; označme T, T' (v tomto poradí) ich dotykové body. Priesečnicu rovín τ, τ' označme p. Pretože $ST \perp \tau$, $ST' \perp \tau'$, sú priamky ST, ST' rôznobežné (keby splývali, platilo by

$\tau \parallel \tau'$) a určujú rovinu $\sigma \perp p$. Rovina σ pretína roviny τ, τ' v priamkach t, t' a plochu $\varkappa$ v kružnici $k \equiv (S, r)$; označme P priesečník priamok t, t' (je to priesečník priamky p s rovinou σ). Potom t, t' sú dotyčnice vedené z bodu P ku kružnici k, ktorá sa ich dotýka v bodoch T, T'. Teda: Ak sú τ, τ' dve rôznobežné dotykové roviny guľovej plochy $\varkappa$, sú ich príslušné dotykové body T, T' rôzne a ležia mimo priesečnice p rovín τ, τ'.



Obr. 17.

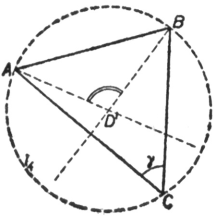
Riešenie úlohy. a) Guľová plocha $\varkappa$ so stredom S vpísaná danému štvorstenu $ABCD$ leží celá v spoločnej časti polpriestorov

$$ABCD, BCDA, CADB, ABDC; \tag{1}$$

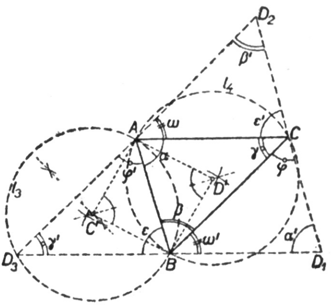
štvorsten $ABCD$ je práve definovaný ako spoločná časť polpriestorov (1). Dotykový bod D' plochy $\varkappa$ s rovinou ABC leží jednak v tejto rovine a jednak v prvých troch polpriestoroch (1), t. j. leží v trojuholníku ABC. Avšak bod D' neleží na obvode trojuholníka ABC, lebo napr. priamka AB je priesečnicou rôznobežných dotykových rovín ABC, ABD guľovej plochy $\varkappa$ a na nej neleží žiadny bod plochy $\varkappa$ (pozri úvodnú poznámku). Z toho vyplýva, že bod D' leží vnútri trojúholníka ABC. Pritom je

$$SD' \perp ABC. \tag{2}$$

Označme $\lambda \equiv (S, SA)$ guľovú plochu opísanú štvorstenu $ABCD$. Rovina ABC pretne túto plochu v kružnici l_4; jej stredom je päta kolmice vedenej bodom S k rovine ABC. Podla vzťahu (2) je teda bod D' zrejme stredom kružnice l_4. Pretože bod D' leží vnútri trojuholníka ABC a pretože l_4 je kružnica tomuto trojuholníku opísaná, preto je trojuholník ABC ostrouhlý. (Dokážme, že napr. uhol $\sphericalangle BCA \equiv \gamma$ v trojuholníku ABC je ostrý (obr. 18): Bod D' leží vnútri trojuholníka ABC; preto sú body C, B oddelené priamkou AD' a body C, A priamkou BD'. Bod C neleží teda v uhle $\sphericalangle AD'B$, ktorý je preto stredovým uhlom k obvodovému uhlu γ kružnice l_4. Pretože sa uhol γ rovná polovici stredového dutého uhla $\sphericalangle AD'B$, je uhol γ ostrý.)



Obr. 18.



Obr. 19.

Rovnako sa dokáže, že aj ostatné trojuholníky stien štvorstena $ABCD$ sú ostrouhlé.

Guľová plocha $\varkappa$ sa dotýka všetkých štyroch rovín stien štvorstena $ABCD$; preto má bod S od všetkých štyroch rovín rovnaké vzdialenosti. Preto priesečné kružnice l_1, l_2, l_3, l_4 plochy λ s rovinami BCD, ACD, ABD, ABC (v tomto poradí) sú zhodné. Ich polomer označme r.

Tým sme časť a) rozriešili.

b) Označme $\alpha \equiv \sphericalangle A$, $\beta \equiv \sphericalangle B$, $\gamma \equiv \sphericalangle C$ uhly v trojuholníku ABC.

Dokážeme teraz, že napr. uhly γ, γ' protiľahlé k strane AB v trojuholníkoch ABC, ABD (v tomto poradí) sú zhodné (pozri obr. 19 siete štvorstena, kde je $AD_2 = AD_3$, $BD_3 = BD_1$, $CD_1 = CD_2$, a v nej trojuholníky ABC, ABD_3). Kružnice l_4, l_3 opísané týmto trojuholníkom majú po rade stredy D', C', pričom C' leží vnútri trojuholníka ABD a uhol γ' je obvodový uhol v kružnici l_3 a k nemu prislúcha stredový uhol $\sphericalangle AC'B$, kdežto uhlu γ, obvodovému v kružnici l_4, prislúcha stredový uhol $\sphericalangle AD'B$ (pozri časť riešenia a)).

Tu platí

$$\triangle ABD' \cong \triangle ABC' \; (sss);$$

uvažované trojuholníky majú stranu AB spoločnú a ďalej platí $AD' = BD' = AC' = BC' = r$. Preto je $\sphericalangle AD'B = \sphericalangle AC'B$ a teda tiež $\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle AD'B = \frac{1}{2} \sphericalangle AC'B = \gamma'$, t. j.

$$\gamma = \gamma',$$

čo sme mali dokázať. Rovnako dokážeme ďalšie vzťahy (celkom 6, lebo štvorsten má 6 hrán); pri označení z obr. 19 sú to vzťahy:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = \alpha', & \beta = \beta' & \gamma = \gamma', \\ \varepsilon = \varepsilon', & \varphi = \varphi', & \omega = \omega'. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

c) Vyjadríme fakt, že súčet uhlov v trojuholníkoch ABC, BCD, ACD, ABD sa rovná 180°; pritom použijeme hneď vzťahy (3).

Dostaneme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \qquad (4)$$

$$\alpha + \varphi + \omega = 180°, \qquad (5)$$

$$\varepsilon + \beta + \omega = 180°, \qquad (6)$$

$$\varepsilon + \varphi + \gamma = 180°. \qquad (7)$$

Sčítame príslušné strany rovníc (6), (7) a odčítame od nich príslušné strany rovníc (4), (5); dostaneme $2\varepsilon - 2\alpha = 0$ alebo

$$\varepsilon = \alpha. \tag{8}$$

Rovnakým spôsobom odvodíme, že

$$\varphi = \beta, \tag{9}$$

$$\omega = \gamma. \tag{10}$$

Výsledky (8), (9), (10) splňujú vzťahy (5), (6), (7) za predpokladu, že platí (4).

Trojuholníky BCD, ACD, ABD majú s trojuholníkom ABC vždy jednu spoločnú stranu a zhodujú sa s ním v uhloch k tejto strane príľahlých. Preto podľa vety usu platí

$$\triangle DCB \cong \triangle ABC, \ \triangle BAD \cong \triangle ABC,$$
$$\triangle CDA \cong \triangle ABC, \tag{11}$$

čo sme mali dokázať.

d) Zo vzťahov (11) vyplýva

$$AB = CD, \ AC = BD, \ AD = BC,$$

čo sme mali dokázať.

Tým sme celú úlohu rozriešili.

2. Úlohy II. kola kategorie A.

1. Řešte rovnici

$$a(x^2 - a^2) = b(x^2 - b^2), \tag{1}$$

kde a, b jsou daná reálná čísla.

Má tato rovnice vždycky reálná řešení?

Řešení. Rovnici (1) postupně upravíme takto

$$ax^2 - a^3 = bx^2 - b^3,$$
$$x^2(a - b) = a^3 - b^3. \tag{2}$$

Protože bylo použito pouze ekvivalentních úprav, je rovnice (2) ekvivalentní s rovnicí (1).

Při řešení rovnice (2) rozlišíme dva případy:

Případ [1]. Nechť je $a - b = 0$, t. j. $a = b$. Označme P pravou a L levou stranu rovnice (2); dostáváme

$$L = 0 \, . \, x^2 = 0, \quad P = a^3 - b^3 = 0.$$

Je tedy $L = P$ pro každé číslo x.

Případ [2]. Nechť je $a - b \neq 0$, t. j. $a \neq b$. Potom z rovnice (2) plyne

$$x^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

neboli

$$x^2 = a^2 + ab + b^2.$$

Odtud (pokud je $a^2 + ab + b^2 \geqq 0$) pro x plyne

$$x_1 = \sqrt{a^2 + ab + b^2}, \quad x_2 = -\sqrt{a^2 + ab + b^2}. \tag{3}$$

Dokážeme, že výraz pod odmocnítkem je nezáporný pro každou dvojici reálných čísel a, b.

Důkaz. Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$(a + \tfrac{1}{2} b)^2 \geqq 0 \tag{4}$$

(rovnost platí právě tehdy, je-li $a + \frac{1}{2} b = 0$); dále platí

$$\tfrac{3}{4} b^2 \geqq 0 \tag{5}$$

(rovnost platí právě pro $b = 0$).

Sečtením obou vztahů (4), (5) dostáváme

$$(a + \tfrac{1}{2} b)^2 + \tfrac{3}{4} b^2 \geqq 0. \tag{6}$$

Odtud dostáváme

$$a^2 + ab + \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{3}{4} b^2 \geqq 0$$

neboli

$$a^2 + ab + b^2 \geqq 0, \tag{7}$$

což jsme měli dokázat. Přitom rovnost vzhledem ke (4), (5) platí právě tehdy, je-li $a + \frac{1}{2} b = 0$, $b = 0$ neboli $a = b = 0$, což je řešeno v případě [1].

V případě [2] je $a \neq b$ a proto platí $a^2 + ab + b^2 > 0$, takže ve vztazích (3) je $x_2 = - x_1 \neq 0$.

Závěr. Je-li $a = b = 0$, je řešením rovnice (1) každé reálné číslo x. Je-li $a \neq b$, jsou řešením rovnice (1) různá reálná čísla $x = x_1$, $x = x_2$ daná vztahy (3). Má tedy rovnice (1) vždycky reálné řešení.

Podle řešení s. Lad. Berana,
žáka 11. tř. JSŠ v Radotíně.

Jiné řešení. Po úpravě rovnice (1) dostaneme

$$(a - b)x^2 = a^3 - b^3. \qquad (2)$$

Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Nechť je $a - b = 0$ neboli $a = b$. Pak je též $a^3 = b^3$ neboli $a^3 - b^3 = 0$. Rovnice (2) a tedy i rovnice (1) je zřejmě splněna pro každé číslo x a má tedy nekonečně mnoho řešení.

Případ [2]. Nechť je $a - b \neq 0$. Potom můžeme předpokládat, že je $a - b > 0$ neboli

$$a > b; \qquad (7)$$

kdyby tomu tak nebylo, potom bychom zaměnili označení čísel a, b. Z rovnice (2) pak dostaneme

$$x^2 = k, \qquad (8)$$

kde

$$k = \frac{a^3 - b^3}{a - b}.$$

O čísle k dokážeme, že za předpokladu platnosti vztahu (7) je kladné.

Důkaz. Stačí dokázat, že platí $a^3 - b^3 > 0$ neboli

$$a^3 > b^3. \tag{9}$$

Rozeznávejme tyto případy:

a) Nechť je $b \geqq 0$, takže platí $a > b \geqq 0$. Potom podle známé poučky ze vztahu $a > b$ plyne $a^3 > b^3$ (viz učebnici Algebra pro 10. ročník, str. 6), takže platí vztah (9).

b) Nechť je $a \geqq 0$, $b < 0$. Potom je $a^3 \geqq 0$, $b^3 < 0$ a tudíž platí vztah (9).

c) Nechť je $a < 0$, $b < 0$. Ze vztahu $a > b$ plyne $-a < -b$, kde $-a > 0$, $-b > 0$; ze vztahu $-a < -b$ podle prve uvažovaného případu a) plyne $(-a)^3 < (-b)^3$ neboli $-a^3 < -b^3$, t. j. $a^3 > b^3$, což je vztah (9).

Protože za předpokladu platnosti vztahu (7) není jiné možnosti než uvedené (t. j. a) až c)), je platnost vztahu (9) dokázána a vskutku platí $k > 0$.

Rovnice (8) je ryze kvadratická, dále je $\sqrt{k} > 0$ a tudíž rovnice (8) má dvě různá řešení $x = x_1$, $x = x_2$, kde

$$x_1 = \sqrt{k}, \quad x_2 = -\sqrt{k}.$$

Tyto kořeny zřejmě vyhovují dané rovnici (1).

2. Štvorsten $VABC$ má tieto vlastnosti:

(1) Stena ABC je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou $BC = 2a$, kde a je dané kladné číslo.

(2) Stena VBC je rovnostranný trojuholník, ktorého rovina je kolmá k rovine ABC.

Označme O stred hrany BC a ďalej označme po rade B', O', C' body vnútri úsečiek VB, VO, VC, pričom body B', O', C' ležia na priamke rovnobežnej s priamkou BC. Uhol $\sphericalangle OAO'$ označme x.

a) Vyjadrite veľkosti strán trojuholníka $AB'C'$ pomocou a, x.

b) Vypočítajte, pre ktoré x je trojuholník $AB'C'$ rovnostranný.

Riešenie (obr. 20). a) Z textu úlohy vyplýva

$$OB = OC = a,$$
$$VB = VC = 2a,$$
$$\sphericalangle ABC = 45°$$

(trojuholník ABC je rovnoramenný a pravouhlý),

$$\sphericalangle AOB = 90°,$$

takže trojuholník ABO je rovnoramenný a pravouhlý a preto

$$OA = a. \tag{1}$$

V trojuholníku AVO je $\sphericalangle O = 90°$ a

$$VO = a\sqrt{3} \tag{2}$$

(výška rovnostranného trojuholníka VBC); preto platí

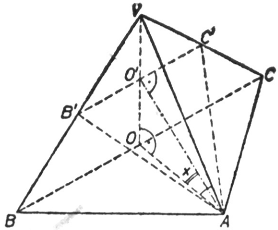
$$\operatorname{tg} \sphericalangle VAO = \frac{OV}{OA} = \sqrt{3},$$

alebo

$$\sphericalangle VAO = 60°. \tag{3}$$

Teda je vždy

$$0 < x < 60°. \tag{3'}$$



Obr. 20.

Z trojuholníka $AO'O$ (kde $\sphericalangle O = 90°$) vyplýva vzhľadom na (1)

$$OO' = OA \,.\, \operatorname{tg} x = a \,.\, \operatorname{tg} x, \tag{4}$$

$$AO' = \frac{OA}{\cos x} = \frac{a}{\cos x}\,; \tag{5}$$

preto je podľa (2) a (4)

$$VO' = VO - OO' = a(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x). \tag{6}$$

Z rovnoľahlosti trojuholníkov VBC, $VB'C'$, ktoré sú rovnostranné, dostaneme podľa (6) a (2)

$$B'O' = BO \,.\, \frac{VO'}{VO} = a \,.\, \frac{a(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x). \tag{7}$$

Pretože je $B'C' = 2 \,.\, B'O'$, dostaneme zo vzťahu (7)

$$B'C' = \frac{2a}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)\,. \tag{8}$$

Pretože je $AO \perp BC$, $VO \perp BC$, je rovina AVO rovinou súmernosti daného štvorstena $VABC$ a z toho vyplýva, že aj body B', C' sú súmerne združené podľa tejto roviny, takže $AB' = AC'$, $O'B' = O'C'$, $\sphericalangle AO'B' = 90°$; preto z trojuholníka $AB'O'$ dostaneme podľa Pythagorovej vety použitím (5) a (7)

$$AB'^2 = AO'^2 + B'O'^2 = \frac{a^2}{\cos^2 x} + \frac{a^2}{3} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2$$

alebo

$$AB'^2 = a^2 \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2 \right]. \tag{9}$$

Vzťahy (8), (9) dávajú riešenie úlohy a).

b) Máme stanoviť x, pre ktoré je $AB' = B'C'$ alebo $AB'^2 = B'C'^2$; zo vzťahov (8), (9) vyplýva, že musí platiť

$$a^2 \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2 \right] = \frac{4a^2}{3} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2. \tag{9'}$$

Pretože je $a \neq 0$, dostaneme stade ekvivalentný vzťah

$$\frac{1}{\cos^2 x} = (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2\,.$$

Vzhľadom na (3') je $\cos x > 0$, $\sqrt{3} > \operatorname{tg} x > 0$ alebo $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x > 0$ a preto je posledná rovnica (vzhľadom na danú úlohu) ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt{3} - \operatorname{tg} x$$

alebo

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,.\, \cos x - \tfrac{1}{2} \,.\, \sin x = \tfrac{1}{2}\,;$$

avšak $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ a tým nadobudne posledná rovnica postupne tvary

$$\sin 60° \cos x - \cos 60° \sin x = \sin(\omega + 2k\pi),$$

$$\sin(60° - x) = \sin(\omega + 2k\pi), \tag{10}$$

kde k je celé číslo a $\omega = 30°$ alebo $\omega = 150°$. Z rovnice (10) dostaneme

$$60° - x = \omega + 2k\pi$$

alebo

$$x = 60° - \omega - 2k\pi.$$

Podmienku (3') pre x možno zrejme splniť len číslami $\omega = 30°$, $k = 0$, t. j.

$$x = 30°.$$

Tento uhol zrejme vyhovuje požiadavkám úlohy, ako vyplýva napr. z obráteného postupu alebo z dosadenia do (9'). Tým sme úlohu rozriešili.

Podľa riešenia s. Leo Bukovského,
žiaka 11d JSŠ v Lučenci.

3. Je dáno kladné číslo k. Uvažujme kruhovou výseč, jejíž obvod je roven číslu k a jejíž poloměr označíme x.

Vyjádřete obsah p této výseče jako funkci poloměru x.

Dále určete, pro která x nabývá obsah p největší hodnoty.

Řešení. Označme α velikost příslušného středového úhlu výseče v obloukové míře. Pak pro obvod a obsah výseče platí

$$k = x\alpha + 2x, \tag{1}$$

$$p = \tfrac{1}{2} x^2 \alpha\,. \tag{2}$$

Protože musí být $x > 0$, plyne z (1)

$$\alpha = \frac{k}{x} - 2 \tag{3}$$

a po dosazení tohoto výsledku do (2) dostaneme

$$p = \tfrac{1}{2} kx - x^2\,. \tag{4}$$

Výsledku (4) lze dát tento tvar

$$p = \tfrac{1}{16} k^2 - (\tfrac{1}{4} k - x)^2,$$

kde $(\frac{1}{4} k - x)^2 \geqq 0$; proto číslo p je největší právě tehdy, je-li

$$\tfrac{1}{4} k - x = 0$$

neboli

$$x = \tfrac{1}{4} k\,.$$

Pro $x = \frac{1}{4} k$ podle (3) je $\alpha = 2$, tedy $0 < \alpha < 2\pi$, takže příslušná kruhová výseč skutečně existuje. Nabývá tedy pro $x = \frac{1}{4} k$ obsah p největší hodnoty $\frac{1}{16} k^2$. Tím je úloha řešena.

4. V rovině buďte dány tři vesměs různé přímky MSM', NSN', PSP', které tedy procházejí bodem S. Na polopřímce SM buď dán bod A různý od bodu S.

Na přímkách NSN', PSP' sestrojte po řadě body B, C tak, aby bod S byl středem kružnice trojúhelníka ABC vepsané. (Pokyn. Vyjádřete nejprve velikost úhlu $\sphericalangle BSC$ pomocí úhlu $\sphericalangle CAB$ hledaného trojúhelníka ABC).

Řešení (obr. 21). O úhlech α, β, γ hledaného trojúhelníka ABC platí $\beta + \gamma = 2R - \alpha$; z trojúhelníka SBC, kde S je středem kružnice trojúhelníku ABC vepsané, snadno dostaneme vztah

$$\sphericalangle BSC = 2R - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

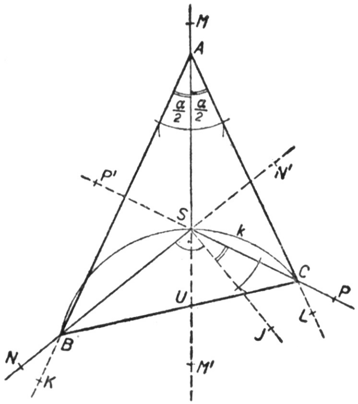
neboli

$$\sphericalangle BSC = R + \tfrac{1}{2}\alpha .$$

Záměnou vrcholů odtud dostaneme dva další vztahy, takže celkem platí

$$\sphericalangle BSC = R + \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sphericalangle CSA = R + \tfrac{1}{2}\beta, \quad \sphericalangle ASB = R + \tfrac{1}{2}\gamma . \tag{1}$$

Je tedy každý z úhlů $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle CSA$ a $\sphericalangle ASB$ tupý. (Uvidíme, že tato nutná podmínka je i podmínkou postačující pro řešitelnost úlohy.)



Obr. 21.

Protože přímka AS má s úsečkou BC společný bod U, který leží uvnitř této úsečky, leží i polopřímka SU (až na bod S)

uvnitř úhlu $\sphericalangle BSC$; proto bod $A \not\equiv S$ leží nutně uvnitř úhlu, který je k úhlu $\sphericalangle BSC$ vrcholový, a pořádek bodů na přímce AS je tedy A, S, U.

Obraťme se nyní k vlastnímu řešení úlohy. Vhodnou volbou označení bodů na daných přímkách NSN', PSP' snadno dosáhneme toho, že bod A padne dovnitř úhlu $\sphericalangle N'SP'$ a že pak bod M' padne dovnitř úhlu $\sphericalangle NSP$. Společný bod U hledané úsečky BC s přímkou AS leží podle předchozího odstavce nutně uvnitř polopřímky SM' a tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle NSP$; odtud plyne, že bod B musí ležet uvnitř polopřímky SN a bod C uvnitř polopřímky SP. Proto je nutně $\sphericalangle NSP \equiv \equiv \sphericalangle BSC$ a tedy $\sphericalangle NSP = R + \frac{1}{2}\alpha$, kde α je úhel hledaného trojúhelníka ABC při vrcholu A. Pak již musí být $\sphericalangle PSM = R + \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle MSN = R + \frac{1}{2}\gamma$, jak se snadno zjistí.

K o n s t r u k c e. Sestrojme úhel $\sphericalangle NSP - R \equiv \sphericalangle PSJ$ a označme jeho velikost $\frac{1}{2}\alpha$. Přenesme tento úhel k polopřímce AS do obou polorovin vyťatých přímkou AS; dostaneme úhly $\sphericalangle SAK = \frac{1}{2}\alpha$ (v polorovině ASN), $\sphericalangle SAL = \frac{1}{2}\alpha$ (v polorovině ASP). Společný bod polopřímek SN, AK označme B a společný bod polopřímek SP, AL označme C. Pak je ACB hledaný trojúhelník.

D ů k a z k o n s t r u k c e. Dokážeme, že trojúhelník ABC skutečně existuje a že bod S je středem kružnice tomuto trojúhelníku vepsané. Předpokládáme, že úhly $\sphericalangle MSN$, $\sphericalangle NSP$, $\sphericalangle PSM$ jsou tupé; jejich velikosti po řadě označme $R + \frac{1}{2}\gamma$, $R + \frac{1}{2}\alpha$, $R + \frac{1}{2}\beta$. Protože je $\sphericalangle MSN + \sphericalangle NSP + \sphericalangle PSM = 4R$, dostaneme odtud po dosazení vztah

$$\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma = R. \tag{2}$$

Společný bod B polopřímek SN, AK existuje, neboť je (jak ihned dokážeme)

$$\varepsilon = \sphericalangle KAS + \sphericalangle NSA < 2R, \tag{3}$$

takže je splněn požadavek Eukleidova postulátu. Důkaz vztahu (3) provedeme takto: Podle konstrukce je $\sphericalangle KAS = \frac{1}{2}\alpha$, dále je $\sphericalangle NSA = R + \frac{1}{2}\gamma$ a součet obou těchto úhlů je $R + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \varepsilon$. Avšak podle vztahu (2) je $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma < R$ a proto skutečně je $\varepsilon < 2R$. Tím je vztah (3) dokázán a bod B existuje. Stejně se dokáže, že existuje bod C.

Nyní dokážeme, že bod S je středem kružnice trojúhelníku ABC vepsané. Označili jsme $\sphericalangle NSP = R + \frac{1}{2}\alpha$; podle konstrukce je $\sphericalangle CAB = \alpha$. Přitom bod S leží na ose úhlu $\sphericalangle CAB$ a platí $\sphericalangle BSC = R + \frac{1}{2}\alpha$. Ale takový bod je v polorovině BCA jediný; proveďme důkaz tohoto tvrzení: Polopřímka AS leží v úhlu $\sphericalangle BAC$ a proto má s úsečkou BC společný bod U, ležící uvnitř této úsečky. Množinou všech bodů v polorovině BCA, z nichž je úsečka BC vidět pod daným tupým úhlem $R + \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle NSP$, je vnitřek oblouku k, jehož krajními body jsou body B, C. Přitom bod S na tomto oblouku k nutně leží a bod U leží uvnitř kružnice, jejíž částí je uvažovaný oblouk k. Proto uvnitř úsečky UA leží jediný bod S této kružnice, který je zároveň vnitřním bodem oblouku k i trojúhelníka ABC. Protože střed O kružnice trojúhelníku ABC vepsané musí ležet na polopřímce AS v polorovině BCA a musí o něm platit $\sphericalangle BOC = R + \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$ neboli $R + \frac{1}{2}\alpha$, je $O \equiv S$ a bod S je středem kružnice trojúhelníku ABC vepsané, což jsme měli dokázat.

Diskuse. Řešitelnost úlohy závisí (při našem vhodném označení daných přímek MSM', NSN', PSP') na tom, zda každý z úhlů $\sphericalangle MSN$, $\sphericalangle NSP$, $\sphericalangle PSM$ je tupý, což vyplynulo jako nutná podmínka z rozboru; její postačitelnost plyne z důkazu konstrukce. Není-li tato podmínka splněna, nemá úloha řešení. Tím je řešení dané úlohy provedeno.

3. Úlohy III. kola kategórie A.

1. Určte všetky dvojice ostrých uhlov x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y\,, \tag{1}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y\,. \tag{2}$$

Riešenie. Predpokladajme, že daná sústava má riešenie x, y, o ktorom platí

$$0 < x < 90°, \quad 0 < y < 90°. \tag{3}$$

Z rovnice (1) vyplýva

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2 - 2\sin^2 y\,.$$

Dosaďme do tejto rovnice za $2\sin^2 y$ z rovnice (2); dostaneme

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2 - \frac{\sin x}{\sin y}\,.$$

Znásobme obe strany tejto rovnice číslom $\cos y \,.\, \sin y$; dostaneme

$$\cos x \sin y = 2\cos y \sin y - \sin x \cos y$$

alebo

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y = 2\cos y \sin y$$

alebo

$$\sin(x + y) = \sin 2y.$$

Porovnaním argumentov dostaneme, že musí platiť jeden zo vzťahov (pritom je k celé číslo):

[1] $$x + y = 2y + k\,.\,360°, \tag{4}$$

[2] $$x + y = 180° - 2y + k\,.\,360°. \tag{5}$$

Prípad [1]. Z rovnice (4) dostaneme

$$x = y + k \cdot 360°.$$

Pretože x, y sú veľkosti ostrých uhlov, je nevyhnutne $k = 0$. Hľadané čísla musia teda splňovať vzťah

$$x = y. \tag{6}$$

Po dosadení do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{\cos y}{\cos y} = 2 \cos^2 y \, ;$$

zlomok na ľavej strane sa rovná číslu 1 (lebo predpokladáme, že platia vzťahy (3) a teda je $\cos y \neq 0$). Je teda

$$2 \cos^2 y = 1$$

alebo

$$\cos^2 y = \tfrac{1}{2}$$

a vzhľadom na požiadavku (3) je nevyhnutne

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \, .$$

Z toho dostávame, že musí byť $y = 45°$ a vzhľadom na (6) aj $x = 45°$.

Dvojica čísel

$$x = 45°, \; y = 45°$$

je skutočne riešením sústavy rovníc (1), (2); o tom sa presvedčíme dosadením:

Pre rovnice (1) platí skutočne

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos 45°}{\cos 45°} = 1 \text{ a } 2 \cos^2 y = 2 \cos^2 45° = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Podobne zistíme pre rovnicu (2), že po dosadení $x = y = 45°$ sa každá jej strana rovná číslu 1.

Prípad [2]. Z rovnice (5) dostaneme

$$x + y = (180° - 2y) + k \,.\, 360°. \tag{7}$$

Podľa požiadaviek (3) je $0 < x + y < 180°$ a $0 < 2y < 180°$, preto pre výraz v zátvorke na pravej strane rovnice (7) platí

$$0 < 180° - 2y < 180°.$$

Keby bolo $k \geqq 1$, dostali by sme, že $x + y > 360°$; keby bolo $k \leqq -1$, dostali by sme $x + y < 0$. Preto môže byť jedine $k = 0$ a teda musí platiť

$$x + y = 180° - 2y.$$

Z toho vyplýva

$$x = 180° - 3y. \tag{7'}$$

Po dosadení do rovnice (2) dostávame

$$\frac{\sin (180° - 3y)}{\sin y} = 2 \sin^2 y$$

a vzhľadom na (3′) po znásobení oboch strán tejto rovnice číslom $\sin y \neq 0$

$$\sin (180° - 3y) = 2\sin^3 y. \tag{8}$$

Ale $\sin (180° - 3y) = \sin 3y$ a rovnici (8) možno dať tvar

$$\sin 3y = 2 \sin^3 y. \tag{9}$$

Ľahko odvodíme vzťah $\sin 3y = 3 \cos^2 y \,.\, \sin y - \sin^3 y$; po dosadení do rovnice (9) dostaneme

$$3 \cos^2 y \,.\, \sin y = 3 \sin^3 y.$$

Ak násobíme obe strany tejto rovnice číslom $\dfrac{1}{3 \sin y}$ (pozri vzťahy (3)), dostaneme

$$\cos^2 y = \sin^2 y$$

a pretože y je veľkosť ostrého uhla, vyplýva z predošlej rovnice

$$\cos y = \sin y$$

alebo (pozri napr. grafy funkcií sinus a kosinus)

$$y = 45°.$$

Po dosadení do (7') dostaneme $x = 45°$. Dospievame teda k výsledku prípadu [1].

Jediná dvojica ostrých uhlov x, y, ktorá vyhovuje danej sústave, je $[x = 45°, y = 45°]$. Tým sme úlohu rozriešili.

Podľa riešenia s. Leo Bukovského,
žiaka 11d JSŠ v Lučenci.

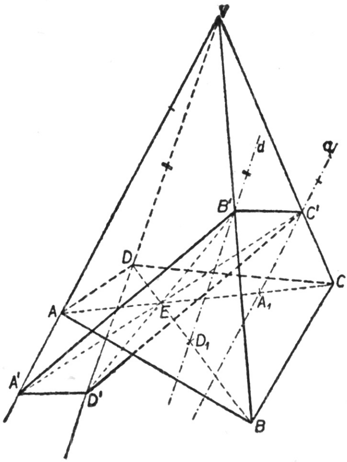
2. V dané rovině ϱ buď dán vypuklý čtyrúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě E. Mimo rovinu ϱ buď dán bod V.

Uvnitř polopřímek VA, VB, VC, VD sestrojte po řadě body A', B', C', D' tak, aby ležely s bodem E v téže rovině σ a aby čtyrúhelník $A'B'C'D'$ byl rovnoběžník. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy. Náčrt konstrukce proveďte ve volném rovnoběžném promítání.

Řešení (obr. 22). Jestliže rovnoběžník $A'B'C'D'$ existuje, pak se jeho úhlopříčky $A'C'$, $B'D'$ musí protnout v bodě E', který leží uvnitř polopřímky VE; protože však rovina σ, která zřejmě nemůže obsahovat přímku VE, prochází bodem E, je nutně $E' \equiv E$, t. j. bod E musí být středem hledaného rovnoběžníka. Bod E musí tedy být středem souměrnosti rovnoběžníka $A'B'C'D'$. Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce. Sestrojme obraz A_1 bodu A v souměrnosti podle bodu E, veďme jím přímku $a \parallel VA$ a označme C' průsečík přímek a, VC. Dále označme A' průsečík přímek EC',

VA. Podobně sestrojme obraz D_1 bodu D v souměrnosti podle bodu E, veďme jím přímku $d \parallel VD$ a označme B' průsečík přímek d, VB. Dále označme D' průsečík přímek EB', VD. Potom je čtyrúhelník $A'B'C'D'$ hledaný rovnoběžník.



Obr. 22.

Důkaz. Bod E leží uvnitř poloroviny VAC a s ním tedy i bod A_1; proto uvnitř této poloroviny leží i přímka $a \parallel VA$ a tedy i bod C', který proto leží uvnitř polopřímky VC. Při tom bod C' existuje, neboť přímka VC protíná první z rovnoběžek VA, a a tudíž protíná i druhou. Bod A' je zřejmě obrazem bodu C' v souměrnosti podle bodu E, neboť leží na přímce EC' a na přímce VA, která je obrazem přímky a v souměrnosti podle bodu E. Stejně jako pro bod C' se dokáže, že bod A' leží uvnitř polopřímky VA. Je tedy

$$EA' = EC'. \qquad (1)$$

Právě tak se dokáže, že body B', D' leží po řadě uvnitř polopřímek VB, VD a že platí

$$EB' = ED'. \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) plyne, že $A'B'C'D'$ je hledaný rovnoběžník.

Protože provedené konstrukce lze provést s jediným výsledkem, má úloha vždy právě jedno řešení. Jestliže platí $EA = EC$, $EB = ED$, potom je daný čtyrúhelník $ABCD$ hledaným čtyrúhelníkem $A'B'C'D'$.

Popsanou konstrukci lze provést v rovnoběžném promítání, neboť obrazem středu úsečky je střed úsečky, která je obrazem dané úsečky; obrazy rovnoběžek jsou rovnoběžné přímky.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. Lubomíra Ohery,
žáka 11b JSŠ ve Znojmě.

3. Určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - |y+1| &= 1, \\ x^2 + y &= 10. \end{aligned}$$

Řešení. Předpokládejme, že daná soustava má řešení. Rozeznávejme dvě možnosti: [1] Nechť je $y + 1 \geqq 0$; [2] nechť je $y + 1 < 0$.

Případ [1]. Tu platí $|y + 1| = y + 1$, a proto je daná soustava ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} x - (y+1) &= 1, \\ x^2 + y &= 10 \end{aligned}$$

neboli se soustavou

$$\begin{aligned} x - y &= 2, \\ x^2 + y &= 10. \end{aligned} \tag{1}$$

Sečteme-li obě poslední rovnice, obdržíme rovnici

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou x_1, x_2, kde

$$x_1 = 3, \; x_2 = -4.$$

K číslům $x = x_1$, $x = x_2$ z první rovnice (1) dostaneme po řadě příslušná čísla $y = y_1$, $y = y_2$, kde

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -6.$$

Vzhledem k požadavku $y + 1 \geqq 0$ vyhovuje dané soustavě pouze dvojice

$$x = 3, \quad y = 1.$$

Případ [2]. Z předpokladu $y + 1 < 0$ plyne $|y + 1| = -(y + 1)$. Z dané soustavy pak dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} x - [-(y + 1)] &= 1, \\ x^2 + y &= 10 \end{aligned}$$

neboli soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x^2 + y &= 10. \end{aligned} \tag{2}$$

Odečtením první rovnice (2) od druhé rovnice (2) obdržíme

$$x^2 - x - 10 = 0.$$

Její řešení x_1, x_2 jsou

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - (-40)}) = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}),$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - (-40)}) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{41}).$$

K nim z první rovnice (2) příslušejí po řadě čísla $y = y_1$, $y = y_2$, kde

$$y_1 = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}), \quad y_2 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{41}).$$

Nyní dokážeme, že dvojice $x = x_1$, $y = y_1$ je řešením dané soustavy, kdežto dvojice $x = x_2$, $y = y_2$ není řešením dané soustavy.

Stačí dokázat, že platí $y_1 < -1$, kdežto $y_2 > -1$. Zde platí $\sqrt{41} > \sqrt{36} = 6$. Proto je $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{41}) > 1$ a tedy $y_1 < -1$. Dále je $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{41}) > -1$, t. j. $y_2 > -1$. Tím je důkaz proveden.

Závěr. Daná soustava má právě tato dvě řešení:

$$x = 3, y = 1; \; x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}), \; y = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}).$$

Podle řešení s. Miloše Dostála,
žáka 11a tř. 20. JSŠ v Praze XVI.

4. Je dána polokružnice $\widehat{AB}$. Označme X vnitřní bod této polokružnice. Na polopřímce XA, sestrojme bod Y tak, aby platilo $XY = XB$. Jaký útvar vyplní bod Y, jestliže bod X probíhá všechny vnitřní body dané polokružnice $\widehat{AB}$?

Řešení (obr. 23, 24). Označme $k \equiv (S, SA)$ kružnici, jejíž částí je daná polokružnice $\widehat{AB}$. Dále buď $CD \perp AB$ průměr této kružnice, při čemž je C vnitřním bodem polokružnice $\widehat{AB}$; tuto polokružnici budeme v dalším značit také polokružnice $\widehat{ACB}$.

Podle textu úlohy leží bod Y uvnitř polopřímky XA, při čemž platí

$$XY = XB. \tag{1}$$

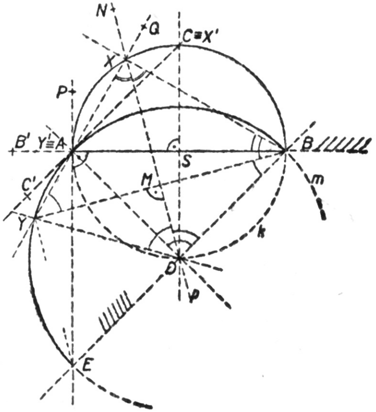
Přitom podle Thaletovy věty platí

$$\sphericalangle AXB = 90°. \tag{2}$$

Trojúhelník BYX je proto pravoúhlý a rovnoramenný s přeponou BY a platí

$$\sphericalangle XYB = \sphericalangle YBX = 45°. \tag{3}$$

Označme M střed úsečky BY; pak polopřímka XM leží v obvodovém úhlu $\sphericalangle AXB = 90°$ a dělí jej ve dva shodné styčné úhly o velikostech 45°. V tomto obvodovém úhlu $\sphericalangle AXB$ leží k němu příslušný oblouk $\widehat{ADB}$ kružnice k a přímka $p \equiv XM$ dělí polokružnici $\widehat{ADB}$ ve dva oblouky $\widehat{AD'}$, $\widehat{D'B}$, z nichž každý přísluší ke středovému úhlu velikosti $45° \,.\, 2 = 90°$. Proto je $\sphericalangle ASD' = \sphericalangle BSD' = 90°$. Odtud plyne, že je $D \equiv D'$, a proto osa p úsečky BY prochází bodem D pro každou polohu bodu X. Při tom je $DB = DY$, neboť přímka p je množinou všech bodů, které mají od bodů B, Y sobě rovné vzdálenosti. Odtud plyne, že každý bod Y leží na kružnici $m \equiv (D, DB)$; tato kružnice prochází zřejmě bodem $A \equiv Y'$,



Obr. 23.

který přísluší k bodu $X' \equiv C$ dané polokružnice $\widehat{ACB}$. Označme BE průměr kružnice m; snadno zjistíme, že platí

$$AE \perp AB, AE = AB.$$

Zkoumejme nyní podrobněji množinu bodů Y. Úhel $\sphericalangle BDX$ je obvodovým úhlem nad obloukem $\widehat{BX}$ dané polokružnice $\widehat{ACB}$. O příslušném středovém úhlu $\sphericalangle BSX$ podle textu úlohy platí

$$0 < \sphericalangle BSX < 180°,$$

neboť bod X leží uvnitř polokružnice $\widehat{ACB}$. Proto o příslušném obvodovém úhlu $\sphericalangle BDX$ platí

$$0 < \sphericalangle BDX < 90°. \tag{4}$$

Ze souměrnosti podle osy p dostáváme vztah

$$\sphericalangle XDY = \sphericalangle BDX. \tag{5}$$

Protože je $\sphericalangle BDY = \sphericalangle BDX + \sphericalangle XDY$, plyne z předchozího vztahu, že $\sphericalangle BDY = 2 \,.\, \sphericalangle BDX$. Odtud a ze (4) dostaneme vztahy

$$0 < \sphericalangle BDY < 180°, \tag{6}$$

které platí pro každý bod Y a tedy i pro bod $Y' \equiv A$.

Padne tedy nutně každý bod Y dovnitř poloroviny BEA na kružnici m neboli dovnitř polokružnice $\widehat{BAE}$. Nyní dokážeme, že ke každému bodu Y_0, který leží uvnitř této polokružnice, dovedeme sestrojit uvnitř dané polokružnice $\widehat{ACB}$ bod X_0 takový, že sestrojíme-li k němu jako k bodu $X \equiv X_0$ bod Y podle textu úlohy, dostaneme bod $Y \equiv Y_0$.

Důkaz. Protože je Y_0 vnitřní bod polokružnice $\widehat{BAE}$, platí (srovnej s (6))

$$0 < \sphericalangle BDY_0 < 180°.$$

Označme DN osu tohoto úhlu*); ta leží zřejmě v úhlu $\sphericalangle ADB = 90°$, který je obvodovým úhlem nad polokružnicí $\widehat{ACB}$. Proto má polopřímka DN s touto polokružnicí nutně společný

---

*) Srovnej s obr. 23, který je třeba vhodně upravit (písmena X, Y nahradit písmeny X_0, Y_0).

bod X_0, různý od bodů A, B. Při tom je DX_0 osou souměrnosti trojúhelníka DBY_0, takže je $DX_0 \perp BY_0$. Sestrojme nyní podle textu úlohy k bodu $X \equiv X_0$ příslušný bod Y. Podle (5) padne Y na polopřímku DY_0, neboť podle předchozí konstrukce bodu X_0 je $\sphericalangle BDX_0 = \sphericalangle X_0DY_0$. Avšak na tuto polopřímku padne jediný bod kružnice m a tím je bod Y_0; proto je $Y \equiv Y_0$, což jsme měli dokázat.

Tím je řešení dané úlohy provedeno; hledanou množinou všech bodů Y je vnitřek polokružnice $\widehat{BAE}$, kterou jsme výše sestrojili.

Jiné řešení. Označme CD průměr kružnice $k \equiv (S, SA)$ kolmý k přímce AB, při čemž bod C leží na dané polokružnici $\widehat{AB}$ (polokružnici $\widehat{ACB}$). Jako při 1. řešení dospějeme ke vztahu

$$\sphericalangle BYX = 45°. \tag{3}$$

Nyní rozeznávejme tři možnosti pro polohu bodu X na dané polokružnici $\widehat{ACB}$:

Případ [1]. Nechť je $X \equiv C$; pak příslušným bodem Y je bod A.

Případ [2] (viz obr. 23). Nechť je X vnitřním bodem čtvrtkružnice $\widehat{AC}$, takže leží uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle ASC$ a platí

$$\sphericalangle ASX < 90°. \tag{7}$$

Odtud snadno usoudíme, že bod X leží uvnitř úhlu $\sphericalangle CAP = 45°$, kde $AP \perp AB$ je polopřímka poloroviny ABC. Na přímce AP v polorovině ABD sestrojme bod E tak, aby AEB byl pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník o přeponě EB; bod D je zřejmě středem kružnice m tomuto trojúhelníku opsané.

Tečna kružnice m v bodě A je přímka CAC', kde C' je bod ležící uvnitř poloroviny ABD.

Trojúhelník ABX má podle Thaletovy věty při vrcholu X pravý úhel. Jeho ostrý úhel $\sphericalangle ABX$ je obvodový úhel v kružnici k a přísluší ke středovému úhlu $\sphericalangle ASX < 90°$. Proto je

$$\sphericalangle ABX < 45°. \tag{8}$$

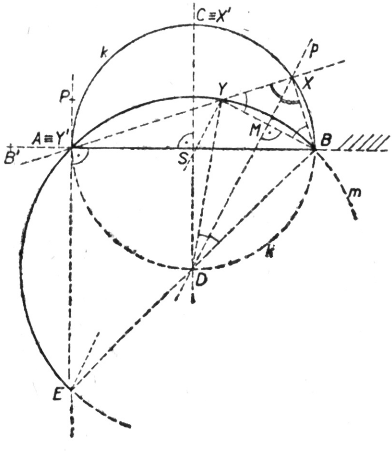
Druhý ostrý úhel $\sphericalangle BAX$ tohoto trojúhelníka je proto větší než 45°, takže platí $\sphericalangle ABX < \sphericalangle BAX$. Proto o odvěsnách tohoto trojúhelníka platí $AX < BX$. Bod Y, který sestrojíme podle textu úlohy ke zvolenému bodu X, padne na prodloužení úsečky XA za bod A a tedy dovnitř poloroviny ABD. Protože bod X leží uvnitř úhlu $\sphericalangle CAP$, leží bod Y uvnitř úhlu $\sphericalangle C'AE$ k němu vrcholového. O bodu Y platí vztah (3). Proto podle známé věty o množině všech bodů, z nichž je daná úsečka vidět pod daným úhlem, snadno usoudíme, že bod Y leží na jistém oblouku $\widehat{AB}$ v polorovině ABD. Protože je též $\sphericalangle AEB = 45°$, prochází tento oblouk též bodem E, takže je částí kružnice m opsané trojúhelníku BAE. Avšak bod Y musí ležet uvnitř úhlu $\sphericalangle C'AE$; proto leží bod Y uvnitř oblouku AE kružnice m. Víme, že je $\sphericalangle EDA = 90°$, proto je oblouk $\widehat{AE}$ čtvrtkružnice.

Jestliže obráceně je Y_0 bodem, který leží uvnitř této čtvrtkružnice $\widehat{AE}$ (v obr. 23. nechť si čtenář myslí, že je $Y_0 \equiv Y$), potom dokážeme, že lze na čtvrtkružnici $\widehat{AC}$ najít bod X takový, že bod Y, který k němu podle textu úlohy přísluší, nutně splyne s bodem Y_0. Důkaz provedeme takto: Označme AQ polopřímkou opačnou k polopřímce AY_0. Protože přímka Y_0AQ není kolmá k přímce AB, je nutně sečnou kružnice k a společné jejich body jsou $A \not\equiv X$. Přitom bod X musí ležet uvnitř polopřímky AQ, neboť polopřímka AY_0 leží v polorovině AEB' opačné k polorovině AES, která je vyťata tečnou AE kružnice k (a kružnice k nutně tedy leží v polorovině AES). Podle textu úlohy sestrojíme k bodu X příslušný bod

Y. Ten podle předchozího výsledku nutně leží uvnitř polopřímky AY_0 a na čtvrtkružnici AE; z toho přímo vyplývá, že je $Y \equiv Y_0$. Tím je důkaz proveden.

Odtud plyne, že vnitřek čtvrtkružnice $\widehat{AE}$ patří k hledané množině všech bodů Y.

Případ [3] (viz obr. 24). Nechť je X bodem čtvrtkružnice $\widehat{CB}$, takže leží uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle\, CSB$ a platí $\sphericalangle XSB < < 90°$.



Obr. 24.

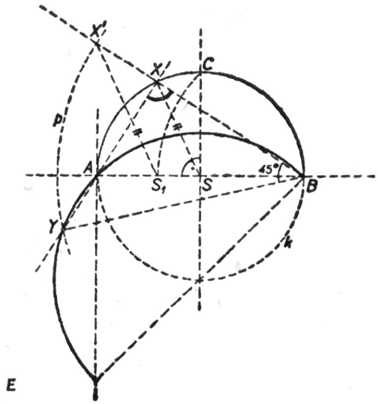
Snadno dokážeme jako v případě [2], že pak je $\sphericalangle\, ABX > > \sphericalangle\, BAX$, a proto též $AX > BX$. Proto bod Y, příslušný podle textu úlohy k bodu X je vnitřním bodem úsečky AX a leží tedy uvnitř poloroviny ABC. Úhel $\sphericalangle\, AYB$ je vnějším úhlem trojúhelníka BYX, který je pravoúhlý a rovnoramenný, takže je $\sphericalangle\, AYB = 135°$. Množinou všech bodů uvnitř poloroviny ABC, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem 135°, je oblouk $\widehat{AB}$ již dříve uvažované kružnice $m \equiv (D, DB)$, jak plyne na př. i z toho, že $\sphericalangle ADB = 90°$; proto je tento oblouk $\widehat{AB}$ rovněž čtvrtkružnice.

Stejně jako v případě [2] se snadno dokáže, že každý vnitřní bod čtvrtkružnice $\widehat{AB}$ lze považovat za bod Y sestrojený k jistému bodu X, který leží uvnitř čtvrtkružnice $\widehat{CB}$.

Z toho plyne, že vnitřek čtvrtkružnice $\widehat{AB}$ patří rovněž k hledané množině všech bodů Y.

Závěr. Spojíme-li nyní výsledky případů [1] až [3], vidíme, že hledanou množinou všech bodů Y je vnitřek polokružnice $\widehat{EAB}$, která leží uvnitř poloroviny EBA a je částí kružnice $m \equiv (D, DB)$. Tím je řešení úlohy provedeno.

Poznámka. Naznačíme ještě jeden způsob řešení (obr. 25): Podle vztahu (3) je $\sphericalangle XBY = 45°$ a dále je $BY = \sqrt{2} \,.\, BX$,



Obr. 25.

jak plyne z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka BYX. K danému bodu X tedy sestrojíme příslušný bod Y tak, že sestrojíme obraz X' bodu X ve stejnolehlosti o středu B a koeficientu $\sqrt{2}$, načež k bodu X' sestrojíme obraz Y v otáčení kolem bodu S o úhel 45° (ve vhodném smyslu). Odtud plyne, že hledanou množinou všech bodů Y je vnitřek polokružnice $\widehat{EAB}$; rovněž obrácení je bezprostřední. (V obr. 25 je $BS = r$, $BC = r\sqrt{2}$; o bodu S_1 polopřímky BS platí $BS_1 = BC$ a dále je $S_1X' \parallel SX$; nakonec opíšeme kružnici $p \equiv (B, BX')$, na níž leží hledaný bod Y.)

4. Úlohy I. kola kategorie B.

1. V rovině pravoúhlých souřadnic sestrojte graf funkce

$$y = |x - a| + |x - b|, \tag{1}$$

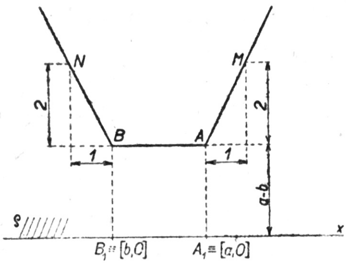
kde $a \geqq b$ jsou daná reálná čísla.

Provedenou konstrukci odůvodněte.

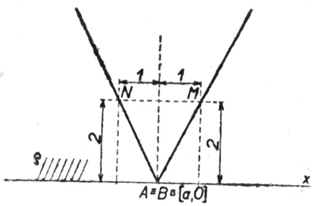
Řešení. Rozeznávejme tři možnosti: [1] Nechť je $a < x$; [2] nechť je $b \leqq x \leqq a$; [3] nechť je $x < b$.

Případ [1]. Pro $x > a$ je $|x - a| = x - a$, $|x - b| = x - b$ a vztah (1) lze psát $y = x - a + x - b$ neboli

$$y = 2x - (a + b).$$



Obr. 26.



Obr. 27.

Grafem této funkce v rovině pravoúhlých souřadnic x, y při podmínce $x > a$ je vnitřek polopřímky AM; při tom je $A \equiv \equiv [x = a; y = a - b]$ a směrnice přímky AM je 2. Jsou tu dvě možnosti: Je-li $a > b$, máme graf na obr. 26; je-li $a = b$ máme graf na obr. 27.

Případ [2]. Pro $b \leqq x \leqq a$ je $|x - a| = a - x$, $|x - b| = = x - b$ a vztah (1) lze psát $y = a - x + x - b$ neboli

$$y = a - b.$$

Jsou opět dvě možnosti: Je-li $a > b$, je grafem úsečka AB, kde $A \equiv [x = a, y = a - b]$, $B \equiv [x = b, y = a - b]$, rovnoběžná s osou x; je-li $a = b$, je grafem bod $A \equiv B \equiv \equiv [x = a, y = 0]$.

Případ [3]. Pro $x < b$ je $|x - a| = a - x$, $|x - b| = b - x$ a vztah (1) lze psát $y = a - x + b - x$ neboli

$$y = - 2x + (a + b).$$

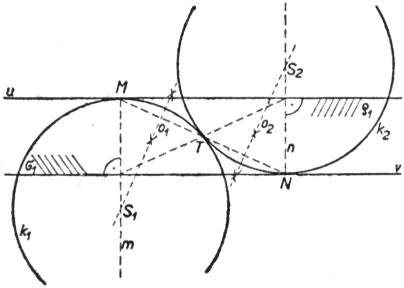
Grafem této funkce při podmínce $x < b$ je vnitřek polopřímky BN; při tom je $B \equiv [x = b, y = a - b]$ a směrnice přímky BN je -2. Jsou tu dvě možnosti: Je-li $a > b$, máme graf na obr. 26; je-li $a = b$, máme graf na obr. 27.

2. Nech sú dané dve rôzne rovnobežky u, v; ďalej nech je daný na priamke u bod M a na priamke v bod N.

Zostrojte dve zhodné, navzájom sa dotýkajúce kružnice k_1, k_2, z ktorých k_1 sa dotýka priamky u v bode M a k_2 sa dotýka priamky v v bode N.

Urobte diskusiu riešenia úlohy.

Riešenie (obr. 28, 29). Predpokladajme, že daná úloha má riešenie. Obe hľadané kružnice $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$ sú zhodné a preto sa musia dotýkať zvonku. Označme ϱ_1, ϱ_2 polroviny vyťaté priamkou u, pričom ϱ_1 obsahuje priamku v; ďalej označme σ_1, σ_2 polroviny vyťaté priamkou v, pričom σ_1 obsahuje priamku u. Kružnica k_1 sa dotýka priamky u v bode M a preto leží celá v jednej z polrovín ϱ_1, ϱ_2; rovnako usúdime, že kružnica k_2 leží celá v jednej z polrovín σ_1, σ_2. Kombinujeme každú z polrovín ϱ_1, ϱ_2 s každou z polrovín σ_1, σ_2; tak dostaneme štyri možnosti pre polohu hľadaných kružníc. Pritom prípad (ϱ_2, σ_2) musíme vylúčiť, lebo tieto polroviny nemajú spoločný bod, kdežto kružnice k_1, k_2 majú spoločný bod dotyku. Zostávajú teda tieto tri kombinácie polrovín: (ϱ_1, σ_1), (ϱ_1, σ_2), (ϱ_2, σ_1). Tretiu možnosť možno previesť na druhú súmernosťou podľa stredu T úsečky MN. Budeme preto skúmať len prvé dve možnosti.



Obr. 28.

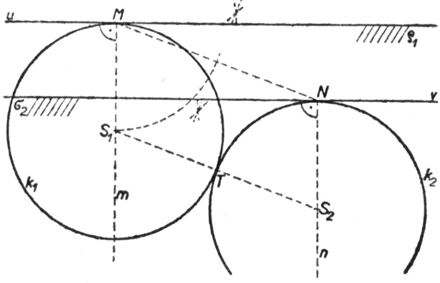
P r í p a d [1] (obr. 28). Nech kružnice k_1, k_2 ležia v polrovinách ϱ_1, σ_1; zo vzájomnej polohy polrovín ϱ_1, σ_1 vyplýva, že polpriamky S_1M, S_2N (ktoré sú kolmé na rovnobežné dotyčnice u, v) sú navzájom nesúhlase rovnobežné. Označme T dotykový bod oboch kružníc k_1, k_2. (Je známe, že dve zhodné dotýkajúce sa kružnice k_1, k_2 majú dotykový bod T za stred súmernosti, pri ktorej kružnica k_1 prechádza v k_2 a k_2 v k_1. V stredovej súmernosti sú príslušné polpriamky nesúhlasne rovnobežné.) V súmernosti podľa bodu T prechádza kružnica

k_1 v k_2 a k_2 v k_1, ďalej bod S_1 v S_2 a S_2 v S_1 a konečne bod M v N a N v M. Z toho vyplýva, že bod T je stredom úsečky MN a úsečky TM, TN si navzájom odpovedajú v stredovej súmernosti podľa bodu T; to sú však tetivy kružníc k_1, k_2 (v tomto poradí). Preto body S_1, S_2 ležia na osách o_1, o_2 (v tomto poradí) úsečiek TM, TN a ďalej po rade na priamkach $m \perp u$, $n \perp v$, vedených bodmi M, N (v tomto poradí).

Z toho bezprostredne vyplýva konštrukcia (pozri obr. 28); jej odôvodnenie sme už urobili.

Pretože priamky u, MN sú pri každej polohe priamok $u \not\equiv v$ a bodov M, N navzájom rôznobežné, sú aj dvojica priamok (m, o_1) a dvojica priamok (n, o_2) vždy rôznobežné. Preto vždy existujú body S_1, S_2 a úloha má v tomto prípade práve jedno riešenie.

Prípad [2] (obr. 29). Nech kružnice k_1, k_2 ležia po rade v polrovinách ϱ_1, σ_2; zo vzájomnej polohy týchto polrovín vyplýva, že polpriamky S_1M, S_2N (ktoré sú kolmé k rovnobežným dotyčniciam u, v) sú navzájom súhlasne rovnobežné. Označme T dotykový bod oboch kružníc k_1, k_2. (Je známa táto veta: Ak sú $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$ dve zhodné kružnice,



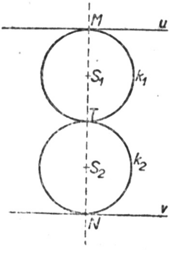
Obr. 29.

ktoré sa dotýkajú v bode T, potom možno posunutím previesť kružnicu k_1 v kružnicu k_2; veľkosť posunutia je $2r$, jeho zmysel je udaný polpriamkou S_1S_2.) V posunutí, v ktorom bod S_1 prechádza v bod S_2, prechádza polpriamka S_1M v polpriamku S_2N a pretože je $S_1M = S_2N = r$, prejde v tomto posunutí bod M v bod N. Z toho vyplýva, že S_1S_2, MN sú zhodné úsečky, pričom je $S_1S_2 = 2r$; je teda $2r = MN$ alebo $r = \frac{1}{2} MN$.

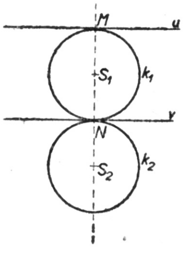
Z toho bezprostredne vyplýva konštrukcia, ktorú vidíme na obr. 29; jej správnosť sme v predošlom už dokázali.

Pretože M, N sú rôzne body, úsečka r vždy existuje a úloha má práve jedno riešenie.

Záver. Celkom možno zostrojiť tri dvojice kružníc k_1, k_2. Prvá dvojica odpovedá prípadu [1]; dve dvojice odpovedajú prípadu [2], jedna totiž dvojici polrovín (ϱ_1, σ_2), druhá dvojici polrovín (ϱ_2, σ_1).



Obr. 30.



Obr. 31.

Poznámka. Ak je $MN \perp u$, zostáva podané riešenie v platnosti (pozri obr. 30, 31).

3. Riešte sústavu rovníc

$$ax + (1 - a)y = 2, \tag{1}$$

$$(2 - a)x + 3ay = 1 \tag{2}$$

o neznámych x, y, kde a je dané reálne číslo.

Urobte diskusiu riešiteľnosti sústavy vzhľadom na číslo a.

Riešenie. Znásobme obe strany rovnice (1) číslom $-(2-a)$ a obe strany rovnice (2) číslom a; sčítajme ďalej ľavé a pravé strany rovníc, ktoré tak dostaneme. Výsledkom bude rovnica

$$-(1-a)(2-a)y + 3a^2y = -2(2-a) + a$$

alebo

$$y(2a^2 + 3a - 2) = 3a - 4. \tag{3}$$

To je lineárna rovnica pre neznámu y. O jej riešiteľnosti rozhoduje predovšetkým koeficient $2a^2 + 3a - 2$. Vypočítajme, pre ktoré čísla a sa tento trojčlen rovná nule. Za tým účelom riešme rovnicu

$$2a^2 + 3a - 2 = 0.$$

Tá má korene $a = a_1$, $a = a_2$, kde

$$a_1 = \tfrac{1}{2}\,,\ a_2 = -2,$$

ako sa ľahko vypočíta.

Pri riešení rovnice (3) môžu nastať tieto možnosti:

Prípad [1]. Nech je $2a^2 + 3a - 2 \neq 0$. To nastane podľa predošlého pre každé a, ktoré je rôzne od čísel $\frac{1}{2}$, -2. V tomto prípade vypočítame z rovnice (3)

$$y = \frac{3a-4}{2a^2+3a-2}\,. \tag{4}$$

Z rovnice (1) dostaneme po dosadení zo vzťahu (4)

$$ax + \frac{(3a-4)(1-a)}{2a^2+3a-2} = 2$$

alebo

$$ax = \frac{4a^2 + 6a - 4 - (-3a^2 + 7a - 4)}{2a^2 + 3a - 2}$$

a teda

$$ax = \frac{7a^2 - a}{2a^2 + 3a - 2}. \tag{5}$$

Teraz musíme rozlišovať dva prípady:

[a] Nech je $a \neq 0$. Potom z rovnice (5) dostaneme

$$x = \frac{7a - 1}{2a^2 + 3a - 2}. \tag{6}$$

Dvojica čísel (x, y) daných vzťahmi (6), (4) zrejme vyhovuje danej sústave rovníc (1), (2), ako sa ľahko presvedčíme dosadením.

[*b*]. Nech $a = 0$. V tomto prípade daná sústava rovníc (1), (2) znie

$$y = 2, \quad 2x = 1.$$

Jej riešenie je $(x = \frac{1}{2}, y = 2)$.

Prípad [2]. Nech je $2a^2 + 3a - 2 = 0$. Vieme, že to nastane jednak pre $a = -2$, jednak pre $a = \frac{1}{2}$. Uvažujme o každom z týchto prípadov zvlášť.

[a] Nech $a = -2$. Daná sústava znie

$$2x - 3y = -2,$$
$$4x - 6y = 1.$$

Ľavá strana druhej rovnice je dvojnásobkom ľavej strany prvej rovnice. Avšak pravú stranu druhej rovnice dostaneme z pravej strany prvej rovnice násobením číslom $-\frac{1}{2}$. Rovnice sú zrejme sporné a daná sústava nemá riešenie.

[b] Nech $a = \frac{1}{2}$. Daná sústava znie v tomto prípade

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y = 2,$$
$$\tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{2}y = 1.$$

Rovnako ako v predošlom prípade usúdime, že rovnice sú sporné a sústava nemá riešenie.

Záver. Daná sústava má jediné riešenie pre čísla a rôzne od čísel -2, $\frac{1}{2}$. Avšak ak sa a rovná niektorému z čísel -2, $\frac{1}{2}$, potom nemá sústava riešenie.

4. Je dán trojúhelník ABC; jeho úhly označme po řadě α, β, γ. Sestrojte čtyri shodné kružnice k, k_1, k_2, k_3, z nichž k_1, k_2, k_3 leží v daném trojúhelníku a které mají tyto vlastnosti:

(1) Kružnice k má s kružnicemi k_1, k_2, k_3 vnější dotyk.

(2) Kružnice k_1 se dotýká ramen úhlu α, kružnice k_2 ramen úhlu β a kružnice k_3 ramen úhlu γ.

Dokažte, že úloha má vždycky řešení.

Řešení (obr. 32). Předpokládejme, že jsme sestrojili shodné kružnice

$$k \equiv (S, r), \quad k_1 \equiv (S_1, r), \quad k_2 \equiv (S_2, r), \quad k_3 \equiv (S_3, r),$$

které vyhovují těmto požadavkům:

a) Kružnice k_1, k_2, k_3 leží v trojúhelníku ABC, při čemž k_1 se dotýká ramen jeho úhlu α, k_2 ramen jeho úhlu β a k_3 ramen jeho úhlu γ.

b) Kružnice k se dotýká vně kružnic k_1, k_2, k_3. Má-li úloha řešení, pak ze shodnosti kružnic k_1, k_2, k_3 plyne, že body S_1, S_2, S_3 nesmějí ležet v jedné přímce, t. j. musí existovat trojúhelník $S_1S_2S_3$. Označme T_1, T_2, T_3 po řadě dotykové body dvojic kružnic (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3); tyto body podle požadavků úlohy jsou středy úseček SS_1, SS_2, SS_3. Tu platí

$$ST_1 = ST_2 = ST_3 = S_1T_1 = S_2T_2 = S_3T_3 = r.$$

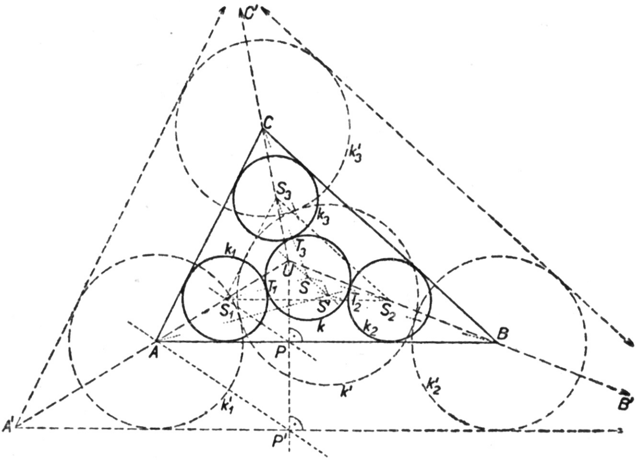
Platí tedy

$$SS_1 = SS_2 = SS_3 = 2r. \tag{1}$$

Je tedy S středem kružnice opsané trojúhelníku $S_1S_2S_3$. Body S_1, S_2 leží uvnitř poloroviny ABC, při čemž vzdálenost každého z bodů S_1, S_2 od přímky AB je r. Proto je $S_1S_2 \parallel AB$; stejně se dokáže $S_2S_3 \parallel BC$, $S_3S_1 \parallel CA$. Platí tedy

$$S_1S_2 \parallel AB, \quad S_2S_3 \parallel BC, \quad S_3S_1 \parallel CA. \tag{2}$$

Označme U průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníka ABC; lze předpokládat, že bod U je různý od bodu S_1; jinak by byla kružnice k_1 trojúhelníku ABC vepsána a kružnice k_2, k_3 by s ní nutně splývaly.



Obr. 32.

Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathbf{U}$ o středu U, v níž bodu S_1 přísluší bod A. Přímkám S_1S_2, S_1S_3 ve stejnolehlosti $\mathbf{U}$ příslušejí po řadě přímky $AB \parallel S_1S_2$, $AC \parallel S_1S_3$, jak plyne ze vztahů (2). Odtud plyne, že ve stejnolehlosti $\mathbf{U}$ přísluší bodu S_2 bod B a bodu S_3 bod C. Jsou tedy $S_1S_2S_3$, ABC trojúhelníky, které si příslušejí ve stejnolehlosti $\mathbf{U}$ v napsaném pořadí vrcholů.

Nechť ve stejnolehlosti **U** příslušejí kružnicím k, k_1, k_2, k_3 kružnice $k' \equiv (S', r')$, $k'_1 \equiv (A, r')$, $k'_2 \equiv (B, r')$, $k'_3 \equiv (C, r')$. Při tom se kružnice k' dotýká kružnic k'_1, k'_2, k'_3. Protože S je středem kružnice opsané trojúhelníku $S_1S_2S_3$, je S' středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, která má tedy poloměr $2r'$.

Dále označme $A'B'C'$ trojúhelník, který ve stejnolehlosti **U** přísluší trojúhelníku ABC. Kružnice k'_1 se dotýká ramen úhlu $\sphericalangle A'$ a má poloměr r'; podobné vlastnosti mají kružnice k'_2, k'_3. Je tedy r' vzdálenost obou přímek $A'B' \parallel AB$, při čemž přímka $A'B'$ leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC. Podobné vlastnosti mají strany $B'C'$, $C'A'$. Dovedeme tedy trojúhelník $A'B'C'$ sestrojit. Označme ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Pak ϱ je vzdálenost bodu U od přímek AB, BC, CA. Protože bod U leží uvnitř trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ (který má bod U rovněž za střed vepsané kružnice o poloměru $\varrho + r'$), je koeficient stejnolehlosti **U** roven

$$\lambda = \frac{\varrho + r'}{\varrho}.$$

Stejnolehlost **U**$'$ o středu U a o koeficientu stejnolehlosti $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ (tedy stejnolehlost obrácená k stejnolehlosti **U**) převádí trojúhelník $A'B'C'$ v trojúhelník ABC, trojúhelník ABC v trojúhelník $S_1S_2S_3$, bod S' v bod S a kružnice k', k'_1, k'_2, k'_3 v kružnice k, k_1, k_2, k_3.

Na základě toho provedeme konstrukci.

K o n s t r u k c e. V trojúhelníku ABC sestrojme střed U kružnice trojúhelníku vepsané a dále střed S' kružnice trojúhelníku opsané; označme $S'A = 2r'$ a ϱ poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané. Sestrojme patu P kolmice vedené bodem U k přímce AB a na prodloužení úsečky UP za bod P sestrojme bod P' tak, aby platilo $PP' = r'$. Uvažujme stejnolehlost **U**$'$

o středu U, ve které bodu P' přísluší bod P; její koeficient je zřejmě

$$\frac{\varrho}{\varrho + r'}.$$

Sestrojme trojúhelník $S_1S_2S_3$, který ve stejnolehlosti $\mathbf{U}'$ přísluší trojúhelníku ABC a bod S příslušný bodu S'. To provedeme takto: Bod S_1 leží na polopřímce UA, při čemž je $S_1P \parallel AP'$; podobně sestrojíme body S_2, S_3. Bod S (pokud je $S' \not\equiv U$) sestrojíme na polopřímce US' tak, že je na př. $S_1S \parallel AS'$ nebo $SP \parallel S'P'$. Jestliže je $S' \equiv U$ (trojúhelník ABC je rovnostranný), pak je také $S \equiv U$.

Diskuse. Podle popsané konstrukce lze kružnice k', k'_1, k'_2, k'_3 vždy sestrojit, a to s jediným výsledkem. Protože stejnolehlost $\mathbf{U}'$ o středu U, v níž bodu A' přísluší bod A, vždy existuje, lze i kružnice k, k_1, k_2, k_3 sestrojit s jediným výsledkem. Tím je řešení provedeno.

Poznámka. Dokažme ještě, že na př. kružnice k_1 leží v trojúhelníku ABC. Stačí dokázat, že kružnice k'_1 leží v trojúhelníku $A'B'C'$: Podle konstrukce přímky $B'C'$ je šířka pásu rovnoběžek $BC \parallel B'C'$ rovna r', při čemž bod A a body přímky $B'C'$ jsou přímkou BC odděleny; je tedy vzdálenost bodu A od přímky $B'C'$ větší než r'. Leží tedy všechny body kružnice k'_1 v úhlu $\sphericalangle C'A'B'$ (podle konstrukce) a uvnitř poloroviny $B'C'A$ a tedy celá tato kružnice leží v trojúhelníku $A'B'C'$, což jsme měli dokázat.

5. Nechť o daných kladných číslech a, b, s platí vztah

$$a + b \leqq s.$$

Potom platí vztah

$$ab \leqq \frac{1}{4} s^2 ;$$

dokažte.

Tento výsledek objasněte na obdélníku o rozměrech a, b.

Řešení. O číslech a, b platí

$$a + b \leqq s; \tag{1}$$

máme dokázat, že platí též

$$ab \leqq \tfrac{1}{4}s^2 .$$

Ze vztahu (1) plyne

$$\frac{a+b}{2} \leqq \frac{s}{2},$$

a poněvadž čísla na obou stranách tohoto vztahu jsou kladná, proto platí též

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqq \frac{s^2}{4} . \tag{2}$$

Zřejmě je správná nerovnost $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geqq 0$ neboli

$$-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leqq 0. \tag{3}$$

Sečtěme levé i pravé strany vztahů (2), (3); dostaneme

$$ab \leqq \frac{s^2}{4}, \tag{4}$$

což jsme měli dokázat.

G e o m e t r i c k ý v ý z n a m. Jsou-li a, b rozměry obdélníka, pak předpoklad (1) značí, že poloviční obvod tohoto obdélníka je menší nebo roven danému číslu s. Výsledný vztah (4) pak značí, že obsah tohoto obdélníka je menší nebo roven obsahu čtverce o straně $\frac{1}{2}s$; strany $a' = b' = \frac{1}{2}s$ tohoto čtverce splňují též vztah (1) a tím i vztah (4).

Jiné řešení. O číslech a, b podle předpokladu platí

$$a + b \leqq s. \tag{1}$$

Položme

$$a + b = k, \tag{5}$$

kde

$$k \leqq s \tag{6}$$

je kladné číslo. Je tedy $b = k - a$ a platí postupně

$$ab = a(k - a) = ak - a^2 = (-\tfrac{1}{4}k^2 + ak - a^2) + \tfrac{1}{4}k^2 =$$
$$= \tfrac{1}{4}k^2 - (\tfrac{1}{4}k^2 - ak + a^2) = \tfrac{1}{4}k^2 - (\tfrac{1}{2}k - a)^2;$$

je tedy

$$ab = \tfrac{1}{4}k^2 - (\tfrac{1}{2}k - a)^2 \tag{7}$$

Protože vždy je $(\frac{1}{2}k - a)^2 \geqq 0$, plyne z předchozí rovnosti

$$ab \leqq \tfrac{1}{4}k^2. \tag{8}$$

Ze vztahu (6) plyne $k^2 \leqq s^2$ neboli

$$\tfrac{1}{4}k^2 \leqq \tfrac{1}{4}s^2; \tag{9}$$

spojením vztahů (8), (9) dostaneme

$$ab \leqq \tfrac{1}{4}s^2. \tag{10}$$

Poznámka. Vztah (7) ukazuje, že obsah obdélníka o rozměrech a, b je největší, když je $a = \frac{1}{2}k = b$. Ze všech obdélníků, jejichž rozměry splňují požadavek (1), má tedy největší obsah (viz (6), (7)) právě čtverec o straně $\frac{1}{2}s$.

6. Ak pripočítame k súčinu štyroch bezprostredne za sebou nasledujúcich prirodzených čísel číslo 1, dostaneme číslo, ktoré je druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte to.

Riešenie. Nech a je najmenšie z uvažovaných štyroch bezprostredne za sebou nasledujúcich prirodzených čísel. Máme dokázať, že $N + 1$, kde $N = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$, je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Postupne platí

$$N = \left(a + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) .$$

$$. \left(a + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(a + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) .$$

$$. \left(a + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left[\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] . \left[\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= [a^2 + 3a] . [a^2 + 3a + 2] = [a^2 + 3a]^2 + 2\ [a^2 + 3a].$$

Z tohto výsledku vyplýva

$$N + 1 = [a^2 + 3a]^2 + 2 . [a^2 + 3a] + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2.$$

Číslo $N + 1$ je skutočne druhou mocninou čísla $a^2 + 3a + 1$, ktoré je zrejme prirodzené pre každé prirodzené číslo a.

Iné riešenie. Označme $a < b < c < d$ hľadané čísla. Položme $M = abcd + 1$. Máme dokázať, že M je druhá mocnina prirodzeného čísla. Zrejme je $c \geqq 3$. Potom

$$a = c - 2,\ b = c - 1,\ d = c + 1.$$

Platí

$$M = (c - 2)(c - 1) . c . (c + 1) + 1$$

a postupne ďalej

$$M = (c^2 - 2c)(c^2 - 1) + 1,$$

$$M = c^4 - 2c^3 - c^2 + 2c + 1.$$

Z toho

$$M = (c^2 - c - 1)^2.$$

Pretože c je prirodzené číslo, je $c^2 - c - 1$ iste celé číslo. Dokážeme, že je kladné. Platí $c \geqq 3$ a teda $c - 1 \geqq 2$. Preto

$$c^2 - c - 1 = c(c - 1) - 1 \geqq 3 \,.\, 2 - 1 = 5,$$

takže $c^2 - c - 1$ je celé kladné číslo, t. j. prirodzené číslo.

Tým sme vetu dokázali.

7. Jsou dána celá čísla a, $b \neq 0$.

Určete všechny dvojice celých čísel m, n, pro něž platí

$$\frac{a}{b} = \frac{a + m}{b + n} \,. \tag{1}$$

Řešení. Podle požadavku úlohy má platit vztah (1) neboli vztah

$$\frac{a}{b} - \frac{a + m}{b + n} = 0 \,,$$

t. j. vztah

$$\frac{ab + an - ab - bm}{b\,(b + n)} = 0$$

a tedy vztahy

$$an - bm = 0, \tag{2}$$
$$b + n \neq 0.$$

Rozeznávejme dva případy.

Případ [1]. Nechť je $n = 0$. Potom ze (2) plyne, že $m = 0$ (neboť je $b \neq 0$). Tedy $m = n = 0$, což je jedna dvojice čísel m, n řešící úlohu.

Případ [2]. Nechť je $n \neq 0$. Potom ze vztahu (2) plyne

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \,. \tag{3}$$

Označme $\varphi > 0$ největšího společného dělitele čísel a, b; pak je

$$a = a' \cdot \varphi, \quad b = b' \cdot \varphi,$$

kde a', b', jsou nesoudělná čísla. Podle (3) potom platí

$$\frac{m}{n} = \frac{a'}{b'},$$

kde zlomek $\frac{a'}{b'}$ je v základním tvaru; proto o číslech m, n musí platit

$$m = \varrho a', \ n = \varrho b',$$

kde $\varrho \neq 0$ je celé číslo.

Obráceně utvořme celá čísla

$$m_0 = \varrho \cdot \frac{a}{\varphi}, \ n_0 = \varrho \cdot \frac{b}{\varphi}, \tag{4}$$

kde $\varphi > 0$ je největší společný dělitel čísel a, b a kde $\varrho \neq 0$ a $\varrho \neq -\varphi$ je libovolné celé číslo. Potom platí $b + n_0 = = b \cdot \frac{\varrho + \varphi}{\varphi} \neq 0$ a tedy

$$\frac{a + m_0}{b + n_0} = \frac{a\left(1 + \frac{\varrho}{\varphi}\right)}{b\left(1 + \frac{\varrho}{\varphi}\right)} = \frac{a\,(\varrho + \varphi)}{b(\varrho + \varphi)};$$

proto je

$$\frac{a + m_0}{b + n_0} = \frac{a}{b}.$$

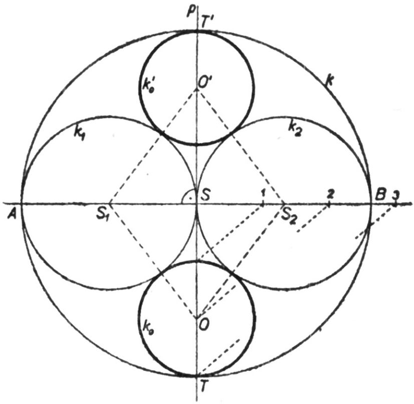
Čísla (4) s příslušnými podmínkami jsou proto všechna čísla, která vyhovují úloze.

8. V rovině nad danou úsečkou AB jako průměrem sestrojte kružnici $k \equiv (S, r)$. Nad každou z úseček SA, SB jako průměrem sestrojte kružnice $k_1 \equiv (S_1, \frac{1}{2} r)$, $k_2 \equiv (S_2, \frac{1}{2} r)$.

Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají všech tří kružnic k, k_1, k_2. (Vypočtěte nejprve poloměry hledaných kružnic a pak proveďte konstrukci.)

Řešení (obr. 33). Kružnice k, k_1, k_2 vždy existují. Kružnice k_1, k_2 se dotýkají zevnitř kružnice k po řadě v bodech A, B a jedna druhé se dotýkají vně v bodě S; leží tedy každá z kružnic k_1, k_2 uvnitř kružnice k (až na bod A a B). Proto hledaná kružnice $k_0 \equiv (O, \varrho)$ se musí dotýkat kružnic k_1, k_2 vně a kružnice k zevnitř (měla-li by se k_0 dotýkat k vně, pak by pro dotyk s kružnicemi k_1, k_2 přicházely v úvahu jen body A, B a pak by kružnice k_0 nutně splývala s kružnicí k). Bod O proto leží uvnitř kružnice k a vně kružnic k_1, k_2. To znamená, že body S_1, S_2, O tvoří vrcholy trojúhelníka S_1S_2O, o němž platí

$$S_1S_2 = r,\ S_1O = r + \varrho = S_2O;$$



Obr. 33.

je to tedy trojúhelník rovnoramenný o základně S_1S_2 a přímka OS je zřejmě jeho osou souměrnosti. Proto je trojúhelník OS_1S pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu S. O jeho stranách podle Pythagorovy věty platí

$$\left(\frac{r}{2} + \varrho\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + x^2, \tag{1}$$

kde $x = SO$. Celý útvar je zřejmě souměrný podle přímky SO (kružnice k_1, k_2 přecházejí jedna v druhou, každá z kružnic k, k_0 přechází sama v sebe). Proto dotykový bod T kružnic k, k_0 musí padnout na přímku SO. Platí tedy $ST = SO + OT$ neboli

$$x + \varrho = r. \tag{2}$$

Po úpravě rovnic (2), (1), které nutně musí platit o neznámých ϱ, x, dostaneme

$$x = r - \varrho,$$
$$x^2 = r\varrho + \varrho^2.$$

Po vyloučení neznámé x z druhé rovnice dostaneme

$$(r - \varrho)^2 = r\varrho + \varrho^2$$

neboli

$$r^2 - 3r\varrho = 0,$$

t. j.

$$r(r - 3\varrho) = 0.$$

Protože je $r \neq 0$, je nutně

$$r - 3\varrho = 0$$

a tedy

$$\varrho = \tfrac{1}{3} r. \tag{3}$$

Pak je

$$x = \tfrac{2}{3} r. \tag{4}$$

Čísla (3), (4) zřejmě splňují vztah (2) i vztah (1), neboť dosadíme-li ze (3), (4) do obou stran vztahu (1), dostaneme jednak $\left(\frac{5r}{6}\right)^2$, jednak $\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} r\right)^2 = \frac{r^2}{36} (9 + 16) = \left(\frac{5r}{6}\right)^2$.

Odtud plyne konstrukce. V bodě S sestrojíme kolmici p k přímce ASB a označíme T jeden z jejích průsečíků s kružnicí k. Rozdělíme úsečku ST na tři shodné úsečky; při tom dostaneme bod O takový, že $OS = \frac{2}{3}r$. Kružnice opsaná z bodu O poloměrem OT je hledaná kružnice, jak plyne ze zkoušky provedené na závěr rozboru.

Protože přímka p protne kružnici k vedle bodu T v dalším bodu $T' \not\equiv T$, dostaneme ještě druhou kružnici $k_0' \equiv (O', \varrho)$. Obě kružnice k_0, k_0' (i celý obrazec) jsou souměrně sdružené podle přímky AB. Tím jsou všechna řešení úlohy nalezena; existují tedy vždy dvě řešení.

Jiné řešení. Rozbor (obr. 34). Stejně jako v předchozím řešení usoudíme, že hledaná kružnice $k_0 \equiv (O, \varrho)$ musí ležet uvnitř dané kružnice k (až na bod T) a vně každé z obou daných kružnic k_1, k_2 (až na dotykové body). Platí tedy nutně

$$OS_1 = OS_2 = \tfrac{1}{2}r + \varrho \tag{1}$$

(podmínka pro vnější dotyk dvojice kružnic k_1, k_0 a dvojice k_2, k_0). Proto bod O leží na ose p úsečky S_1S_2. Hledaná kružnice k_0 má přímku p za osu souměrnosti stejně jako kružnice k. Proto dotykový bod T kružnic k, k_0 je jedním ze společných bodů přímky p a kružnice k (druhý společný bod označme $T' \not\equiv T$). Je tedy

$$OT = \varrho, \tag{2}$$

při čemž bod O leží uvnitř kružnice k a vně každé z kružnic k_1, k_2.

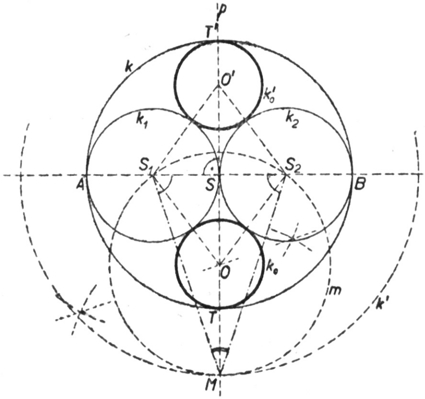
Uvažujme nyní kružnici $m \equiv (O, \frac{1}{2}r + \varrho)$, která vzhledem k (1) nutně prochází oběma body S_1, S_2, při čemž s polopřímkou OT (a tedy s polopřímkou ST) má společný bod M, o němž platí $OM = OT + TM$ neboli

$$OM = \tfrac{1}{2}r + \varrho,\ TM = \tfrac{1}{2}r\,. \tag{3}$$

Bod M tedy dovedeme sestrojit; při tom je O zřejmě středem kružnice m opsané rovnoramennému trojúhelníku MS_1S_2. Těchto výsledků užijeme ke konstrukci.

Konstrukce (obr. 34). Sestrojíme bodem S přímku $p \perp S_1S_2$ a její průsečíky s kružnicí k označíme $T \not\equiv T'$. Konstrukci provedeme pro bod T (konstrukci pro bod T' dostaneme z konstrukce pro bod T pomocí souměrností podle osy S_1S_2). Na prodloužení úsečky ST za bod T sestrojíme bod M tak, aby platilo

$$TM = \tfrac{1}{2} r\,.$$



Obr. 34.

Pak sestrojíme střed O kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku MS_1S_2 se základnou S_1S_2. Potom kružnice $k_0 \equiv$ $\equiv (O, OT)$ vyhovuje úloze.

Důkaz. V rovnoramenném trojúhelníku MS_1S_2 je $MS_1 >$ $> MS$, $MS = \frac{3}{2} r$ a tedy $MS_1 > \frac{3}{2} r$, t. j. $MS_1 > S_1S_2$; proto v tomto trojúhelníku o úhlech k těmto stranám protějších platí $\sphericalangle S_2 > \sphericalangle M$. Avšak úhly $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$ jsou ostré (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka); proto je $\sphericalangle M$ také ostrý. Je tedy MS_1S_2 ostroúhlý trojúhelník a proto střed O

kružnice m jemu opsané podle známé věty padne dovnitř trojúhelníka, t. j. v našem případě dovnitř úsečky SM. Proto je průměr $2 . OM$ kružnice m větší než úsečka $SM = \frac{3}{2} r$ neboli $OM > \frac{3}{4} r$. Protože $OS = SM - OM$, je $OS < \frac{3}{4} r$; z toho plyne, že bod O, padne dovnitř kružnice $k \equiv (S, r)$, t. j. dovnitř úsečky ST. Protože je přímka ST tečnou kružnic k_1, k_2 v bodě S, leží bod O vně každé z kružnic k_1, k_2 a úsečky $OS_1 = OS_2$ jsou větší než $\frac{1}{2}r$.

Sestrojená kružnice k_0 se zřejmě v bodě T dotýká kružnice k a má poloměr $\varrho = OM - \frac{1}{2}r$, takže platí

$$OM = \tfrac{1}{2}r + \varrho. \tag{4}$$

Protože podle konstrukce je $OM = OS_1 = OS_2$ (poloměry kružnice opsané trojúhelníku MS_1S_2), platí na př. $OS_1 =$ $= \frac{1}{2}r + \varrho$; je tedy OS_1 středná kružnic k_1, k_0 rovna součtu jejich poloměrů, takže se tyto kružnice dotýkají vně, což zřejmě platí také o kružnicích k_2, k_0.

Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Ve zvolené polorovině S_1S_2T lze sestrojit jediný bod M, popsaný v konstrukci; jemu podle provedeného důkazu přísluší jediná kružnice k_0 vyhovující úloze. K bodu T' přísluší druhá taková kružnice k_0', souměrně sdružená ke k_0 podle přímky S_1S_2. Protože přímka S_1S_2 středy O, O' těchto kružnic odděluje, jsou obě kružnice různé a úloha má dvě řešení. Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. Drahomíry Chládkové,
žákyně 10a JSŠ v Poličce.

9. V rovině buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$. Dále buď dán bod P, který neleží na této kružnici.

Bodem P veďte sečnu p kružnice k, která protíná tuto kružnici v různých bodech A, B, a to tak, že jeden z bodů A, B, P je středem úsečky, jejímiž krajními body jsou oba body zbývající.

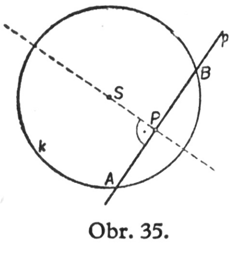
Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k číslům r, v, kde v je vzdálenost bodů S, P.

Řešení. Rozeznávejme dvě možnosti.

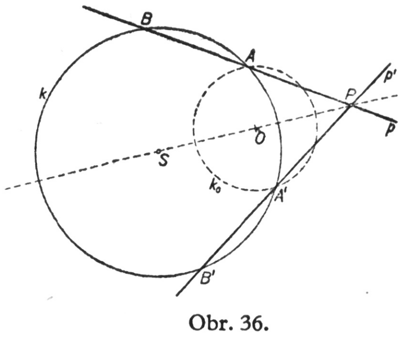
Případ [1]. Nechť daný bod P leží uvnitř dané kružnice $k \equiv (S, r)$. Tu jsou dvě možnosti: a) je $P \equiv S$; b) je $P \not\equiv S$.

[a] Nechť je $P \equiv S$. Potom každá sečna kružnice k, vedená bodem P, obsahuje jeden průměr AB této kružnice a platí $PA = PB$. V tomto případě má úloha nekonečně mnoho řešení.

[b] Nechť je $P \not\equiv S$. Sečna AB, která vyhovuje úloze a která tedy prochází bodem P, ležícím uvnitř kružnice, obsahuje tětivu AB kružnice k a jen uvnitř této tětivy leží body sečny AB, které zároveň leží uvnitř kružnice. Proto je P vnitřním bodem tětivy AB, a protože má platit $PA = PB$, je bod P středem této tětivy. Pak ovšem osa tětivy AB prochází středem S kružnice k. Musí tedy platit $AB \perp PS$. Odtud plyne konstrukce (viz obr. 35):



Obr. 35.



Obr. 36.

Sestrojme přímku PS a v bodě P k ní sestrojme kolmici p. Protože je $PS < r$, je přímka p sečnou kružnice k a vytíná na k tětivu AB. Podle známé věty z planimetrie je bod P skutečně středem této tětivy AB.

Z provedeného rozboru a konstrukce vyplývá, že v tomto případě má úloha vždy jediné řešení.

Případ [2]. Nechť daný bod P leží vně dané kružnice, t. j. platí (obr. 36)

$$v = PS > r.$$

Předpokládejme, že přímka p vedená bodem P protíná kružnici k v bodech $A \not\equiv B$, které vyhovují úloze. Protože bod P leží vně kružnice k (a je různý od bodů A, B), nemůže ležet uvnitř tětivy AB; jinak by byl bodem ležícím uvnitř kružnice. Leží tedy P na prodloužení úsečky AB. Označení bodů A, B můžeme (bez újmy obecnosti řešení úlohy) zvolit tak, že bod P leží na prodloužení úsečky AB za bod A, neboli že bod A leží uvnitř úsečky BP. Protože přímka p vyhovuje požadavkům úlohy, musí platit

$$AB = AP.$$

Proto platí $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{1}{2}$. Uvažujme stejnolehlost P o středu P, ve které bodu B přísluší bod A, tedy stejnolehlost o koeficientu $\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti P přísluší kružnici k kružnice $k_0 \equiv \left(O, \dfrac{r}{2}\right)$, kde O je středem úsečky PS. Na této kružnici k_0 leží nutně bod A jako bod příslušný bodu B v této stejnolehlosti. Odtud plyne konstrukce.

Konstrukce. Sestrojme střed O úsečky PS a opišme kružnici $k_0 \equiv \left(O, \dfrac{r}{2}\right)$. Označme písmenem A jeden společný bod kružnic k, k_0. Potom přímka PA (pokud existuje) vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz. Body P, A jsou jistě různé; kdyby splynuly, potom by bod P ležel na kružnici k, což je proti předpokladu. Uvažujme stejnolehlost P', která má střed P a koeficient stejnolehlosti roven číslu 2 (t. j. stejnolehlost obrácená ke stejnolehlosti **P**). V ní zřejmě kružnici k_0 přísluší kružnice k a bodu A určitý bod B polopřímky PA, takže platí $PB = 2 . PA$ neboli $AB = AP$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Úloha má řešení, jestliže o kružnicích k, k_0 platí

$$r - \frac{r}{2} \leqq SO \leqq r + \frac{r}{2};$$

protože je $SO = \frac{1}{2}v$, lze předchozí podmínce dát tvar

$$r \leqq v \leqq 3r.$$

Přitom v případě, že platí $v = r$ anebo $v = 3r$ (dotyk vnitřních nebo vnějších kružnic k, k_0), je řešení jediné. V případě, že platí $r < v < 3r$ jsou dvě řešení (když se totiž kružnice k, k_0 protínají — viz obr. 36 a v něm různé přímky PAB, $PA'B'$, které jsou souměrně sdružené podle přímky PS).

Tím je řešení úlohy provedeno.

Několik dalších řešení případu [2] *předchozí úlohy.*

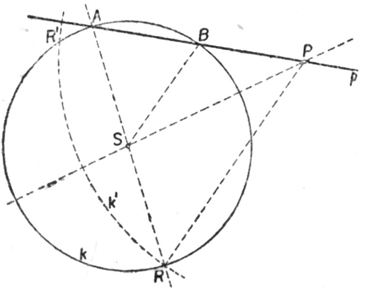
Řešení 1 (obr. 37). Nechť je

$$v > r \tag{1}$$

a nechť přímka $p \equiv PBA$ je řešením úlohy; při tom nechť je $p \not\equiv PS$. Sestrojme průměr AR kružnice k a všimněme si trojúhelníka PAR. Protože platí $SA = SR$, $AB = BP$, je $SB = r$ střední příčkou tohoto trojúhelníka; proto je $PR = 2r$, takže bod R leží na kružnici k a na kružnici $k' \equiv (P, 2r)$. Odtud konstrukce.

Konstrukce (viz obr. 37). Sestrojíme kružnici $k' \equiv (P, 2r)$ a označíme R jeden ze společných bodů kružnic k, k'. Dále sestrojíme průsečík $A \not\equiv R$ kružnice k a přímky SR; potom je $p \equiv AP$ jedna z hledaných přímek.

D ů k a z. Označme B střed úsečky AP. Potom je SB střední příčka trojúhelníka PAR příslušná ke straně $PR = 2r$; je tedy $SB = \frac{1}{2} PR = r$ a bod B skutečně leží na kružnici k. Tím je důkaz proveden.



Obr. 37.

D i s k u s e. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda kružnice k, k' mají společný bod R. Tento bod existuje právě tehdy, jestliže o středné $SP = v$ a poloměrech $2r$, r platí nerovnosti $2r - r \leqq v \leqq 2r + r$ neboli

$$r \leqq v \leqq 3r.$$

Vztah $r \leqq v$ je vzhledem k (1) splněn, při čemž je vnitřní dotyk obou kružnic vyloučen vztahem (1).

Jestliže platí $v < 3r$, mají kružnice dva různé společné body R, R' a k nim příslušejí i dva různé body A, A' a tím dvě přímky $p \equiv PA$, $p' \equiv PA'$, které jsou souměrně sdružené podle přímky PS; úloha má dvě řešení.

Jestliže platí $v = 3r$, je bod $R \equiv B$ bližším z obou průsečíků přímky PS s kružnicí k vzhledem k bodu P; bod A je vzdálenějším z obou průsečíků (je $AP = 4r$). Tu má úloha jediné řešení.

Jestliže platí $v > 3r$, je vzdálenost nejbližšího bodu kružnice k od bodu P větší než $2r$; protože tětiva kružnice k má velikost rovnu nejvýše $2r$, nelze najít přímku p, která by vyhovovala úloze. V tomto případě nemá úloha řešení.

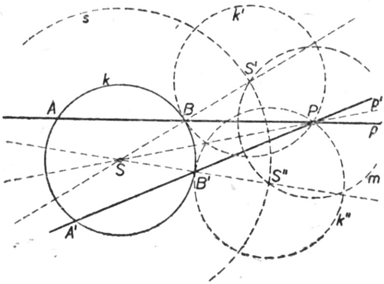
Tím je případ [2] rozřešen.

Podle řešení s. Miroslava Žáby,
žáka 10b JSŠ ve Vysokém Mýtě.

Řešení 2 (obr. 38). Nechť je

$$v > r; \tag{1}$$

nechť přímka $p \equiv PBA$ je řešením úlohy. Uvažujme středovou souměrnost se středem B; tím přejde daná kružnice k v kružnici $k' \equiv (S', r)$, která se v bodě B dotýká vně kružnice k. V této souměrnosti přejde bod A v bod P. Úlohu tedy můžeme převést na úlohu sestrojit kružnici k' o poloměru r, která se



Obr. 38.

dotýká vně kružnice k a která prochází bodem P. Množinou středů všech kružnic o poloměru r, které se kružnice k dotýkají vně, je kružnice $s \equiv (S, 2r)$. Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 38). Opišme kružnici $s \equiv (S, 2r)$; dále sestrojme kružnici $m \equiv (P, r)$ a označme S' jeden ze společných bodů kružnic m, s. Potom kružnice $k' \equiv (S', r)$ prochází bodem P a dotýká se kružnice k vně; příslušný dotykový bod B kružnic k, k' leží na úsečce SS' a na kružnici k. Potom je přímka $p \equiv PB$ řešením úlohy.

Důkaz. Správnost konstrukce bodu B je zřejmá. Protože je $B \not\equiv P$, přísluší v souměrnosti o středu B kružnici k' kružnice k a bodu P bod $A \not\equiv B$, který skutečně leží na přímce p, takže pořádek bodů na této přímce je P, B, A a platí $BP = BA$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda lze sestrojit bod B neboli sestrojit bod S'; to závisí na tom, zda kružnice m, s mají společný bod. Středná těchto kružnic má podle (1) velikost $v = SP$, poloměry jsou $2r, r$. Kružnice m, s mají společný bod, jestliže platí $2r - r \leqq v \leqq 2r + r$ neboli $r \leqq \leqq v \leqq 3r$. Vztah $r \leqq v$ je vzhledem k (1) splněn, při čemž nemůže nastat vnitřní dotyk.

Jestliže platí $v < 3r$, mají kružnice m, s dva různé společné body S', S'' a protože středy B, B' úseček SS', SS'' jsou různé, má úloha dvě řešení $p \equiv PB, p' \equiv PB'$, což jsou zřejmě dvě různoběžky souměrné podle přímky PS.

Jestliže platí $v = 3r$, je zřejmě přímka PS řešením úlohy.

Jestliže platí $v > 3r$, nemá úloha řešení (viz Řešení 1).

Tím je řešení případu (2) provedeno.

Podle řešení s. Jana Zitka,
žáka 10b JSŠ v Chrudimi.

Řešení 3 (obr. 39). Nechť platí

$$v > r \tag{1}$$

a nechť přímka $p \equiv PBA$ je řešením úlohy, takže platí

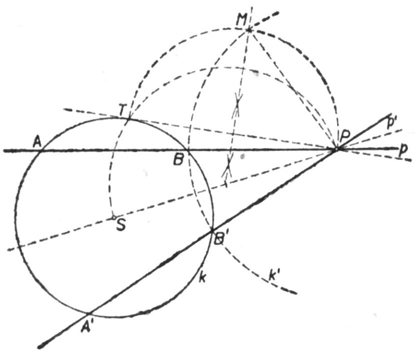
$$AP = 2 \,.\, BP. \tag{2}$$

Mocnost bodu P ke kružnici k je číslo $AP \, . \, BP$, které je rovno číslu PT^2, kde T je dotykový bod tečny vedené z bodu P ke kružnici k, t. j. platí

$$PT^2 = AP \, . \, BP.$$

Dosaďme sem ze vztahu (2); dostaneme po úpravě

$$BP \sqrt{2} = PT.$$



Obr. 39.

Je tedy velikost úsečky BP rovna velikosti strany čtverce sestrojeného nad úsečkou PT jako úhlopříčkou. Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce. Z bodu P sestrojíme tečnu PT ke kružnici k (viz obr. 39); nad úsečkou PT jako přeponou sestrojíme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník PTM. Dále opíšeme kružnici $k' \equiv (P, PM)$ a označíme písmenem B jeden ze společných bodů kružnic k, k'. Potom přímka $p \equiv PB$ je hledané řešení.

Důkaz. Podle konstrukce je

$$BP = \frac{1}{\sqrt{2}} PT. \tag{3}$$

Pro mocnost bodu P ke kružnici platí

$$BP \, . \, AP = PT^2, \tag{4}$$

při čemž A, B jsou společné body přímky PB s kružnicí k. Po dosazení za PT ze (3) do (4) a po úpravě dostaneme $AP = 2 \, . \, BP$; vzhledem k tomu, že bod P leží vně kružnice k, plyne odtud, že pořádek bodů na přímce p je P, B, A. Tím je důkaz proveden.

Diskuse se provede stejně jako v předchozích řešeních, jen je při tom třeba užít vztahu $PT^2 = v^2 - r^2$.

Podle řešení s. Drahomíry Chládkové,
žákyně 10a JSŠ v Poličce.

10. Mezi místy A, B jezdí dva autobusy, které mají jedinou zastávku v místě C; poměr vzdáleností míst A, C a míst B, C (v tomto pořadí) je roven danému číslu p.

Oba autobusy vyjedou současně z míst A, B proti sobě a do konečných stanic dorazí rovněž současně po době T minut; při tom oba stojí po dobu t minut v místě C.

Při kterých hodnotách čísla p (v závislosti na dobách T, t) se oba autobusy setkají:

a) mezi místy A, C,
b) mezi místy B, C,
c) právě v místě C (to neznamená, že autobusy musí přijet do místa C současně).

(Předpokládá se, že rychlost obou autobusů za jízdy je konstantní.)

Řešení. Označme $d \neq 0$ vzdálenost míst A, B. Pak vzdálenost míst A, C je $\dfrac{dp}{p+1}$ a míst C, B je $\dfrac{d}{p+1}$. Podle textu úlohy je $T > t > 0$. Rychlost autobusu za jízdy je $\dfrac{d}{T-t}$. Autobus jedoucí z A dojede do C za dobu

$$x = \frac{dp}{p+1} : \frac{d}{T-t} = \frac{p(T-t)}{p+1} \tag{1}$$

a po zastávce v C další cesta do B mu trvá dobu

$$y = \frac{d}{p+1} : \frac{d}{T-t} = \frac{T-t}{p+1}. \tag{2}$$

Protože druhý autobus má stejnou rychlost, trvá mu cesta z B do C dobu y, cesta z C do A dobu x.

a) Jestliže doba jízdy prvního autobusu mezi místy A, C trvá déle než jízda druhého autobusu mezi B, C zvětšená o dobu zastávky v C, setkají se autobusy mezi A, C. Je-li tedy

$$x > y + t, \tag{3}$$

setkají se autobusy mezi A, C.

b) Je-li doba jízdy druhého autobusu mezi místy B, C delší než doba jízdy prvního autobusu mezi A, C zvětšená o dobu zastávky v C, setkají se autobusy mezi B, C. Je-li tedy

$$y > x + t, \tag{4}$$

nastane setkání mezi B, C.

c) Je-li doba jízdy prvního autobusu mezi A, C nejvýše rovna době jízdy druhého autobusu mezi B, C zvětšené o dobu zastávky v C, nepotkají se autobusy mezi A, C.

Jestliže přitom ještě doba jízdy druhého autobusu mezi B, C je nejvýše rovna době jízdy prvního autobusu mezi A, C

zvětšené o dobu čekání v C, nepotkají se autobusy ani mezi B, C. Platí-li tedy současně

$$y \leqq y + t, \quad y \leqq x + t, \tag{5}$$

potom se autobusy setkají v C.

Shrnutí. 1. Jestliže je $T - t \leqq t$ čili $T - 2t \leqq 0$, nastane zřejmě setkání v místě C. Kdyby totiž platilo $x > y + t$, bylo by též $x + y - t > 2y$ čili $T - 2t > 2y$ čili $0 \geqq T - 2t > 2y$. Odtud by plynulo $0 > 2y$, tedy $y < 0$, ale doba y nemůže být záporná. Podobně zamítneme předpoklad $y > x + t$.

2. Zkoumejme dále případ, kdy je

$$T - 2t > 0.$$

a) Ze vztahu (3) užitím vztahů (1), (2) dostáváme vztah

$$\frac{p(T - t)}{p + 1} > \frac{T - t}{p + 1} + t,$$

což je možno psát ekvivalentním tvarem

$$p > \frac{T}{T - 2t}.$$

Platí-li tento vztah, pak se autobusy setkají mezi A, C.

b) Ze vztahu (4) užitím vzorců (1), (2) dostáváme vztah

$$\frac{T - t}{p + 1} > \frac{p(T - t)}{p + 1} + t$$

čili ekvivalentně

$$p < \frac{T - 2t}{T}.$$

Platí-li tento vztah, pak se autobusy setkají mezi B, C.

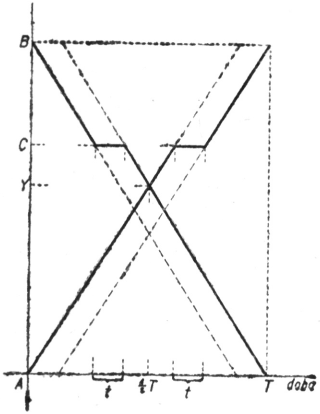
c) Jestliže platí vztahy (5) neboli vzhledem ke vztahům (1),

(2) vztahy

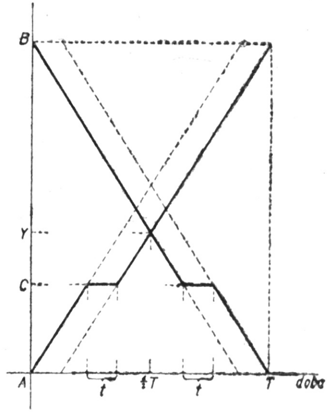
$$\frac{T-2t}{T} \leqq p \leqq \frac{T}{T-2t},$$

pak se autobusy setkají v C.

Tím je řešení úlohy provedeno.

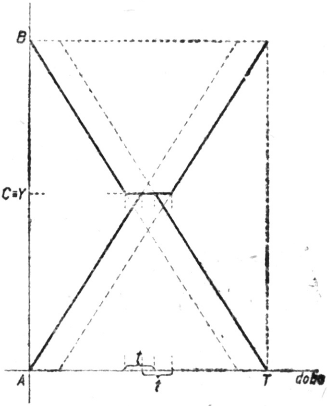


Obr. 40a.



Obr. 40b.

Poznámka. Jízdní řád obou autobusů si můžeme znázornit graficky. Na osu x nanášíme dobu, která uplynula od okamžiku, kdy autobusy vyjely, a na osu y vzdálenost jednotlivých autobusů třeba od místa A (je tedy počátek souřadnic totožný s bodem A). Jízdní řád prvního autobusu (vyjíždějícího z místa A) je pak dán „stoupající" lomenou čarou, druhý autobus se řídí „klesající" lomenou čarou. Průsečíku obou grafů odpovídá bod Y, v němž se oba autobusy setkají. Na obr. 40a je znázorněna situace (jedna z možných), kdy se oba autobusy setkají mezi místy A, C; na obr. 40b je jeden z případů, kdy setkání nastalo mezi místy B, C. Na obr. 40c je ukázka střetnutí právě v místě C; tento obrázek znázorňuje situaci, kdy do místa C přijel nejprve autobus vyjíždějící z místa B a pak teprve autobus vyjíždějící z místa A, při čemž v témže pořadí autobusy odjížděly.



Obr. 40c.

11. Má-li desetinný zlomek $a = 0{,}999\ldots$ bezprostředně za desetinnou čárkou právě n devítek, potom má jeho druhá mocnina a^2 bezprostředně za desetinnou čárkou buď n nebo $n - 1$ devítek. Dokažte.

Řešení. Platí

$$\frac{10^n - 1}{10^n} \leqq a < \frac{10^{n+1} - 1}{10^{n+1}},$$

neboli

$$1 - \frac{1}{10^n} \leqq a < 1 - \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Odtud umocněním dostaneme

$$1 - \frac{2}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} \leqq a^2 < 1 - \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{2(n+1)}} ;$$

odtud dále

$$\frac{10^n - 2}{10^n} = 1 - \frac{2}{10^n} < a^2 < \frac{10^{2(n+1)} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1}{10^{2(n+1)}} .$$

Na levo je v čitateli číslo mající $n - 1$ devítek, za nimiž následuje osmička; na pravo v čitateli zlomku je číslo, mající n devítek, za nimiž následuje osmička, potom přijde n nul a za nimi jednička, takže a^2 má vskutku na počátku buď $n - 1$ nebo n devítek, což jsme měli dokázat.

12. Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Hrany krychle, které nemají s tělesovou úhlopříčkou BH žádný společný bod, tvoří lomenou čáru. Všemi body této lomené čáry vedeme kolmice k přímce BH.

Dokažte, že paty těchto kolmic vyplní jistou úsečku. Určete její délku a vzdálenost jejích krajních bodů od vrcholů B, H.

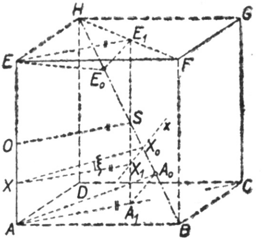
Řešení (obr. 41a). Lomená čára, o níž se mluví v textu úlohy, je čára $AEFGCDA$. Budeme se zatím zabývat jednou její stranou, na př. úsečkou AE.

Označme X libovolný bod úsečky AE a X_0 patu kolmice XX_0 vedené bodem X k přímce BH; tato kolmice leží v rovině XBH a dále v rovině $\xi \perp BH$ vedené bodem X. Rovina ξ protne rovinu $BFHD$ v přímce $x \perp BH$. Na přímce x leží pata X_1 kolmice XX_1 vedené bodem X k rovině $BFHD$.

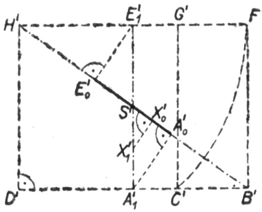
Označme po řadě A_0, E_0 paty kolmic vedených body A, E k přímce BH. Dále označme po řadě A_1, E_1 paty kolmic vedených body A, E k rovině $BFHD$. Protože $ABCD$, $EFGH$ jsou čtverce, jsou body A_1, E_1 středy těchto čtverců. Protože úsečka AE

náleží prostorové vrstvě o hraničních rovinách $AA_0A_1 \parallel EE_0E_1$, náležejí všechny body X_1 úsečce A_1E_1 a všechny body X náležejí úsečce A_0E_0.

V obr. 41b je sestrojen obdélník $B'F'H'D'$, který je skutečnou velikostí obdélníka $BFHD$ z obr. 41a; tu platí $B'F' = BF$, $B'D' = BD$. Některé další úvahy je dobré sledovat v obr. 41b.



Obr. 41a.



Obr. 41b.

Nyní vypočteme velikost úsečky BA_0; při tom je zřejmě $HE_0 = BA_0$, jak se snadno dokáže. Označme $a = DH$ velikost hrany dané krychle. Pak platí

$$BD = a\sqrt{2},\ BA_1 = \tfrac{1}{2}\, a\sqrt{2},\ BH = \sqrt{BD^2 + DH^2} = a\sqrt{3}, \quad (1)$$

$$\triangle\, BHD \sim \triangle\, BA_1A_0\ \text{(uu)},$$

proto platí

$$\frac{BA_0}{BD} = \frac{BA_1}{BH}$$

neboli

$$BA_0 = BD \,.\, BA_1 \,.\, \frac{1}{BH}\,.$$

Po dosazení ze vztahů (1) dostaneme

$$BA_0 = a\sqrt{2}\,.\,\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}\,.\,\frac{1}{a\sqrt{3}}$$

neboli

$$BA_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}\,.$$

Obdržíme tedy výsledek

$$BA_0 = HE_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}\,, \tag{2}$$

což jsme měli vypočítat.

Pak je

$$A_0E_0 = BH - BA_0 - HE_0$$

neboli podle (1), (2)

$$A_0E_0 = a\sqrt{3} - \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a\,(3-2)}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\,,$$

t. j.

$$A_0E_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}\,,$$

což jsme měli vypočítat.
Proto platí

$$BA_0 = A_0E_0 = HE_0$$

a krajní body A_0, E_0 hledané úsečky dělí úsečku BH na tři shodné úsečky. Odtud plyne, že týž výsledek dostaneme pro každou stranu uvažované lomené čáry $AEFGCDA$.

Že pak obráceně každý bod úsečky A_0E_0 je patou jedné kolmice vedené z jistého bodu hrany AE k přímce BH, to dokážeme: Nechť bod X_0 (viz též obr. 41b) leží na úsečce A_0E_0. Určíme bod X_1 na přímce A_1E_1 takový, aby platilo $X_0X_1 \perp \perp A_0E_0$; tento bod leží v pásu rovnoběžek $A_0A_1 \perp A_0E_0$,

$E_0E_1 \perp A_0E_0$, v němž leží celá úsečka A_1E_1 (pás je společná část polorovin $A_0A_1E_1$, $E_0E_1A_1$ a úsečka A_1E_1 v každé z nich leží). Je tedy X_1 bodem úsečky A_1E_1. Dále sestrojme na přímce AE bod X tak, aby bylo $XX_1 \parallel AA_1$; bod X_1 padne na úsečku A_1E_1, jak plyne z obdélníka AA_1E_1E. Platí $XX_1 \perp BDHF$, neboť je $AA_1 \perp BDHF$; proto je též $XX_1 \perp BH$. Dále je $X_1X_0 \perp BH$ (podle konstrukce) a proto je rovina $XX_1X_0 \perp BH$ a bod X_0 je skutečně patou přímky $XX_0 \perp BH$. (Výjimku při předchozí úvaze činí střed S úsečky BH, který je však zřejmě patou kolmice vedené středem O úsečky AE.) Tím je důkaz proveden a úloha rozřešena.

5. Úlohy II. kola kategorie B.

1. Riešte rovnicu

$$x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0. \tag{1}$$

Riešenie. I. Hľadajme také riešenie, že $x \geqq 1$. Potom $x - 1 \geqq 0$, teda $|x - 1| = x - 1$ a rovnica (1) znie

$$x^2 + 2(x - 1) - 6 = 0$$

čiže

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Jej korene sú $r = 2$, $s = -4$. Druhý koreň nevyhovuje rovnici (1).

II. Hľadajme teraz také riešenie, že $x < 1$. Potom $x - 1 < 0$, čiže $|x - 1| = -x + 1$ a rovnica (1) znie

$$x^2 - 2(x - 1) - 6 = 0,$$

čiže

$$x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Jej korene sú $r' = 1 + \sqrt{5}$, $s' = 1 - \sqrt{5}$. Prvé číslo rovnici (1) nevyhovuje.

Zhrnutie. Rovnica (1) má dva korene: 2, $1 - \sqrt{5}$.

2. Jsou dány dvě kolmé roviny ϱ, σ o průsečnici s. V rovině ϱ je dána kružnice $k \equiv (S, r)$, kde bod S leží na přímce s. V rovině σ je dána přímka p, která je k přímce s kosá.

Nechť se kružnice k otáčí kolem přímky p. Vyšetřte útvar, který vyplní body otáčející se kružnice k.

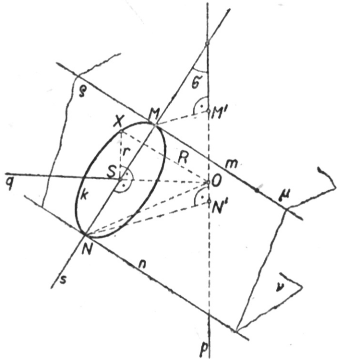
Proveďte diskusi vzhledem k vzájemné poloze dané přímky p a dané kružnice k. (Vysvětlení. Při otáčení bodu X kolem přímky p, která jím neprochází, vytvoří bod X kružnici, jejíž rovina stojí kolmo na přímce p a jejíž střed leží na přímce p.)

Řešení (obr. 42). Dokážeme: Za daných podmínek je hledanou množinou všech bodů, která vznikne rotací kružnice k kolem přímky p, kulový pás nebo vrchlík, který je společnou částí jisté plochy kulové $\varkappa$ a jisté vrstvy (μ, ν) určené dvěma různými rovinami $\mu \parallel \nu$. Při tom v každé z rovin μ, ν leží celá kružnice, jejíž body náleží hledané množině, nebo výjimečně v jedné z obou rovin μ, ν leží jediný bod hledané množiny.

Označme q kolmici vedenou bodem S k rovině ϱ; protože je $\varrho \perp \sigma$, leží přímka q v rovině σ, dále je $q \perp s$. Protože p, s jsou kosé přímky, jsou i přímky p, q kosé, jak snadno dokážeme.

Označme $M \not\equiv N$ společné body přímky s a kružnice k, takže úsečka MN je průměrem kružnice k. Označme dále $\mu \not\equiv \nu$ roviny vedené po řadě body M, N kolmo k přímce p; protože p leží v rovině σ, je $\mu \perp \sigma$, $\nu \perp \sigma$. Přitom jsou roviny μ, ν různé od roviny ϱ, která je k přímce p kosá (jinak by bylo $s \perp p$, což je proti předpokladu textu úlohy). Označme $m \parallel n$ po řadě průsečnice rovin μ, ν s rovinou ϱ, při čemž je $m \not\equiv n$; přitom bod M leží na přímce m a bod N na přímce n. Protože je rovina σ kolmá ke každé z rovin ϱ, μ, ν, je rovinou souměrnosti každé z nich a tím je rovinou souměrnosti každé z přímek m, n (které jistě v σ neleží); proto je $m \perp \sigma$, $n \perp \sigma$ a proto platí též $m \perp s$, $n \perp s$. Proto jsou m, n tečny kružnice k v krajních bodech jejího průměru MN. Při tom všechny body kružnice k leží v pásu rovnoběžek m, n a tím ve vrstvě (μ, ν), určené oběma rovinami $\mu \perp p$, $\nu \perp p$. Libovolný bod X kružnice k leží ve vrstvě (μ, ν) a opíše při rotaci kružnici x (pokud X neleží na p), jejíž rovina $\xi \perp p$ je rovnoběžná s rovinami μ, ν; protože bod X leží ve vrstvě (μ, ν), leží v ní i kružnice x. Jestliže je X bodem přímky p (pak je to průsečík přímek p, s a tedy jeden z bodů M, N), pak zřejmě leží v jedné z rovin μ, ν a tím i ve vrstvě (μ, ν).

Nyní dokážeme, že kružnice x leží na jisté kulové ploše $\varkappa \equiv (O, R)$, kde O je společný bod kosých přímek p, q. Rozeznávejme dvě možnosti.



Obr. 42.

Případ [1]. Nechť přímka p prochází bodem S, t. j. $O \equiv S$. Potom je k hlavní kružnicí kulové plochy $\varkappa \equiv (S, r)$. Protože rovina ϱ neobsahuje přímku p (tu by bylo $p \equiv s$), neleží žádný z bodů M, N na přímce p; označíme-li M', N' průsečíky rovin μ, ν s přímkou p, pak je zřejmě vzdálenost bodu S od každého z bodů M', N' menší než r (t. j. M', N' leží uvnitř $\varkappa$). Odtud plyne, že vrstva (μ, ν) má s plochou $\varkappa$ společný kulový pás.

Případ [2]. Nechť přímka p neprochází bodem S, takže je $O \not\equiv S$. Označme $OS = v$ a $OX = R$, kde X je libovolný bod kružnice k, takže $SX = r$. Trojúhelník OXS má při vrcholu S pravý úhel (je $q \perp \varrho$) a podle Pythagorovy věty je $OX = \sqrt{SX^2 + OS^2}$ neboli $R = \sqrt{r^2 + v^2} =$ konst. Je-li X' nová poloha bodu X při rotaci kolem přímky p, potom je $OX' = OX = R$ a všechny body vzniklé při rotaci kružnice k kolem p leží na kulové ploše $\varkappa \equiv (O, R)$. Protože tyto body X' zároveň leží ve vrstvě (μ, ν), leží buď na kulovém pásu (když žádný z bodů M, N nepadne na p), nebo na kulovém vrchlíku (když právě jeden z bodů M, N padne na přímku p).

Obráceně, nechť Y' je bod právě popsaného kulového pásu nebo vrchlíku z případů [1], [2]; pak tento bod vznikl rotací některého bodu kružnice k.

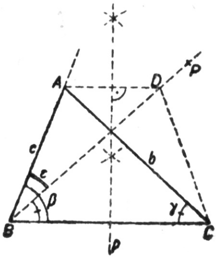
Důkaz. Jestliže Y' leží na přímce p, je to zřejmě jeden z bodů M, N. Nechť Y' neleží na p; označme $\eta \perp p$ rovinu vedenou bodem Y'. Protože bod Y' leží ve vrstvě (μ, ν), leží i rovina η v této vrstvě a protne rovinu ϱ v přímce $u \parallel m$, která nutně leží v pásu rovnoběžek m, n; proto má přímka u s kružnicí k společný alespoň jeden bod Y. Protože rovina η protne plochu $\varkappa$ v kružnici y, musí bod Y, který leží na k i u, ležet i na kružnici y. Bod Y' je tedy zřejmě jedním z bodů kružnice y, která vznikla rotací bodu Y kolem p. Tím je důkaz podán a řešení úlohy provedeno.

3. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané veľkosti $AC = b$, $AB = c$ jeho strán a kladné číslo $\varepsilon = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA$. Urobte diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 43). Z textu úlohy vyplýva, že v trojuholníku ABC je $\beta > \gamma$ a teda aj $b > c$.

Ak ABC je hľadaný trojuholník, zostrojme v polrovine BCA uhol $\sphericalangle CBP = \gamma$; potom je $\sphericalangle PBA = \beta - \gamma = \varepsilon$. Na polpriamku BP nanesieme úsečku b, čím dostaneme úsečku

$BD = b$ a platí $\triangle CDB \cong BCA$ (sus). Oba tieto trojuholníky sú zrejme súmerne združené podľa osi p úsečky BC, takže $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník a p je tiež osou úsečky AD. Avšak trojuholník ABD je určený stranami $AB = c$, $BD = b$ a uhlom nimi zovretým ε. Z toho vyplýva konštrukcia:



Obr. 43.

Zostrojme trojuholník ABD tak, aby $AB = c$, $BD = b$, $\sphericalangle ABD = \varepsilon$ (veta o určenosti sus). Ďalej zostrojíme os p úsečky AD. Pretože je $b > c$, leží bod B vnútri polroviny pA a bod C súmerne združený s B podľa osi padne dovnútra polroviny pD. Tým sme trojuholník ABC zostrojili.

Platí skutočne $AB = c$ (podľa konštrukcie), $AC = b$, lebo je $AC = BD = b$ (podľa konštrukcie). Pretože je $b > c$, je $\beta > \gamma$ a obraz BD úsečky CA leží v uhle $\sphericalangle ABC$, pričom je $\sphericalangle DBC = \gamma$ (t. j. rovná sa uhlu $\sphericalangle BCA$) a rozdiel uhlov $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DBC$, t. j. $\beta - \gamma$ sa rovná danemu uhlu ε. Tým sme urobili dôkaz správnosti konštrukcie.

Diskusia. Ak zvolíme umiestenie danej úsečky $c = AB$ a polrovinu s hranicou AB, do ktorej chceme umiestiť trojuholník ABD, potom možno trojuholník ABD zostrojiť s jediným výsledkom (uhol ε musí byť dutý). Už sme zistili, že bod B leží za predpokladu, že je $b > c$, vnútri polroviny pA a preto existuje bod C. Má teda úloha za predpokladu, že je

$b > c$ a ε dutý uhol, pri zvolenom umiestení jediné riešenie. Ak jedna z uvedených podmienok neplatí, nemá úloha riešenie.

4. Buďte p, q celá čísla. Potom zlomek

$$\frac{p^5q - pq^5}{30} \tag{1}$$

je rovněž celé číslo. Dokažte.

Řešení. Označme

$$a = pq(p^4 - q^4)$$

neboli

$$a = pq(p + q)(p - q)(p^2 + q^2). \tag{2}$$

Musíme dokázat, že číslo (2) je dělitelné každým z prvočinitelů 2, 3, 5 čísla 30. Důkaz provedeme pro každé z těchto čísel odděleně:

a) Dokážeme, že číslo a je dělitelné dvěma.

Důkaz. To je zřejmé, je-li alespoň jedno z čísel p, q sudé. Jestliže p, q jsou obě lichá čísla, potom je $p + q$ sudé a tím i číslo a podle (2). Tím je důkaz proveden.

b) Dokážeme, že číslo a je dělitelné třemi.

Důkaz. To je zřejmé, je-li alespoň jedno z čísel p, q dělitelné třemi.

Nechť dále žádné z čísel p, q není dělitelné třemi. Pak jsou dvě možnosti:

[1] Obě čísla p, q dávají při dělení třemi sobě rovné nenulové zbytky (jedno z čísel 1, 2). Pak je jistě číslo $p - q$ dělitelné třemi, neboť příslušný zbytek po dělení třemi bude roven nule.

[2] Každé z čísel p, q má jiný nenulový zbytek, jeden zbytek je 1, druhý zbytek 2. Potom číslo $p + q$ má po dělení třemi „zbytek" $1 + 2$ neboli je dělitelné třemi.

Tím je důkaz proveden.

c) Dokážeme, že číslo a je dělitelné pěti.

Důkaz. Je-li jedno z čísel p, q dělitelné pěti, je zřejmě a dělitelné pěti.

Nechť dále žádné číslo p, q není dělitelné pěti; pak jsou možné nenulové zbytky 1, 2, 3, 4 po dělení pěti. Jsou tyto možnosti:

[1] Obě čísla p, q mají stejné nenulové zbytky.

Pak číslo $p - q$ má zbytek 0 a je tedy dělitelné pěti a s ním i číslo a.

[2] Jedno z čísel p, q má zbytek 1 a druhé 4 anebo jedno má zbytek 2 a druhé 3, pak je $p + q$ dělitelné pěti.

[3] Jsou-li zbytky čísel p, q po řadě 1, 2 nebo 1, 3 nebo 2, 4 nebo 3, 4, pak je*)

$1^2 + 2^2 = 5,\ 1^2 + 3^2 = 10,\ 2^2 + 4^2 = 20,\ 3^2 + 4^2 = 25,$

takže číslo $p^2 + q^2$ je dělitelné pěti.

Tím jsou všechny kombinace zbytků čísel p, q po dělení pěti vyčerpány a důkaz části c) a tím i řešení úlohy je provedeno.

6. Úlohy I. kola kategorie C.

1. Řešte soustavu rovnic

$$x + y = s, \tag{1}$$

$$ax + 2y = 0 \tag{2}$$

o neznámých x, y, při čemž a, s jsou daná reálná čísla.

Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy vzhledem k číslům a, s.

Řešení. Z rovnice (1) plyne

$$y = s - x. \tag{3}$$

Dosaďme ze vztahu (3) do rovnice (2); dostaneme

$$ax + 2(s - x) = 0$$

*) Platí totiž: Jestliže číslo a má při dělení pěti zbytek r, pak čísla a^2, r^2 mají při dělení pěti zbytky sobě rovné.

neboli

$$x(2 - a) = 2s. \tag{4}$$

To je lineární rovnice pro neznámou x. Rozeznávejme dvě možnosti.

Případ [1]. Nechť je $2 - a \neq 0$ neboli $a \neq 2$. Potom z rovnice (4) dostaneme

$$x = \frac{2s}{2 - a}.$$

Dosaďme tento výsledek do rovnice (3); potom dostaneme

$$y = s - \frac{2s}{2 - a}$$

neboli

$$y = -\frac{as}{2 - a}.$$

Dvojice čísel

$$x = \frac{2s}{2 - a}, \; y = -\frac{as}{2 - a} \tag{5}$$

je řešením soustavy rovnic (1), (2), jak se ihned přesvědčíme. Dosaďme z (5) do levé strany rovnice (1); postupně dostáváme

$$L = \frac{2s}{2 - a} - \frac{as}{2 - a} = \frac{s(2 - a)}{2 - a}.$$

Protože je $2 - a \neq 0$, pak po zkrácení posledního zlomku máme $L = s$, takže platí $L = P$. Dvojice (x, y), daná vztahy (5), je proto řešením rovnice (1).

Nyní dosaďme z (5) do levé strany rovnice (2); postupně platí

$$L' = a \cdot \frac{2s}{2 - a} - 2 \cdot \frac{as}{2 - a} = \frac{2as - 2as}{2 - a} = 0.$$

To souhlasí s pravou stranou $P' = 0$ rovnice (2). Proto platí $L' = P'$ a dvojice (x, y), daná vztahy (5), je řešením rovnice (2).

Jsou tedy čísla (x, y), daná vztahy (5), řešením dané soustavy.

Případ [2]. Nechť je $2 - a = 0$ neboli $a = 2$. Pak rovnice (2) zní $2(x + y) = 0$. Uvažujme tyto dvě možnosti:

[a] Nechť je $s \neq 0$. Pak daná soustava zní

$$x + y = s, \; 2(x + y) = 0, \text{ kde } s \neq 0.$$

Tyto dvě rovnice jsou sporné a soustava nemá řešení.

[b] Nechť je $s = 0$. Pak daná soustava zní $x + y = 0$, $2(x + y) = 0$, kde druhá rovnice vznikne znásobením obou stran první rovnice číslem 2. Soustavu lze tedy nahradit rovnicí $x + y = 0$, t. j.

$$y = -x.$$

Číslo x volíme libovolně, pro číslo y platí $y = -x$. Dvojice $(x, y = -x)$ je vždy řešením dané soustavy, která tedy má nekonečně mnoho řešení.

Závěr. Daná soustava má jediné řešení pro $a \neq 2$. Pro $a = 2$, $s \neq 0$ nemá soustava řešení. Pro $a = 2$, $s = 0$ má soustava nekonečně mnoho řešení.

2. Kolika různými způsoby je možno v naší měně rozměnit pětadvacetihaléř?

Řešení. Označíme-li x počet desetihaléřů, y pětihaléřů, z tříhaléřů a u haléřů, máme určit, kolik řešení (v celých nezáporných číslech) má rovnice

$$10x + 5y + 3z + u = 25. \tag{1}$$

Přitom čísla x, y, z, u jsou celá nezáporná čísla a zřejmě musí být

$$0 \leqq x \leqq 2, \; 0 \leqq y \leqq 5, \; 0 \leqq z \leqq 8, \; 0 \leqq u \leqq 25.$$

V kolika řešeních je $x = 2$? V tolika, kolik je řešení rovnice

$$5y + 3z + u = 5.$$

Tato řešení jsou napsána v tabulce:

y	z	u
1	0	0
0	1	2
0	0	5

Máme tedy celkem tři případy.

V kolika řešeních je $x = 1$? V tolika, kolik je řešení rovnice

$$5y + 3z + u = 15.$$

Příslušná řešení jsou v tabulce:

y	z	u
3	0	0
2	1	2
2	0	5
1	3	1
1	2	4
1	1	7
1	0	10
0	5	0
0	4	3
0	3	6
0	2	9
0	1	12
0	0	15

Je jich tedy celkem třináct.

V kolika řešeních je $x = 0$? V tolika, kolik řešení má rovnice

$$5y + 3z + u = 25.$$

Řešení jsou zase v tabulce:

y	z	u
5	0	0
4	1	2
4	0	5
3	3	1
3	2	4
3	1	7
3	0	10
2	5	0
2	4	3
2	3	6

y	z	u
2	2	9
2	1	12
2	0	15
1	6	2
1	5	5
1	4	8
1	3	11
1	2	14
1	1	17
1	0	20

y	z	u
0	8	1
0	7	4
0	6	7
0	5	10
0	4	13
0	3	16
0	2	19
0	1	22
0	0	25

Je jich 29.

Celkový počet tedy je $3 + 13 + 29 = 45$.

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB. Na prodloužení strany AC za bod A sestrojte bod E a na prodloužení strany BC za bod B sestrojte bod F tak, aby platilo

$$AE = EF = BF.$$

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy a dokažte, že úloha má řešení, jestliže platí $\sphericalangle CAB > 60°$.

Řešení (obr. 44). Rozbor. Označme AP, BQ polopřímky po řadě opačné k polopřímkám AC, BC. Nechť E, F jsou body požadované úlohou, takže platí $AE = EF = FB$ a tedy též $EF \parallel AB$. Pak je FEB rovnoramenný trojúhelník, jehož úhly $\sphericalangle E$, $\sphericalangle B$ při základně EB jsou shodné. Veďme bodem C přímku $p \parallel EF$ a označme D její průsečík s přímkou EB. O trojúhelníku CBD platí

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle FBE \text{ (vrcholové úhly)},$$

$\sphericalangle\, CDB = \sphericalangle\, FEB$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami EF, p). Protože však je $\sphericalangle\, FBE = \sphericalangle\, FEB$, platí též

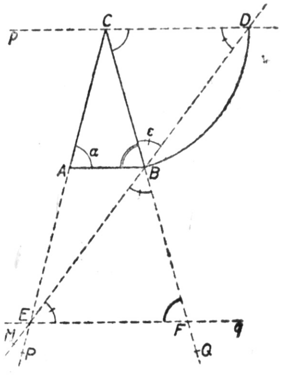
$$\sphericalangle\, CBD = \sphericalangle\, CDB.$$

Proto o stranách protějších k těmto úhlům v trojúhelníku CBD nutně platí

$$CD = CB.$$

Toto užijeme ke konstrukci.

Konstrukce. Bodem C sestrojíme přímku $p \parallel AB$. V polorovině opačné k polorovině BCA na přímce p sestrojíme bod D tak, aby $CD = CB$. Dále označíme E společný bod přímky BD a polopřímky AP. Konečně označme F společný bod polopřímky BQ a přímky $q \parallel CD$ vedené bodem E. Body E, F jsou body požadované úlohou.



Obr. 44.

Důkaz. Podle konstrukce jsou úhly při vrcholech B, D v trojúhelníku CBD shodné. Dále platí

$\sphericalangle\, EBF = \sphericalangle\, CBD$ (vrcholové úhly),

$\sphericalangle\, BEF = \sphericalangle\, BDC$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami p, q).

Velikosti úhlů na pravé straně obou těchto rovností jsou si však rovny a proto platí

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle BEF.$$

Proti těmto úhlům leží tedy v trojúhelníku BEF shodné strany $BF = EF$.

Dále je $BF = AE$, jak plyne na příklad ze souměrnosti podle osy úsečky AB. Je tedy $AE = EF = BF$, což jsme měli dokázat.

Diskuse. Označme BM polopřímku opačnou k polopřímce BD. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda polopřímky AP, BM mají společný bod. Aby tomu tak bylo, musí podle Eukleidova postulátu platit

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle ABM < 180°. \tag{1}$$

Označme $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha$; potom je též $\sphericalangle BCD = \alpha$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami AB, p). V trojúhelníku CBD jsou úhly $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$ shodné; o velikosti ε každého z nich platí

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,(180° - \sphericalangle BCD)$$

neboli

$$\varepsilon = 90° - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,. \tag{1'}$$

O úhlech vedlejších $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle DBA$ platí $\sphericalangle ABM = 180° - \sphericalangle DBA$; dále platí $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBD + \sphericalangle CBA$ (úhly styčné), neboli $\sphericalangle DBA = \varepsilon + \alpha$. Je tedy

$$\sphericalangle ABM = 180° - (\varepsilon + \alpha)$$

neboli vzhledem ke vztahu (1′) je

$$\sphericalangle ABM = 90° - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,. \tag{2}$$

Dále je

$$\sphericalangle PAB = 180° - \alpha. \tag{3}$$

Po dosazení do (1) ze vztahů (2), (3) dostaneme podmínku pro velikost úhlu α, která nutně platí, když má úloha řešení, t. j.

$$90^\circ < \tfrac{3}{2}\alpha$$

$$\alpha > 60^\circ. \tag{4}$$

Jestliže obráceně o dutém úhlu α platí vztah (4), pak platí vztah (1), jak se snadno užitím vztahů (2), (3) zjistí.

Jestliže tedy platí $90^\circ > \alpha > 60^\circ$ má úloha jediné řešení. Neplatí-li tato podmínka, nemá úloha řešení.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. Květy Adamcové,
žákyně 9b třídy v Chrudimi.

Jiné řešení (obr. 45). Označme AP, BQ polopřímky po řadě opačné k polopřímkám AC, BC. Předpokládejme, že jsme sestrojili body E, F, které vyhovují požadavkům úlohy, t. j. platí

$$AE = EF = FB, \quad EF \parallel AB.$$

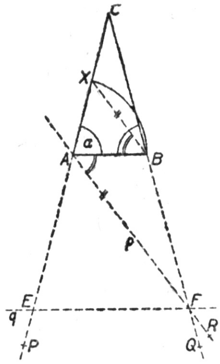
Uvažujme stejnolehlost o středu C, ve které bodu E přísluší bod A a tím bodu F bod B; označme X bod, který v této stejnolehlosti přísluší bodu A. Protože bod A leží uvnitř úsečky CE, leží bod X uvnitř úsečky CA a platí $BX \parallel FA$; protože je $AE = EF$, je též $AX = AB$. Odtud plyne konstrukce.

Konstrukce. Na polopřímce AC sestrojíme bod X tak, aby platilo $AX = AB$; bodem A vedeme přímku $p \parallel XB$ a označíme F společný bod přímky p s polopřímkou BQ opačnou k polopřímce BC. Konečně sestrojíme průsečík E přímky CA s přímkou $q \parallel AB$ vedenou bodem F. Pak E, F jsou body požadované úlohou.

Důkaz. Podle konstrukce je $AB = AX$. Podle konstrukce jsou trojúhelníky ABX, EFA stejnolehlé podle bodu C. Ke shodným úsečkám AX, AB příslušejí v této stejnolehlosti shodné úsečky EA, EF. Protože podle konstrukce je $EA = FB$, je $EF = EA = FB$.

Diskuse. Označme $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha$ a R bod přímky p, který leží v polorovině ABQ. Trojúhelník ABX je rovnoramenný a úhel $\sphericalangle ABX = \frac{1}{2} \sphericalangle EAB$ ($\sphericalangle EAB$ je vnějším úhlem v trojúhelníku ABX a je roven dvojnásobku úhlu při jeho základně BX), t. j. $\sphericalangle ABX = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$ neboli

$$\sphericalangle ABX = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{1}$$



Obr. 45.

Úhly $\sphericalangle ABX$, $\sphericalangle BAR$ jsou střídavé úhly mezi rovnoběžkami $BX \parallel p$ a proto vzhledem k (1) je

$$\sphericalangle BAR = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{2}$$

Podle Eukleidova postulátu má polopřímka BQ s polopřímkou AR společný bod F, jestliže platí

$$\sphericalangle BAR + \sphericalangle ABQ < 180°. \tag{3}$$

Po dosazení ze (2) a ze vztahu $\sphericalangle ABQ = 180° - \alpha$ ze (3) dostaneme

$$90° - \tfrac{1}{2}\alpha + 180° - \alpha < 180°,$$

což je nutná podmínka pro úhel α. Odtud plyne

$$90^\circ < \tfrac{3}{2}\alpha$$

neboli

$$\alpha > 60^\circ. \tag{4}$$

Jestliže obráceně platí tento vztah, platí i vztah (3) a společný bod F uvnitř každé z polopřímek BQ, AR existuje. Neplatí-li vztah (4) o dutém úhlu α, potom nemá úloha řešení.

Poznámka. Užití stejnolehlosti je v podaném řešení nepodstatné.

Podle řešení s. Jiřího Mosera,
žáka 9. třídy JSŠ v Lanškrouně.

Jiné řešení. Rozbor. Označme $\alpha \equiv \measuredangle CAB \equiv \measuredangle ABC$ (obr. 46). Předpokládejme, že jsme sestrojili body E, F podle textu úlohy, o nichž platí že $AE = EF = BF$. Potom je trojúhelník EAF rovnoramenný o základně AF. Proto o úhlech při této základně platí

$$\measuredangle EAF = \measuredangle EFA. \tag{1}$$

Protože je $AB \parallel EF$, je

$$\measuredangle EFA = \measuredangle FAB \text{ (úhly střídavé).} \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) plyne

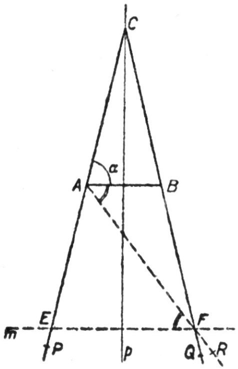
$$\measuredangle EAF = \measuredangle FAB.$$

Odtud plyne, že polopřímka AF je osou úhlu $\measuredangle EAB$ vedlejšího k úhlu $\measuredangle CAB$. Podle tohoto výsledku provedeme konstrukci:

Označme AP polopřímku opačnou k polopřímce AC a dále označme BQ polopřímku opačnou k polopřímce BC. Sestrojme osu AR úhlu $\measuredangle PAB$ a označme F společný bod polopřímek AR, BQ. Potom je F hledaným bodem. Bodem F veďme přímku $m \parallel AB$ a označme E její průsečík s polopřímkou AP.

Nyní provedeme důkaz správnosti provedené konstrukce. Máme dokázat, že platí $AE = EF = BF$.

Důkaz. Podle konstrukce je $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FAB$ (neboť polopřímka AR je osou úhlu $\sphericalangle EAB$) a dále je $\sphericalangle FAB =$



Obr. 46.

$= \sphericalangle AFE$ (úhly střídavé). Odtud plyne, že $\sphericalangle EAF = \sphericalangle AFE$, takže trojúhelník EAF je rovnoramenný se základnou AF. Proto je

$$AE = EF. \tag{3}$$

Nyní dokážeme, že je též $AE = BF$. Označme $p \perp AB$ osu souměrnosti trojúhelníka ABC. V této souměrnosti jsou polopřímky CA, CB neboli polopřímky CE, CF souměrně sdružené. Protože je $AB \parallel EF$, $AB \perp p$, je též $EF \perp p$. Proto na přímce EF leží souměrně sdružené body polopřímek CE, CF, t. j. body E, F jsou též souměrně sdružené podle přímky p. Proto jsou i obě úsečky AE, BF souměrně sdružené podle přímky p, neboť A, B a E, F jsou dvojice souměrně sdružených bodů. Ale souměrně sdružené úsečky jsou shodné a proto je

$$AE = BF. \tag{4}$$

Ze vztahů (3), (4) plyne, že $AE = EF = BF$, což jsme měli dokázat.

Diskuse. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda polopřímky AR, BQ mají společný bod F, který musí ležet uvnitř každé z nich. O tom rozhodneme podle Eukleidova postulátu. Polopřímky budou mít společný bod F, jestliže bude platit

$$\sphericalangle BAR + \sphericalangle ABQ < 180°. \tag{5}$$

Podle konstrukce je $\sphericalangle BAR = \frac{1}{2} . \sphericalangle PAB = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Dále je $\sphericalangle ABQ = 180° - \sphericalangle ABC = 180° - \alpha$. Dosaďme do (5) za $\sphericalangle BAR = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ a za $\sphericalangle ABQ = 180° - \alpha$. Dostaneme

$$90° - \tfrac{1}{2}\alpha + 180° - \alpha < 180°$$

neboli

$$90° < \tfrac{3}{2}\alpha,$$

t. j.

$$60° < \alpha.$$

Jestliže platí $\alpha > 60°$, potom je $\sphericalangle BAR < 90° - \frac{1}{2} . 60°$ neboli $\sphericalangle BAR < 60°$ a dále je $\sphericalangle ABQ < 180° - 60°$ neboli $\sphericalangle ABQ < 120°$. Proto je $\sphericalangle BAR + \sphericalangle ABQ < 120° + 60°$, t. j. menší než 180° a podle Eukleidova postulátu mají polopřímky AR, BQ společný bod F. Úloha má proto jediné řešení, jestliže je $\alpha > 60°$, t. j. jsou-li ostré úhly při základně AB daného trojúhelníku ABC větší než 60°. Jinak nemá úloha řešení.

4. Určte prirodzené trojciferné číslo, ktorého zápis v dekadickej sústave má tieto vlastnosti: Súčet druhých mocnín jeho cifier je 118. Súčet jeho cifier sa rovná číslu, ktoré dostaneme z daného čísla, keď v ňom vynecháme cifru stojacu na mieste stoviek.

Riešenie. Hľadané trojciferné číslo (xyz) možno zapísať v tvare

$$100x + 10y + z,$$

kde $x \neq 0$, y, z sú niektoré z čísel

$$0, 1, 2, \ldots, 9. \tag{1}$$

Ak vynecháme v tomto čísle cifru na mieste stoviek, dostaneme číslo (yz), t. j. číslo

$$10y + z.$$

Podľa požiadavky úlohy má platiť

$$x^2 + y^2 + z^2 = 118, \tag{2}$$

$$x + y + z = 10y + z. \tag{3}$$

Rovnicu (3) upravíme na tvar

$$x = 9y, \tag{4}$$

z ktorého vyplýva, že $x \neq 0$ je nevyhnutelne deliteľné číslom 9. Z čísel (1) vyhovuje tejto požiadavke jedine číslo $x = 9$. K nemu potom podľa (4) prislúcha $y = 1$. Teraz dosaďme do rovnice (2) za $x = 9$, $y = 1$; dostaneme

$$9^2 + 1^2 + z^2 = 118$$

alebo

$$z^2 = 36$$

a pretože je $z \geqq 0$, je nevyhnutne

$$z = 6.$$

Riešením úlohy môže byť teda jedine číslo 916. To skutočne vyhovuje požiadavkám úlohy (t. j. vzťahom (2), (3)), ako sa ľahko presvedčíme. Hľadané číslo je preto 916.

5. Máme tri tenké a priehľadné meradlá. Označme ich krátko meradlá OA, O_1A_1, O_2A_2, pričom body O, O_1, O_2 sú začiatky meraní (obrazy nuly). Pravítko OA je rozdelené na milimetrové dielky. Pravítko O_1A_1 má dielky rovnajúce sa $\frac{15}{16}$ milimetra a pravítko O_2A_2 má dielky rovnajúce sa $\frac{27}{28}$ milimetra.

Položme meradlá na seba tak, že sa pokryjú, pri čom sa kryjú aj všetky tri body O, O_1, O_2. Ktorá prvá čiarka (rozdielna od bodu O) na pravítku OA má tú vlastnosť, že sa kryje aj s čiarkou pravítka O_1A_1, aj s čiarkou pravítka O_2A_2?

Riešenie. Meradlá OA, O_1A_1 sa kryjú vždy po 16 dielcoch meradla O_1A_1, t. j. po 15 milimetroch (lebo $\frac{15}{16} \cdot 16 = 15$).

Meradlá OA, O_2A_2 sa kryjú vždy po 28 dielcoch meradla O_2A_2, t. j. po 27 milimetroch (lebo $\frac{27}{28} \cdot 28 = 27$).

Aby sa kryli meradlá O_1A_1, O_2A_2, musíme vziať x úsečiek po 15 milimetroch; ich súčet musí byť ten istý, ako súčet y úsečiek po 27 milimetroch (čísla x, y sú prirodzené a čo najmenšie), t. j. musí platiť

$$15x = 27y,$$

alebo

$$5x = 9y.$$

Čísla 5, 9 sú nesúdeliteľné. Z predošlého vzťahu teda vyplýva, že číslo 5 je nevyhnutne deliteľom čísla y a číslo 9 deliteľom čísla x. Najmenšie také prirodzené čísla sú $x = 9$, $y = 5$.

Skutočne $15x = 27y = 135$. Dielky všetkých troch meradiel sa teda môžu po prvý raz kryť po 135 milimetroch v bode X (t. j. $OX = 135$ mm).

Na meradle O_1A_1 tomu odpovedá

$$135 \cdot \frac{16}{15} = 9 \cdot 16 = 144 \text{ dielkov.}$$

Na meradle O_2A_2 tomu odpovedá

$$135 \cdot \frac{28}{27} = 5 \cdot 28 = 140 \text{ dielkov.}$$

Dielky na seba priložených meradiel sa po prvý raz kryjú v bode, ktorý je 135. dielkom prvého, 144. dielkom druhého a 140. dielkom tretieho meradla.

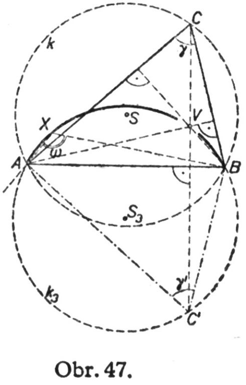
6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Zvolme přímky BC, CA, AB po řadě za osy souměrnosti a sestrojme podle každé z nich trojúhelník souměrně sdružený s daným trojúhelníkem ABC. Takto sestrojené trojúhelníky označme po řadě $A'BC$, $AB'C$, ABC'.

Sestrojte kružnice opsané těmto třem trojúhelníkům a dokažte, že procházejí týmž bodem; vyšetřte geometrický význam tohoto bodu vzhledem k trojúhelníku ABC.

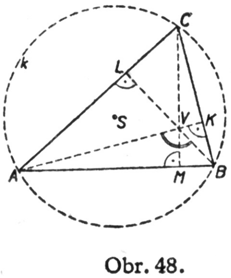
Řešení (viz obr. 47, 48). Úhly trojúhelníka ABC označme po řadě α, β, γ. Dále po řadě označme V, V_1, V_2, V_3 průsečíky výšek trojúhelníků ABC, $A'BC$, $AB'C$, ABC' a

$$k \equiv (S, r),\ k_1 \equiv (S_1, r),\ k_2 \equiv (S_2, r),\ k_3 \equiv (S_3, r)$$

kružnice opsané těmto trojúhelníkům. Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, leží body S, V uvnitř tohoto trojúhelníka; z konstrukce trojúhelníků $A'BC$, $AB'C$, ABC' vyplývá obdobná vlastnost bodů S_1, S_2, S_3 a V_1, V_2, V_3 vzhledem k příslušnému z těchto trojúhelníků.



Obr. 47.



Obr. 48.

Označme K, L, M paty výšek trojúhelníka ABC po řadě vedených body A, B, C; ty leží po řadě uvnitř stran BC, CA, AB.

Vypočtěme na př. úhel $\sphericalangle AVB$:

Výpočet. Z trojúhelníka ABK, kde $\sphericalangle K = 90°$, plyne, že

$$\sphericalangle BAK = 90° - \beta. \tag{1}$$

Stejně z trojúhelníka BAL, kde $\sphericalangle L = 90°$, plyne, že

$$\sphericalangle ABL = 90° - \alpha. \tag{2}$$

Úhel $\sphericalangle AVB$ vypočteme z trojúhelníka ABV pomocí výsledků (1), (2). Zřejmě je

$$\sphericalangle AVB = \alpha + \beta. \tag{3}$$

Podobně platí

$$\sphericalangle BVC = \beta + \gamma,$$
$$\sphericalangle CVA = \gamma + \alpha.$$

Nyní dokážeme, že kružnice k_3 prochází bodem V.

Důkaz. Body C, C' jsou podle konstrukce odděleny přímkou AB. Bod V však leží uvnitř trojúhelníka ABC a tedy i uvnitř poloroviny ABC. Proto i body V, C' jsou odděleny přímkou AB.

Označme X libovolný bod (obr. 48) v tom oblouku AB kružnice k_3, který leží v polorovině ABC; tento oblouk označme $\widehat{AXB}$. Potom platí

$$\sphericalangle AC'B + \sphericalangle AXB = 180°$$

(viz věta v odst. 1 na str. 21 učebnice Geometrie pro 9. ročník). Protože je $\sphericalangle AC'B = \gamma$, je $\sphericalangle AXB = 180° - \gamma$ neboli $\sphericalangle AXB = \alpha + \beta$.

Nyní dokážeme, že bod V leží se zvoleným bodem X na zmíněném oblouku $\widehat{AXB}$ kružnice k_3. K tomu použijeme věty (9) na str. 30 učebnice Geometrie pro 9. ročník; větu jen pro náš úkol vhodně vyslovíme: „Buď dána polorovina ABC. Množinu všech bodů poloroviny ABC, z nichž je úsečka AB vidět pod daným dutým úhlem $\omega = \alpha + \beta$, tvoří všechny body oblouku AB (s výjimkou bodů A, B) určité kružnice, která prochází body A, B.“

Protože úhel $\sphericalangle AXB = \alpha + \beta$, patří bod X oblouku AB, o němž tato věta mluví; proto oblouk $\widehat{AXB}$ je v našem případě obloukem z naší věty (body A, B, X, které neleží v jedné přímce, prochází jediná kružnice a tou je podle volby bodu X kružnice k_3). Ale bod V leží v polorovině ABC a podle (3) o něm platí vztah $\sphericalangle AVB = \alpha + \beta$. Proto podle vyslovené věty leží bod V na oblouku $\widehat{AXB}$, t. j. na kružnici k_3. Tím je dokázáno, že kružnice k_3 prochází bodem V. Stejně se dokáže, že i kružnice k_1, k_2 procházejí bodem V. Tím je úloha rozřešena.

7. Jsou dána reálná čísla a, b, c, o nichž platí vztah

$$a + b + c = 0. \tag{1}$$

Dokažte, že potom platí vztah (pokud ovšem jednotlivé zlomky mají smysl)

$$\frac{27\,(a^2 + b^2 + c^2)}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} =$$

$$= \left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right) \cdot \left(\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c}\right).$$

(Čemu se rovná hodnota každé strany?)

Řešení. Označme P pravou a L levou stranu vztahu, jehož platnost máme dokázat. Při tom čísla a, b, c musí být různá od nuly, jinak by výraz P neměl smysl. Ze vztahu (1) plyne na př. $b + c = -a$; protože je $a \neq 0$, proto je též $b + c \neq 0$ atd., takže výraz P má vždy smysl. Ze vztahu (1) vyplývá, že neplatí $a = b = c$; pak by totiž bylo $3a = 0$ neboli $a = 0$. Výraz L má vždy smysl, neboť platí alespoň jedna z těchto nerovností $(a - b)^2 > 0$, $(b - c)^2 > 0$, $(c - a)^2 > 0$, takže je jmenovatel výrazu L kladné číslo.

Nyní platí

$$L = \frac{27(a^2 + b^2 + c^2)}{2\,(a^2 + b^2 + c^2) - 2\,(ab + bc + ca)}. \tag{2}$$

Ze vztahu (1) plyne

$$(a + b + c)^2 = 0$$

neboli

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

a tedy

$$-2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dosaďme tento výsledek do výrazu (2); dostaneme

$$L = \frac{27\,(a^2 + b^2 + c^2)}{3(a^2 + b^2 + c^2)},$$

kde jmenovatel je vskutku číslo kladné; proto platí

$$L = 9. \tag{3}$$

Dále podle (1) platí $b + c = -a$, $c + a = -b$, $a + b = -c$; dosaďme tyto hodnoty do výrazu P. Obdržíme

$$P = \left(\frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c}\right)\left(\frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c}\right)$$

neboli

$$P = (-3)\,.\,(-3),$$

t. j.

$$P = 9.$$

Vzhledem ke vztahu (3) platí $L = P$ a proto je daný vztah (za předpokladu, že platí vztah (1)) správný, což jsme měli dokázat.

8. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dva body A, B, z nichž A leží uvnitř kružnice k a B leží vně. Víme, že každá kružnice m, která prochází body A, B, protíná kružnici k ve dvou různých bodech X, Y.

Sestrojte všechny kružnice m, pro které alespoň jeden ze čtyř dutých úhlů přímek AB, XY je roven 45°.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy.

Řešení. Definice. Dvě různoběžky a, b dělí rovinu na čtyři duté úhly, z nichž alespoň jeden není tupý; jeho velikost označme ω a nazveme ji odchylkou přímek a, b. Platí tedy $0 < \omega \leqq 90°$.

Rozbor (obr. 49). Daná úloha vyžaduje, abychom sestrojili dva různé body X, Y kružnice k takové, aby přímky XY, AB měly odchylku 45° a body A, B, X, Y ležely na kružnici.*)

Označme po řadě p, q osy úseček AB, XY a O jejich průsečík; přitom je přímka q střednou dvojice kružnic k, $m \equiv (O, OA)$ a proto prochází bodem S. Snadno se dokáže, že je-li odchylka přímek AB, XY rovna 45°, že potom i odchylka přímek $p \perp AB$, $q \perp XY$ je rovněž 45°. Máme tedy za úlohu sestrojit bodem S přímku q, která má od přímky p odchylku 45°. Na základě tohoto výsledku provedeme konstrukci.

Konstrukce. Sestrojme osu p úsečky AB a zvolme na ní dva různé body V, P. Zvolme jednu z polorovin vyťatých přímkou p a nanesme do ní k polopřímce VP úhel $\sphericalangle PVQ = 45°$. Potom přímky p, VQ mají odchylku 45°. Bodem S sestrojme přímku $q \parallel VQ$; o ní se snadno dokáže, že má od přímky p odchylku rovněž 45°. Protože p, VQ jsou různoběžky, jsou i p, q různoběžky; jejich průsečík označme O. Dále sestrojme kružnici $m \equiv (O, OA)$. Jestliže je $O \not\equiv A$, $O \not\equiv S$, potom kružnice m existuje a protíná kružnici k ve dvou různých bodech X, Y. Přímka XY je řešením úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce je odchylka přímek p, q rovna 45°; protože je $p \perp AB$, $q \perp XY$, dokáže se odtud snadno, že odchylka přímek AB, XY je též 45°.

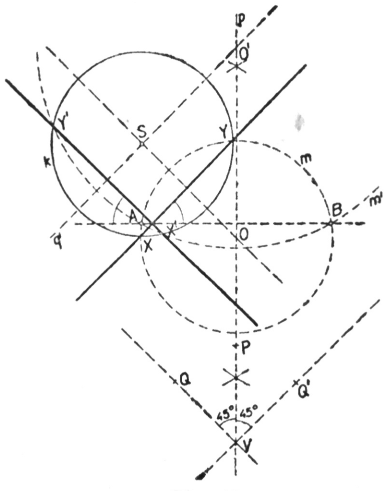
Diskuse. Podle konstrukce bod O vždy existuje, neboť p, q jsou různoběžky. Osa p úsečky AB nikdy neprochází bodem S; pak by totiž bod S měl od bodů A, B rovné vzdálenosti, což není možné, neboť bod A podle předpokladu leží uvnitř kružnice k a bod B leží vně. Proto je vždy $O \not\equiv S$.

Rovněž je $O \not\equiv A$, neboť bod O leží na ose p úsečky AB a ta

*) V obr. 49 označte q přímku OS.

nikdy neprochází krajním bodem A úsečky AB. Proto existuje kružnice $m \equiv (O, OA)$ nesoustředná s kružnicí k. Protože kružnice m prochází body A, B, z nichž jeden leží uvnitř a druhý vně kružnice k, proto se kružnice k, m protínají ve dvou různých bodech X, Y. Proto k sestrojené přímce VP přísluší jedna přímka $XY \perp VQ$, která vyhovuje úloze.

Úhel $\sphericalangle PVQ$ jsme sestrojili ve zvolené polorovině vyťaté přímkou p. Avšak v opačné polorovině k polorovině VPQ lze sestrojit ještě úhel $\sphericalangle PVQ' = 45°$ a k přímce $VQ' \perp VQ$ přísluší rovněž přímka $X'Y'$, která vyhovuje úloze. Protože je $XY \perp VQ$, $X'Y' \perp VQ'$, $VQ \perp VQ'$, je též $XY \perp X'Y'$



Obr. 49.

a přímky XY, $X'Y'$ jsou tedy různé. Protože vedle přímek VQ, VQ' nelze bodem V sestrojit další přímku, která by měla s přímkou p odchylku 45°, jsou právě dvě řešení XY, $X'Y'$ dané úlohy.

Tím je řešení dané úlohy provedeno.

9. Kolika nulami končí součin bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel od 1 do 365 (včetně)?

Řešení. Označme N přirozené číslo dané součinem bezprostředně následujících čísel od 1 do 365. Abychom spočítali počet nul, jimiž v dekadickém zápisu končí číslo N, musíme spočítat, kolik dvojic $2 \cdot 5$ lze vybrat z rozkladu čísla N v prvočinitele. Uvidíme, že stačí zjistit, kolik pětek se vyskytuje ve zmíněném rozkladu čísla N v prvočinitele.

Především každé přirozené číslo tvaru $5m \leqq 365$, kde m je přirozené číslo, poskytne pro rozklad čísla N jednu pětku. To je celkem $\frac{365}{5}$ neboli 73 pětek.

Dále po jedné další pětce dostaneme z čísel tvaru $5^2 \cdot n \leqq$ $\leqq 365$, kde n je přirozené číslo. Pak je $\frac{365}{25} = 14 + \frac{15}{25}$, t. j. 14 takových čísel a tím i dalších 14 pětek.

Konečně po jedné pětce dostaneme z čísel tvaru $5^3 \cdot p \leqq 365$, kde p je přirozené číslo. Tu je $\frac{365}{125} = 2 + \frac{115}{125}$ a jsou tedy dvě taková čísla a tím i dvě další pětky.

Čísla tvaru $5^k \cdot l \leqq 365$, kde $k > 3$, l jsou přirozená čísla, se mezi přirozenými čísly od 1 do 365 již nevyskytnou. Máme tedy v rozkladu čísla N v prvočinitele $73 + 14 + 2$ pětek, t. j. 89 pětek. Mezi přirozenými čísly od 1 do 365 je polovina čísel sudých, což je více než 89; každé z těchto sudých čísel pro rozklad čísla N v prvočinitele poskytne alespoň jednu dvojku, takže v tomto rozkladu bude dvojek více než 89. Proto se dá z tohoto rozkladu vybrat 89 dvojic $2 \cdot 5$ a číslo N proto končí 89 nulami, což jsme měli vypočítat.

10. Je dán zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru.

Potom zlomek

$$\frac{a(b-a)}{b^2},$$

který je rozdílem daného zlomku a jeho druhé mocniny, je opět zlomkem v základním tvaru; dokažte.

Řešení. Zlomek $\frac{a}{b}$ je podle předpokladu v základním tvaru, t. j. čísla a, b jsou nesoudělná neboli mají za společné dělitele jen čísla 1, -1. Máme dokázat, že zlomek

$$\frac{a(b-a)}{b^2} \tag{1}$$

je rovněž v základním tvaru.

Zlomek (1) lze psát ve tvaru

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b-a}{b}. \tag{2}$$

Dokážeme, že žádný z obou zlomků v součinu (2) se nedá krátit (také se nedá krátit ani „křížem“); tím dokážeme, že ani zlomek (1) se nedá krátit.

Toto tvrzení je zřejmé pro zlomek $\frac{a}{b}$. Musíme tedy ještě dokázat, že se nedá krátit zlomek

$$\frac{b-a}{b}. \tag{3}$$

Předpokládejme, že by existovalo celé číslo p (různé od čísel 0, 1, -1), kterým se dá zlomek (3) krátit. Pak by p bylo dělitelem čísel $b-a$, b; pak by se dala tato čísla rozložit takto:

$$b - a = m \cdot p, \tag{4}$$

$$b = n \cdot p, \tag{5}$$

kde $m, n \neq 0$ jsou čísla celá.

Dosaďme ze vztahu (5) do vztahu (4). Po úpravě dostaneme

$$a = (n - m)p, \tag{6}$$

kde $n - m$ je číslo celé.

Vztahy (5), (6) však vyjadřují fakt, že čísla a, b mají společného činitele p a že tedy musí být soudělná. To však odporuje předpokladu, že jsou nesoudělná. Proto se zlomek (3) krátit nedá, tedy ani zlomek (1) se nedá krátit. Tím je proveden důkaz pomocného tvrzení a celá úloha rozřešena.

11. Je dán pravý úhel $\sphericalangle XOY$. Dále buďte dána kladná čísla $a > b$. Sestrojme body A, B na polopřímce OX tak, aby platilo $OA = a$, $OB = b$.

Sestrojte uvnitř polopřímky OY bod M tak, aby platilo

$$\sphericalangle OMB = \sphericalangle BMA.$$

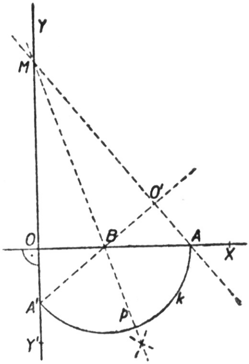
Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům a, b.

Řešení (obr. 50). Rozbor. Nechť je bod M uvnitř polopřímky OY řešením úlohy. Na polopřímce MO sestrojme bod A' tak, aby $MA' = MA$; protože je $MO < MA$ (odvěsna a přepona pravoúhlého trojúhelníka AMO), padne bod A' dovnitř polopřímky OY' opačné k polopřímce OY. Trojúhelník MAA' je rovnoramenný se základnou AA'; protože je $AO \perp OY$, $\sphericalangle OMB = \sphericalangle BMA$, je bod B průsečíkem výšek AO, MB tohoto trojúhelníka, a protože je MB jeho osou, platí $BA' = BA$. Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce. Opišme kružnici $k \equiv (B, BA = a - b)$ a označme A' společný bod kružnice k a polopřímky OY' opačné k polopřímce OY. Dále sestrojme osu p úsečky AA' a označme M společný bod přímky p a polopřímky OY. Potom je M bod požadovaný úlohou.

Důkaz. V trojúhelníku MAA' podle konstrukce jsou přímky AO, p výšky a tedy B průsečík výšek; protože je tento trojúhelník rovnoramenný se základnou AA', je p jeho osou a proto platí $\sphericalangle BMA' = \sphericalangle BMA$, jak požaduje úloha. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda existuje trojúhelník MAA' jehož vrchol A' padne dovnitř polopřímky OY' neboli zda kružnice k a vnitřek polopřímky OY' mají



Obr. 50.

společný bod A'. To znamená, že přímka OY' musí být sečnou kružnice $k \equiv (B, a - b)$; při tom je $a - b > 0$, neboť podle textu úlohy je $a > b$. Přímka OY' je sečnou kružnice k právě tehdy, jestliže platí $a - b > b$ neboli $a > 2b$; přitom druhý průsečík se neuplatní, neboť leží uvnitř polopřímky OY.

Úloha má tedy jedno řešení tehdy, platí-li $a > 2b$, jinak nemá řešení.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. Květy Adamcové,
žákyně 9b třídy JSŠ v Chrudimi,
a s. Stanislava Uhra,
žáka 9. tř. JSŠ v Lanškrouně.

Jiné řešení (obr. 51). Použijeme **pomocné věty**: „Jestliže je polopřímka MB osou úhlu $\sphericalangle\, OMA$ trojúhelníka MAO, potom platí

$$\frac{OB}{BA} = \frac{OM}{AM} \tag{1}$$

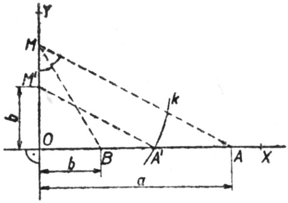
a obráceně". (Srovnej cvič. 5c v učebnici Geometrie pro 9. ročník, str. 69.)

V našem případě je $OB = b$, $BA = a - b$. Jestliže má úloha řešení, potom podle pomocné věty platí

$$\frac{b}{a-b} = \frac{OM}{AM},$$

t. j. trojúhelník OMA je stejnolehlý s pomocným trojúhelníkem $OM'A'$, kde $OM' = b$, $A'M' = a - b$, $\sphericalangle\, A'OM' = 90°$. Podle toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 51). Na polopřímce OY sestrojíme bod M' tak, aby $OM' = b$. Dále sestrojíme kružnici $k \equiv (M', a - b)$ a označíme A' její společný bod s polopřímkou OX. Ve stejnolehlosti o středu O přiřadíme bodu A' bod A a obraz bodu M' označíme M. Potom je M bod, který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 51.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že pro bod B platí vztah (1). Podle konstrukce je $\dfrac{OM}{OM'} = \dfrac{AM}{A'M'}$, při čemž je $OM' = b$,

$A'M' = a - b$; odtud plyne $\frac{OM}{AM} = \frac{b}{a-b}$ neboli $\frac{OM}{AM} =$

$= \frac{OB}{BA}$. Je tedy splněn vztah (1) a podle obrácení pomocné věty je MB osou úhlu $\sphericalangle OMA$ v trojúhelníku MAO. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy zřejmě závisí na tom, zda lze sestrojit bod A' neboli zda lze při umístění předepsaném v konstrukci sestrojit trojúhelník $A'M'O$ o odvěsně $OM' = b$ a přeponě $M'A' = a - b$. To lze provést s jediným výsledkem právě tehdy, jestliže platí $a - b > b$ neboli $a > 2b$; jinak nemá úloha řešení.

Tím je řešení provedeno.

Podle řešení s. Jiřího Kašpera,
žáka 9b třídy JSŠ v České Třebové.

*Iné riešenie.**) Pomocná veta V (obr. 52): Nech je daný ostrý uhol $\sphericalangle OAM$ a bod B, ktorý leží vnútri ramena AO. Potom päta P kolmice vedenej z bodu B k priamke AM padne dovnútra polpriamky AM (pozri učebnicu Geometria pre 7. post. roč., str. 267, príklad 17).

Rozbor. Predpokladajme, že sme našli hľadaný bod M vnútri polpriamky OY. Potom podľa požiadaviek úlohy platí o ňom $\sphericalangle OMB = \sphericalangle BMA$. Pritom bod B leží medzi bodmi O, A, lebo podľa predpokladu úlohy je $a > b$ a teda $OA > OB$.

Veďme bodom B kolmicu p k priamke AM a označme P jej pätu. Dokážeme, že bod P padne dovnútra úsečky AM. To dokážeme, ak dokážeme, že uhly $\sphericalangle OAM$, $\sphericalangle BMA$ sú ostré, lebo potom bod P podľa pomocnej vety V padne dovnútra každej z polpriamok AM, MA alebo dovnútra úsečky AM. Uhol $\sphericalangle OAM$ je ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku AMO, lebo $\sphericalangle O = 90°$. Uhol $\sphericalangle BMA$ je časťou uhla $\sphericalangle OMA$,

*) V obr. 52 doplňte písmeno M poblíž bodu Y.

ktorý je ostrým uhlom trojuholníka AMO; preto je tiež ostrý. Tým je tvrdenie dokázané.

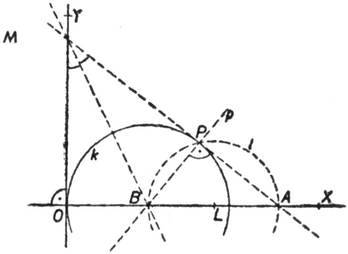
Trojuholníky BMO, BMP majú spoločnú preponu BM, zhodujú sa v pravých uhloch pri vrcholoch O, P a ďalej sa zhodujú podľa požiadaviek úlohy v uhloch pri vrchole M; zhodujú sa teda vo všetkých troch uhloch a sú zhodné podľa vety (usu), t. j. platí

$$\triangle BMO \cong \triangle BMP \text{ (usu)}.$$

Preto je

$$MO = MP, \tag{1}$$
$$BO = BP. \tag{2}$$

Zostrojme kružnicu $k \equiv (B, BO)$; tá vzhľadom na vzťah (2) prechádza bodmi O, P a pretože je $OM \perp OB$, $PM \perp PB$, sú OM, PM dotyčnicami kružnice k. Pritom dotyčnica MP prechádza bodom A. Z toho vyplýva konštrukcia.



Obr. 52.

Konštrukcia (obr. 52). Opíšme kružnicu $k \equiv (B, BO)$ a určme dotykový bod P dotyčnice vedenej z bodu A k tejto kružnici, a to ten, ktorý padne dovnútra polroviny OXY.

Konštrukciu urobíme takto: Nad úsečkou AB ako priemerom opíšeme Thaletovu kružnicu $l \equiv (L, \frac{1}{2} AB)$ a označme P ten z priesečníkov kružníc k, l, ktorý leží vnútri polroviny OXY. Potom je spoločný bod polpriamok AP, OY hľadaným bodom M.

Dôkaz. Bod M leží vnútri polpriamky OY. Musíme dokázať, že platí $\sphericalangle OMB = \sphericalangle BMA$.

Uvažujme o súmernosti s osou BM. V nej prejde priamka OM, ktorá je dotyčnicou kružnice k vedenou bodom M, v druhú dotyčnicu vedenú z toho istého bodu M ku kružnici k. Touto druhou dotyčnicou je podľa konštrukcie priamka MP alebo priamka AP. Súmernosť je však zhodnosť a pretože si v nej prislúchajú uhly $\sphericalangle OMB$, $\sphericalangle PMB$, sú tieto uhly zhodné. Tým sme dôkaz ukončili.

Diskusia. Kružnica k vždy existuje. Dotyčnica AP vedená z bodu A ku kružnici k existuje len vtedy, ak platí $OA \geqq 2 \,.\, OB$ (ak A neleží vnútri kružnice k). Avšak v prípade, že je $OA = 2.OB$, t. j. keď A leží na kružnici k, je dotyčnica v bode A kolmá k priamke OX a teda rovnobežná s priamkou OY, takže priesečník M neexistuje.

Avšak ak platí $OA > 2.OB$, možno priamku AP zostrojiť, pričom je $\sphericalangle BAP$ uhlom v trojuholníku BAP, kde $\sphericalangle P = 90°$; preto je $\sphericalangle BAP < 90°$. Podľa Euklidovho postulátu majú polpriamky OY, AP spoločný bod M vnútri polroviny OAY, lebo o príľahlých uhloch platí

$$\sphericalangle YOA = 90°, \quad \sphericalangle BAP < 90°,$$

takže súčet uhlov je menší než 180°.

Záver. Úloha má jediné riešenie, ak platí $OA > 2.OB$, t. j. ak platí $a > 2b$. Ak platí $a \leqq 2b$, nemá úloha riešenie.

12. Daný je rovnobežník $ABCD$ so stredom S. Označme K, L, M, N (v tomto poradí) stredy strán AB, BC, CD, DA. Ďalej označme X, Y, Z, U (v tomto poradí) priesečníky dvojíc priamok (AL, DK), (BM, AL), (CN, BM), (DK, CN).

Dokážte:

a) Štvoruholník $XYZU$ je rovnobežník so stredom S.

a) Platí

$$XY = \tfrac{2}{5}\, AL, \quad YZ = \tfrac{2}{5}\, MB\,.$$

c) Obsah rovnobežníka $XYZU$ sa rovná pätine obsahu rovnobežníka $ABCD$.

Riešenie (obr. 53). a) Uvažujme o súmernosti podľa stredu S. V nej si odpovedajú tieto dvojice bodov: (A, C), (B, D), (K, M), (N, L). Pre posledné dve dvojice to vyplýva z vlastností stredných priečok KM, LN rovnobežníka $ABCD$ (pozri učebnicu Geometria pre 8. post. roč., str. 171).

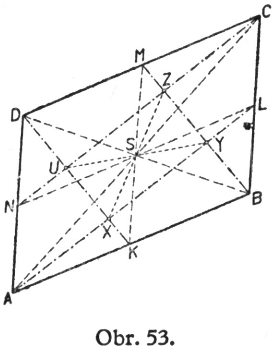
O uhlopriečkach štvoruholníka $ALCN$ platí

$$AS = CS, \; NS = LS$$

a pretože priamky AC, NL sú rôznobežky, je $ALCN$ rovnobežník, takže je

$$AL \parallel NC \tag{1}$$

a tieto priamky si odpovedajú v súmernosti podľa stredu S.



Obr. 53.

Rovnako sa dokáže, že $BMDK$ je rovnobežník, takže je

$$BM \parallel KD \tag{2}$$

a tieto priamky si odpovedajú v súmernosti podľa stredu S. V tejto súmernosti teda priamkam AL, DK odpovedajú (v tomto poradí) priamky CN, BM; preto bodu $X \equiv AL \,.\, KD$ odpovedá súmerne združený bod $Z \equiv CN \,.\, BM$. Preto úsečka XZ má bod S za stred. Rovnako sa dokáže, že úsečka YU má bod S za stred. V štvorouholníku $XYZU$ sa teda uhlopriečky navzájom rozpolťujú a je to rovnobežník so stredom S. Tým je úloha a) rozriešená.

b) Dokážeme platnosť vzťahu

$$XY = \tfrac{2}{5}\, AL\,; \tag{3}$$

vzťah $YZ = \frac{2}{5}\, BM$ sa dokáže podobne.

V trojuholníku ABY je K stredom strany AB; podľa vzťahu (2) je KX strednou priečkou trojuholníka a preto platí

$$XY = AX. \tag{4}$$

Zo súmernosti podľa stredu S vyplýva

$$AX = ZC. \tag{5}$$

Zo vzťahov (4), (5) vyplýva

$$XY = ZC. \tag{6}$$

V trojuholníku BCZ je L stredom strany BC a podľa (1) je LY (leží v priamke AL) strednou priečkou príslušnou k strane ZC, takže platí $YL = \frac{1}{2}\, ZC$; vzhľadom na vzťah (6) je teda

$$YL = \tfrac{1}{2}\, XY\,. \tag{7}$$

O úsečke AL platí

$$AL = AX + XY + YL.$$

Dosaďme sem za AX, YL zo vzťahov (4), (7); dostaneme

$$AL = \tfrac{5}{2}\, XY$$

alebo

$$XY = \tfrac{2}{5}\, AL\,, \tag{8}$$

čo je vzťah (3), ktorého platnosť sme mali dokázať.

c) Rovnobežník $ALCN$ má stranu AN a príslušnú výšku v zhodnú s výškou rovnobežníka $ABCD$, ktorá prislúcha k strane AD. Pretože je $AN = \frac{1}{2}\, AD$, je jeho obsah $AN \,.\, v$ alebo $\frac{1}{2} AD \,.\, v$, t. j. rovná sa polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$.

Rovnobežník $XYZU$ má stranu XY a príslušná výška w je zhodná s výškou rovnobežníka $ALCN$, ktorá prislúcha k strane AL. Preto podľa (8) je obsah rovnobežníka $XYZU$

$$XY \cdot w \text{ alebo } \tfrac{2}{5} AL \cdot w\,,$$

t. j. rovná sa $\frac{2}{5}$ obsahu rovnobežníka $ALCN$; avšak podľa predošlého obsah rovnobežníka $ALCN$ sa rovná polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$. Obsah rovnobežníka $XYZU$ sa teda rovná $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$ alebo $\frac{1}{5}$ obsahu rovnobežníka $ABCD$, čo sme mali dokázať.

Tým sme úlohu rozriešili.

7. Úlohy II. kola kategórie C.

1. Riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 + 2x - 7} = 5 - 2x.$$

Riešenie. Ak existuje riešenie, je

$$x^2 + 2x - 7 = (5 - 2x)^2,$$

čiže

$$x^2 + 2x - 7 = 25 - 20x + 4x^2,$$

$$3x^2 - 22x + 32 = 0. \tag{1}$$

Rovnica (1) má korene $r = \dfrac{16}{3}$, $s = 2$. Prvý z nich nevyhovuje danej rovnici, lebo $5 - 2r = -\frac{17}{3} < 0$. Koreň s vyhovuje, lebo $5 - 2s = 1$ a $\sqrt{s^2 + 2s - 7} = 1$.

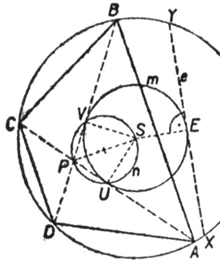
2. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a kladná čísla e, v. Dále buď dán bod P, o němž platí $SP = v$.

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ o základně AB, jehož vrcholy leží na kružnici k a jehož úhlopříčky se protínají v bodě P, při čemž je $AC = BD = e$.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům e, v, r.

Řešení. Předpokládejme, že je hledaný lichoběžník $ABCD$ sestrojen (obr. 54), a že bod P je průsečík uhlopříček AC, BD tohoto lichoběžníka. Je tedy bod P nutně uvnitř kružnice k.

Úhlopříčka $AC = e$ lichoběžníka $ABCD$ má střed U; protože je $AC = e$ tětivou kružnice k, leží bod U na kružnici m opsané kolem bodu S, kterážto kružnice je množinou středů všech tětiv dané velikosti e v kružnici k. Totéž platí o druhé úhlopříčce $BD = e$ a jejím středu V. Obě přímky PA, PB jsou tedy tečnami kružnice m. Odtud konstrukce.



Obr. 54.

V kružnici k sestrojíme libovolnou tětivu $XY = e$ a označíme E patu kolmice vedené bodem S k přímce XY. Potom je $m \equiv (S, SE)$. Nyní z bodu $P \not\equiv S$ daného uvnitř kružnice k sestrojíme tečny ke kružnici m. Nad úsečkou PS jako průměrem sestrojíme Thaletovu kružnici n a označíme $U \not\equiv V$ společné body kružnic m, n. Společné body polopřímek PU, PV s kružnicí k označíme A, B a dále označíme $C \not\equiv A$, $D \not\equiv B$ společné body přímek PU, PV s kružnicí k. Pak je $ABCD$ hledaný lichoběžník se základnami $AB \parallel CD$.

Důkaz. Obě přímky PU, PV jsou navzájem souměrně sdružené podle přímky PS, která je osou souměrnosti kružnice k i kružnice n. Je tedy přímka PS osou úsečky AB i úsečky CD a proto je $AB \perp PS$, $CD \perp PS$ neboli $AB \parallel CD$. Přitom není $AD \parallel BC$, jinak by čtyrúhelník $ABCD$ byl obdélník, takže by bod P splýval s bodem S; avšak podle textu úlohy je $P \not\equiv S$, neboť je $PS = v > 0$. Sestrojený lichoběžník $ABCD$ má tedy osu souměrnosti, takže je rovnoramenný. Tím je důkaz správnosti konstrukce proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy především závisí na tom, zda lze sestrojit tětivu $XY = e$. Proto musí být $e \leqq 2r$. Případ $e = 2r$ vyloučíme, neboť pak by bylo $P \equiv S$ neboli $v = 0$, což je proti předpokladu, že je $v > 0$. Jestliže je $e < 2r$, lze sestrojit kružnici m; avšak dvě různé tečny z bodu P lze k této kružnici vést jedině v případě, že je $PS = v > SE$. Při tom však musí bod P ležet uvnitř kružnice k, t. j. musí platit $PS = v < r$.

Závěr. Jestliže je $e < 2r$ a bod P leží vně kružnice m, ale uvnitř kružnice k (t. j. platí-li $SE < PS = v < r$), má úloha jediné řešení (pokud nepřihlížíme k možné záměně v označení vrcholů). Jinak nemá úloha řešení.

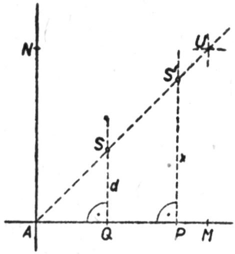
3. V rovine je daný pravý uhol $\sphericalangle MAN$ a vnútri jeho osi AU je daný bod S, ktorého vzdialenosť od priamky AN je dané kladné číslo d.

Zostrojte dve zhodné navzájom sa dotýkajúce kružnice k, k', pričom kružnica k má stred S a kružnica k' sa dotýka oboch ramien AM, AN. (Poznámka. Ľahko usúdite, že stred S' kružnice k' leží vnútri úsečky AS.)

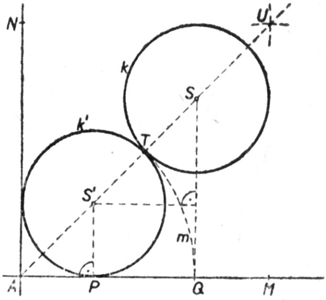
Riešenie. Označme x veľkosť polomerov hľadaných zhodných kružníc k, k'; ich stredy S, S' ležia vnútri polpriamky AU. Bod S' nemôže ležať na predĺžení úsečky AS za bod S, ako ihneď dokážeme (obr. 55).

Dôkaz. Veľkosť strednej $SS' = 2x$. Vzdialenosť bodu S' od priamky AM je x a teda $AS' = x\sqrt{2}$ (lebo trojuholník $AS'P$ je pravouhlý rovnoramenný, pričom je P päta kolmice vedenej bodom S' k priamke AM). Ale $2x > x\sqrt{2}$ alebo

$SS' > AS'$. Ak by bod S' neležal vnútri úsečky AS, musel by vzhľadom na poslednú nerovnosť padnúť na polpriamku opačnú k polpriamke AU, čo odporuje podmienke úlohy. Tým sme dôkaz urobili.



Obr. 55.



Obr. 56.

Bod S' teda leží nevyhnutne vnútri úsečky AS (obr. 56). Označme P, Q päty kolmíc vedených bodmi S', S (v tomto poradí) k priamke AM, pričom je $S'P = x$, $SQ = d$, takže je $AS' = x\sqrt{2}$, $AS = d\sqrt{2}$ a ďalej je $SS' = 2x$; avšak $SS' = AS - AS'$. Z toho dostaneme

$$2x = d\sqrt{2} - x\sqrt{2}.$$

Stade dostaneme postupne

$$x(2 + \sqrt{2}) = d\sqrt{2},$$

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}},$$

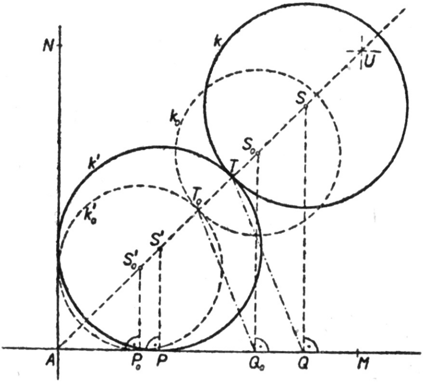
$$x = \frac{d\sqrt{2}\,(2 - \sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2d(\sqrt{2} - 1)}{2} = d\,(\sqrt{2} - 1),$$

t. j.

$$x = d(\sqrt{2} - 1).$$

Teda je $x = d\sqrt{2} - d$. Z toho vyplýva **konštrukcia**:

Pretože je $AS = d\sqrt{2}$, $AQ = SQ = d$, prenesieme úsečku AQ na polpriamku AU do polohy $AT = d$. Potom je $ST = AS - AT = d\sqrt{2} - d = x$. Z toho ľahko zostrojíme obe hľadané kružnice k, k'. Dôkaz aj diskusia vyplýva bezprostredne z predošlého. Úloha má vždy práve jedno riešenie.



Obr. 57.

Poznámka. Úlohu možno riešiť pomocou rovnoľahlosti so stredom A, ktorá priradzuje zvolenému vnútornému bodu S'_0 polpriamky AU bod S' (obr. 57). Zostrojíme kružnicu k'_0 so tredom S'_0, ktorá sa dotýka priamky AM. Ďalej zostrojíme kružnicu k_0, ktorá je zhodná s kružnicou k'_0 a ktorá sa jej dotýka, pričom body A, S'_0, S_0 ležia v práve napísanom poriadku na polpriamke AU. Dvojicou bodov S_0, S je zmienená rovnoľahlosť so stredom A úplne určená. V nej prislúcha kružnici k_0 hľadaná kružnica k.

4. Je dán výraz

$$V = x^3(y - z)^3 + y^3(z - x)^3 + z^3(x - y)^3.$$

Výraz V rozložte v součin jednoduchých činitelů.

Řešení. Platí postupně

$$\begin{aligned}
V &= x^3(y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3) + \\
&+ y^3(z^3 - 3xz^2 + 3x^2z - x^3) + \\
&+ z^3(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = \\
&= x^3y^3 - x^3z^3 + y^3z^3 - x^3z^3 + x^3y^3 - y^3z^3 + \\
&+ 3xyz\,[x^2z + xy^2 + yz^2 - (x^2y + y^2z + xz^2)] = \\
&= 3xyz[x(xz - z^2 - xy + yz) - \\
&- y(xz - z^2 - xy + yz)] =^{*)} \\
&= 3xyz(x - y)(xz - z^2 - xy + yz) = \\
&= 3xyz(x - y)[y(z - x) - z(z - x)] = \\
&= 3xyz\,(x - y)(y - z)(z - x),
\end{aligned}$$

takže

$$V = 3xyz(x - y)(y - z)(z - x).$$

Tím je řešení úlohy provedeno.

*) Jiná možnost úpravy.

$$\begin{aligned}
&x^2z + xy^2 + yz^2 - x^2y - y^2z - xz^2 = \\
&= z(x^2 - y^2) - xy(x - y) - z^2(x - y) = \\
&= (x - y)(zx + zy - xy - z^2) = \\
&= (x - y)[x(z - y) - z(z - y)] = \\
&= (x - y)(z - y)(x - z).
\end{aligned}$$

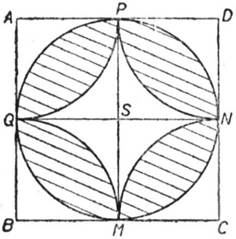
8. Úlohy I. kola kategorie D.

1. Na obrázku 58 vidíte čtverec o straně a a středu S. Dále je tu narýsována kružnice o středu S a poloměru rovném polovině strany čtverce; z každého vrcholu čtverce jsou opsány čtvrtkružnice o poloměru rovném rovněž polovině strany čtverce. Kružnice a čtvrtkružnice omezují útvar, který je v obrázku vyčárkován.

Kolik procent obsahu čtverce zaujímá vyčárkovaný obrazec? Závisí toto číslo na velikosti strany daného čtverce? (Položte $\pi \doteq \frac{22}{7}$.)

Řešení. Strana daného čtverce má velikost a, na př. centimetrů. Obsahy, které budeme počítat, budou pak udány v cm^2. Kružnice v našem obrázku 58 i každá ze čtyř čtvrtkružnic mají poloměry $r = \frac{1}{2} a$ neboli

$$a = 2r.$$



Obr. 58.

Střední příčky velkého čtverce na našem obrázku 58 rozdělují bílou plochu (t. j. nevyčárkovanou) kolem bodu S na čtyři části. Každou z těchto částí dostaneme, když od čtverce (malého) o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r; střed tohoto čtvrtkruhu je v jednom z vrcholů velkého čtverce. Rovněž bílé plošky při vrcholech velkého čtverce vzniknou tak, že od čtverce o straně r oddělíme čtvrtkruh o poloměru r (střed je ve středu velkého čtverce). Dostáváme tak celkem osm bílých ploch, z nichž každá má týž obsah x. Tento obsah x

je roven rozdílu obsahu r^2 malého čtverce a čtvrtkruhu o obsahu $\frac{1}{4}\pi r^2$, tedy

$$x = r^2\,\tfrac{1}{4} - \pi r^2\,.$$

Všech osm bílých plošek má dohromady obsah

$$8x = 8\left(r^2 - \tfrac{1}{4}\pi r^2\right)$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2.$$

Plochu, která je na obr. 58 vyčárkována, dostaneme, když od velkého čtverce oddělíme oněch osm bílých plošek. Označme y obsah vyčárkované plochy. Obsah velkého čtverce je $a^2 = (2r)^2$ neboli $a^2 = 4r^2$. Obsah $y = a^2 - 8x$ neboli

$$y = 4r^2 - (8r^2 - 2\pi r^2),$$

t. j.

$$y = 2\pi r^2 - 4r^2.$$

Označme p počet procent, když y je procentová část a když $4r^2$ (obsah velkého čtverce) je základ. Tu platí

$$p = \frac{y}{4r^2}\,.\,100$$

neboli

$$p = \frac{2\pi r^2 - 4r^2}{4r^2}\,.\,100\,.$$

Odtud úpravami postupně dostáváme

$$p = \left(\frac{2\pi r^2}{4r^2} - \frac{4r^2}{4r^2}\right).\,100$$

neboli po zkrácení

$$p = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).\,100\,. \qquad (1)$$

Protože $\pi \doteq \frac{22}{7}$, je $\frac{\pi}{2} \doteq \frac{11}{7} = 1{,}\overline{571428}$ a tedy $\frac{\pi}{2} -$ $- 1 \doteq 0{,}\overline{571428}$.

Je tedy

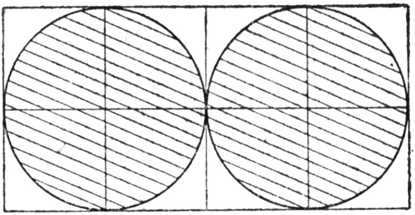
$$p \doteq 0{,}5714 \,.\, 100$$

neboli

$$p \doteq 57{,}14.$$

Obsah čárkované části na obr. 58 je přibližně 57% obsahu čtverce o straně a. Protože číslo p, které jsme ve vztahu (1) vypočítali, nezávisí na velikosti poloměru r a tím ani na velikosti a strany velkého čtverce, dospějeme k témuž výsledku při každém daném kladném čísle a.

P o z n á m k a. Snadno usoudíme, že bílé plošky, o nichž jsme mluvili (viz obr. 58), jsou shodné s bílými ploškami na obr. 59. Proto obsah $8x$ těchto bílých plošek podle obr. 59 dostaneme,



Obr. 59.

když od obsahu $2a^2$ dvou velkých čtverců odečteme obsah $2\pi r^2$ dvou kruhů, z nichž každý má poloměr r. Platí tedy

$$8x = 2 \,.\, (2r)^2 - 2\pi r^2$$

neboli

$$8x = 8r^2 - 2\pi r^2,$$

čímž bychom podstatně zkrátili předchozí výpočet.

Jiné řešení (obr. 58). Strana čtverce $a = 2r$, při čemž r je poloměr vepsané kružnice. Proto obsah čtverce

$$P = (2r)^2 = 4r^2,$$

což představuje 100 %; z toho 1 % je

$$\frac{4r^2}{100} = \frac{r^2}{25}.$$

Obsah kruhu do čtverce vepsaného je $P_1 = \pi r^2$, což představuje x % obsahu čtverce. Vypočteme nyní v procentech jakou částí obsahu čtverce je obsah kruhu P_1. Zjistíme to dělením:

$$\pi r^2 : \frac{r^2}{25} = 25\,\pi.$$

Potom platí, že

$$25\pi \doteq 25 \,.\, \frac{22}{7} = 78\frac{4}{7}.$$

Obsah kruhu se rovná $78\frac{4}{7}$ % obsahu čtverce. Čtyři plošky při vrcholech čtverce se rovnají nevyčárkovanému obrazci uvnitř kruhu, to znamená, že jejich obsah je roven $P - P_1$, což v procentech činí:

$$100 - 78\tfrac{4}{7} = 21\tfrac{3}{7}.$$

Obsah nevyčárkovaného obrazce uvnitř kruhu se rovná $21\frac{3}{7}$ % obsahu čtverce.

Obsah vyčárkovaného obrazce se rovná rozdílu obsahu kruhu a obrazce uvnitř kruhu. V procentech to znamená:

$$78\tfrac{4}{7} - 21\tfrac{3}{7} = 57\tfrac{1}{7}.$$

Vyčárkovaný obrazec zaujímá asi $57\frac{1}{7}$ % obsahu čtverce.

Z výrazu

$$\frac{\pi r^2 \,.\, 25}{r^2} = 25\,\pi$$

je vidět, že počet procent je nezávislý na délce strany čtverce, neboť se rovná 25π (r^2 se totiž zkrátí).

Podle řešení J. Stuchlíkové,
žákyně 8. tř. 2. OSŠ v Turnově.

2. V izbe je dvoje hodín. Jedny sa predbiehajú o jednu minútu za tri hodiny a druhé sa opozďujú o jednu minútu za šesť hodín. Oboje hodín sme nariadili v sobotu presne na poludnie.

Kedy sa po prvý raz budú tieto hodiny rozchádzať práve o 20 minút 45 sekúnd? (Udajte, o koľkej hodine a ktorý deň to nastane a koľko budú ukazovať prvé aj druhé hodiny.)

Riešenie. Prvé hodiny sa za 1 deň zrýchlia o 8 minút (lebo $1 \,.\, \frac{24}{3} = 8$); druhé hodiny sa opozďujú za 1 deň o 4 minúty (lebo $1 \,.\, \frac{24}{6} = 4$). Po 24 hodinách sa oboje hodiny, pôvodne rovnako nariadené, rozchádzajú o 12 minút; preto sa za každú hodinu rozdiel časových údajov na obojich hodinách zväčší o $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ minúty.

Časový rozdiel 20 minút 45 sekúnd alebo $20\frac{3}{4}$ minúty nastane za toľko hodín, koľko je

$$20\,\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\,.$$

Platí

$$20\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{83}{4} \cdot 2 = \frac{83}{2} = 41\frac{1}{2}.$$

Hodiny sa teda budú rozchádzať o 20 minút 45 sekúnd o $41\frac{1}{2}$ hodiny. Ale $41\frac{1}{2}$ hodiny je 1 deň a $17\frac{1}{2}$ hodiny. Preto zmienený rozdiel časových údajov nastane $17\frac{1}{2}$ hodiny po 12. hodine v nedeľu, t. j. v pondelok o 5. hodine, 30 minúte. Hodiny sa teda rozchádzajú o 20 minút 45 sekúnd v pondelok o 5. hodine, 30 minúte ráno.

Skúška. Prvé hodiny sa predchádzajú o 8 minút za deň, t. j. predchádzajú sa o $\frac{1}{3}$ minúty za hodinu. Za $41\frac{1}{2}$ hodiny sa teda predídu o toľko minút, koľko je

$$\frac{1}{3} \cdot 41\frac{1}{2} = \frac{83}{6} = 13\frac{5}{6},$$

teda o 13 minút 50 sekúnd. Prvé hodiny budú teda ukazovať 5 hod. 43 min. 50 sek.

Druhé hodiny sa spozďujú o 4 minúty za deň, t. j. o $\frac{1}{6}$ minúty za hodinu. Za $41\frac{1}{2}$ hodiny sa teda spozdia o toľko minút, koľko je

$$\frac{1}{6} \cdot 41\frac{1}{2} = \frac{83}{12} = 6\frac{11}{12},$$

teda o 6 minút 55 sekúnd. Druhé hodiny budú teda ukazovať 5 hod. 23 min. 5 sek.

Jiné řešení. První hodiny se předcházejí za 3 hodiny o 1 min., t. j. za 6 hodin o 2 min.

Druhé hodiny za 6 hod. se zpožďují o 1 minutu.

Oboje hodiny se za 6 hodin budou rozcházet o 3 minuty.

O $20\frac{3}{4}$ min. se budou rozcházet za tolikrát 6 hodin, kolikrát je $20\frac{3}{4}$ větší než 3; platí

$$20\frac{3}{4} : 3 = \frac{83}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{83}{12}, \frac{83}{12} \cdot 6 = 41\frac{1}{2}.$$

První hodiny si za tuto dobu nadejdou $\frac{83}{12} \cdot 2 = 13\frac{5}{6}$, t. j. 13 min. 50 vt. Druhé hodiny se za tuto dobu zpozdí o $\frac{83}{12} \cdot 1 = 6\frac{11}{12}$, t. j. 6 min. 55 vt.

Hodiny se budou rozcházet o $20\frac{3}{4}$ min. v pondělí v 5 hod. 30 min. První hodiny budou ukazovat 5 hod. 43 min. 50 vt. Druhé hodiny budou ukazovat 5 hod. 23 min. 5 vt.

Podle řešení s. J. Stuchlíkové,
žákyně 8. tř. 2. OSŠ v Turnově.

3. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c (viz obr. 60). Od kvádru oddělíme tělesa rovinnými řezy tak, že zbude těleso, které je na obrázku vyznačeno silnými čarami. Jeho vrcholy leží ve středech hran přední a zadní stěny daného kvádru.

a) Narýsujte obrázek, z něhož je vidět, že se odříznuté části dají složit v jiný kvádr.

b) Vypočtěte objem tělesa, které zbylo po odříznutí.

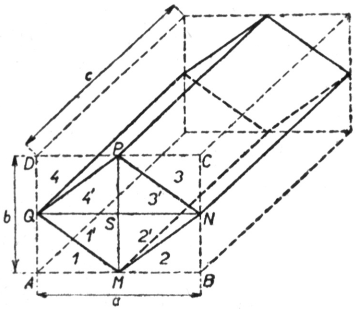
Řešení. a) Viz obr. 61. [Poznámka. Označme středy hran stěny $ABCD$ daného kvádru stejně jako na obr. 60. Střední příčky MP, NQ tohoto obdélníka a dále úsečky MN, NP, PQ, QM dělí obdélník $ABCD$ na osm shodných pravoúhlých trojúhelníků; ty jsou na obr. 60 očíslovány 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′. Trojúhelníky se totiž shodují v odvěsnách, tedy podle věty sus. Proto můžeme trojúhelník 3 přemístit do polohy 1′, trojúhelník 4 do polohy 2′. S trojúhelníky 3, 4, přemístíme zároveň i odříznuté části kvádru, které k nim příslušejí.]

b) Podle výsledku úlohy a) dostaneme z odřezaných částí kvádr, jehož přední stěnou je obdélník $ABNQ$ (obr. 61); rozměry tohoto kvádru jsou a, $\frac{1}{2}b$, c a jeho objem V' je

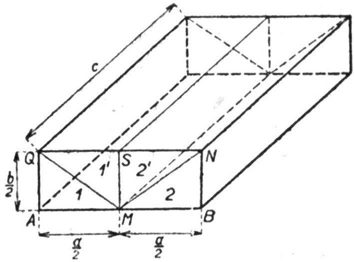
$$V' = a \cdot \frac{b}{2} \cdot c$$

neboli

$$V' = \tfrac{1}{2} \cdot abc.$$



Obr. 60.



Obr. 61.

Protože objem daného kvádru je abc, rovná se objem odřezaných částí polovině objemu daného kvádru. Z toho plyne, že zbytek tělesa má objem rovný polovině objemu daného kvádru neboli $\frac{1}{2} \cdot abc$. Tím je úloha rozřešena.

4. Každé prirodzené číslo a jeho piata mocnina majú na mieste jednotiek tú istú cifru. Dokážte to. (Uvedomte si, že napr. súčiny 87 . 56 a 7 . 6 majú na mieste jednotiek tie isté cifry.)

Riešenie. Každé prirodzené číslo sa končí niektorou z cifier 0, 1, 2, . . . , 9. Ďalej vieme, že súčin dvoch prirodzených čísel m, n sa končí tou istou cifrou, ktorou sa končí súčin jednotiek čísel m, n; napr. súčin 87 . 56 sa končí cifrou 2, teda tou istou cifrou ako súčin 7 . 6.

Majme prirodzené číslo p, ktoré sa končí cifrou c. Piatu mocninu čísla p dostaneme, keď budeme postupne číslo p násobiť tým istým číslom podľa tohto vzoru:

$$p \cdot p = p^2, \; p^2 \cdot p = p^3, \; p^3 \cdot p = p^4, \; p^4 \cdot p = p^5.$$

Súčiny na ľavej strane týchto rovností sa končia po rade tou istou cifrou ako súčiny

$$c \cdot c, \; c^2 \cdot c, \; c^3 \cdot c, \; c^4 \cdot c,$$

takže číslo p^5 sa končí tou istou cifrou ako c^5. To znamená, že číslo p^5 sa končí tou istou cifrou, ako piata mocnina jednotiek čísla p. Aby sme tvrdenie danej úlohy dokázali, stačí dokázať, že čísla $0^5, 1^5, \dots, 9^5$ sa končia po rade ciframi 0, 1, . . . , 9. Ak urobíme výpočet uvedených piatych mocnín, dostaneme: $0^5 = \mathbf{0}$; $1^5 = \mathbf{1}$; $2^5 = 3\mathbf{2}$; $3^5 = 24\mathbf{3}$; $4^5 = 1\,02\mathbf{4}$; $5^5 = 3\,12\mathbf{5}$; $6^5 = 7\,77\mathbf{6}$; $7^5 = 16\,80\mathbf{7}$; $8^5 = 32\,76\mathbf{8}$; $9^5 = 59\,04\mathbf{9}$.

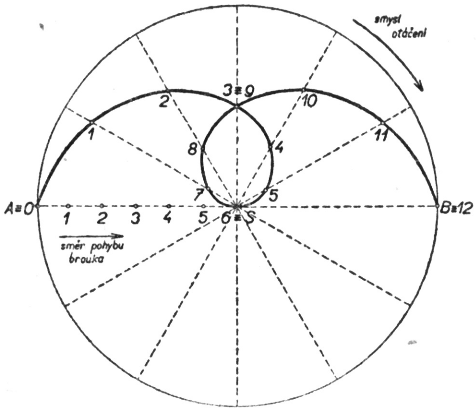
Tým sme dôkaz urobili.

Poznámka. Predošlý výpočet piatych mocnín sme si mohli ušetriť; ukážeme si to na výpočte pre číslo 7:

$7^2 = 7 . 7$ sa končí cifrou **9**; $7^3 = 7 . 7 . 7$ sa končí ako súčin **9** . 7, teda cifrou **3**; $7^4 = 7^3 . 7$ sa končí ako súčin **3** . 7, teda cifrou **1**; $7^5 = 7^4 . 7$ sa končí ako súčin **1** . 7, teda cifrou **7**, čo sme mali dokázať.

5. V bodě A na okraji gramofonové desky sedí brouk. Označme S střed desky a AB její průměr. Brouk začne lézt z bodu A po úsečce AB do bodu B; v okamžiku, kdy se dá brouk do pohybu, počne se deska otáčet. Když se deska jednou otočí, dorazí brouk právě do bodu B.

Narýsujte cestu brouka po desce, jak se jeví pozorovateli při pohledu shora. Při tom předpokládáme, že pohyb brouka i otáčení desky se děje rovnoměrně. Průměr AB volte 18 cm. Pro narýsování cesty brouka sestrojte přesně body, v nichž je brouk v jednotlivých dvanáctinách jedné otočky desky.



Obr. 62.

Řešení je pro vyznačený smysl otáčení provedeno v obr. 62.

6. O čísle x platí

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}.$$

Aniž počítáte číslo x, vypočtěte hodnoty výrazů:

$$\text{a)}\ x^2 + \frac{1}{x^2}; \qquad \text{b)}\ x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

$\left(\text{Vypočtěte nejprve druhou a třetí mocninu dvojčlenu } x + \frac{1}{x}.\right)$

Řešení. Platí postupně

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \tag{1}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 . \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) . \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^3 + \frac{1}{x} + 2x + x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} =$$

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

neboli

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right). \tag{2}$$

a) Ze vztahu (1) plyne

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Dosaďme sem $x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}$; dostaneme postupně

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{13}{6}\right)^2 - 2 = \frac{169}{36} - 2 = \frac{169 - 72}{36} = \frac{97}{36},$$

t. j.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{97}{36},$$

což jsme měli vypočítat.

b) Ze vztahu (2) plyne

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Dosaďme sem

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6};$$

dostaneme postupně

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(-\frac{13}{6}\right)^3 - 3 . \left(-\frac{13}{6}\right) = -\frac{13^3}{6^3} + \frac{3 . 13}{6} =$$

$$= \frac{-13^3 + 3 . 6^2 . 13}{6^3} = \frac{13 . (-13^2 + 3 . 6^2)}{6^3} =$$

$$= \frac{13 . (-169 + 108)}{216} = \frac{13 . (-61)}{216} = -\frac{793}{216}.$$

Je tedy

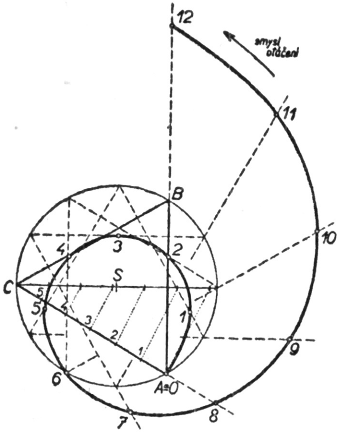
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = -\frac{793}{216},$$

což jsme měli vypočítat.

7. Do dané kružnice $k \equiv (S, r = 4 \text{ cm})$ vepište rovnostranný trojúhelník ABC. Trojúhelník ABC se i s kružnicí k a polopřímkou AB otáčí rovnoměrně kolem bodu S. Na polopřímce AB se zároveň pohybuje rovnoměrně bod X tak, že jeho počáteční poloha je bod A, při čemž za dobu jedné otočky (t. j. otočení o 360°) trojúhelníka urazí dráhu o velikosti $2 . AB$.

a) Narýsujte polohu bodu X v jednotlivých dvanáctinách první otočky.

b) Nakreslete co nejpřesněji čáru, kterou bod X při svém pohybu během první otočky opíše.



Obr. 63.

Řešení je znázorněno na obr. 63. Případ opačného smyslu otáčení neuvádíme.

8. a) Určete největší celistvý násobek čísla 0,7168, který je menší než číslo 1000.

b) Určete nejmenší celistvý násobek čísla 0,7168, který je větší než číslo 1000.

Řešení. Když dělením určíme podíl 1000 : 0,7168 neboli

$$\frac{1000}{0{,}7168}$$

s přesností na jednotky, dostaneme přirozené číslo x; potom součin 0,7168 . x je menší než 1000. Při tomto dělení dostaneme zbytek z, který je menší než dělitel 0,7168. Naproti tomu součin 0,7168 . $(x + 1)$ již bude větší než číslo 1000. Proveďme nyní potřebné výpočty.

Platí

$$\frac{1000}{0{,}7168} = \frac{10\,000\,000}{7168}\,; \tag{1}$$

dostáváme

$$\begin{array}{l} 10\,000\,000 : 7168 \;|\underline{1395} \\ \;\; 2\,832\,0 \\ \;\;\;\;\; 681\,60 \\ \;\;\;\;\;\;\; 36\,480 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 640 \end{array}$$

Protože jsme ve vztahu (1) zlomek rozšířili číslem 10 000, je zbytek z při dělení 1000 : 0,7168 roven $640 \cdot \dfrac{1}{10\,000}$.

Je tedy

$$\frac{1000}{0{,}7168} > 1395\,;$$

zbytek dělení $z = 0{,}0640$ je menší než dělitel 0,7168.

Jestliže jsme správně počítali, pak musí platit zkouška dělení

$$0{,}7168 \cdot 1395 + 0{,}0640 = 1000.$$

Proveďme nyní výkony naznačené v předchozím zápisu:

$$\begin{array}{r} 0{,}7168 \,.\, 1395 \\ \hline 7168 \\ 21504 \\ 64512 \\ 35840 \\ \hline 999{,}9360 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 999{,}9360 \\ 0{,}0640 \\ \hline 1000{,}0000 \end{array}$$

Je tedy výpočet čísla $x = 1395$ proveden správně.

Utvořme nyní součin

$$0{,}7168 \,.\, 1396;$$

ten je již větší než číslo 1000, neboť platí:

$$0{,}7168 \,.\, 1395 = 0{,}7168 \,.\, (1395 + 1) = 0{,}7168 \,.\, 1395 + \\ + 0{,}7168 = 999{,}9360 + 0{,}7168 = 1000{,}6528.$$

Dostali jsme skutečně číslo větší než 1000.

a) Je tedy $0{,}7168 \,.\, 1395 = 999{,}9360$ největším celistvým násobkem čísla 0,7168, který je menší než 1000.

b) Protože je $0{,}7168 \,.\, 1396$ prvním celistvým násobkem čísla 0,7168, který je větší než násobek $0{,}7168 \,.\, 1395$ (při čemž je číslo $0{,}7168 \,.\, 1396 = 1000{,}6528$ větší než 1000), proto je $0{,}7168 \,.\, 1395 = 1000{,}6528$ nejmenším celistvým násobkem čísla 0,7168, který je větší než 1000.

Odpověď. Číslo $0{,}7168 \,.\, 1395 = 999{,}9360$ je největším celistvým násobkem čísla 0,7168, který je menší než 1000; $0{,}7168 \,.\, 1396 = 1000{,}6528$ je nejmenším celistvým násobkem čísla 0,7168, který je větší než 1000.

9. Daný je výpuklý päťuholník *ABCDE*.

a) Dokážte, že žiadne tri jeho uhlopriečky nemôžu prechádzať tým istým bodom.

b) Narysujte tento päťuholník a jeho uhlopriečky. Potom ho vystrihnite a rozstrihajte pozdĺž jeho uhlopriečok.

Napíšte, koľko častí vzniklo a aké sú to útvary.

Riešenie. a) Každá uhlopriečka päťuholníka je úsečka, ktorá má za svoje krajné body vždy dva vrcholy päťuholníka. Keby tri uhlopriečky päťuholníka prechádzali tým istým bodom X, nebol by to predovšetkým vrchol päťuholníka; tým idú len dve jeho uhlopriečky. Avšak bod X nemôže ležať ani vnútri uhlopriečok päťuholníka. Takým bodom X by totiž prechádzali tri priamky (na ktorých ležia naše uhlopriečky), z ktorých každé dve by boli navzájom rôzne. Na každej z nich by ležali dva vrcholy mnohouholníka, čím by sme dostali celkom 6 bodov. To však nie je možné, lebo päťuholník má len 5 vrcholov.

Preto žiadne tri uhlopriečky päťuholníka neprechádzajú tým istým bodom.

b) Rozstrihaním päťuholníka vzniklo 10 trojuholníkov a jeden päťuholník.

10. Je dán výraz

$$\frac{630}{2n-1},$$

kde n je přirozené číslo. Dosazujeme-li za n přirozená čísla 1, 2, 3, 4 atd., dostaneme řadu zlomků.

Vypočtěte všechny z těchto zlomků, které jsou rovny přirozeným číslům, a udejte, pro která čísla n tyto zlomky obdržíme z daného výrazu.

Řešení. Jestliže daný zlomek

$$\frac{630}{2n-1},$$

kde n je přirozené číslo, má být přirozené číslo, potom se musí dát zkrátit číslem $2n - 1$; to znamená, že číslo 630 musí být dělitelné číslem $2n - 1$.

Při tom je známo, že číslo $2n - 1$, kde n je přirozené číslo, je číslem lichým. Máme tedy vlastně najít ta přirozená lichá čísla, která jsou děliteli čísla 630. Abychom tyto dělitele našli, rozložíme číslo 630 v prvočinitele.

Pak platí postupně

$630 = 63 \,.\, 10 = (9 \,.\, 7) \,.\, (2 \,.\, 5) = (3 \,.\, 3 \,.\, 7) \,.\, (2 \,.\, 5) =$
$= 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7,$

t. j.

$$630 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7.$$

Je známo, že když postupně vybereme z prvočinitelů 2, 3, 5, 7 jednoho nebo několik a znásobíme je, dostaneme všechny dělitele čísla 630 (s výjimkou dělitele 1). Chceme-li však dostat všechny liché dělitele čísla 630, musíme z prvočinitelů tohoto čísla vynechat číslo 2. Budeme tedy jen vybírat z těchto prvočinitelů:

$$3, 3, 5, 7.$$

Vybírejme nyní postupně a) jednoho z nich, b) po dvou, c) po třech, d) po čtyřech; tak dostaneme všechna hledaná čísla $2n - 1$ (v závorce uvedeme hned, pro které přirozené číslo n se číslo $2n - 1$ rovná hledanému děliteli):

a) 3 (pro $n = 2$); 5 (pro $n = 3$); 7 (pro $n = 4$); to jsou 3 čísla.

b) $3 \,.\, 3 = 9$ (pro $n = 5$); $3 \,.\, 5 = 15$ (pro $n = 8$); $3 \,.\, 7 = 21$ (pro $n = 11$); $5 \,.\, 7 = 35$ (pro $n = 18$); to jsou čtyři čísla.

c) $3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 45$ (pro $n = 23$); $3 \,.\, 3 \,.\, 7 = 63$ (pro $n = 32$); $3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 105$ (pro $n = 53$); to jsou 3 čísla.

d) $3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 315$ (pro $n = 158$); to je jedno číslo. K těmto dělitelům musíme přibrat dělitele 1 (pro $n = 1$), takže máme celkem $3 + 4 + 3 + 1 + 1 = 12$ lichých dělitelů čísla 630. Více jich jistě není.

Jsou to skutečně dělitelé, jak je patrno z dalšího:

a) $\frac{630}{3} = 210; \quad \frac{630}{5} = 126; \quad \frac{630}{7} = 90;$

b) $\frac{630}{9} = 70; \quad \frac{630}{15} = 42; \quad \frac{630}{35} = 18;$

c) $\frac{630}{45} = 14; \quad \frac{630}{63} = 10; \quad \frac{630}{105} = 6;$

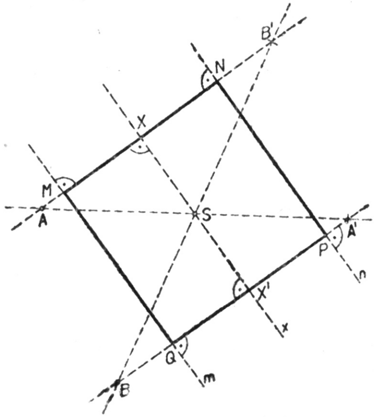
d) $\frac{630}{315} = 2;$

e) $\frac{630}{1} = 630.$

11. Dané sú tri body A, B, S, ktoré neležia v tej istej priamke. Zostrojte taký štvorec $MNPQ$ so stredom S, že priamka MN prechádza bodom A a priamka PQ bodom B.
Dokážte, že úloha má vždy práve jedno riešenie.

Riešenie (obr. 64). Rozbor. Predpokladajme, že daná úloha má riešenie, t. j. že sa nám podarilo zostrojiť štvorec $MNPQ$, ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy. Tento štvorec má podľa týchto požiadaviek bod S za stred súmernosti. V súmernosti podľa stredu S si prislúchajú protiľahlé vrcholy a protiľahlé strany štvorca $MNPQ$. Preto sú priamky MN, PQ súmerne združené podľa stredu S. V tejto súmernosti si prislúchajú aj body X, X' strednej priečky XX', kde X je stred úsečky MN a X' stred úsečky PQ; pritom je $XX' \perp MN$. Bod A' súmerne združený s bodom A priamky MN podľa stredu S musí preto ležať na priamke PQ. Bod B' súmerne združený s bodom B priamky PQ musí preto ležať na priamke MN. Priamky MN, AB' teda splývajú; rovnako splývajú priamky PQ, BA'. Na základe tohto výsledku urobíme konštrukciu.

Konštrukcia. Zostrojme body A' B' súmerne združené (v tomto poradí) s bodmi A, B podľa stredu S; tu platí $SA' = SA$, $SB' = SB$. V priamkach AB', BA' ležia (v tomto poradí) strany MN, PQ hľadaného štvorca $MNPQ$. Zostrojme ďalej bodom S kolmicu x k priamke AB', takže je $x \perp AB'$ (platí



Obr. 64.

aj $x \perp BA'$). Označme X, X' priesečníky priamky x s priamkami AB', BA'. Úsečka XX' je strednou priečkou hľadaného štvorca a platí $SX = SX'$. Na obe opačné polpriamky, na ktoré rozdeľuje bod X priamku AB', nanesme úsečku zhodnú s SX; dostaneme body $M \neq N$. V bodoch M, N zostrojme po rade kolmice m, n k priamke AB'; označme P, Q (v tomto poradí) priesečníky priamky BA' s priamkami n, m. Potom je $MNPQ$ hľadaný štvorec.

Dôkaz správnosti urobenej konštrukcie. Pretože priamky m, x, n sú kolmé k priamke AB', sú navzájom rovnobežné (pozri Geometriu pre 7. roč., str. 276 dolu). Preto platí $MQ \parallel NP$; zo súmernosti priamok AB', BA' podľa stredu S vyplýva, že je aj $MN \parallel PQ$. Preto je $MNPQ$ rovnobežník (pozri

Geometriu pre 8 roč., str. 165, veta 4). Tento rovnobežník má podľa konštrukcie pri vrchole M pravý uhol, preto je to obdĺžnik (pozri Geometriu pre 8. roč., veta na str. 174). Ale podľa konštrukcie je $MN = 2 . SX = XX'$; pretože je aj $MXX'Q$ rovnobežník (má protiľahlé strany rovnobežné), platí $XX' = MQ$. Teda je $MN = MQ$; preto je obdĺžnik $MNPQ$ štvorcom (má dve súsedné strany zhodné).

Diskusia riešiteľnosti. Priamky AB', BA' sú rovnobežné a rôzne. Rovnobežnosť vyplýva zo súmernosti podľa bodu S, ich rôznosť vyplýva z toho, že body A, B, S neležia v tej istej priamke. Vzdialenosť priamok AB', BA' je jediná a udáva veľkosť strany hľadaného štvorca. Z toho vyplýva, že úloha má vždy práve jedno riešenie.

12. Určete největší přirozené číslo, které má tyto tři vlastnosti:

(1) je dvojciferné,

(2) číslo napsané týmiž ciframi, ale v obráceném pořádku, je také dvojciferné,

(3) součet obou předchozích čísel, t. j. hledaného čísla a čísla s týmiž ciframi, ale v obráceném pořádku, je rovněž číslo dvojciferné.

Řešení. Nechť $x \neq 0$, $y \neq 0$ značí cifry, pomocí nichž lze hledané číslo zapsat v desítkové soustavě: x je cifra na místě desítek, y je cifra na místě jednotek. Hledané číslo je pak

$$10x + y.$$

Číslo, které z něho dostaneme záměnou cifer, je

$$10y + x.$$

Součet obou těchto čísel je

$$(10x + y) + (10y + x)$$

neboli $11x + 11y$ a tedy

$$11(x + y).$$

Toto číslo má být podle požadavku úlohy menší než 100, ale přitom co možná největší. Protože se rovná součinu čísla 11 a čísla $x + y$, je dělitelné jedenácti. Proto číslo $11(x + y)$ musí být rovno jednomu z čísel

$$99, 88, 77, \dots 11.$$

Dokážeme, že je to číslo 99: Ze vztahu

$$11(x + y) = 99$$

plyne

$$x + y = 9.$$

Tato rovnice má jediné řešení, které vyhovuje požadavkům úlohy, a to

$$x = 8, \ y = 1.$$

Platí totiž $81 + 18 = 99$.

Pro přirozená čísla x menší než 8 bychom zřejmě dostali menší dvojciferná čísla než 81. Hledané číslo je 81.

9. Úlohy II. kola kategorie D.

1. Kolik násobků čísla 786 je mezi čísly 1 000 000 a 10 000 000? Dále vypočtěte nejmenší a největší z těchto násobků.

Řešení. Násobek čísla 786, nejblíže větší než je 1 000 000, určíme takto: Zjistíme částečný podíl a zbytek při dělení 1 000 000 : 786. Součin tohoto částečného podílu a čísla 786 je největší z násobků čísla 786, která jsou menší než 1 000 000. K tomuto násobku přičteme 786; tak dostaneme násobek čísla 786, který je nejmenším z těch násobků čísla 786, která jsou větší než 1 000 000.

Podobným způsobem určíme i největší z násobků čísla 786, které jsou menší než 10 000 000.

Počet násobků čísla 786 větších než 1 000 000 a menších než 10 000 000, určíme jako rozdíl počtu násobků menších než 10 000 000 a počtu násobků menších než 1 000 000.

Výpočty:

10 000 000 : 786	12 722	1 000 000 : 786	1272
2 140		2140	
5680		5680	
1780		1780	
2080		208	
508			

12 722	1 272	999 792	12 722
× 786	× 786	786	−1 272
76 332	7 632	1 000 578	11 450
1 017 76	101 76		
8 905 4	890 4		
9 999 492	999 792		

Nejmenší z násobků čísla 786, které jsou větší než 1 000 000, je 1 000 578; největší z těchto násobků, které jsou menší než 10 000 000, je 9 999 492. Počet násobků čísla 786, které jsou větší než 1 000 000, ale menší než 10 000 000, je 11 450. Tím je úloha rozřešena.

Podle řešení s. Jindry Hofmanové,
žákyně 8. tř. OSŠ v Městci Králové,
okres Poděbrady.

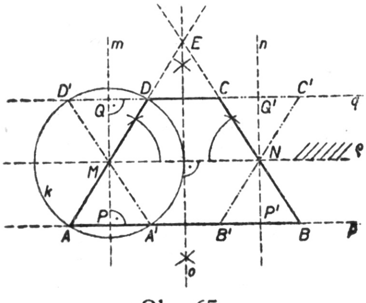
2. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány tyto prvky lichoběžníka: střední příčka $MN = 6$ cm, výška $v = 5$ cm a rameno $AD = 6$ cm.

Odůvodněte, proč při těchto číselných údajích má úloha řešení.

Řešení (obr. 65). Rozbor. Mysleme si, že jsme již sestrojili hledaný rovnoramenný lichoběžník o základně $AB > CD$. Označme jako v obrázku $p \equiv AB$, $q \equiv CD$ a m, n kolmice sestrojené po řadě v bodech M, N k přímce MN; při tom jsou M, N středy úseček AD, BC, dále P, Q průsečíky přímky m s přímkami p, q a konečně P', Q' průsečíky přímky n s přímkami p, q. Zřejmě je $PP'Q'Q$ obdélník a úsečka $PQ = v$. Dále bod D leží nejen na přímce q, ale též na kružnici $k \equiv (M, \frac{1}{2}AD = 3\text{ cm})$. Ještě si všimněme toho, že osa o úsečky MN je osou souměrnosti rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$ a tím i osou každé z jeho základen AB, CD.

Nyní provedeme konstrukci.

Konstrukce. Zvolme polohu úsečky $MN = 6$ cm. Dále zvolme jednu polorovinu vyťatou přímkou MN a označme ji ϱ. Budeme na př. požadovat, aby bod D padl do zvolené poloroviny ϱ. V této polorovině sestrojíme přímku $q \parallel MN$ ve vzdálenosti 2,5 cm; v polorovině opačné k ϱ sestrojíme rovněž ve vzdálenosti 2,5 cm přímku $p \parallel MN$.



Obr. 65.

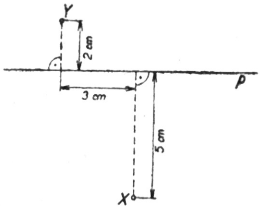
Dále opíšeme kružnici $k \equiv (M, 3\text{ cm})$; označme D jeden ze společných bodů přímky q a kružnice k (z obou možností jsme jako D označili bod v polorovině mN). Hledaný bod A je průsečíkem přímek p, MD.

Označme E společný bod osy o úsečky MN a přímky MD. Potom přímka NE protíná po řadě přímky p, q v hledaných vrcholech B, C lichoběžníka. Tím je lichoběžník sestrojen; zřejmě splňuje požadavky úlohy, a proto nebudeme provádět důkaz správnosti konstrukce.

Diskuse. Protože vzdálenost středu M kružnice k od přímky q je menší než poloměr kružnice k (platí totiž $2{,}5 < 3$), je q sečnou kružnice k a dostáváme dva průsečíky D, D'. Jeden vede k lichoběžníku $ABCD$, druhý k lichoběžníku $A'B'C'D'$. Protože přímky p, q jsou souměrně sdružené podle osy MN souměrnosti a protože podle této osy je souměrná i kružnice k, jsou zřejmě oba lichoběžníky souměrně sdružené podle přímky MN a proto tedy shodné.

Ještě musíme rozhodnout, zda bod D na našem obrázku leží uvnitř poloroviny oM a zda bod C leží uvnitř poloroviny oN. Oba body M, Q mají od přímky o vzdálenost 3 cm. V pravoúhlém trojúhelníku MDQ je přepona $MD = 3$ cm větší než odvěsna QD. Je tedy $QD < 3$ cm; proto bod D leží uvnitř poloroviny oM. Ze souměrnosti podle přímky o vyplývá, že bod C leží uvnitř poloroviny oN. Úloha má tedy dvě řešení.

Tím je řešení úlohy provedeno.



Obr. 66.

3. Zvoľte priamku p a dva body X, Y ako v pripojenom náčrtku (pozri obr. 66).

Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB, ktorý má tieto vlastnosti:

Priamka p je osou súmernosti trojuholníka.

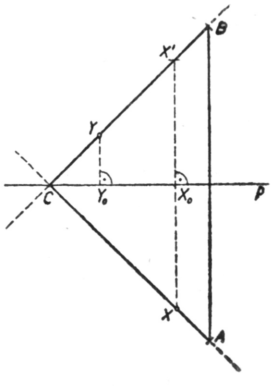
Rameno $AC = 9$ cm.

Polpriamka CA prechádza daným bodom X a polpriamka CB prechádza daným bodom Y.

Odôvodnite, prečo má úloha pri daných číselných údajoch práve jedno riešenie.

Riešenie (obr. 67). Rozbor. Pretože p je osou hľadaného rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB, sú body A, B súmerne združené podľa priamky p a bod C nevyhnutne leží na priamke p. Zostrojíme k bodu X bod X' súmerne združený podľa priamky p; bod X' padne na polpriamku CB. Teda BC je tá istá priamka ako priamka YX'. Na základe toho urobíme konštrukciu.

Konštrukcia. Zostrojme k bodu X bod X' súmerne združený podľa priamky p; tu platí (pozri obr. 67) $XX_0X' \perp p$, $X'X_0 = XX_0$. Priamka YX' pretne priamku p v hľadanom



Obr. 67.

bode C. Na polpriamkach CX, CY (v tomto poradí) zostrojíme úsečky $CA = CB = 9$ cm. Potom je zrejme CAB hľadaný trojuholník; dôkaz vyplýva z rozboru.

D i s k u s i a. Podľa zadania bodov X, Y sú obe vzdialenosti bodov X, Y a tým aj bodov X', Y od priamky p rozdielne; preto sú rozdielne aj body X', Y. Pretože ďalej body X_0, Y_0 sú podľa textu úlohy tiež rozdielne, nie je priamka $X'Y$ na priamku p kolmá, ani s ňou rovnobežná. Preto priamky $X'Y$, p sú kosé a majú spoločný bod C, čo je vrchol hľadaného rovnoramenného trojuholníka CAB. Úloha má teda jediné riešenie.

4. Dvanásť nájomníkov má spoločne zaplatiť 91,96 Kčs za odobranú vodu. Štyria z nich (vzhľadom na menšiu rozlohu svojich bytov) platia o 25 % menší poplatok, než ostatní.

Vypočítajte, koľko činí plný poplatok nájomníka a koľko činí znížený poplatok.

Riešenie. Znížený poplatok činí $\frac{75}{100}$, t. j. $\frac{3}{4}$ plného poplatku. Ak zvolíme plný poplatok za jeden diel, zaplatí 8 nájomníkov celkom 8 dielov a 4 nájomníci zaplatia celkom $(\frac{3}{4} \,.\, 4)$ dielov, t. j. 3 diely. Preto musíme čiastku 91,96 Kčs rozdeliť na $8 + 3$, t. j. 11 navzájom rovnakých dielov; platí

$$\begin{array}{l} 91{,}96 : 11 \;|\underline{8{,}36} \\ \;\;3\,9 \\ \;\;\;\;66 \\ \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Plný poplatok teda činí 8,36 Kčs. Znížený poplatok je $(8{,}36 \,.\, \frac{3}{4})$ Kčs; platí

$$8{,}36 \,.\, \tfrac{3}{4} = 2{,}09 \,.\, 3 = 6{,}27.$$

Znížený poplatok teda činí 6,27 Kčs.

S k ú š k a. Súčet 8 plných poplatkov a 4 znížených poplatkov musí činiť 91,96 Kčs. Platí:

$$8{,}36 \,.\, 8 = 66{,}88, \quad 6{,}27 \,.\, 4 = 25{,}08$$

a súčet $66{,}88 + 25{,}08 = 91{,}96$, teda skutočne sa rovná požadovanej čiastke.

O d p o v e ď. Plný poplatok je 8,36 Kčs, znížený poplatok je 6,27 Kčs.