04. ročník matematické olympiády

III. Řešení úloh ze soutěže

In: Rudolf Zelinka (editor): 04. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1954-1955. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1956. pp. 27–209.

1. Úlohy I. kola kategorie A.

1. Buďte dány zlomky

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$$

kde $a, b \neq 0$, $c, d \neq 0$ jsou daná čísla.

Určete číslo x tak, aby platilo

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}. \tag{1}$$

Řešení. Předpokládejme, že úloha má řešení a že číslo x je tímto řešením. O čísle x musí platit

$$b + x \neq 0, \quad d + x \neq 0, \tag{2}$$

jinak by zlomky v (1) neměly smysl. Ze vztahu (1) pak dostaneme ekvivalentní vztah

$$(a + x)(d + x) = (b + x)(c + x) \tag{3}$$

neboli

$$x(b + c - a - d) = ad - bc. \tag{4}$$

Jestliže tedy má úloha řešení, potom musí číslo x splňovat lineární rovnici (4). Rozeznávejme dále dva případy.

Případ [1]. Nechť je

$$b + c - a - d \neq 0. \tag{5}$$

Potom ze (4) plyne, že o čísle x musí platit:

$$x = \frac{ad - bc}{b + c - a - d}. \tag{6}$$

Snadno zjistíme, že vzhledem ke vztahu (6) platí

$$\begin{aligned} b + x &= \frac{(b - a)(b - d)}{b + c - a - d}, \\ d + x &= \frac{(d - c)(b - d)}{b + c - a - d}; \end{aligned} \tag{7}$$

odtud plyne, že mají-li platit vztahy (2), musí současně platit vztahy

$$(b - a)(b - d) \neq 0, \; (d - c)(b - d) \neq 0$$

neboli

$$a \neq b \neq d \neq c\,. \tag{8}$$

Obráceně, když platí vztahy (5), (8), pak již platí vztahy (2) a číslo x dané vztahem (6) vyhovuje po řadě vztahům (4), (3) a (1), takže číslo x je jediným řešením úlohy. Platí-li (5) a neplatí-li (8), nemá úloha řešení, neboť zřejmě podle (7) neplatí alespoň jeden ze vztahů (2).

Případ [2]. Nechť je

$$b + c - a - d = 0\,. \tag{9}$$

a) Nechť je dále

$$ad - bc \neq 0 \tag{10}$$

neboli $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Pak úloha nemá řešení, neboť neexistuje číslo x, které splňuje rovnici (4).

b) Nechť je dále

$$ad - bc = 0 \tag{11}$$

neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,.$$

Pak rovnice (4) má nekonečně mnoho řešení, a tedy rovnice (1) má za řešení každé číslo x, pro něž platí (2).

2. Rovnicí

$$y = 2^x + 2^{-x} \tag{1}$$

je dána funkce reálné proměnné x.

a) Vyšetřte množinu všech čísel, kterých tato funkce nabývá.

b) Výpočtem rozhodněte, ve kterých intervalech je daná funkce rostoucí a ve kterých je klesající; dále vyšetřte, pro která x nabývá daná funkce nejmenší hodnoty.

Řešení. a) Číslem budeme dále rozumět číslo reálné. Je známa věta: Budiž a kladné číslo; potom platí $a + \dfrac{1}{a} \geqq 2$, při čemž rovnost nastane právě jen pro $a = 1$.

Je známo, že čísla $2^x, 2^{-x}$ jsou kladná pro každé x; položme $2^x = a$, potom je $2^{-x} = \dfrac{1}{a}$. Podle právě vyslovené věty je zřejmě $y \geqq 2$; při tom rovnost nastane pro $2^x = 1$ neboli pro $x = 0$. Pro všechna x je tedy $y \geqq 2$.

Obráceně dokážeme, že ke každému číslu $y_0 \geqq 2$ lze určit číslo q tak, že platí

$$y_0 = 2^q + 2^{-q}. \tag{2}$$

Důkaz. Předpokládejme, že k danému číslu $y_0 \geqq 2$ lze určit číslo q takové, že platí vztah (2). Potom je správná i rovnice, kterou dostaneme, když rovnici (2) znásobíme číslem $2^q \neq 0$. Po úpravě dostaneme

$$2^{2q} - y_0 \cdot 2^q + 1 = 0.$$

Pro stručnost položme $2^q = z$, takže předchozí rovnice nabude tvaru

$$z^2 - y_0 \cdot z + 1 = 0. \tag{3}$$

Pro číslo q tady musí platit rovnice (3), ve které je $z = 2^q$. Nyní dokážeme, že obráceně k danému číslu

$$y_0 \geqq 2 \tag{4}$$

lze určit číslo q takové, aby platil vztah (2). Diskriminant rovnice (3) je

$$D = y_0^2 - 4\,.$$

Vzhledem k předpokladu (4) je vždy $D \geqq 0$; rovnost nastane pro $y_0 = 2$. Jsou tedy kořeny z_1, z_2 reálné. O nich platí

$$z_1 \cdot z_2 = 1,\ z_1 + z_2 = y_0,\ \text{kde}\ y_0 \geqq 2.$$

Proto jsou z_1, z_2 kladná čísla. Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Jestliže je $D = 0$, je $z_1 = z_2 = 1$ a tedy $2^q = 1$, t. j. $q = 0$, což nastává pro $y_0 = 2$.

Případ [2]. Jestliže je $D > 0$, je $z_1 \neq z_2$. Pak je $2^{q_1} = z_1$, $2^{q_2} = z_2$. Odtud plyne

$$q_1 = \frac{\log z_1}{\log 2},\quad q_2 = \frac{\log z_2}{\log 2}\,. \tag{5}$$

Obráceně se snadno přesvědčíme, že čísla q_1, q_2 daná vztahy (5) skutečně úloze vyhovují. Platí totiž

$$2^{q_1} + 2^{-q_1} = z_1 + \frac{1}{z_1} = y_0$$

a stejně i

$$2^{q_2} + 2^{-q_2} = z_2 + \frac{1}{z_2} = y_0.$$

Závěr úlohy a). Množinou všech čísel, kterých funkce (1) nabývá, jsou všechna čísla $y \geqq 2$.

b) Z předchozího odstavce a) bezprostředně plyne, že nejmenší hodnoty funkce (1) nabývá pro $x = 0$.

V dalším uvažujeme dva případy podle toho, je-li $x \geqq 0$ nebo $x \leqq 0$.

Případ [1]. Dokážeme, že pro $x \geqq 0$ je funkce (1) rostoucí.

Důkaz. Volme čísla

$$x_2 > x_1 \geqq 0; \tag{6}$$

příslušné hodnoty funkce (1) označme y_2, y_1. Máme dokázat, že platí $y_2 > y_1$.

Tu platí postupně

$$y_2 - y_1 = 2^{x_2} + 2^{-x_2} - (2^{x_1} + 2^{-x_1}) =$$

$$= 2^{x_2} - 2^{x_1} - \left(\frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}}\right) =$$

$$= 2^{x_2} - 2^{x_1} - \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}} = (2^{x_2} - 2^{x_1}) \cdot \frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}},$$

t. j.

$$y_2 - y_1 = (2^{x_2} - 2^{x_1}) \cdot \frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}}. \qquad (7)$$

Nyní víme, že funkce 2^x je funkcí rostoucí; přitom pro $x > 0$ je $2^x > 1$. Proto je $2^{x_2} - 2^{x_1} > 0$. Číslo $x_1 + x_2$ je kladné; proto jsou $2^{x_1+x_2} - 1$, $\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}}$ kladná čísla. Odtud plyne, že součin těchto čísel na pravé straně vztahu (7) je rovněž číslo kladné, t. j. $y_2 - y_1 > 0$, neboli $y_2 > y_1$, což jsme měli dokázat.

Případ [2]. Konečně dokážeme, že pro $x \leqq 0$ je funkce (1) klesající.

Důkaz. Rovnice (1) se nezmění, když místo x v ní položíme $-x$; odtud plyne, že graf funkce je souměrný podle osy y. Proto, je-li funkce pro $x \geqq 0$ rostoucí, pak je pro $x \leqq 0$ funkcí klesající, což jsme měli dokázat.

3. Jehlan má hlavní vrchol V a čtvercovou podstavu $MNPQ$; dále je dána velikost p hrany podstavy a odchylka β přímky VP od roviny $MNPQ$. Přitom každé dvě z rovin $MNPQ$, VMN, VMQ jsou k sobě kolmé.

Do daného jehlanu je vepsán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ o podstavě $ABCD$, při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Vrcholy $A \equiv M$, B, C, D leží v rovině $MNPQ$; vrcholy

A', B', C' leží po řadě uvnitř hran VM, VN, VP. Dále je dána odchylka α přímky AC' od roviny $MNPQ$.

a) Narýsujte obraz obou těles v rovnoběžném promítání a proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům p, α, β.

b) Vypočtěte objem O' rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ pomocí daných prvků p, α, β.

Řešení (obr. 1, 2). a) Podle předpokladu úlohy platí o rovinách

$$VMN \perp MNPQ, \quad VMQ \perp MNPQ;$$

proto o průsečnici VM rovin VMN, VMQ platí

$$VM \perp MNPQ. \tag{1}$$

Proto také platí $VMP \perp MNPQ$. Je tedy $\sphericalangle VMP = 90°$, $\beta = \sphericalangle MPV$. Protože v trojúhelníku VMP je $\sphericalangle VMP = 90°$, je nutně úhel $\sphericalangle MPV$ ostrý, t. j.

$$0 < \beta < 90°. \tag{2}$$

Jestliže obráceně daná odchylka β přímky VP od roviny $MNPQ$ splňuje vztah (2), potom lze sestrojit jehlan, jehož podstavou je čtverec $MNPQ$ o straně p a jehož hlavním vrcholem je bod V, při čemž platí $\sphericalangle MPV = \beta$ a $\sphericalangle VMP = 90°$.

Předpokládejme, že hledaný rovnoběžnostěn existuje. Protože je $A \equiv M$, leží bod C' uvnitř úsečky VP v rovině $VMP \perp MNPQ$, při čemž je $\sphericalangle PMC' = \alpha$; je tedy bod C' bodem ležícím uvnitř přepony VP pravoúhlého trojúhelníka VMP (v němž je $\sphericalangle M = 90°$), a proto musí platit

$$0 < \alpha < 90°. \tag{3}$$

Obráceně, platí-li tento vztah, lze rovnoběžnostěn sestrojit: V rovině VMP sestrojíme uvnitř úsečky VP bod C' tak, aby $\sphericalangle PMC' = \alpha$; bodem C' sestrojíme rovinu rovnoběžnou s rovinou $MNPQ$ a označíme po řadě A', B', C', D' její průsečíky s hranami VM, VN, VP, VQ. Zřejmě je

$A'B' \parallel MN$, $C'D' \parallel PQ$, $B'C' \parallel NP$, $D'A' \parallel QM$, $\sphericalangle B'A'D' =$
$= 90°$,
takže $A'B'C'D'$ je obdélník. Ale z podobnosti trojúhelníků v pobočných stěnách jehlanu $V(MNPQ)$ plyne

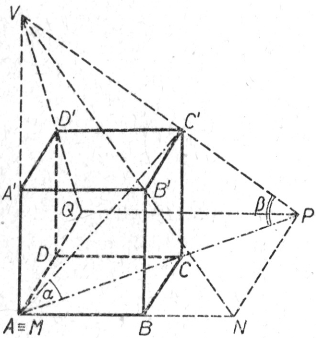
$$\frac{A'B'}{MN} = \frac{B'C'}{NP} = \frac{C'D'}{PQ} = \frac{D'A'}{QM} = k, \tag{4}$$

kde $0 < k < 1$. Ale $MNPQ$ je čtverec, o jehož stranách platí

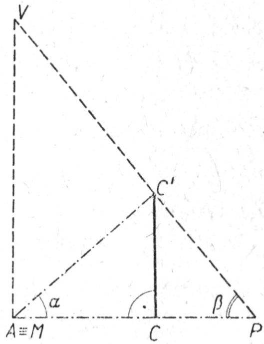
$$MN = NP = PQ = QM = p;$$

proto podle (4) je také

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = kp.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Je tedy $A'B'C'D'$ čtverec; paty kolmic vedených jeho vrcholy k rovině $MNPQ$ označme $A \equiv M$, B, C, D. Bod B zřejmě padne dovnitř hrany MN, bod D dovnitř hrany MQ a bod C dovnitř úsečky MP; protože je $AA' \perp MNPQ$ a protože $ABCD$ je zřejmě čtverec shodný se čtvercem $A'B'C'D'$, je hledaný rovnoběžnostěn kvádr se čtvercovou podstavou. Za předpokladu (3) tento kvádr jistě existuje. Tím je úloha a) řešena.

b) Pro objem O' kvádru z úlohy a) platí

$$O' = AB^2 \cdot CC'. \tag{5}$$

Musíme určit velikosti úseček AB, CC' pomocí daných čísel p, α, β, o nichž platí vztahy (2), (3).

Především platí

$$\triangle\, PCC' \sim \triangle\, PMV,$$

neboť se oba trojúhelníky shodují v úhlech. Proto platí vztah

$$\frac{CC'}{VM} = \frac{CP}{MP}. \tag{6}$$

Označme

$$CC' = x,\ VM = v,\ MP = u. \tag{7}$$

Protože VM je odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku VPM (kde $\sphericalangle\, M = 90°$), je

$$v = u \cdot \mathrm{tg}\beta. \tag{8}$$

Z trojúhelníka MCC' (kde $\sphericalangle\, C = 90°$) plyne

$$MC = x \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha. \tag{9}$$

Dále zřejmě platí $CP = MP - MC$ neboli podle (7) a (9)

$$CP = u - x \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha. \tag{10}$$

Po dosazení ze vztahů (7), (10) do (6) obdržíme

$$\frac{x}{v} = \frac{u - x \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha}{u}.$$

Odtud snadno vypočítáme, že

$$x = \frac{uv}{u + v \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha}, \tag{11}$$

kde jmenovatel je jistě kladné číslo. Dosadíme-li sem z výrazu (8), obdržíme pro x výraz

$$x = \frac{u \cdot \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}.$$

Ale $u = MP$ je úhlopříčka čtverce $MNPQ$ o straně p; proto je

$$u = p\sqrt{2}$$

a pro x tedy platí

$$x = \frac{p\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}. \tag{12}$$

Protože úsečka AB je stranou čtverce $ABCD$, jehož úhlopříčka je MC, platí

$$AB = \frac{MC}{\sqrt{2}}$$

neboli podle (9)

$$AB = \frac{x \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{13}$$

Po dosazení z prvního vztahu (7) a ze vztahu (13) do (5) dostáváme

$$O' = \tfrac{1}{2}x^3 \cdot \mathrm{cotg}^2\,\alpha\,.$$

Dosadíme-li sem za x ze vztahu (12), obdržíme konečně

$$O' = \frac{p^3 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{tg}^3\,\beta}{(1 + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta)^3}.$$

Poznámka. Předchozí výsledek lze snadno převést na tvar

$$O' = \frac{p^3 \cdot \sqrt{2}\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha\,.\,\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha + \beta)};$$

k tomuto výsledku dospějeme přímo, když k řešení trojúhelníka MPC' užijeme sinové věty.

4. Kosý kruhový kužeľ má podstavu s polomerom r; výška kužeľa má veľkosť v, pričom jej päta na rovine podstavy má od stredu podstavy vzdialenosť d. Určte konštruktívne tie rezy daného kužeľa vrcholovými rovinami, ktoré sú pravouhlými trojuholníkmi a ktoré obsahujú stred podstavy kužeľa.

Preskúmajte podmienky riešiteľnosti.

Riešenie. Označme S stred podstavy daného kosého kužeľa, V jeho vrchol a P pätu kolmice vedenej bodom V na rovinu ϱ podstavy kužeľa; jeho kruhová hrana je kružnica $k \equiv (S, r)$. Pretože kužeľ je kosý, je nevyhnutne $S \not\equiv P$ a teda $d > 0$.

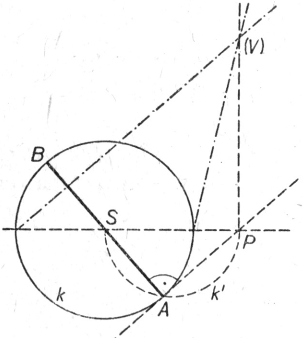
Predpokladajme, že úloha má riešenie a označme VAB jeden hľadaný trojuholník, kde AB je priemer kružnice k.

Rozoznávajme dve možnosti:

[1]. Pravý uhol v trojuholníku VAB je pri vrchole A (prípad, že pravý uhol je pri vrchole B, možno previesť na tento prípad výmenou označenia bodov A, B).

[2]. Pravý uhol v trojuholníku VAB je pri vrchole V.

Prípad [1]. Nech je $\sphericalangle BAV = 90°$. Potom je $AS \perp VA$, $AS \perp VP$ (lebo AS leží v rovine ϱ podstavy a je $VP \perp \varrho$). Priamka AS je teda kolmá k priamkam VA, VP. Tu sú možné dva prípady:



Obr. 3.

a) Nech priamky VA, VP splývajú, t. j. platí $A \equiv P$, takže bod P padne na kružnicu k. Potom je rovina $VSP \perp \varrho$ rovinou súmernosti daného kužeľa a pretne ho v trojuholníku VAB (kde $A \equiv P$) s pravým uhlom pri vrchole A, pričom AB je priemer kružnice k.

b) Nech priamky VA, VP sú rôznobežky, t. j. platí $A \not\equiv P$ (obr. 3). Potom priamka AS je kolmá k rovine VAP, takže je $AS \perp AP$. Pretože platí $A \not\equiv S$, $A \not\equiv P$, $P \not\equiv S$, existuje trojuholník SPA s pravým uhlom pri vrchole A. Stade vyplýva konštrukcia bodu A:

Zostrojme kružnicu k' nad priemerom SP a označme A jej spoločný bod s kružnicou k.

Pretože musí byť $A \neq P$, musí bod A ležať mimo priamky SP, t. j. kružnice k, k' sa musia pretať v dvoch rôznych bodoch. Podmienka riešiteľnosti úlohy teda je, aby pre polomery a strednú kružníc k, k' platilo

$$|r - \tfrac{1}{2}d| < \tfrac{1}{2}d < r + \tfrac{1}{2}d$$

alebo

$$|r - \tfrac{1}{2}d| < \tfrac{1}{2}d.$$

Táto podmienka je ekvivalentná s nerovnosťami

$$r - \tfrac{1}{2}d < \tfrac{1}{2}d, \qquad \tfrac{1}{2}d - r < \tfrac{1}{2}d.$$

Druhá z týchto nerovností je vždy splnená; z prvej vyplýva

$$r < d,$$

t. j. bod P musí ležať zvonku kružnice k.

Ak obrátene je $r < d$, ľahko sa zistí, že kružnice k, k' majú dva rôzne priesečníky a úloha má dve rešenia.

Záver prípadu [1]. Úloha má jedno riešenie, keď bod P padne na kružnicu k a má dve riešenia, keď bod P padne zvonku kružnice k. Inak nemá riešenie (t. j. keď bod $P \neq S$ padne dovnútra kružnice k).

Prípad [2]. Nech je $\sphericalangle AVB = 90°$; pritom je AB priemer kružnice k. Označme $\varkappa$ guľovú plochu so stredom S a polomerom r. Z Thaletovej vety vyplýva, že bod V musí ležať na ploche $\varkappa$ mimo kružnice k (mimo roviny ϱ); okrem toho bod V nepadne na plochu $\varkappa$ a na kolmicu p vedenú bodom S k rovine ϱ (daný kužeľ podľa predpokladu nie je rotačný).

Ak obrátene zvolíme na ploche $\varkappa$ bod W taký, že neleží ani na kružnici k, ani na priamke p, potom ho možno považovať za vrchol kosého kužeľa s podstavnou hranou k. Potom každá rovina ω, ktorá prechádza bodmi S, W, pretne kružnicu k v bodoch $A \neq B$ priemeru AB; táto rovina $\omega \equiv ABW$ pretne plochu $\varkappa$ v kružnici $l \equiv (S, r)$, pričom podľa Thaletovej vety je $\sphericalangle AWB = 90°$.

Záver prípadu [2]. Úloha má nekonečne mnoho riešení, keď bod V leží na guľovej ploche $\varkappa$, ktorá má stred S a polomer r; podľa predpokladu úlohy neleží V ani v rovine ϱ ani na kolmici $p \perp \varrho$ vedenej bodom S.

Keď bod V neleží na tejto ploche $\varkappa$, nemá úloha v prípade [2] riešenie.

5. Určte všetky trojice x, y, z prirodzených čísel, ktoré splňujú rovnicu

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \tag{1}$$

Riešenie. Ak trojica prirodzených čísel $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ je jedno riešenie rovnice (1), je zrejme aj trojica čísel λx_0, λy_0, λz_0, kde $\lambda > 1$ je prirodzené číslo, riešením tejto rovnice. Preto budeme skúmať len také riešenia rovnice (1), kde čísla v trojici x, y, z sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Predpokladajme, že taká trojica existuje. Pretože zlomky $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ sú kladné čísla, platí $\frac{1}{x} < \frac{1}{z}$, $\frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ alebo $x > z$, $y > z$. Existujú teda prirodzené čísla p, q také, že platí

$$x = z + p, \; y = z + q, \tag{2}$$

pričom vzhľadom na vzťah (1) platí

$$\frac{1}{z+p} + \frac{1}{z+q} = \frac{1}{z}.$$

Stade po ľahkej úprave dostaneme

$$z^2 = pq. \tag{3}$$

Zo vzťahu (3) dokážeme, že p, q musia byť nesúdeliteľné čísla.

Predpokladajme opak, totiž, že čísla p, q majú spoločného deliteľa $d > 1$; potom je podľa (3) číslo d^2 deliteľom čísla z^2.

Z toho vyplýva, že číslo d je deliteľom čísla z. Potom zo vzťahov (2) vyplýva, že číslo d je deliteľom aj čísel x, y alebo, že čísla x, y, z majú spoločného deliteľa $d > 1$; avšak to je proti predpokladu, že čísla x, y, z sú nesúdeliteľné. Čísla p, q musia byť teda nesúdeliteľné.

Podľa (3) musí byť pq druhou mocninou prirodzeného čísla. Pretože však p, q sú nesúdeliteľné čísla, musí byť každé z nich druhou mocninou prirodzeného čísla, t. j. platí $p = m^2$, $q = n^2$, kde m, n sú nesúdeliteľné čísla. Podľa (3) musí potom o čísle z platiť $z = m \cdot n$ a podľa (2) o číslach x, y musí platiť $x = m(m + n)$, $y = n(m + n)$.

Obrátene, trojica čísel $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, kde

$$x_0 = m(m + n),\ y_0 = n(m + n),\ z_0 = mn \tag{4}$$

a kde m, n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, skutočne vyhovuje rovnici (1), ako sa ľahko presvedčíme dosadením.

Tým sme preskúmali všetky trojice čísel x, y, z, ktoré sú nesúdeliteľné a ktoré vyhovujú rovnici (1). Ďalšie riešenia dostaneme, keď položíme $x = \lambda x_0$, $y = \lambda y_0$, $z = \lambda z_0$, kde $\lambda > 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo a čísla x_0, y_0, z_0 sú dané vzťahmi (4). Tým sme určili všetky riešenia rovnice (1).

Jiné řešení. Vztah (1) je pro každou trojici přirozených čísel, jež mu vyhovují, ekvivalentní se vztahem

$$xy = xz + yz$$

neboli se vztahem

$$xy - xz - yz = 0\,.$$

Tento vztah lze upravit na tvar

$$xy - xz - yz + z^2 = z^2$$

neboli

$$(x - z) \cdot (y - z) = z^2. \tag{5}$$

Položme

$$x - z = u,\ y - z = v\,. \tag{6}$$

Podle (5) o číslech u, v platí

$$u \cdot v = z^2. \tag{7}$$

Jestliže tedy x, y, z je trojice čísel, která vyhovuje vztahu (1), lze podle (6) určit přirozená čísla u, v tak, že platí vztah (7).

Určeme obráceně čísla x, y, z takto: Zvolme libovolně přirozené číslo z. Vypočtěme číslo z^2 a rozložme je v součin dvou přirozených čísel u, v. Podle vztahu (7) vypočtěme čísla x, y, t. j. čísla

$$x = z + u,\ y = z + v. \tag{8}$$

Snadno zjistíme, že tato čísla x, y, z vyhovují vztahu (1).

Je zřejmé, že všechna řešení vztahu (1) dostaneme, když ke každému přirozenému číslu z určíme všechny dvojice přirozených čísel u, v, která vyhovují vztahu (7), a pak určíme příslušná čísla x, y podle (8). Tím je úloha řešena.

Řešil s. B. Sekerka,
11. tř. jedenáctiletky, Pardubice.

6. Určte počet trojuholníkov, ktoré majú tieto dve vlastnosti:

(1) Veľkosti strán trojuholníkov sú prirodzené čísla.

(2) Veľkosť ktorejkoľvek strany týchto trojuholníkov nie je väčšia než dané prirodzené číslo n.

Riešenie. I. Nech uvažovaný trojuholník má najväčšiu stranu $x = p$, kde $p \leqq n$ je zvolené prirodzené číslo. Uvažujme najprv tieto prípady.

Nech druhá strana je $y = p$, potom tretia strana z sa rovná niektorému z čísel

$$p, p-1, p-2, \ldots, 1;$$

to je celkom p trojuholníkov.

Nech druhá strana je $y = p - 1$, potom tretia strana $z \leqq y$ sa rovná niektorému z čísel

$$p-1, p-2, \ldots, 2$$

(tretia strana nemôže totiž byť 1, lebo najväčšia strana $x = p$ trojuholníka je menšia než súčet $p - 1 + z$ ostatných dvoch; tento fakt nebudeme už pri ďalších možnostiach pripomínať); to je celkom $p - 2$ trojuholníkov.

Nech druhá strana je $y = p - 2$; potom tretia strana sa rovná niektorému z čísel

$$p - 2, p - 3, \ldots, 3;$$

to je celkom $p - 4$ trojuholníkov.

Urobme teda túto všeobecnú úvahu:

Nech druhá strana je $y = p - k$, kde prirodzené číslo $k < p$; potom tretia strana z sa rovná niektorému z čísel

$$p - k, p - k - 1, \ldots, k + 1 = p - (p - k - 1);$$

to je celkom $p - 2k$ trojuholníkov.

Označme s_p počet všetkých trojuholníkov, ktorých jedna strana je p a každá zo zvyšujúcich strán nie je väčšia než p.

a) Nech p je párne číslo (prirodzené); potom je

$$s_p = p + (p - 2) + (p - 4) + \cdots + 2 = \tfrac{1}{2}(p + 2) \cdot \frac{p}{2} =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p}{2}.$$

b) Nech p je nepárne (prirodzené) číslo; potom je

$$s_p = p + (p - 2) + (p - 4) + \cdots + 1 = \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2.$$

II. Označme S_n počet trojuholníkov, ktoré vyhovujú textu úlohy; podľa záveru odstavca I je

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n.$$

a) Pre párne n dostaneme*)

$$S_n = 1^2 + (1^2 + 1) + 2^2 + (2^2 + 2) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right] =$$

$$= 2\left[1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + \left[1 + 2 + \ldots + \frac{n}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right);$$

po ľahkej úprave dostaneme

$$S_n = \frac{1}{24} \cdot n(n + 2)(2n + 5). \qquad (1)$$

b) Pre nepárne n je $S_n = S_{n-1} + s_n$, t. j.

$$S_n = \frac{1}{24}(n - 1)(n + 1)(2n + 3) + \frac{1}{4}(n + 1)^2;$$

stade po ľahkej úprave dostaneme

$$S_n = \frac{1}{24}(n + 1)(n + 3)(2n + 1). \qquad (2)$$

Vzorcami (1), (2) sme úlohu rozriešili.

7. V danej rovine ϱ nech je daný pravidelný mnohouholník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ so stredom S; dané je $SA_1 = r$ a prirodzené číslo $n > 2$. Vnútri jedného z oboch opačných polpriestorov vyťatých rovinou ϱ zvoľme bod U tak, aby platilo $SU \perp \varrho$.

*) Súčet $1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^2$ je utvorený podľa záveru odst. Ib) a súčet $(1^2 + 1) + (2^2 + 2) \ldots + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right]$ podľa odst. Ia).

Vnútri polpriamky SU zvoľme bod V a uvažujme o pravidelnom ihlane s hlavným vrcholom V a s podstavou $A_1A_2A_3\ldots A_n$.

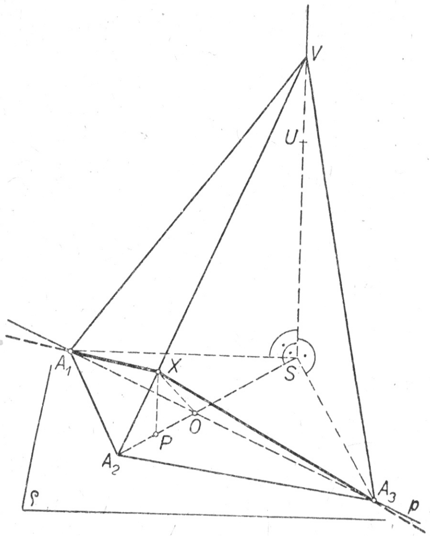
Bodom A_1 položme rovinu $\omega \perp VA_2$ a označme X jej priesečník s priamkou VA_2.

a) Veľkosť jedneho z oboch uhlov $\sphericalangle A_1XA_3$, $2R - \sphericalangle A_1XA_3$ udáva odchýlku rovín VA_1A_2, VA_2A_3 pobočných stien daného ihlana. Dokážte to.

b) Čo vyplní bod X, keď bod V prebieha vnútro polpriamky SU?

c) Pre ktorú polohu bodu V má bod X od roviny ϱ najväčšiu vzdialenosť a aká je v tomto prípade vzdialenosť príslušného bodu V od roviny ϱ?

Riešenie. a) Pretože je (obr. 4)



Obr. 4.

$$VA_2 \perp \omega,$$

platí o rovinách ω, VA_2S

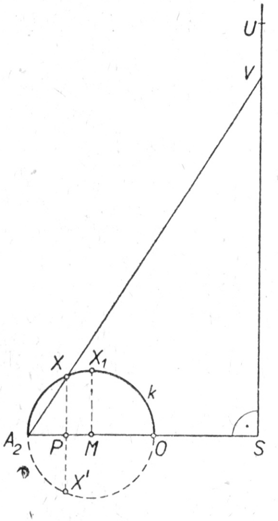
$$\omega \perp VA_2S. \tag{1}$$

Ďalej je

$$\varrho \perp VA_2S,$$

pretože $SV \perp \varrho$.

Pretože neplatí $\varrho \perp VA_2$, roviny ϱ, ω nie sú rovnobežné; pretože majú spoločný bod A_1, pretnú sa v priamke $p \perp VA_2S$. Ale body A_1, A_3 sú súmerne združené podľa priamky A_2S (známa vlastnosť pravidelného mnohouholníka); preto je zrejme $p \equiv A_1A_3$. Prechádza teda rovina ω tiež bodom A_3.



Obr. 5.

Označme O spoločný bod úsečiek A_1A_3, A_2S. Platí $OA_1 = OA_3$ a bod O padne dovnútra úsečky A_2S. Preto päta X (obr. 5) kolmice zostrojenej bodom O k priamke A_2V leží vnútri úsečky A_2V (trojuholník A_2VS má pri vrchole S pravý uhol, takže pri vrcholoch A_2, V sú ostré uhly). Pretože rôznobežky OA_1, OX stoja kolmo k priamke A_2V, leží bod X v rovine ω.

Pretože platí (1), platí aj

$$VA_1A_2 \perp \omega, \quad VA_2A_3 \perp \omega;$$

pretože trojuholník XA_1A_3 existuje, existuje aj $\sphericalangle A_1XA_3$, ktorý leží v rovine ω. Preto ak je $\sphericalangle A_1XA_3 \leq 90°$, je veľkosť uhla A_1XA_3 odchýlkou rovín VA_1A_2, VA_2A_3; avšak ak je $\sphericalangle A_1XA_3 > 90°$, podľa definície odchýlky rovín je odchýlka spomínaných rovín $180° - \sphericalangle A_1XA_3$. Tým sme tvrdenie úlohy a) dokázali.

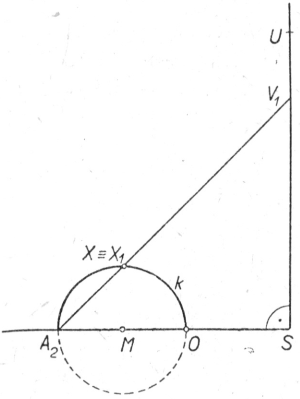
b) Z konštrukcie bodu X v predošlej úlohe a) vyplýva, že bod X leží vnútri polroviny SA_2U, a to tak, že $\sphericalangle A_2XO = 90°$; pritom body A_2, O sú dva určité body, nezávislé od polohy bodu V vnútri polpriamky SU. Avšak také body X ležia podľa Thaletovej vety na kružnici opísanej nad úsečkou OA_2 ako priemerom. Nazveme k polkružnicu s priemerom OA_2, ktorá leží v polrovine SA_2U; potom z vlastností bodu X vyplýva, že bod X je bodom tejto polkružnice k, pričom je $X \neq O$, $X \neq A_2$.

Obrátene, každý bod X_0, ktorý leží vnútri tejto polkružnice k, určuje práve jeden ihlan, ako vyplýva z tejto konštrukcie: Polpriamky A_2X_0, SU ležia v polrovine SA_2U (pretože X_0 leží vnútri k, sú A_2X_0, A_2O rôzne polpriamky). Pritom je $\sphericalangle OA_2X_0 < 90°$ (je to uhol trojuholníka A_2OX_0, kde $\sphericalangle X = 90°$), $\sphericalangle A_2SU = 90°$. Preto podľa Eukleidovho postulátu majú polpriamky A_2X_0, SU spoločný bod V_0, ktorý leží vnútri polroviny SA_2U a tým aj vnútri polpriamky SU. Zvoľme bod V_0 za hlavný vrchol ihlanu $\mathbf{J}_0$, ktorého podstavou je daný mnohouholník. Potom sa ľahko zistí, že rovina $\omega \perp V_0A_2$ a prechádzajúci bodom A_1 pretína priamku VA_2 práve v bode X_0.

Záver. Keď bod V prebieha vnútro polpriamky SU, vyplní bod X vnútro polkružnice k, ktorú sme vyššie zostrojili.

c) Označme P pätu kolmice vedenej bodom X z úloh a), b) k rovine ϱ. Bod P zrejme padne dovnútra úsečky OA_2. Veľkosť úsečky XP je vzdialenosť bodu X od roviny ϱ. Pretože bod P je stredom istej tetivy $XX' \perp OA_2$ kružnice, opísanej nad úsečkou OA_2 ako priemerom, a pretože rovina $A_2SV \perp \varrho$, je $XP = \frac{1}{2}XX'$ maximálne vtedy, keď je tetiva XX' priemerom. Označme M stred úsečky OA_2 a X_1 bod polkružnice k, pre ktorý je $X_1M \perp OA_2$. Takto zostrojený bod X_1 má skutočne zo všetkých bodov polkružnice k maximálnu vzdialenosť od roviny ϱ.

Označme V_1 priesečník polpriamok A_2X_1, SU (obr. 6). Pretože je $A_2M = MX_1$ a $\sphericalangle A_2MX_1 = 90°$, preto je uhol $\sphericalangle MA_2X_1 = 45°$. Z toho vyplýva, že v trojuholníku V_1A_2S (kde $\sphericalangle S = 90°$) je tiež $\sphericalangle V_1A_2S = \sphericalangle A_2V_1S = 45°$.



Obr. 6.

Záver. Bod X z úlohy b) má od roviny ϱ maximálnu vzdialenosť vtedy, keď hlavný vrchol V_1 ihlana zvolíme na polpriamke SU tak, aby platilo $SV_1 = SA_2$.

8. Nech čísla

$$a \geqq b \geqq c \qquad (1)$$

udávajú veľkosti strán daného trojuholníka ABC. Určte také číslo x, aby čísla

$$a + x,\ b + x,\ c + x$$

udávali veľkosti strán pravouhlého trojuholníka $A_1B_1C_1$.

Stanovte podmienky riešiteľnosti úlohy.

Riešenie. I. Pri riešení úlohy použijeme tieto pomocné vety:

Označme a, b, c veľkosti strán trojuholníka ABC; ďalej označme

$$z = b^2 + c^2 - a^2,\ \sphericalangle CAB = \alpha.$$

Veta **V1.** Ak je $z = 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha =$ $= 90°$.

Veta **V2.** Ak je $z > 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha < 90°$.

Veta **V3.** Ak je $z < 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha > 90°$.

Tieto vety možno obrátiť (porovnaj úlohu 8 v I. kole kategórie B).

II. O veľkostiach strán a, b, c daného trojuholníka ABC platí predovšetkým trojuholníková nerovnosť

$$b - c < a < b + c.$$

Vzhľadom na to, že je $c > 0$, vyplýva vzťah $b - c < a$ z predpokladu (1). Vzťah $a < b + c$, ktorý možno písať aj v tvare

$$b + c - a > 0, \tag{2}$$

je jednou z nutných podmienok riešiteľnosti úlohy; jeho platnosť vyplýva z existencie daného trojuholníka ABC.

Predpokladajme, že úloha má riešenie, t. j. že existuje reálne číslo x, ktoré vyhovuje úlohe.

Keď platí vzťah (1), potom vždy platí aj vzťah

$$a + x \geqq b + x \geqq c + x \tag{3}$$

pre každé reálne číslo x. Pretože najväčšou stranou pravouhlého trojuholníka je prepona, ak má mať úloha riešenie, musí sa jej veľkosť rovnať číslu $a + x$. Avšak potom musí vo vzťahu (3) platiť $a + x > b + x$, lebo prepona pravouhlého trojuholníka je jeho najväčšou stranou. Musí teda byť $a > b$. Preto vzťah (1) musí mať tvar

$$a > b \geqq c, \tag{4}$$

takže o veľkostiach strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ platí

$$a + x > b + x \geqq c + x. \tag{5}$$

Pretože veľkosti strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ sú kladné čísla, musí platiť $c + x > 0$; o čísle x musí preto platiť

$$x > - c. \tag{6}$$

Pre trojuholník $A_1B_1C_1$ platí Pythagorova veta, t. j.

$$(a + x)^2 = (b + x)^2 + (c + x)^2 \tag{7'}$$

alebo

$$x^2 + 2(b + c - a)x + (b^2 + c^2 - a^2) = 0. \qquad (7)$$

Pretože riešenie x podľa predpokladu, ktorý sme urobili, existuje, diskriminant D' rovnice (7) je nezáporné číslo. Ľahko vypočítame, že

$$D = \tfrac{1}{4}D' = (b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$

alebo

$$\tfrac{1}{4}D' = 2(a - b)(a - c), \qquad (8)$$

čo je vzhľadom na nutnú podmienku (4) vždy kladné číslo. Preto má rovnica (7) dva reálne rôzne korene, ktoré označíme tak, aby platilo

$$x_1 > x_2,$$

kde

$$x_1 = a - b - c + \sqrt{D}, \; x_2 = a - b - c - \sqrt{D}. \qquad (9)$$

Vzhľadom na nutnú podmienku (2) je vždy $x_2 < 0$.

Teraz dokážeme: Za predpokladu, že platia vzťahy (2), (4), číslo $x = x_2$ nie je riešením úlohy. Naproti tomu číslo $x = x_1$ je za uvedených predpokladov vždy riešením úlohy.

III. Číslo $x = x_2$ nie je riešením úlohy.

D ô k a z. O čísle x_2 zo vzťahu (9) platí

$$c + x_2 = a - b - \sqrt{D}.$$

Dokážeme, že je $c + x_2 < 0$, t. j. že pre $x = x_2$ nie je splnený nutný vzťah (6).

Porovnajme čísla $(a - b)^2$, D. Vzhľadom na vzťahy (4) a (8) platí

$$(a - b)^2 - 2(a - b)(a - c) = (a - b)[a - b - 2(a - c)] =$$
$$= (a - b)(2c - a - b) = -(a - b)[(a - c) + (b - c)] < 0$$

(obe zátvorky sú podľa (4) kladné). Z toho vyplýva správnosť vzťahu

$$D > (a - b)^2.$$

Pretože podľa (8) a vzhľadom na (4) je $D > 0$, $a - b > 0$, vyplýva z predošlého vzťahu

$$\sqrt{D} > a - b$$

alebo $c + x_2 < 0$, čo sme mali dokázať.

IV. Číslo $x = x_1$ zo vzťahu (9) je za predpokladu platnosti vzťahov (2), (4) riešením úlohy.

Dôkaz. Predovšetkým je

$$c + x_1 = a - b + \sqrt{D};$$

pretože podľa (4) a (8) je $a - b > 0$, $\sqrt{D} > 0$, je aj $c + x_1 > 0$, takže pre $x = x_1$ platí vzťah (6).

Za predpokladu, že platí (2), (4), sú pre $x = x_1$ čísla (5) veľkosťami strán pravouhlého trojuholníka $A_1B_1C_1$; to dokážeme takto: Z platnosti vzťahu (7) vyplýva platnosť vzťahu (7'); stade podľa obrátenia Pythagorovej vety (pozri vetu **V1**) vyplýva, že trojuholník $A_1B_1C_1$ má pri vrchole A_1 pravý uhol.

Záver. Úloha má jediné riešenie, ak je $a \neq b$. Ak $a = b$, nemá úloha riešenie.

9. První tři členy geometrické posloupnosti (reálných čísel) mají součet s; součet druhých mocnin těchto tří členů je $s^2 - 2hs$, kde $hs \neq 0$.

Určete první člen a kvocient této posloupnosti pomocí daných reálných čísel h, s.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy (v oboru reálných čísel) vzhledem k daným číslům h, s.

Řešení. Z textu úlohy vyplývá, že je $h \neq 0$, $s \neq 0$.

Hledáme reálná čísla x, y (x první člen, y kvocient) tak, aby platilo

$$\begin{aligned} x + xy + xy^2 &= s, \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= s^2 - 2hs. \end{aligned} \qquad (1)$$

Předpokládejme, že soustava (1) má řešení. Pak pro toto řešení platí

$$(x + xy + xy^2)^2 - (x^2 + x^2y^2 + x^2y^4) = 2x^2y + 2x^2y^2 + \\ + 2x^2y^3 = 2xy(x + xy + xy^2) = 2sxy;$$

odtud vzhledem k (1) plyne

$$s^2 - (s^2 - 2hs) = 2sxy$$

čili

$$2hs = 2sxy$$

čili

$$xy = h; \tag{2}$$

protože je $h \neq 0$, je též $x \neq 0$, $y \neq 0$.

První rovnici soustavy (1) můžeme psát také

$$xy + (xy)y + (xy)y^2 = sy;$$

odtud pomocí (2) dostáváme

$$h + hy + hy^2 = sy$$

čili

$$hy^2 + y(h - s) + h = 0. \tag{3}$$

Tato rovnice je kvadratickou rovnicí pro neznámou y (neboť je $h \neq 0$) a má reálné řešení tehdy a jen tehdy, když její diskriminant je nezáporný. Diskriminant je $\Delta = (h - s)^2 - 4h^2 = (s - 3h)(s + h)$.

Rozeznávejme nyní dva případy:

Případ [1]. Případ $\Delta = 0$ nastává pro $s = 3h$ a dále pro $s = -h$. Je-li $s = 3h$, rovnice (3) zní

$$hy^2 - 2hy + h = 0$$

čili

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

a má dvojnásobný kořen $y = 1$. Z rovnice (2) vyplývá $x = h$ a zkouškou se přesvědčíme, že čísla $x = h$, $y = 1$ jsou řešením soustavy (1), která pro $s = 3h$ má ovšem tvar

$$x + xy + xy^2 = 3h,$$
$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = h^2.$$

Je-li $s = -h$, rovnice (3) zní $hy^2 + 2hy + h = 0$ čili

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

a má dvojnásobný kořen $y = -1$. Z rovnice (2) plyne $x = -h$ a zkouškou se přesvědčíme, že tyto hodnoty vyhovují soustavě (1), která pro $s = -h$ má ovšem tvar

$$x + xy + xy^2 = s,$$
$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 3s^2.$$

Případ [2]. Případ $\Delta > 0$ nastává, je-li buď současně $s - 3h > 0$, $s + h > 0$ nebo současně $s - 3h < 0$, $s + h < 0$. Pak rovnice (3) má dva reálné různé kořeny (oba různé od nuly, neboť absolutní člen je $h \neq 0$), totiž

$$y_1 = \frac{-(h - s) + \sqrt{\Delta}}{2h}, \quad y_2 = \frac{-(h - s) - \sqrt{\Delta}}{2h}.$$

Soustava (1) má tedy buď řešení

$$y = y_1, \quad x = \frac{h}{y_1},$$

anebo má řešení

$$y = y_2, \; x = \frac{h}{y_2},$$

jak se snadno přesvědčíme zkouškou.

10. Dokažte, že mnohočlen

$$a^6 - a^5 - a^4 + a^2 + a - 1 \qquad (1)$$

je dělitelem mnohočlenu

$$a^{3n} - a^{2n+1} - a^{2n} - a^{2n-1} + a^{n+1} + a^n + a^{n-1} - 1, \qquad (2)$$

kde n je přirozené číslo.

Řešení. I. Pomocná věta (**P**). Je známa tato věta: Dvojčlen

$$x^r - 1,$$

kde r je dané přirozené číslo, je dělitelný dvojčlenem

$$x - 1.$$

II. Pro $n = 1$ je daný mnohočlen (2) roven nule a věta platí.

III. Nechť je nadále $n > 1$. Mnohočlen (1) označme stručně **D** a mnohočlen (2) označme **M**. Proveďme postupně tuto úpravu:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= (a^{3n} - a^{2n}) - (a^{2n+1} - a^{n+1}) - (a^{2n-1} - a^{n-1}) + \\ &\quad + (a^n - 1) = \\ &= a^{2n}(a^n - 1) - a^{n+1}(a^n - 1) - a^{n-1}(a^n - 1) + \\ &\quad + (a^n - 1) = \\ &= (a^n - 1)(a^{2n} - a^{n+1} - a^{n-1} + 1) = \\ &= (a^n - 1)\,[a^{n+1}(a^{n-1} - 1) - (a^{n-1} - 1)] = \\ &= (a^n - 1)(a^{n-1} - 1)(a^{n+1} - 1),\end{aligned}$$

t. j.

$$\mathbf{M} = (a^{n-1} - 1)(a^n - 1)(a^{n+1} - 1). \tag{3}$$

Protože mnohočlen **D** dostaneme z mnohočlenu **M** pro $n = 2$, platí

$$\mathbf{D} = (a - 1)(a^2 - 1)(a^3 - 1). \tag{3'}$$

Exponenty

$$n - 1,\ n,\ n + 1 \tag{4}$$

ve výrazu (3 jsou tři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla (podle učiněného předpokladu je $n - 1 > 0$).

Proto je jedno z nich dělitelné třemi; dále jedno nebo dvě z nich jsou čísla sudá. Rozeznávejme tři případy.

Případ [1]. Nechť je $n - 1$, nebo $n + 1$ dělitelné třemi; označme to číslo l.

Čísla $n - 1$, $n + 1$ jsou buď obě sudá, nebo je sudé číslo n a pak jsou obě čísla $n - 1$, $n + 1$ lichá. V obou těchto případech existuje mezi čísly (4) číslo $s \neq l$, které je sudé. Třetí, zbývající číslo mezi čísly (4) označme t.

Pak dvojčlen $a^l - 1$ ve výrazu (3) má tvar $a^{3k} - 1$ neboli

$$(a^3)^k - 1, \tag{5}$$

kde k je přirozené číslo. Ale dvojčlen (5) je podle věty (**P**) dělitelným dvojčlenem

$$a^3 - 1. \tag{6}$$

Další činitel výrazu (3) má tvar $a^s - 1$ neboli

$$(a^2)^p - 1, \tag{7}$$

kde p je přirozené číslo. Podle věty (**P**) je dvojčlen (7) dělitelný dvojčlenem

$$a^2 - 1. \tag{8}$$

Konečně další (třetí) činitel výrazu (3) má tvar $a^t - 1$ a podle věty (**P**) je dělitelný dvojčlenem

$$a - 1. \tag{9}$$

Jeden ze tří činitelů (3) je tedy dělitelný dvojčlenem (6), další (od předchozího různý) je dělitelný dvojčlenem (8) a poslední činitel výrazu (3) (různý od předchozích) je dělitelný dvojčlenem (9); ale součin dvojčlenů (6), (8), (9) je právě mnohočlen **D** (viz (3')). Tím je pro tento případ věta dokázána.

Případ [2]. Nechť je číslo n ve (4) dělitelné třemi; označme je l. Nechť jsou dále čísla $n - 1$, $n + 1$ sudá; první označme s, druhé t.

Potom stejně jako v případě [1] snadno dokážeme platnost věty vyslovené v textu úlohy.

Případ [3]. Nechť je číslo n ve [4] dělitelné třemi a sudé, takže platí $n = 6k$, kde k je přirozené číslo.

Pak jsou obě čísla $n - 1$, $n + 1$ lichá, takže každý z činitelů $a^{n-1} - 1$, $a^{n+1} - 1$ ve výrazu (3) je dělitelný číslem

$$a - 1 . \tag{10}$$

O dvojčlenu

$$a^{6k} - 1 \tag{11}$$

ve výrazu (3) platí

$$a^{6k} - 1 = (a^6)^k - 1 ;$$

podle věty (**P**) plyne, že je dělitelný výrazem $a^6 - 1$. Ale dále je

$$a^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1) = (a^3 - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1),$$

takže výraz (11) je dělitelný výrazem

$$(a^3 - 1)(a + 1) . \tag{12}$$

Jsou tedy jednotliví činitelé výrazu (3) po řadě dělitelní výrazy

$$a - 1,\ (a^3 - 1)(a + 1),\ a - 1 .$$

Avšak součin těchto výrazů je právě mnohočlen **D** (viz (3′)). Proto platí věta vyslovená v textu úlohy i pro tento případ [3].

Protože žádný jiný případ, než jsou diskutované případy [1] až [3], nemůže nastat, je věta dokázána.

11. Buď dán obdélník $ABCD$ svými rozměry $AB = a$, $BC = b$, kde $a \geqq b$; dále buď dáno číslo $m > 0$. Zvolte bod X uvnitř úsečky CD a bod Y uvnitř úsečky BC a sestrojte obdélník $XCYZ$.

a) Vyšetřete množinu všech takto sestrojených bodů Z, pro něž platí

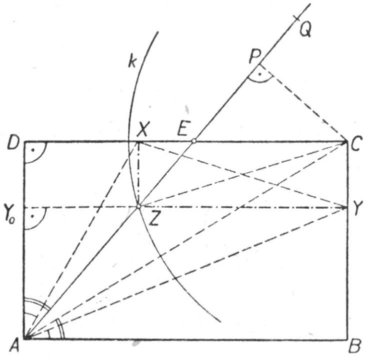
$$\sphericalangle XAD = \sphericalangle YAB . \tag{1}$$

b) Sestrojte úsečku XY takovou, aby platilo

$$\measuredangle XAD = \measuredangle YAB, \; XY = m. \qquad (2)$$

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům a, b, m.

Řešení (obr. 7). Úloha a). I. Buď $XCYZ$ libovolný obdélník, sestrojený podle textu úlohy; přitom platí vztah (1).



Obr. 7.

Označme Y_0 průsečík přímek AD, YZ; je tedy

$$AY_0 = BY, \; ZY_0 = DX. \qquad (3)$$

Trojúhelníky XAD, YAB se shodují v úhlech (1) a v pravých úhlech (při vrcholech D, B), proto jsou podobné; platí tedy

$$\triangle XAD \sim \triangle YAB.$$

Odtud plyne

$$\frac{BY}{DX} = \frac{AB}{AD};$$

vzhledem ke vztahům (3) a označení $AB = a$, $AD = b$ odtud dostaneme

$$\frac{AY_0}{ZY_0} = \frac{a}{b}.$$

Odtud plyne, že pravoúhlé trojúhelníky AZY_0, ABC (s pravými úhly při vrcholech Y_0, B) jsou podobné, t. j. platí

$$\triangle AZY_0 \sim \triangle ACB;$$

proto je

$$\sphericalangle ZAY_0 = \sphericalangle CAB$$

pro všechny obdélníky $XCYZ$, které vyhovují podmínkám úlohy. Padne tedy každý bod Z dovnitř úsečky AE, kde E je bod polopřímky DC takový, že platí

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB.$$

Protože zřejmě platí

$$\triangle AED \sim \triangle ACB \text{ (shodnost ve dvou úhlech)},$$

je

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

neboli

$$DE = \frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

Padne tedy bod E pro $a = b$ do bodu C; pro $a > b$ padne bod E dovnitř úsečky DC. Proto každý vnitřní bod úsečky AE padne dovnitř obdélníka $ABCD$.

II. Nyní výsledek odstavce I obrátíme. Uvnitř úsečky AE, sestrojené v odst. I, zvolme libovolný bod a označme jej Z. Dále označme X, Y paty kolmic vedených po řadě bodem Z k přímkám DC, BC; body X, Y padnou zřejmě po řadě dovnitř úseček DC, BC. Průsečík přímek ZY, AD označme Y_0; zřejmě je $AY_0 = BY$. Z podobnosti trojúhelníků AZY_0, AED dostaneme

$$\frac{ZY_0}{DE} = \frac{AY_0}{AD};$$

protože však je $ZY_0 = DX$, dostaneme odtud vzhledem k tomu, že je $AD = b$ a vzhledem ke vztahu (4), že

$$DX = \frac{AY_0}{b} \cdot \frac{b^2}{a} \quad \text{neboli} \quad \frac{DX}{b} = \frac{AY_0}{a}.$$

Protože však je $AY_0 = BY$, $b = AD$, $a = AB$, plyne z předchozí rovnosti vztah

$$\frac{DX}{AD} = \frac{BY}{AB};$$

proto jsou oba pravoúhlé trojúhelníky AXD, AYB (s pravými úhly při vrcholech D, B) podobné, t. j.,

$$\triangle AXD \sim \triangle AYB.$$

Proto je

$$\sphericalangle XAD = \sphericalangle YAB.$$

Tím je dokázáno: Množina všech bodů Z, které vyhovují úloze, jsou všechny vnitřní body úsečky AE, sestrojené na konci odstavce I.

Úloha b). I. Abychom sestrojili úsečku XY, která vyhovuje podmínkám (2) úlohy, stačí podle výsledku úlohy a) sestrojit obdélník $XCYZ$ takový, že v něm je úhlopříčka $CZ = m$; to proto, že v obdélníku $XCYZ$ o úhlopříčkách platí $XY = CZ$.

Podle toho sestrojíme nejdříve bod Z takový, aby ležel uvnitř úsečky AE a aby o něm platilo $CZ = m$. Konstrukci bodu Z provedeme vzhledem k výsledku úlohy a) takto: Na úsečce DC určíme bod E tak, aby $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$.

Dále sestrojíme kružnici $k \equiv (C, m)$ a určíme společný bod Z kružnice k a úsečky AE. Když bod Z padne dovnitř úsečky AE, sestrojíme obdélník $XCYZ$ podle textu úlohy; úsečka XY je pak řešením úlohy. Tato konstrukce je vzhledem k předchozím úvahám správná.

II. Na základě předchozích úvah provedeme diskusi řešitelnosti dané úlohy. Řešitelnost zřejmě závisí na tom, zda uvnitř úsečky AE lze najít bod Z tak, aby o něm platilo

$$CZ = m,$$

kde $m > 0$ je dané číslo. Rozeznávejme dva případy.

Případ [1]. Nechť je $a = b$ neboli $E \equiv C$. Potom zřejmě o hledaném bodu Z musí platit $0 < CZ < CA$ neboli

$$0 < m < a\sqrt{2} \tag{5}$$

(neboť velikost úhlopříčky AC čtverce $ABCD$ je $a\sqrt{2}$). Pro každé m, které splňuje tento vztah, má úloha v tomto případě zřejmě jediné řešení.

Případ [2]. Nechť je $a > b$, takže bod E leží uvnitř úsečky DC. Protože je $CE = DC - DE$, pak vzhledem ke vztahu (4) dostaneme $CE = a - \dfrac{b^2}{a}$ neboli

$$CE = \frac{a^2 - b^2}{a}. \tag{6}$$

Úloha bude mít zřejmě řešení, jestliže bude platit

$$CE < CZ < CA; \tag{7}$$

tuto podmínku lze psát vzhledem ke vztahu (6) a vzhledem k tomu, že $CA = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagorova věta užitá na trojúhelník ABC, kde $\sphericalangle B = 90°$), takto:

$$\frac{a^2 - b^2}{a} < m < \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{8}$$

Platí-li tento vztah, potom bod E leží zřejmě uvnitř úsečky CD a pata P kolmice vedené bodem C k přímce AE padne na prodloužení úsečky AE za bod E. To snadno dokážeme: Pak je totiž úhel $\sphericalangle AED$ zřejmě ostrý a s ním je ostrý i úhel $\sphericalangle QEC$ k němu vrcholový; podle známé poučky padne pata P kolmice $CP \perp AE$ dovnitř polopřímky EQ, opačné k polopřímce EA. Jestliže nyní bod H probíhá polopřímku EA tak, že jeho vzdálenost od bodu E vzrůstá, pak vzrůstá neustále i vzdálenost bodů C, H, jak plyne ze známé poučky. Pak vzhledem k platnosti vztahu (8) uvnitř úsečky EA existuje právě jeden bod Z takový, že o něm platí vztah $CZ = m$. Úloha má tedy za předpokladu platnosti vztahu (8) jediné řešení.

Závěr. Je zřejmé, že vztah (5) ze vztahu (8) dostaneme, položíme-li $a = b$. Lze tedy říci: Úloha má jediné řešení, když o číslech $a \geqq b$, $m > 0$ platí vztahy

$$\frac{a^2 - b^2}{a} < m < \sqrt{a^2 + b^2};$$

jinak nemá řešení.

12. Buďte dány tři přímky p, q, x, z nichž každé dvě jsou mimoběžné. Dále buď dána rovina $\varrho \parallel x$, při čemž přímka x neleží v rovině ϱ.

Na přímce x určete všechny body X, z nichž se přímky p, q promítají na rovinu ϱ jako rovnoběžky.*)

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k různým vzájemným polohám daných přímek a roviny ϱ.

Řešení (viz obr. 8). I. Označme $\varrho_1 \parallel \varrho$ rovinu, která obsahuje přímku x; protože je $x \parallel \varrho$, existuje taková rovina ϱ_1 právě jedna, a protože přímka x neleží v rovině ϱ, je $\varrho_1 \neq \varrho$.

*) Je-li X střed promítání a ϱ průmětna, která bodem X neprochází, pak průmětem přímky m, která neprochází bodem X, je průsečnice rovin ϱ a (X, m).

Předpokládejme, že daná úloha má řešení a že tedy existuje na přímce x bod X, který vyhovuje úloze. Protože každé dvě z přímek x, p, q jsou mimoběžné, neleží bod X na žádné z přímek p, q; proto jsou jednoznačně určeny roviny (Xp), (Xq).

Tyto roviny jsou navzájem různé; kdyby totiž splynuly, nebyly by přímky p, q mimoběžné. Ale roviny (Xp), (Xq) mají společný bod X; proto jsou nutně různoběžné a protínají se v určité přímce y. Podle předpokladu, že existuje bod X, který je řešením úlohy, protínají roviny (Xp), (Xq) rovinu ϱ po řadě v přímkách p_0, q_0, které jsou podle požadavku úlohy navzájem rovnoběžné, t. j. platí $p_0 \parallel q_0$. Přitom je $p_0 \neq q_0$, jinak by roviny (Xp), (Xq) splývaly (bod X leží totiž mimo přímky p_0, q_0), což není možné vzhledem k tomu, že p, q jsou mimoběžky. Protože p_0, q_0 jsou přímky, ležící po řadě v různoběžných rovinách (Xp), (Xq), musí být rovnoběžné s jejich průsečnicí y, t. j. platí $p_0 \parallel y$, $q_0 \parallel y$. Je tedy též $y \parallel \varrho$; protože je $\varrho \parallel \varrho_1$, je též $y \parallel \varrho_1$. Ale přímka y prochází bodem X roviny ϱ_1; z toho plyne, že přímka y leží v rovině ϱ_1.

Přímka y má tedy tyto vlastnosti:

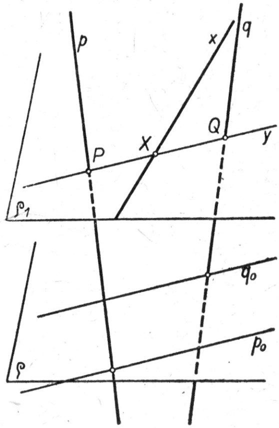
a) Leží v rovině ϱ_1,
b) má společný bod X s přímkou x,
c) leží ve společné rovině s přímkou p,
d) leží ve společné rovině s přímkou q.

Přitom je však $y \neq x$ (jinak by na př. mimoběžky x, p ležely ve společné rovině, což není možné). Dále je $y \neq p$, $y \neq q$ (jinak by na př. mimoběžky x, p ležely v jedné rovině). Jsou tedy přímky x, y různoběžné. Pro vzájemnou polohu přímek y, p, q jsou vzhledem k vlastnostem c), d) myslitelné tyto možnosti:

Případ [1] (obr. 8). Dvojice y, p i dvojice y, q jsou různoběžky; to znamená, že přímka y protíná přímky p, q po řadě v bodech $P \neq Q$ (a je tedy y příčkou obou mimoběžek p, q).

Případ [2]. Jedna z dvojic y, p a y, q jsou různoběžky a druhá dvojice jsou různé rovnoběžky. Platí tedy na př.: přímky y, p mají společný bod P a dále je $y \parallel q$, ale tak, že $y \not\equiv q$.

Případ [3]. Dvojice y, p i dvojice y, q jsou rovnoběžky. Tento případ nemůže nastat, a proto jej hned vyloučíme; ze vztahů $p \parallel y$, $y \parallel q$ plyne totiž $p \parallel q$, což je proti předpokladu textu úlohy, neboť p, q jsou mimoběžky.



Obr. 8.

II. Podle předchozího rozboru provedeme nyní konstrukci bodu X. Rozeznávejme vzhledem k předchozím nutným podmínkám tyto případy:

Případ [1]. Nechť přímky p, q protínají rovinu ϱ_1 z odstavce I v bodech P, Q; tyto body jsou nutně navzájem různé, jinak by p, q nebyly mimoběžky. Potom podle odst. I, případ [1], může být hledaným bodem X jedině společný bod přímek $x, y \equiv PQ$. Jistě je $x \not\equiv y$, jinak by přímky x, p (a také x, q) nebyly mimoběžky. Nyní jsou právě dvě možnosti:

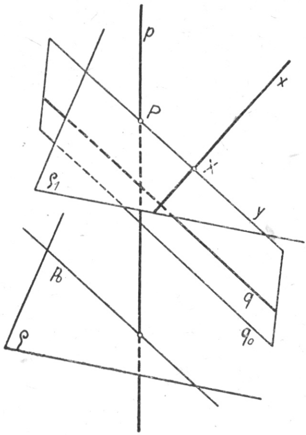
a) Nechť přímky $x, y \equiv PQ$ jsou různoběžky a mají tedy jediný společný bod X. Tento bod X je jistě různý od bodů P, Q (jinak by x, p anebo x, q nebyly mimoběžky). Proto existují roviny (Xp), (Xq), které jsou jednoznačně určeny; jejich průsečnice je $y \equiv PQ$, neboť rovina (Xp) obsahuje body $P, X \not\equiv P$ a rovina (Xq) obsahuje body $Q, X \not\equiv Q$, při čemž tyto tři různé body P, Q, X podle konstrukce bodu X leží v jedné přímce y.

Protože průsečnice $y \equiv PQ$ obou rovin (Xp), (Xq) leží v rovině ϱ_1, protnou roviny (Xp), (Xq) rovinu ϱ po řadě v přímkách p_0, q_0, o nichž platí $p_0 \parallel y$, $q_0 \parallel y$ neboli $p_0 \parallel q_0$. Přitom jsou přímky p_0, q_0 požadované průměty přímek p, q z bodu X přímky x na rovinu ϱ, takže splňují požadavky dané úlohy.

V tomto případě [1] a) má tedy úloha jediné řešení.

b) Nechť přímky x, $y \equiv PQ$ jsou různé rovnoběžky. Potom nemají společného bodu. Protože neexistuje bod X, který by ležel současně na obou přímkách x, y, nemá úloha řešení.

Poznámka. V tomto případě je přímka x zřejmě rovnoběžná s průsečnicí rovin (Q, p), ϱ i s průsečnicí rovin (P, q), ϱ.



Obr. 9.

Případ [2] (obr. 9). Nechť přímka p protíná rovinu ϱ_1 v bodě P a nechť je $q \parallel \varrho_1$, při čemž přímka q v rovině ϱ_1 neleží (jinak by totiž nebyly přímky x, q mimoběžky). (Druhý případ, kdy přímka q rovinu ϱ_1 protíná a přímka p je s rovinou ϱ_1 rovnoběžná, převedeme na předchozí případ výměnou označení přímek p, q.)

Bodem P veďme přímku $y \parallel q$; tato přímka $y \not\equiv q$ vzhledem k tomu, že je $q \parallel \varrho_1$, leží v rovině ϱ_1. Přímky x, y jsou nutně různoběžné; je-li totiž $q \parallel y$, $y \parallel x$, potom je $q \parallel x$, což je proti předpokladu, že přímky x, q jsou mimoběžné.

Označme X společný bod různoběžek x, y. Potom obě různé roviny (Xp), (Xq) neboli roviny (y, p), (y, q) mají průsečnici $y \parallel \varrho$; proto protnou po řadě rovinu ϱ v různých přímkách

$p_0 \parallel y$, $q_0 \parallel y$; odtud plyne, že je $p_0 \parallel q_0$, takže přímky p_0, q_0 splňují požadavky úlohy. V případě [2] má tedy úloha jediné řešení.

Jiné možnosti není.

III. Závěr. Úloha má řešení jedině v těchto případech (viz odst. II, případ [1] a), případ [2]): a) Přímky p, q protínají rovinu ϱ_1 (sestrojenou v I. odstavci) ve dvou různých bodech P, Q, při čemž jsou přímky x, PQ různoběžné.

b) Jedna z přímek p, q rovinu ϱ_1 (z I. odstavce) protíná, kdežto druhá z přímek p, q je s rovinou ϱ_1 rovnoběžná.

Jinak úloha nemá řešení; tak na př. nemá řešení v případě, když mimoběžky x, p, q jsou rovnoběžné s rovinou ϱ.

13. Určete všechna přirozená čísla k taková, aby číslo k^2 (zapsané v dekadické soustavě) mělo na posledních dvou místech stejné cifry různé od nuly.

Řešení. Každé přirozené číslo k lze napsat ve tvaru

$$k = 10a + b, \tag{1}$$

kde a, b jsou nezáporná celá čísla, která nejsou současně rovna nule; číslo b je přitom menší než 10. Hledané číslo k nemůže být jednociferné, neboť čísla $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$, zapíšeme-li je dekadickým zápisem, nemají stejné cifry; proto musí být $a \neq 0$. Rovněž případ $b = 0$ snadno vyloučíme.

Vzhledem k (1) pak platí

$$k^2 = 100a^2 + 10 \cdot 2ab + b^2, \tag{2}$$

kde a, b jsou přirozená čísla.

Člen $100a^2$ ve vztahu (2) není pro naši úlohu třeba uvažovat, neboť je větší nebo roven číslu 100.

Číslo b^2 nemá na místě jednotek žádné z čísel 2, 3, 7, 8, neboť čísla $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 9^2$ nemají na místě jednotek v dekadickém zápisu žádné z těchto čísel. Musíme tedy zkoumat, zda číslo b^2 může mít na místě jednotek čísla 1, 4, 5, 6, 9. Dále si všimněme ještě tohoto faktu: Číslo $2ab$ (viz vztah (2)), zvětšené o desítky čísla b^2, má na místě jednotek číslo, které udává desítky čísla k^2.

Případ [1]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 1; pak je nutně buď $b = 1$ nebo $b = 9$.

Ale $2ab + 0$ nebo $2ab + 8$ (číslo 9^2 má 8 desítek) jsou sudá čísla; číslo k^2 má tedy v tomto případě na místě jednotek číslo liché a na místě desítek číslo sudé. Proto případy $b = 1$, $b = 9$ nevedou k řešení úlohy.

Případ [2]. Nechť číslo b^2 má na místě jednotek číslo 4; pak je nutně buď $b = 2$ nebo $b = 8$.

a) Pro $b = 2$ je $2ab = 4a$. Řešení dostaneme pro přirozená čísla a, která mají na místě jednotek číslo 1 nebo 6; ostatní čísla a nevyhovují úloze.

b) Pro $b = 8$ dostaneme $2ab + 6 = 16a + 6$ (číslo 6 je počet desítek čísla $b^2 = 64$); jednotkami tohoto čísla má být číslo 4. Řešení dostaneme pro přirozená čísla a, která mají na místě jednotek číslo 3 nebo 8.

Případ [3]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 5; pak je nutně $b = 5$, $b^2 = 25$. Číslo $2ab + 2$ (číslo 2 jsou desítky čísla $b^2 = 25$) je sudé, kdežto na místě jednotek je číslo 5. Tento případ nevede k řešení.

Případ [4]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 6; pak je nutně $b = 4$ nebo $b = 6$.

a) Pro $b = 4$ je $b^2 = 16$; číslo $2ab + 1$ je liché, kdežto na místě jednotek je číslo 6. Tento případ nevede k řešení.

b) Pro $b = 6$ je $b^2 = 36$; číslo $2ab + 3$ je liché. Stejně jako v předchozím případě nedostaneme řešení.

Případ [5]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 9; pak je nutně $b = 3$ nebo $b = 7$.

a) Pro $b = 3$ je $b^2 = 9$. Číslo $2ab$ je sudé, kdežto na místě jednotek je číslo 9. Tento případ nevede k řešení.

b) Pro $b = 7$ je $b^2 = 49$. Číslo $2ab + 4$ je sudé a stejně jako v předchozím případě nedostaneme řešení.

Závěr. Řešení dostáváme v případech:

Případ [2] a), kdy $b = 2$ a přirozené číslo a končí číslicí 1 nebo 6; to znamená, že poslední dvojčíslí čísla k je buď 12 nebo 62, takže $k = 100m + 12$ nebo $k = 100m + 62$, kde m je libovolné celé nezáporné číslo. Řešením jsou členy těchto aritmetických posloupností s diferencí 100:

$$12;\ 112;\ 212;\ 312;\ \ldots\ ,$$
$$62;\ 162;\ 262;\ 362;\ \ldots\ .$$

Případ [2] b), kdy $b = 8$ a přirozené číslo a končí číslicí 3 nebo 8. Tu je $k = 100m + 38$ nebo $k = 100m + 88$, kde m je libovolné celé nezáporné číslo. Řešením jsou členy aritmetických posloupností s diferencí 100:

$$38;\ 138;\ 238;\ 338;\ \ldots\ ,$$
$$88;\ 188;\ 288;\ 388;\ \ldots\ .$$

Zkoušku provedeme takto: Snadno nahlédneme, že pro čísla k platí

$$k = 50p \pm 12,$$

kde p je celé nezáporné číslo. Proto je $k^2 = 50p(50p \pm 24) + 144$. První člen na pravé straně je pro $p = 0$ roven nule, pro $p > 0$ je to číslo dělitelné stem; proto číslo k^2 má poslední dvojčíslí 44, tedy na obou posledních místech táž čísla, jak požadovala úloha.

14. Najděte všechna komplexní čísla z, která vyhovují rovnici

$$z = \frac{z + ai}{\bar{z}}, \qquad (1)$$

kde a je dané reálné číslo, $\bar{z}$ je číslo komplexní sdružené s číslem z a číslo i je imaginární jednotka. Řešení vyložte geometricky.

Řešení. Z rovnice (1) odvodíme rovnici

$$z\bar{z} - z - a\mathrm{i} = 0. \tag{2}$$

Je-li $a \neq 0$, nemá rovnice (2) kořen 0, t. j. rovnice (1) a (2) mají táž řešení (jsou ekvivalentní). Položíme-li $z = x + y\mathrm{i}$, $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$, můžeme napsat (2) ve tvaru

$$x^2 + y^2 - x - y\mathrm{i} - a\mathrm{i} = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x &= 0, \\ y + a &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

při čemž ovšem pro soustavu (3) přicházejí v úvahu jen reálná řešení. Obvyklým postupem dostaneme ze soustavy (3) soustavu s ní ekvivalentní

$$\begin{aligned} x^2 - x + a^2 &= 0, \\ y &= -a. \end{aligned} \tag{4}$$

Soustava (4) je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li diskriminant první rovnice (4) číslo nezáporné, t. j. je-li

$$1 - 4a^2 \geqq 0,$$

t. j. je-li $|a| \leqq \frac{1}{2}\cdot$ Pro $a = \frac{1}{2}$ nebo $a = -\frac{1}{2}$ má jediné řešení; pro a, pro něž platí $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, má dvě různá řešení.

V případě $a = 0$, který jsme předem vyloučili, má rovnice (1) jediné řešení $z = 1$. Upravíme totiž rovnici (2) na tvar

$$z(\bar{z} - 1) = 0.$$

Případ $z = 0$ musíme vyloučit, neboť pak je též $\bar{z} = 0$ a zlomek na pravé straně daného vztahu (1) nemá smysl. Zbývá druhý kořen $\bar{z} = 1$ a tím též $z = 1$, který pro $a = 0$ zřejmě splňuje vztah (1).

Geometrický význam. Rovnice

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

je rovnicí kružnice k se středem $[\frac{1}{2}, 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$; $y = -a$ je rovnice přímky rovnoběžné s osou reálných čísel. Jde o společné body obou čar. Je-li $|a| > \frac{1}{2}$, je přímka nesečnou; je-li $a = \frac{1}{2}$ nebo $a = -\frac{1}{2}$, je tečnou; je-li $|a| < \frac{1}{2}$, je přímka $y = -a$ sečnou kružnice k. V případě $a = 0$ je však jeden z průsečíků obraz čísla 0, které nevyhovuje rovnici (1), proto zbývá jediný kořen $z = 1$.

15. Řešte soustavu rovnic

$$x + y = \alpha,\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos\alpha, \qquad (1)$$

kde α je dané číslo.

Řešení. Platí vzorec

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Pomocí tohoto vzorce upravíme druhou rovnici (1); dostaneme postupně

$$\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y) = 1 - \cos\alpha$$

neboli

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos\alpha.$$

Nyní k úpravě levé strany této rovnice použijeme vzorce $\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cdot\cos\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$; dostaneme

$$2\cos(x + y)\cdot\cos(x - y) = 2\cdot\cos\alpha$$

a po dosazení za $x + y$ z první rovnice (1)

$$2\cos\alpha\cdot\cos(x - y) = 2\cos\alpha$$

neboli po úpravě

$$\cos\alpha[\cos(x - y) - 1] = 0. \qquad (2)$$

Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Nechť platí $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo; potom je $\cos\alpha = 0$ a rovnice (2) je splněna pro každou dvojici čísel, o nichž platí $x + y = \alpha$. Obráceně, dvojice čísel x, y, kde x je libovolné číslo a $y = \alpha - x$ (při čemž je $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo), vyhovuje skutečně soustavě (1), jak se snadno zjistí dosazením.

Případ [2]. Nechť platí $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo. Potom je $\cos\alpha \neq 0$ a z rovnice (2) plyne

$$\cos(x - y) = 1$$

neboli

$$x - y = 2m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo.

Připojme k této rovnici první rovnici (1) a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= \alpha, \\ x - y &= 2m\pi. \end{aligned}$$

Odtud pro neznámé x, y plyne

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha + m\pi, \quad y = \tfrac{1}{2}\alpha - m\pi, \tag{3}$$

kde m je libovolné celé číslo a $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo.

Obráceně, dvojice (3) čísel x, y, při čemž platí právě uvedené podmínky pro čísla m a α, je řešením soustavy (1); o tom se snadno přesvědčíme dosazením do (1).

16. Buď dána kulová plocha o středu S a o poloměru $r = 1$; na této ploše buďte dány čtyři body A, B, C, D, které jsou vrcholy čtyrstěnu $ABCD$.

Jestliže bod S leží uvnitř čtyrstěnu $ABCD$, potom platí: Ze tří hran AB, AC, AD alespoň jedna má velikost větší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

Poznámka. Při důkazu použijte těchto vět:

V1. Leží-li všechny čtyři vrcholy čtyrstěnu v nějakém poloprostoru, potom leží všechny vnitřní body daného čtyrstěnu uvnitř tohoto poloprostoru.

V2. Budiž dána kulová plocha o středu S a o poloměru $r = 1$. Označme A její bod a $\varrho \perp SA$ rovinu, která prochází bodem S. Potom každý bod X této plochy kulové, pro který platí $AX \leqq \sqrt{2}$, leží v poloprostoru ϱA.

Řešení. Důkaz tvrzení dané úlohy provedeme nepřímo. Předpokládejme, že každá z hran AB, AC, AD má velikost, která není větší než $\sqrt{2}$; dokážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Označme ϱ rovinu, která prochází bodem S a stojí kolmo k přímce SA. Podle věty **V2** leží body B, C, D v poloprostoru ϱA. Všechny vrcholy čtyrstěnu $ABCD$ leží tedy v poloprostoru ϱA; proto podle věty **V1** leží všechny vnitřní body čtyrstěnu $ABCD$ uvnitř poloprostoru ϱA. Bod S leží v hraniční rovině ϱ poloprostoru ϱA a tudíž není vnitřním bodem poloprostoru ϱA; protože však všechny vnitřní body čtyrstěnu $ABCD$ leží uvnitř poloprostoru ϱA, neleží bod S uvnitř čtyrstěnu $ABCD$, jak požaduje předpoklad úlohy. Tím jsme dospěli ke sporu.

Neplatí tedy, že každá z hran AB, AC, AD má velikost, která není menší než $\sqrt{2}$, t. j. alespoň jedna z těchto hran má velikost větší než $\sqrt{2}$. To jsme měli dokázat.

2. Úlohy II. kola kategorie A.

1. Nech m je dané reálne číslo. Riešte rovnicu

$$\frac{1 + x}{m + x} = \frac{m^3 + x}{m^2 + x} \tag{1}$$

s neznámou x.

Riešenie. Predpokladajme, že rovnica (1) má riešenie. Potom to isté riešenie má aj rovnica

$$(1 + x)(m^2 + x) = (m + x)(m^3 + x)$$

čiže rovnica

$$m^2 + x(m^2 + 1) = m^4 + x(m + m^3),$$

t. j. rovnica

$$x(m^3 + m - m^2 - 1) = m^2 - m^4,$$

teda rovnica

$$x(m^2 + 1)(m - 1) = m^2(1 - m^2). \tag{2}$$

Rozoznávajme dva prípady:

Prípad [1]. Nech je $m \neq 1$. Potom je $m - 1 \neq 0$, $m^2 + 1 \neq$ $\neq 0$ a rovnica (2) má jediné riešenie

$$x_1 = \frac{m^2(1 - m^2)}{(m^2 + 1)(m - 1)},$$

t. j.

$$x_1 = -\frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2}.$$

Ak je $m = 0$, je aj $x_1 = 0$ a číslo $x = x_1$ nie je riešením rovnice (1), lebo je $m + x_1 = 0$, $m^2 + x_1 = 0$ a zlomky v rovnici (1) nemajú zmysel.

Ak je $m \neq 0$ (a pravda, podľa predpokladu aj $m \neq 1$), je

$$m + x_1 = m - \frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2} = \frac{m(1 - m)}{1 + m^2} \neq 0,$$

$$m^2 + x_1 = m^2 - \frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2} = \frac{m^3(m - 1)}{1 + m^2} \neq 0;$$

preto zlomky v rovnici (1) majú zmysel. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že x_1 je riešením rovnice (1).

Prípad [2]. Nech je $m = 1$. Potom rovnica (1) znie

$$\frac{1+x}{1+x} = \frac{1+x}{1+x}$$

a jej riešením je zrejme každé číslo $x \neq -1$.

2. Ak obrazy komplexných čísel 0, z_1, z_2 tvoria v rovine vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1, platí vzťah

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 1. \tag{1}$$

Dokážte to. (Poznámka. Číslo $\bar{z}$ je komplexné združené číslo s číslom z.)

Riešenie. Podľa textu úloh sú z_1, z_2 komplexné jednotky. Obraz čísla z_2 vznikne z obrazu čísla z_1 otočením okolo začiatku O súradníc o uhol 60° v kladnom alebo zápornom zmysle. Je teda

$$z_2 = \varepsilon \cdot z_1, \text{ alebo } z_2 = \bar{\varepsilon} \cdot z_1, \tag{2}$$

kde $\varepsilon = \cos 60° + \mathrm{i} \sin 60° = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$ a $\bar{\varepsilon}$ je komplexné združené číslo k číslu ε.

Použitím prvého vzťahu (2) dostaneme

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{\varepsilon}\bar{z}_1 + \bar{z}_1\varepsilon z_1 = z_1\bar{z}_1(\bar{\varepsilon} + \varepsilon) = 1,$$

lebo je $\bar{\varepsilon} = \cos 60° - \mathrm{i} \cdot \sin 60°$, a preto je $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2\cos 60° = 1$.

Použitím druhého vzťahu (2) dostaneme

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\varepsilon\bar{z}_1 + \bar{z}_1\bar{\varepsilon} z_1 = z_1\bar{z}_1(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 1.$$

Tým sme v oboch prípadoch dokázali platnosť vzťahu (1).

Poznámka. Použili sme vzťah $\overline{(ab)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, kde a, b sú dané komplexné čísla; ďalej je $(\bar{\bar{a}}) = a$.

Jiné řešení. Označme O, Z_1, Z_2 obrazy čísel 0, z_1, z_2. Podle předpokladu platí $OZ_1 = OZ_2 = Z_1Z_2 = 1$. Místo těchto vztahů můžeme psát $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $|z_1 - z_2| = 1$ neboli $\sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1} = 1$, $\sqrt{z_2 \cdot \bar{z}_2} = 1$, $\sqrt{(z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1 - z_2})} = 1$. Z těchto tří vztahů snadno plyne

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 1, \tag{1}$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1, \tag{2}$$

$$(z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 1. \tag{3}$$

Vztah (3) postupně upravíme takto

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 1,$$

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = -1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2.$$

Dosadíme-li do pravé strany posledního vztahu ze vztahů (1), (2), obdržíme vztah

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 1, \tag{4}$$

jehož platnost jsme měli dokázat.

Obrácená věta neplatí. To plyne z tohoto příkladu: zvolme $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$, takže je $\bar{z}_1 = 1$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{2}$. Dosadíme-li tato čísla do vztahu (4), vidíme, že je splněn, ale obrazy příslušných čísel 0, z_1, z_2 leží v přímce, a tudíž nejsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.

Řešil s. Z. Eremiáš, 11. tř.
2. jedenáctiletky v Praze II, Štěpánská 22.

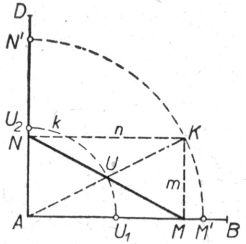
3. Buď dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je stěna a dále je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o hraně dané velikosti h; dále je dáno číslo $m > h$.

Sestrojte obdélník $MNPQ$, jehož vrcholy M, N, P, Q leží po řadě na polopřímkách AB, AD, $A'D'$, $A'B'$ a jehož úhlopříčky mají velikost m. Označte UV střední příčku tohoto obdélníka, která je rovnoběžná s přímkou MQ.

Jaký útvar vyplní body středních příček UV všech takto sestrojených obdélníků? Udejte podmínku řešitelnosti.

Řešení. I. Pomocná věta V. Buď dán pravý úhel $\sphericalangle BAD$. Množinou všech středů U úseček MN dané velikosti $v > 0$, kde M je bod polopřímky AB a N bod polopřímky AD, je čtvrtkružnice k, která je společnou částí úhlu $\sphericalangle BAD$ a kružnice o středu A a o poloměru $\frac{1}{2}v$.

Důkaz (obr. 10). K množině všech bodů U zřejmě patří bod U_1 polopřímky AB, kde $AU_1 = \frac{1}{2}v$, a dále bod U_2 polopřímky AD, kde $AU_2 = \frac{1}{2}v$ (neboť úsečky $AM' = v$, $AN' = v$, ležící po řadě v polopřímkách AB, AD, také vyhovují úloze); body U_1, U_2 jsou krajními body čtvrtkružnice k.



Obr. 10.

Nechť je nyní $M \neq A$ bod polopřímky AB takový, že $AM < v$. Potom kružnice o středu M a poloměru v protne polopřímku AD v jediném bodě $N \neq A$ (neboť vzdálenost středu M této kružnice od přímky AD je menší než její poloměr v). Potom existuje obdélník $AMKN$ (ležící v úhlu $\sphericalangle BAD$), jehož střed U patří vyšetřované množině; bod U skutečně leží na zmíněné čtvrtkružnici k, neboť je $AK = MN = v$ a tedy $AU = \frac{1}{2}v$.

Obráceně, každý bod U čtvrtkružnice k je středem jedné úsečky MN, která vyhovuje úloze. O bodech U_1, U_2 je to zřejmé. Buď dále U libovolný bod čtvrtkružnice k, různý od bodů U_1, U_2 (obr. 10). Na prodloužení úsečky AU určeme bod K tak, aby bylo $UK = AU = \frac{1}{2}v$. Bodem K veďme rovnoběžky $m \parallel AD$, $n \parallel AB$; označme $M \equiv (AB \cdot m)$, $N \equiv (AD \cdot n)$. Potom rovnoběžník $AMKN$ je obdélník, neboť $\sphericalangle BAD = 90°$.

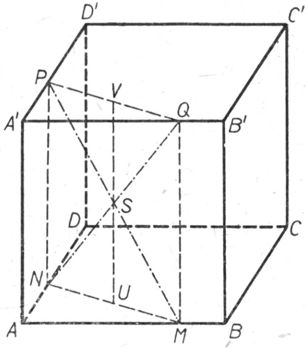
Bod U je podle konstrukce středem tohoto obdélníka, a proto je $MU = NU = \frac{1}{2}v$.

Tím jsme sestrojili úsečku MN, jejímž středem je daný bod U a obrácená věta je dokázána.

II. Řešení dané úlohy. (Viz obr. 11.) Nechť $MNPQ$ je jeden obdélník, který vyhovuje podmínkám úlohy, a $UV \parallel MQ$ jeho střední příčka (bod U je středem úsečky MN). Rovina $MNPQ$ protíná různoběžné roviny $ABB'A'$, $ADD'A'$ v přímkách $MQ \parallel NP$. Podle známé věty ze stereometrie nutně platí

$$MQ \parallel AA' \parallel NP$$

a rovina $MNPQ$ je rovnoběžná s přímkou AA'; proto je rovina $MNPQ$ kolmá k rovinám $ABCD$, $A'B'C'D'$.



Obr. 11.

Z pravoúhlého trojúhelníka MPN (kde $\sphericalangle N = 90°$, $MP = m$, $NP = h$) podle Pythagorovy věty dostaneme

$$MN = \sqrt{MP^2 - NP^2}$$

neboli

$$MN = \sqrt{m^2 - h^2}.$$

Označme

$$\sqrt{m^2 - h^2} = v. \tag{1}$$

Číslo v vzhledem k předpokladu $m > h$ existuje a je kladné a konstantní; všechny obdélníky $MNPQ$ mají zřejmě stejné rozměry.

Podle pomocné věty **V** množinou středů U úseček $MN = v$ je čtvrtkružnice k, ležící v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$, jejíž střed je bod A a poloměr $\frac{1}{2}v$.

Odtud plyne, že střední příčka UV leží na útvaru Ω, který je čtvrtinou pláště rotačního válce; podstavami válce jsou kruhy, ležící po řadě v rovinách $ABCD$, $A'B'C'D'$, o středech A, A' a poloměrech velikosti $\frac{1}{2}v$.

Obráceně, každá úsečka, jejíž body patří útvaru Ω, je zřejmě střední příčkou jednoho obdélníka $MNPQ$; to plyne z obrácené pomocné věty **V**.

Protože je $m > h$, má úloha vždycky řešení.

4. Buď dán rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB. Uvnitř strany AC buď dán bod X a na prodloužení strany BC za bod B buď dán bod Y. Označte P společný bod úseček AB a XY. Dokažte:

a) Jestliže platí $PX = PY$, potom platí $AX = BY$.

b) Jestliže platí $AX = BY$, potom platí $PX = PY$.

Řešení (obr. 12a). Označme $p \perp AB$ přímku jdoucí bodem C; přímka p je osou souměrnosti trojúhelníka ABC.

a) Bod P leží zřejmě uvnitř úseček AB, XY. Označme X' bod souměrně sdružený s bodem X podle osy p. Bod X' leží uvnitř strany BC a platí

$$BX' = AX. \tag{1}$$

Protože je $XX' \perp p$, $AB \perp p$, je $XX' \parallel AB$. Bod P je podle předpokladu středem strany XY trojúhelníka YXX' a úsečka PB je tedy střední příčkou tohoto trojúhelníka. Proto platí

$$BY = BX'$$

a odtud a ze vztahu (1) máme

$$BY = AX,$$

což jsme měli dokázat.

b) Sestrojme jako v úloze a) bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p; je tedy

$$BX' = AX. \tag{2}$$

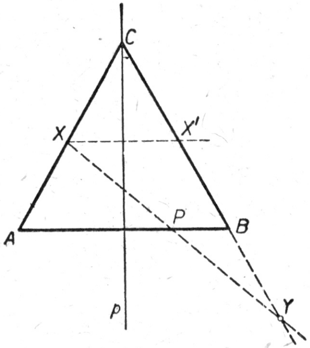
Podle předpokladu je

$$AX = BY. \tag{3}$$

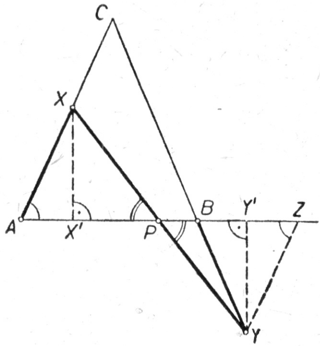
Spojením vztahů (2), (3) máme

$$BX' = BY,$$

takže bod B je středem strany YX' trojúhelníka YXX'. Protože je $XX' \perp p$, $AB \perp p$, je $XX' \parallel PB$ a úsečka PB je střední příčkou trojúhelníka YXX', t. j. bod P je středem strany XY, což jsme měli dokázat.



Obr. 12a.



Obr. 12b.

Jiné řešení (obr. 12b). a) Zvolme bod P za střed souměrnosti a označme PYZ trojúhelník souměrně sdružený s trojúhelníkem PXA. Tu je

$$AX = YZ, \tag{1}$$

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YZP. \tag{2}$$

Dále je $\sphericalangle XAP = \sphericalangle CBA$ (úhly při základně AB v rovnoramenném trojúhelníku ABC) a $\sphericalangle CBA = \sphericalangle YBZ$ (úhly vrcholové), takže je

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YBZ. \tag{3}$$

Ze (2), (3) plyne

$$\sphericalangle YZP = \sphericalangle YBZ. \tag{4}$$

Snadno usoudíme, že je skutečně $B \neq Z$, takže existuje trojúhelník YBZ; podle (4) však je rovnoramenný, t. j. platí $YZ = BY$. Z tohoto vztahu a ze vztahu (1) plyne

$$AX = BY,$$

což jsme měli dokázat.

b) Sestrojme na přímce AB bod $Z \neq B$ tak, aby platilo $YZ = BY$ neboli

$$YZ = AX; \tag{5}$$

to lze zřejmě provést jediným způsobem. Přitom bod Z musí ležet na prodloužení úsečky AB za bod B, jak se snadno dokáže.

Trojúhelník YBZ je tedy rovnoramenný, a proto platí

$$\sphericalangle YZB = \sphericalangle YBZ. \tag{6}$$

Ale $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \sphericalangle YBZ$ (první dvojice jsou úhly v rovnoramenném trojúhelníku ABC, druhá dvojice jsou úhly vrcholové). Odtud a ze vztahu (6) plyne, že

$$\sphericalangle YZB = \sphericalangle CAB. \tag{7}$$

Protože platí (5), (7) a dále je $\sphericalangle APX = \sphericalangle ZPY$, je

$$\triangle APX \cong \triangle ZPY \text{ (suu)}.$$

Odtud plyne, že platí

$$PX = PY,$$

což jsme měli dokázat.

Řešil s. Frant. Neuman,
11. tř. jedenáctiletky v Brně,
Elgartova 3.

Jiné řešení (obr. 12b). b) Označme X', Y' paty kolmic vedených po řadě body X, Y k přímce AB. Snadno se zjistí, že bod X' leží uvnitř úsečky AP a bod Y' na prodloužení úsečky AB za bod B. Nejprve dokážeme, že platí

$$\triangle XAX' \cong \triangle YBY' \text{ (suu).} \tag{1}$$

Důkaz. Podle předpokladu je $AX = BY$. Dále je $\sphericalangle AX'X = \sphericalangle BY'Y = 90°$. Konečně je $\sphericalangle XAX' = \sphericalangle YBY'$, neboť je $\sphericalangle CAX' = \sphericalangle CBA$ (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka ABC) a úhly $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle YBY'$ jsou vrcholové. Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (1) plyne

$$XX' = YY'. \tag{2}$$

Dále dokážeme, že platí

$$\triangle XPX' \cong \triangle YPY' \text{ (suu).} \tag{3}$$

Důkaz. Především platí (2). Dále je $\sphericalangle XX'P = \sphericalangle YY'P = 90°$ a konečně je $\sphericalangle XPX' = \sphericalangle YPY'$ (úhly vrcholové). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (3) plyne

$$PX = PY,$$

což jsme měli dokázat.

a) Užijeme označení jako v úloze b). Nejprve dokážeme, že platí

$$\triangle XPX' \cong \triangle YPY' \text{ (suu).} \tag{4}$$

Důkaz. Podle předpokladu je $PX = PY$. Dále je $\sphericalangle XX'P = \sphericalangle YY'P = 90°$. Konečně je $\sphericalangle XPX' = \sphericalangle YPY'$ (úhly vrcholové). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (4) plyne

$$XX' = YY'. \tag{5}$$

Dále dokážeme, že platí

$$\triangle XX'A \cong \triangle YY'B \text{ (suu).} \tag{6}$$

Důkaz. Platí (5). Dále je $\sphericalangle XX'A = \sphericalangle YY'B = 90°$. Konečně je $\sphericalangle XAX' = \sphericalangle YBY'$, což se dokáže stejně jako v úloze b). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (6) plyne

$$AX = BY,$$

což jsme měli dokázat.

Řešil s. Tomáš Zemčík,
roč. 3.b průmyslové školy chemické v Brně.

3. Úlohy III. kola kategorie A.

1. Buď dán lichoběžník $ABCD$, o jehož základnách platí: $AB > CD$. Označme E průsečík přímek AC, BD a F průsečík přímek AD, BC. Dále označme GH přímku jdoucí bodem E a rovnoběžnou se základnami, při čemž G leží na přímce AD a H na přímce BC. Označme po řadě K, L středy základen AB, CD.

Dokažte, že

a) přímka EF prochází body K, L;

b) existuje průsečík M přímek AC, KH a průsečík N přímek BD, KG;

c) body F, M, N leží v jedné přímce.

Řešení (viz obr. 13). a) Protože podle předpokladu úlohy je

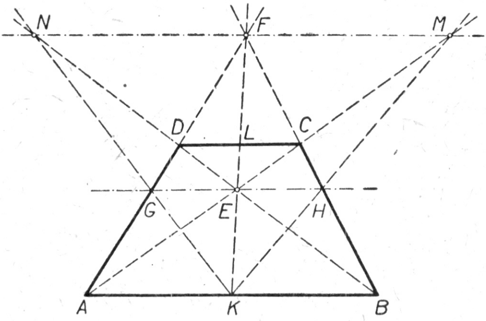
$$AB > CD, \; AB \parallel CD,$$

jsou úsečky AB, CD stejnolehlé podle dvou různých středů stejnolehlosti. Těmito středy jsou body F, E. Označme

$$\frac{CD}{AB} = k;$$

přitom tedy je $0 < k < 1$. Stejnolehlost o středu F má konstantu stejnolehlosti k; tuto stejnolehlost označíme (F, k). Stejnolehlost o středu E má konstantu $-k$; tuto stejnolehlost označíme $(E, -k)$.

Přitom bod F leží na prodloužení úsečky AD za bod D, neboť ze stejnolehlosti (F, k) plyne, že $\frac{FD}{FA} = k$ neboli $\frac{FD}{FA} < 1$, t. j. $FD < FA$.



Obr. 13.

Označme po řadě K', L' průsečíky přímky FE s přímkami AB, CD. Bod E zřejmě leží uvnitř trojúhelníka ABF, a proto bod K' padne dovnitř úsečky AB; ze stejnolehlosti (F, k) bodů K', L' plyne, že i bod L' leží uvnitř úsečky CD.

Ve stejnolehlosti $(E, -k)$ úsečce AK' přísluší úsečka CL', a proto platí

$$CL' = k \cdot AK'. \tag{1}$$

Ve stejnolehlosti (F, k) přísluší úsečce AK' úsečka DL' a platí

$$DL' = k \cdot AK'. \tag{2}$$

Porovnáním vztahů (1), (2) dostaneme

$$C'L' = DL',$$

a proto L' je středem úsečky CD. Odtud plyne, že též K' je středem úsečky AB. Proto je $L' \equiv L$ a $K' \equiv K$. Odtud plyne, že body K, L (po řadě středy úseček AB, CD) leží na přímce EF, což jsme měli v úloze a) dokázat.

b) Přímky AC, KH jsou dvě různé přímky, neboť je $A \not\equiv K$. Nemohou však být navzájem rovnoběžné. Připusťme, že platí $AC \parallel KH$; dokážeme, že to není možné. Protože je $AK \parallel EH$, plyne z předpokladu $AC \parallel KH$, že $AKHE$ je rovnoběžník, a proto platí $AK = EH$. Protože však je $AK = BK$, platí též $BK = EH$; zároveň platí $BK \parallel EH$, a proto je $KBHE$ rovnoběžník, t. j. platí $KE \parallel BH$, což odporuje tomu, že přímky KE, BH neboli přímky EF, BC mají společný bod F. Proto jsou přímky AC, KH různoběžné a existuje tedy jejich průsečík M, což jsme měli dokázat.

Stejně se dokáže, že přímky BD, KQ mají společný jediný bod, který označíme N.

Tím jsme dokázali tvrzení úlohy b).

c) Protože je $KB \parallel EH$, jsou tyto neshodné úsečky stejnolehlé podle středu F; označme (F, h) tuto stejnolehlost, kde

$$h = \frac{KB}{EH} > 0 \tag{4}$$

je konstanta stejnolehlosti.

Protože je $AK \parallel EH$, jsou tyto neshodné úsečky stejnolehlé podle středu M; označme (M, h') tuto stejnolehlost, kde

$$h' = \frac{AK}{EH} > 0. \tag{5}$$

Ze vztahů (4), (5) plyne

$$KB = h \cdot EH, \; AK = h' \cdot EH. \tag{6}$$

Protože však je $KB = AK$ (bod K je středem úsečky AB), plyne ze vztahů (6), že

$$h = h'.$$

Ze stejnolehlosti (F, h) plyne vztah

$$\frac{FK}{FE} = h \tag{7}$$

a ze stejnolehlosti $(M, h' = h)$ plyne vztah

$$\frac{MA}{ME} = h. \tag{8}$$

Vztahy (7), (8) upravíme na tvar

$$\frac{FK}{FE} - 1 = h - 1, \quad \frac{MA}{ME} - 1 = h - 1$$

neboli

$$\frac{FK - FE}{FE} = h - 1, \quad \frac{MA - ME}{ME} = h - 1,$$

což lze psát takto:

$$\frac{EK}{EF} = h - 1, \quad \frac{EA}{EM} = h - 1.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{EK}{EF} = \frac{EA}{EM}.$$

Tento výsledek říká, že ve stejnolehlosti o středu E, ve které bodu K přiřadíme bod F, přísluší bodu A bod M. Proto v této stejnolehlosti přísluší úsečce KA úsečka FM. Ale stejnolehlé úsečky jsou rovnoběžné; proto je

$$KA \parallel FM$$

neboli

$$FM \parallel AB,$$

což jsme měli dokázat.

Stejně se dokáže, že je

$$FN \parallel AB.$$

Odtud snadno plyne tvrzení úlohy c).

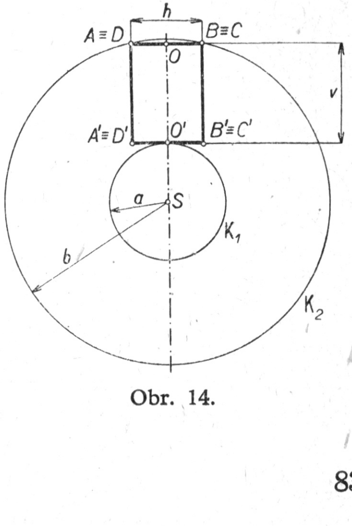
Řešil s. Bedřich Hejda,
žák 11. tř. jedenáctiletky v Praze XII.

2. Buďte dány dvě soustředné kulové plochy K_1 s poloměrem a a K_2 s poloměrem b; přitom je $a < b$.

Označme $ABCDA'B'C'D'$ kolmý hranol se čtvercovou podstavou $ABCD$ (při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), jehož vrcholy A, B, C, D leží na ploše K_2, a přitom rovina $A'B'C'D'$ se dotýká plochy K_1. Nechť dále platí, že

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{a}{b}.$$

Vypočtěte rozměry tohoto hranolu. Kolik takových hranolů (až na shodnost) existuje?



Obr. 14.

Řešení (viz obr. 14). Předpokládejme, že takový hranol existuje, a označme $AB = h$, $AA' = v$ a S střed ploch K_1, K_2. Protože je $AS = BS = CS = DS$, je průsečík O úhlopříček AC, BD čtverce $ABCD$ patou kolmice vedené bodem S na rovinu $ABCD$, neboť je $SO \perp AC$, $SO \perp BD$, při čemž je $AC \neq BD$. Proto přímka SO leží v rovinách $AA'C'C$, $BB'D'D$

a obsahuje i střed O' čtverce $A'B'C'D'$ (průsečík úhlopříček $A'C'$, $B'D'$). Protože jsou roviny $ABCD$, $A'B'C'D'$ rovnoběžné, je $SO \perp A'B'C'D'$. Bod O', který je průsečíkem přímky SO s rovinou $A'B'C'D'$, je proto dotykovým bodem roviny $A'B'C'D'$ s plochou $\mathbf{K}_1$.

Nyní platí

$$SO' = a, \quad AS = b, \quad OO' = v, \quad OA = \tfrac{1}{2}h\sqrt{2}, \tag{1}$$

$$OS^2 + OA^2 = AS^2 \tag{2}$$

(podle Pythagorovy věty).

Pro polohu bodu O' na přímce SO jsou dvě možnosti; buď je bod O' bodem úsečky OS, nebo leží na jejím prodloužení za bod S. Platí tedy jeden ze vztahů

$$OS = OO' + O'S \quad \text{nebo} \quad OS = OO' - O'S,$$

což lze zapsat stručně

$$OS = v \pm a.$$

Dosaďme odtud a ze vztahů (1) do (2); dostaneme

$$(v \pm a)^2 + \tfrac{1}{2}h^2 = b^2 \tag{3}$$

neboli

$$a^2 \pm 2av + v^2 = b^2 - \tfrac{1}{2}h^2, \tag{3'}$$

což je jeden vztah mezi neznámými h, v.

Protože je $\dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{a}{b}$ neboli $\dfrac{h}{v} = \dfrac{a}{b}$, platí

$$av = bh; \tag{4}$$

protože a, b jsou různá kladná čísla, jsou i čísla h, v nutně různá od nuly. Znásobme rovnici (3′) číslem a^2; dostaneme

$$a^4 \pm 2a^3v + a^2v^2 = a^2b^2 - \tfrac{1}{2}a^2h^2.$$

Dosaďme sem ze vztahu (4) za av a obdržíme

$$a^4 \pm 2a^2bh + b^2h^2 = a^2b^2 - \tfrac{1}{2}a^2h^2$$

neboli

$$h^2(b^2 + \tfrac{1}{2}a^2) \pm 2a^2bh + a^2(a^2 - b^2) = 0. \tag{5}$$

To je při znaménku plus i minus vždy kvadratická rovnice pro neznámou h. Její koeficient při h^2 je kladný, kdežto absolutní člen je záporný; to znamená, že rovnice má dva reálné kořeny $h = h_1$, $h = h_2$ různých znamének. Protože velikost úsečky je číslo kladné, může naší úloze vyhovovat v obou případech jen kladný kořen.

Rozeznávejme nyní oba různé případy: Buď je koeficient při h rovnic (5) číslo kladné, nebo je záporný. Z rovnic (5) po snadné úpravě vypočteme kladné kořeny.

Případ [1]. Je

$$h_1 = a \cdot \frac{-ab + \sqrt{b^4 + \frac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \frac{1}{2}a^2},$$

neboť druhý kořen je zřejmě záporný.

Odtud a ze vztahu (4) obdržíme $v = v_1$:

$$v_1 = b \cdot \frac{-ab + \sqrt{b^4 + \frac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \frac{1}{2}a^2}.$$

Případ [2]. Je

$$h_2 = a \cdot \frac{ab + \sqrt{b^4 + \frac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \frac{1}{2}a^2},$$

což je zřejmě číslo kladné; stejně jako v předchozím případě dostaneme

$$v_2 = b \cdot \frac{ab + \sqrt{b^4 + \frac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \frac{1}{2}a^2}.$$

To znamená, že existují nejvýše dvě třídy požadovaných hranolů (hranoly téže třídy jsou shodné).

Protože však lze sestrojit čtverec $ABCD$ o středu O a o straně $h = h_1$, po příp. $h = h_2$ s vrcholy na ploše $\mathbf{K}_2$ (ze vztahu (3) totiž plyne, že je $h \leq b\sqrt{2}$), a protože ze vztahu (3) plyne, že $v = v_1$, po příp. $v = v_2$, je vzdálenost jednoho z průsečíků O' kolmice SO (vedené bodem S k rovině $ABCD$) s kulovou plochou $\mathbf{K}_1$ od roviny $ABCD$. To znamená, že doplněním na hranol dostáváme skutečně ke každému z čísel $h = h_1$, $h = h_2$ jeden takový hranol. Protože čísly h, v je hranol až na shodnost jednoznačně určen a protože je $h_1 \neq h_2$, nejsou tyto hranoly shodné; tím je dokázána existence právě dvou tříd takových hranolů.

Podle řešení s. Jaromíra Jakeše,
11. tř. 4. jedenáctiletky v Brně-Královë Poli.

3. V rovině komplexních čísel je vepsán jednotkové kružnici se středem v bodě [0; 0] pravidelný sedmnáctiúhelník s jedním vrcholem v bodě [1; 0].

Určete počet jeho vrcholů, které leží uvnitř kružnice se středem v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a s poloměrem $r = 1$.

Řešení. Vrcholy daného sedmnáctiúhelníka jsou obrazy kořenů rovnice

$$z^{17} = 1,$$

neboli jsou to čísla

$$z_k = \cos\frac{k \cdot 360^\circ}{17} + \mathrm{i}\sin\frac{k \cdot 360^\circ}{17}, \tag{1}$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$. Pro stručnost položme

$$x_k = \frac{k \cdot 360^\circ}{17}, \tag{2}$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$; pak je

$$z_k = \cos x_k + \mathrm{i} \sin x_k.$$

Označme $[z_k]$ bod, který je obrazem čísla z_k; dále označme m kružnici o středu $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a poloměru $r = 1$. Podle požadavku úlohy hledáme body $[z_k]$, které mají od středu kružnice m vzdálenost menší než 1. Pro tyto body platí

$$\left| z_k - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right| < 1$$

neboli

$$\left| \cos x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\left(\sin x_k - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right| < 1. \qquad (3)$$

Protože platí $|a_1 + \mathrm{i}a_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ neboli $|a_1 + \mathrm{i}a_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$, kde a_1, a_2 jsou reálná čísla, můžeme vztah (3) nahradit vztahem

$$\left(\cos x_k - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\sin x_k - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 < 1.$$

Po úpravě pravé strany dostaneme

$$\cos^2 x_k + \sin^2 x_k - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\cos x_k + \sin x_k) + 2 \cdot \frac{3}{2} < 1$$

neboli

$$2\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\cos x_k + \sin x_k) > 2 \cdot \frac{3}{2},$$

a tedy

$$\cos x_k + \sin x_k > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

neboli

$$\sin (90^\circ - x_k) + \sin x_k > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Odtud podle známého vzorce dostaneme

$$2 \sin 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - x_k) > \sqrt{\frac{3}{2}},$$

a protože $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, máme dále

$$\cos (45^\circ - x_k) > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

neboli

$$\sin (45^\circ + x_k) > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Protože $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \sin 420^\circ = \sin 480^\circ$, leží číslo $45^\circ + x_k$ buď v intervalu $(60^\circ, 120^\circ)$ nebo v intervalu $(420^\circ, 480^\circ)$; druhý interval zřejmě nepřichází v úvahu, protože platí $k < 17$. Proto musí platit

$$60^\circ < 45^\circ + x_k < 120^\circ$$

neboli

$$15^\circ < x_k < 75^\circ.$$

Odtud vzhledem ke vztahu (2) dostaneme

$$\frac{17}{24} < k < \frac{85}{24},$$

neboli $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. Snadno se přesvědčíme, že vrcholy $[z_1]$, $[z_2]$, $[z_3]$ daného sedmnáctiúhelníka skutečně vyhovují úloze; tím je úloha řešena.

Řešil s. Ehrfried Losert,
11. b třída jedenáctiletky v Opavě.

Jiné řešení (viz obr. 15). Označme P obraz bodu nula, dále $C \equiv [1,0]$, $C' \equiv [0,1]$ a $S \equiv [\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$. Zřejmě je

$$\sphericalangle CPS = 45^\circ. \tag{1}$$

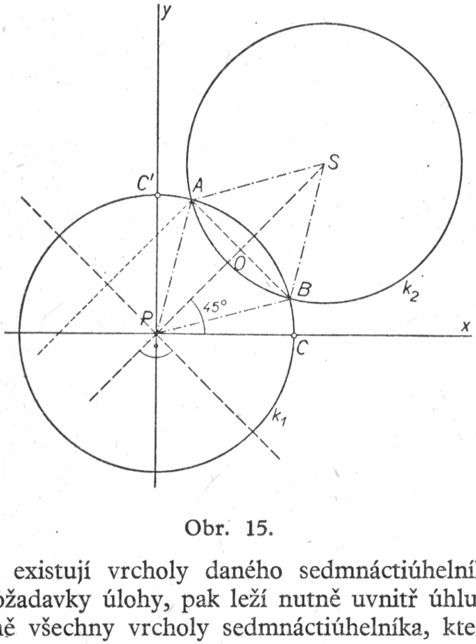
Uvažujme kružnice $k_1 \equiv [P, r_1 = 1]$, $k_2 \equiv [S, r_2 = 1]$. Jejich středná podle Pythagorovy věty je

$$PS = \sqrt{3}. \tag{2}$$

Protože je $r_1 = r_2 = 1$, platí pro kružnice k_1, k_2 vztah

$$|r_1 - r_2| < PS < r_1 + r_2$$

a obě kružnice mají tedy dva různé společné body A, B. Dále je zřejmé, že všechny body kružnice k_2 leží uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle CPC'$.



Obr. 15.

Jestliže existují vrcholy daného sedmnáctiúhelníka, které splňují požadavky úlohy, pak leží nutně uvnitř úhlu $\sphericalangle APB$ a obráceně všechny vrcholy sedmnáctiúhelníka, které uvnitř tohoto úhlu leží, zřejmě vyhovují úloze.

Všimněme si čtyrúhelníka $APBS$; jeho strany mají vesměs velikost 1. Proto je to kosočtverec; je tedy $PS \perp AB$. Označme O střed tohoto kosočtverce; pak je $PO = \frac{1}{2} . PS$ a podle (2) je tedy

$$PO = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku PBO, kde $\sphericalangle O = 90°$, je přepona $PB = 1$, odvěsna $PO = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, a proto podle známé poučky je

$$\sphericalangle BPO = 30°. \tag{3}$$

Při označení uvedeném v obr. 15 je

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle CPO - \sphericalangle BPO,$$
$$\sphericalangle CPA = \sphericalangle CPO + \sphericalangle OPA$$

neboli vzhledem ke vztahům (1), (3) je

$$\sphericalangle CPB = 15°, \quad \sphericalangle CPA = 75°. \tag{4}$$

O argumentech α_k vrcholů daného sedmnáctiúhelníka platí

$$\alpha_k = \frac{k \cdot 360°}{17},$$

kde celé číslo k probíhá čísla 0, 1, 2, ..., 16. Hledáme ta α_k, pro něž podle (4) platí

$$15° < \alpha_k < 75°.$$

Této podmínce vyhovují čísla $k = 1, 2, 3$. Příslušné vrcholy sedmnáctiúhelníka zřejmě vyhovují požadavkům úlohy. Tedy: Tři z vrcholů daného sedmnáctiúhelníka mají od bodu S vzdálenost menší než číslo 1.

Řešil s. Aleš Pultr,
10.d třída 6. jedenáctiletky v Praze 6.

4. Buďte a, b, c daná reálná čísla, vesměs navzájem různá. Potom rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 \tag{1}$$

má vždy reálné řešení. Dokažte.

Řešení. Předpokládejme, že jsme našli řešení x dané rovnice. Potom je nutně číslo x různé od kteréhokoliv z čísel a, b, c neboli platí

$$Z = (x - a)(x - b)(x - c) \neq 0; \tag{2}$$

jinak by totiž alespoň jeden ze zlomků na levé straně rovnice (1) neměl smysl. Za předpokladu, že platí (2), znásobme obě strany rovnice (1) číslem Z; dostaneme rovnici

$$(x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + (x - a)(x - b) = 0, \tag{3}$$

která je pro ta x, pro něž platí vztah (2), ekvivalentní s rovnicí (1). Tuto rovnici snadno upravíme na tvar

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0. \tag{4}$$

Tedy každé reálné řešení x rovnice (4) je řešením rovnice (1), platí-li o něm zároveň vztah (2). Protože rovnici (4) umíme snadno řešit, musíme dokázat, že o jejím řešení x platí vztah (2); stačí dokázat, že rovnice (3) nemá řešení $x = a$ nebo $x = b$ nebo $x = c$. Dokažme na př., že rovnice (3) nemá řešení $x = a$. Dosaďme $x = a$ do levé strany rovnice (3). Dostaneme

$$(a - b)(a - c). \tag{5}$$

Podle předpokladu jsou a, b, c různá čísla, a proto je číslo (5) různé od nuly, t. j. $x = a$ není kořenem rovnice (3) a tedy ani rovnice (4).

Nyní dokážeme, že rovnice (4) má dva reálné různé kořeny

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(a + b + c + \sqrt{D}), \quad x_2 = \tfrac{1}{3}(a + b + c - \sqrt{D}), \tag{6}$$

kde $D = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

Důkaz. Tu platí

$$D = \tfrac{1}{2}\,[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + \\ + (c^2 - 2ca + a^2)]$$

neboli

$$D = \tfrac{1}{2}\,[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

Protože a, b, c jsou navzájem různá čísla, je vždy

$$(a-b)^2 > 0,\ (b-c)^2 > 0,\ (c-a)^2 > 0;$$

proto je $D > 0$ a oba kořeny (6) jsou reálné různé, což jsme měli dokázat.

Protože z předchozího již víme, že pro $x = x_1$ nebo $x = x_2$ platí vztah (2), jsou rovnice (4), (1) ekvivalentní; proto čísla $x = x_1$, $x = x_2$ jsou též kořeny rovnice (1). Má tedy rovnice (1) dvě reálná různá řešení.

Podle řešení s. Břetislava Nováka, žáka 10.b tř.
jedenáctiletky v Chrudimi,
a s. Ehrfrieda Loserta, žáka 11.b tř.
jedenáctiletky v Opavě.

4. Úlohy I. kola kategorie B.

1. Řešte soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + m(y-2) &= 1, \\ \frac{m}{x+1} + y - 1 &= 2m, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kde x, y jsou neznámé a m je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti dané soustavy vzhledem k různým hodnotám čísla m.

Řešení. Nechť daná soustava (1) má řešení (x, y). Pak je nutně

$$x \neq -1, \qquad (2)$$

jinak by zlomek $\dfrac{1}{x+1}$ neměl smysl. Potom lze soustavu (1) uvést na tvar

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + m(y-2) &= 1, \\ \frac{m}{x+1} + y - 2 &= 2m - 1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Položme

$$\frac{1}{x+1} = u, \quad y - 2 = v. \tag{4}$$

Po dosazení ze (4) do (3) dostaneme soustavu

$$\left.\begin{aligned} u + mv &= 1, \\ mu + v &= 2m - 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

To je soustava lineárních rovnic pro neznámé u, v; tato čísla jsou při existující dvojici (x, y) určena vztahy (4). Znásobme druhou rovnici (5) číslem $-m$ a přičtěme ji k první rovnici (5); dostaneme

$$u\,(1 - m^2) = 1 + m - 2m^2$$

neboli

$$u\,(1 - m)\,(1 + m) = (1 - m)\,(1 + 2m). \tag{6}$$

Když existuje řešení $(x \neq -1, y)$ soustavy (1), potom číslo u, určené podle (4), vyhovuje rovnici (6). Ptejme se, zda obráceně číslo u, které vyhovuje vztahu (6), vede přes soustavu (5) a vztahy (4) k řešení (x, y) soustavy (1). Rozeznávejme dva případy.

Případ [1]. Nechť je $(1 - m)\,(1 + m) \neq 0$, t. j. nechť platí

$$m \neq 1, \; m \neq -1. \tag{7}$$

Potom z (6) dostaneme

$$u = \frac{1 + 2m}{1 + m}. \tag{8}$$

Z výsledku (8) a z druhé rovnice (5) dostaneme

$$v = -\frac{1}{1 + m}. \tag{9}$$

Soustava (5) má zřejmě jediné řešení (u, v) dané vztahy (8), (9). Nyní podle vztahů (4) máme k této dvojici (u, v) vypočítat (x, y). Avšak z prvního vztahu (4) lze vypočítat $x + 1$ jen tehdy, když je $u \neq 0$; to vzhledem k (8) znamená, že musí být $1 + 2m \neq 0$ neboli

$$m \neq -\tfrac{1}{2}. \tag{10}$$

Je-li $m = -\frac{1}{2}$, nemá soustava (1) řešení.

Jestliže pro m platí vztahy (7), (10), potom ze (4) a (8), (9) vypočteme

$$x = -\frac{m}{1 + 2m}, \quad y = \frac{1 + 2m}{1 + m};$$

tato dvojice skutečně vyhovuje soustavě (1).

Případ [2]. Nechť je $(1 - m)(1 + m) = 0$. Potom musíme uvažovat dvě možnosti:

a) Nechť je $1 + m = 0$, t. j.

$$m = -1.$$

V tomto případě je soustava (1) zřejmě sporná, neboť má platit současně

$$\frac{1}{x + 1} - y = -1, \quad \frac{1}{x + 1} - y = 1.$$

b) Nechť je $1 - m = 0$, t. j. $m = 1$.

Potom se daná soustava (1) redukuje na jedinou rovnici

$$\frac{1}{x+1} + y = 3,$$

z níž lze zřejmě ke každému $x \neq -1$ vypočítat příslušné y.

Závěr. Soustava (1) má pro m různé od čísel $1, -1, -\frac{1}{2}$ jediné řešení. Pro m rovné některému z čísel $-1, -\frac{1}{2}$ nemá řešení. Pro $m = 1$ má nekonečně mnoho řešení; tu ke každému $x \neq -1$ přísluší jedno řešení (x, y).

2. Nechť a, b, c jsou vesměs různá kladná čísla.

a) Jestliže platí

$$(a - b)(a - c) > 0, \tag{1}$$

potom je číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c. Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

b) Jestliže platí

$$(a - b)(b - c) > 0, \tag{2}$$

potom je číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c. Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

c) Jestliže číslo a je největším nebo nejmenším z čísel a, b, c potom platí

$$b \cdot (c + a) > a \cdot (c - a). \tag{3}$$

Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

Řešení. a) Nechť platí vztah (1). Potom platí

buď $a - b > 0$, $a - c > 0$ anebo $a - b < 0$, $a - c < 0$, neboli je

$$\text{buď } a > b,\ a > c \text{ anebo } a < b,\ a < c.$$

Je tedy číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c.

Obráceně, nechť je na př.

$$a > b,\ a > c\,.$$

Pak je $a - b > 0$, $a - c > 0$, takže platí (1).

Stejně se dokáže: Je-li $a < b$, $a < c$, potom platí (1).

Větu tedy můžeme obrátit.

b) Nechť platí (2). Potom je

$$\text{buď } a - b > 0,\ b - c > 0 \text{ anebo } a - b < 0,\ b - c < 0,$$

neboli je

$$\text{buď } a > b,\ b > c \text{ anebo } a < b,\ b < c\,. \tag{4}$$

Ze vztahů (4) plyne, že platí

$$\text{buď } a > b,\ a > c \text{ anebo } a < b,\ a < c\,. \tag{5}$$

Je tedy číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c. Větu nelze obrátit. Klademe-li na př. $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, tu číslo a je sice největším z čísel a, b, c, avšak $(a - b)(b - c) = - 2$.

c) Podle předpokladu je

$$\text{buď } a > b,\ a > c \text{ anebo } a < b,\ a < c$$

neboli je

$$\text{buď } a - b > 0,\ a - c > 0 \text{ anebo } a - b < 0,\ a - c < 0. \tag{6}$$

Vztah (3) je ekvivalentní se vztahem

$$(a - b)(a - c) + 2ab > 0\,. \tag{7}$$

Když platí vztahy (6), potom platí vztah (7) (neboť je $2ab > 0$) a tím i vztah (3).

Větu nelze obrátit. Na př. pro kladná čísla $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$ platí vztah (3), t. j. $7 \cdot 7 > 5 \cdot (-3)$, ale číslo a není ani největším, ani nejmenším z čísel a, b, c.

3. Buď dána kružnice $m \equiv (S, r)$; označme AA', BB' dva její navzájem kolmé průměry. Uvnitř menšího oblouku AB zvolme bod X a označme K průsečík přímek BX, AA'. Dále označme k kolmici vedenou bodem K k přímce AA' a t tečnu kružnice m v bodě X.

Určete množinu průsečíků Y přímek k, t, když bod X probíhá vnitřek menšího oblouku AB kružnice m.

Řešení. I. Trojúhelník $BB'X$ má podle Thaletovy věty při vrcholu X pravý úhel (obr. 16). Proto o jeho ostrých úhlech $\sphericalangle XBB' = \alpha$, $\sphericalangle XB'B = \beta$ platí vztah

$$\alpha + \beta = 90°. \tag{1}$$

Podle předpokladu leží bod X uvnitř menšího oblouku AB; je tedy úhel $\sphericalangle BSX$ ostrý. Proto existuje rovnoramenný trojúhelník SBX se základnou BX, při čemž platí

$$\sphericalangle SXB = \alpha. \tag{2}$$

Z tohoto trojúhelníku plyne $2\alpha = 180° - \sphericalangle BSX$, t. j. $2\alpha > 90°$ a tedy

$$90° > \alpha > 45°. \tag{3}$$

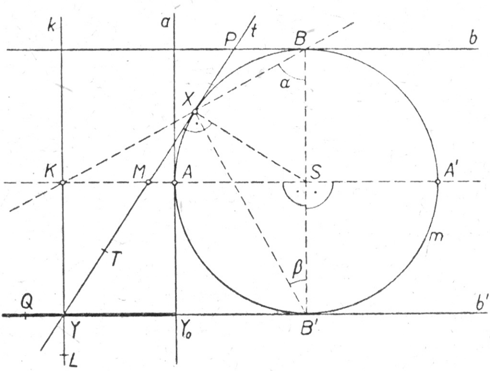
Ze vztahů (1), (3) dostaneme

$$\beta < 45°,\ 2\beta < 90°. \tag{4}$$

Protože vzhledem k (3) je $\sphericalangle XBS + \sphericalangle BSA = \alpha + 90° < < 180°$, mají podle Eukleidova postulátu polopřímky BX, SA společný bod K. V trojúhelníku BKS je $\sphericalangle S = 90°$, $\sphericalangle B = \alpha$ a podle (1) je

$$\sphericalangle BKS = \beta. \tag{5}$$

Přitom vzhledem ke (3), (4) je $\sphericalangle KBS > \sphericalangle BKS$, a proto o příslušných stranách k těmto úhlům protějším platí $SK > SB$ neboli $SK > r$. Leží tedy bod K na prodloužení úsečky SA za bod A a tedy uvnitř poloroviny BSA a vně dané kružnice m. Proto je kolmice k sestrojená v bodě K k přímce SA nesečnou kružnice m a leží celá uvnitř poloroviny BSA. Označme $L \neq K$ bod přímky k, který leží uvnitř poloroviny SAB' (opačné k polorovině SAB).



Obr. 16.

Označme $T \neq X$ bod přímky t, který leží v polorovině SXA. Tu podle vlastnosti tečny t v bodě X kružnice m je $\sphericalangle TXS = 90°$ a úhly $\sphericalangle TXS$, $\sphericalangle SXB$ jsou styčné, takže úhel

$$\sphericalangle TXB = 90° + \alpha \tag{6}$$

je tupý. Polopřímka XT leží tedy v úhlu $\sphericalangle SXK$ a má proto s úsečkou SK společný bod M; protože však $M \neq X$ je bodem tečny t, leží vně kružnice m a tedy uvnitř úsečky AK.

Ze vztahu (6) plyne, že $\sphericalangle KXM = 90° - \alpha$ (úhly $\sphericalangle KXM$, $\sphericalangle TXB$ jsou vedlejší) neboli

$$\sphericalangle KXM = \beta\,. \tag{7}$$

Můžeme předpokládat, že X, M, T je pořádek bodů na přímce t. Pak je však úhel $\sphericalangle TMK$ vnějším úhlem trojúhelníka MKX a platí o něm $\sphericalangle TMK = \sphericalangle BKS + \sphericalangle KXM$ (podle věty o vnějším úhlu $\sphericalangle TMK$ trojúhelníka MKX); vzhledem ke vztahům (5), (7) tedy platí $\sphericalangle TMK = 2\beta$. Odtud a z druhého vztahu (4) plyne, že platí

$$\sphericalangle TMK < 90°. \tag{8}$$

Protože je $\sphericalangle LKA = 90°$, je vzhledem k (8) $\sphericalangle LKA + \sphericalangle TMK < 180°$; proto podle Eukleidova postulátu mají polopřímky KL, MT neboli přímky k, t společný bod Y, který leží uvnitř poloroviny SAB'. Trojúhelník MYK je zřejmě pravoúhlý ($\sphericalangle K = 90°$).

Nyní dokážeme platnost vztahu

$$\triangle KXS \cong \triangle XKY \text{ (usu)}\,. \tag{9}$$

D ů k a z. Oba trojúhelníky mají společnou stranu KX. Dále podle (5), (7) se shodují v úhlech $\sphericalangle XKS$, $\sphericalangle KXY$. Protože X, M, T je pořádek bodů na přímce t, jsou úhly $\sphericalangle XKS = \beta$, $\sphericalangle SKY = 90°$ styčné a platí $\sphericalangle XKY = 90° + \beta$. Ale i úhly $\sphericalangle KXY = \beta$, $\sphericalangle YXS = 90°$ jsou styčné a platí $\sphericalangle KXS = 90° + \beta$. Je tedy $\sphericalangle KXS = \sphericalangle XKY$. Tím je vztah (9) dokázán.

Ze vztahu (9) plyne $KY = XS$ neboli

$$KY = r\,.$$

Leží tedy bod Y na tečně b' kružnice m sestrojené v dotykovém bodě B'.

Označme a tečnu kružnice m v bodě A; dále označme Y_0 průsečík přímek a, b'. Polopřímku opačnou k polopřímce

Y_0B' označme Y_0Q. Protože přímka k leží vně kružnice m, leží zřejmě bod Y uvnitř polopřímky Y_0Q.

II. Obráceně, zvolíme-li uvnitř polopřímky Y_0Q bod Y_1, přísluší k němu na přímce SA jediný bod K_1 takový, že je $Y_1K_1 \perp SA$, při čemž celá přímka Y_1K_1 leží vně kružnice m. Potom uvnitř úsečky K_1B leží jediný bod $X_1 \neq B$, který je bodem menšího oblouku AB kružnice m (přímka K_1B nemůže zřejmě být tečnou kružnice m v jejím bodě B, a proto je její sečnou). Sestrojíme-li k bodu X_1 bod Y postupem provedeným v odstavci I, zjistíme, že bod Y je průsečíkem přímek Y_1K_1, b', t. j. že $Y \equiv Y_1$.

Závěr. Množina všech průsečíků přímek k, t, když bod X probíhá vnitřek menšího oblouku AB, je vnitřek polopřímky Y_0Q, sestrojené na konci odstavce I.

4. Kvádr má rozměry a, b, c. Zobrazte v rovnoběžném promítání lomenou čáru na povrchu kvádru, která je nejkratší spojnicí dvou protějších vrcholů tohoto kvádru.

Konstrukci proveďte na základě předchozího výpočtu.

Řešení. Označme $ABCD$, $A'B'C'D'$ dvě protější stěny kvádru, při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$; dále označme $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

Předně je jasné, že lomená čára, spojující dva protější vrcholy kvádru a ležící ve více než dvou stěnách, je vždy delší než lomená čára ležící ve dvou stěnách.

Na př. na obr. 17 pro A', C platí

$$A'X + XY + YZ + ZC > A'X + XC,$$

neboť podle trojúhelníkové nerovnosti je

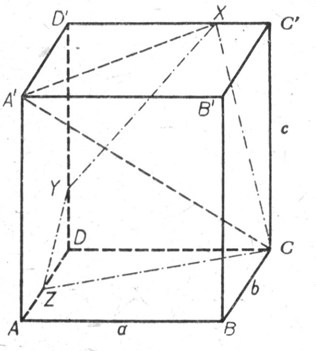
$$YZ + ZC > YC,$$
$$XY + YZ + ZC > XY + YC > XC.$$

Má-li lomená čára, spojující vrcholy A', C ležet na př. ve stěnách $A'B'C'D'$ a $CDD'C'$ (viz obr. 18), musí přejít po otočení stěny $CDD'C'$ kolem hrany $C'D'$ do roviny $A'B'C'$ v úsečku. Velikost této úsečky je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky a, $b + c$. Velikost této úsečky je tedy

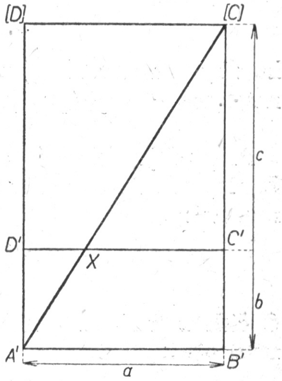
$$\sqrt{a^2 + (b + c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}.$$

Další dvě lomené čáry mají velikosti

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ca}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}.$$



Obr. 17.



Obr. 18.

Nejkratší z lomených čar je ta, pro niž je součin $2bc$, resp. $2ca$, $2ab$, nejmenší. Uspořádáme-li rozměry a, b, c podle velikosti

$$a \leqq b \leqq c,$$

je nejkratší lomená čára ta, která leží ve dvou stěnách se společnou hranou délky c. Takové lomené čáry jsou dvě, je-li $b < c$, čtyři, je-li $a < b = c$, a šest, je-li $a = b = c$. Jejich konstrukce se provede stejně jako v právě uvedeném příkladě (tuto konstrukci již neuvádíme).

5. Nech je dané reálne číslo m. Určte všetky reálne čísla $x \neq -m$, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{4x}{x+m} \geqq 2. \tag{1}$$

Urobte diskusiu vzhľadom na rôzne čísla m.

Riešenie. Predpokladajme, že sme našli číslo x, ktoré splňuje vzťah (1). Potom musí byť $x + m \neq 0$ čiže

$$x \neq -m; \tag{2}$$

inak by zlomok na ľavej strane vzťahu (1) nemal zmysel. Rozoznávajme dva prípady.

Prípad [1]. Nech je $x + m > 0$, t. j. $x > -m$. (3)
Z platnosti vzťahu (1) dostávame potom postupne tieto nerovnosti:

$$4x \geqq 2(x+m), \tag{4}$$
$$x \geqq m.$$

O čísle x vzhľadom na tento vzťah a vzhľadom na vzťah (3) musí platiť

$$x \geqq m,\ x > -m. \tag{5}$$

Obrátene, každé číslo x, o ktorom platia vzťahy (5), splňuje aj vzťahy (4), (2). Pretože je potom $x + m > 0$, dostaneme delením vzťahu (4) týmto číslom, že platí aj vzťah (1).

Prípad [2]. Nech je $x + m < 0$, t. j.

$$x < -m. \tag{6}$$

Z platnosti vzťahu (1) postupne dostaneme:

$$4x \leqq 2(x+m), \tag{7}$$

$$x \leqq m.$$

O čísle x vzhľadom na tento vzťah a vzťah (6) musí platiť

$$x \leqq m, \quad x < -m. \tag{8}$$

Obrátene, každé číslo x, o ktorom platia vzťahy (8), splňuje aj vzťah (7), a pretože je $x + m < 0$, dostaneme delením vzťahu (7) týmto číslom, že platí aj vzťah (1).

Zhrnieme teraz oba výsledky (5), (8).

Záver. [1] Ak je $m = 0$, vyhovuje každé číslo $x \neq 0$ vzťahu (1).

[2] Ak je $m > 0$, každé číslo $x \geqq m$ splňuje vzťahy (5) a každé číslo $x < -m$ splňuje vzťahy (8), t. j. ak je $m > 0$, každé číslo x, o ktorom platí jeden zo vzťahov

$$x < -m, \quad x \geqq m,$$

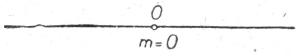
vyhovuje vzťahu (1).

[3] Ak je $m < 0$, každé číslo $x > -m$ splňuje vzťahy (5) a každé číslo $x \leqq m$ splňuje vzťahy (8), t. j. ak je $m < 0$, každé číslo x, ktoré splňuje jeden zo vzťahov

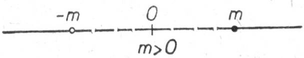
$$x > -m, \quad x \leqq m,$$

vyhovuje vzťahu (1).

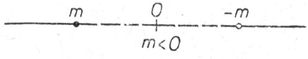
Poznámka. Tieto tri výsledky [1], [2], [3] sú znázornené po rade na obrázkoch 19, 20a, 20b; pritom obraz čísla x vždy padne do tučne vytiahnutej časti číselnej osi.



Obr. 19.



Obr. 20a.



Obr. 20b.

6. Nech je dané reálne číslo a. Urobte rozbor funkcie

$$y = x^2 + |ax^2 - 1|$$

vzhľadom na rôzne hodnoty čísla a; na základe rozboru načrtnite graf funkcie.

Riešenie. I. Ak je $a \leqq 0$, je $ax^2 - 1 < 0$, a preto $|ax^2 - 1| = - ax^2 + 1$; je teda

$$y = (1 - a)x^2 + 1.$$

Funkcia zrejme nadobúda najmenšiu hodnotu $y_{\min}$ pre $x = 0$, totiž

$$y_{\min} = 1.$$

II. Ak je $a > 0$, rozdelíme definičný obor funkcie číslami $x = x_1$, $x = x_2$, kde

$$x_1 = - \frac{1}{\sqrt{a}}, \; x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Prípad [1]. Pre $x \geqq x_2$ je $ax^2 \geqq 1$ a teda $|ax^2 - 1| = ax^2 - 1$; preto je

$$y = (1 + a)x^2 - 1. \tag{1}$$

S rastúcim x funkcia rastie; najmenšiu hodnotu $y_{\min}$ nadobúda zrejme pre $x = x_2$, totiž

$$y_{\min} = \frac{1}{a}.$$

Prípad [2]. Pre $x_1 < x < x_2$ platí $0 < ax^2 < 1$ a teda $|ax^2 - 1| = - ax^2 + 1$; preto je

$$y = (1 - a)x^2 + 1. \tag{2}$$

a) Ak je $a = 1$, je funkcia v tomto obore konštantná, totiž

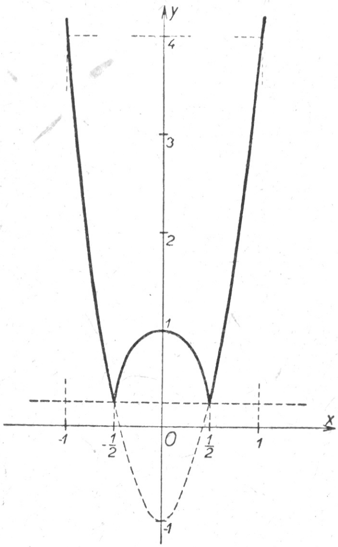
$$y = 1.$$

b) Ak je $0 < a < 1$, sú oba členy na pravej strane vzťahu (2) nezáporné čísla a najmenšiu hodnotu y_{min} funkcie dostaneme zrejme pre $x = 0$; tu je

$$y_{min} = 1\,.$$

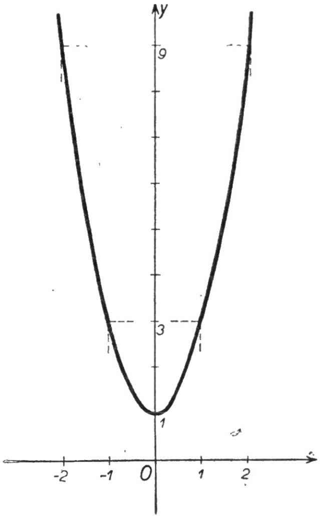
c) Ak je $a > 1$, prvý člen na pravej strane vzťahu (2) nie je kladný a najväčšiu hodnotu y_{max} funkcie dostaneme pre $x = 0$; tu je

$$y_{max} = 1\,.$$

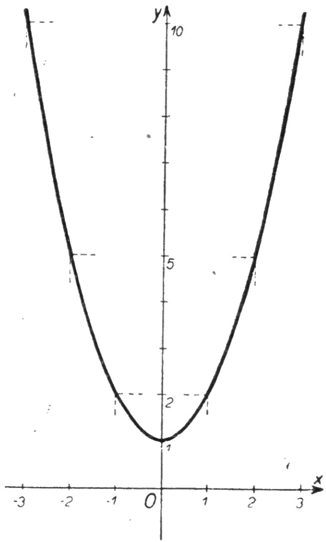


Obr. 21a.

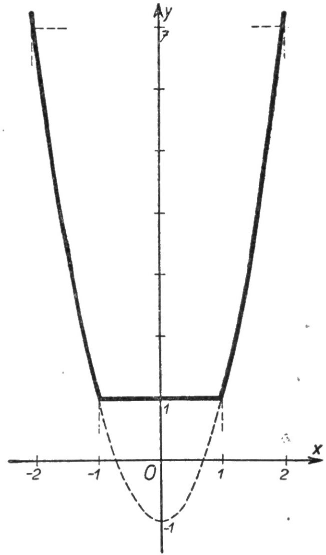
Prípad [3]. Ak je $x \leqq x_1$, je $-x \geqq x_2$. Pretože graf funkcie je súmerný podľa osi y (t. j. nadobúda pre x tú istú hodnotu ako pre $-x$), je graf funkcie v tejto časti definičného oboru



Obr. 21b.



Obr. 21c.



Obr. 21d.

súmerný podľa osi y ku grafu funkcie v obore $x \geqq x_2$ (pozri prípad [1]). Avšak podľa odst. II, prípad [1], je funkcia v intervale $x \geqq x_2$ stúpajúca; preto je v intervale $x \leqq x_1$ klesajúca. Najmenšiu hodnotu nadobúda pre $x = -x_2$ čiže pre $x = x_1$; tu je

$$y_{\min} = \frac{1}{a}.$$

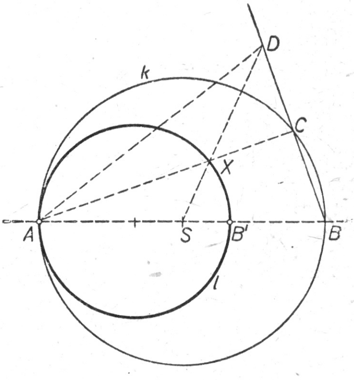
Pozri obr. 21a) až d), v ktorých sa a po rade rovná 4, -1, 0, 1.

7. Nech je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a jej určitý priemer AB. Nech je ďalej C bod kružnice k, rôzny od bodov A, B. Na polpriamke BC určte bod D tak, aby platilo

$$BD = 2 \cdot BC\,.$$

a) Úsečky AC, SD majú spoločný bod X, ktorý leží vnútri každej z nich; dokážte to.

b) Čo vyplní bod X, keď bod C prebieha bodmi kružnice k (s výnimkou bodov A, B)?



Obr. 22.

Riešenie. a) Pretože bod C neleží na priamke AB, existuje trojuholník ABC, v ktorom je podľa Thaletovej vety $\sphericalangle BCA = 90°$ (obr. 22). Preto ani body A, B, D neležia v tejže priamke a existuje rovnoramenný trojuholník ABD. Úsečky AC, DS sú dve z jeho ťažníc. Ťažnice trojuholníka, ako vieme, sa pretínajú v ťažisku, ktoré leží vnútri každej z nich. Preto sa úsečky AC, DS pretnú v bode X, ktorý leží vnútri každej z nich. Pritom platí

$$AX = \tfrac{2}{3}AC\,. \qquad (1)$$

b) Keď bod C prebieha celú kružnicu k, vyplní bod X podľa známej vety o rovnoľahlých kružniciach kružnicu l, ktorá je obrazom kružnice k v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom rovnoľahlosti $\frac{2}{3}$. Bod X z našej úlohy vyplní teda zmienenú kružnicu l s výnimkou bodu A a bodu B', ktorý leží vnútri úsečky AB a o ktorom platí

$$AB' = \tfrac{2}{3}AB\,.$$

8. Označme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ veľkosti strán trojuholníka ABC; ďalej označme

$$x = b^2 + c^2 - a^2, \quad \sphericalangle\, CAB = \alpha\,.$$

a) Ak je $\alpha < 90°$, je $x > 0$. Ak je $\alpha = 90°$, je $x = 0$. Ak je $\alpha > 90°$, je $x < 0$. Dokážte to (pri dôkaze použite vetu 12 na str. 263 učebnice Matematika pre siedmy postupný ročník).

b) Dokážte, že vetu uvedenú v úlohe a) možno obrátiť.

Riešenie. a) Ak v trojuholníku ABC uhol $\alpha = 90°$, platí o ňom Pythagorova veta $a^2 = b^2 + c^2$ alebo $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, t. j. $x = 0$.

Skúmajme ďalej trojuholník ABC pre prípad, že $\alpha \neq 90°$. Zostrojme pomocný trojuholník $A_1B_1C_1$ tak, že platí

$$\sphericalangle\, C_1A_1B_1 = \alpha_1 = 90°, \ A_1C_1 = b, \ A_1B_1 = c\,. \qquad (1)$$

Tento trojuholník je týmito podmienkami jednoznačne určený. (Podľa vety sus sú všetky trojuholníky zostrojené z týchto prvkov zhodné.) Označme ešte $B_1C_1 = a_1$; podľa Pythagorovej vety platí

$$b^2 + c^2 - a_1^2 = 0\,. \qquad (2)$$

Rozoznávajme teraz dva prípady.

Prípad [1]. Nech je $\alpha < 90°$. Potom sa trojuholníky ABC,

$A_1B_1C_1$ zhodujú v dvoch stranách (pozri (1)), ale o uhloch nimi zovretých platí

$$\alpha < \alpha_1 .$$

Podľa známej vety z planimetrie (pozri vetu 12 na str. 263 učebnice Matematika pre 7. postupný ročník) platí potom o príslušných stranách a, a_1

$$a < a_1 . \tag{3}$$

Čísla a, a_1 sú kladné a zo vzťahu (3) vyplýva platnosť vzťahu

$$a^2 < a_1^2 .$$

Preto je $b^2 + c^2 - a^2 > b^2 + c^2 - a_1^2$ a vzhľadom na vzťah (2) platí $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Tým sme dokázali, že platí $x > 0$.

Prípad [2]. Nech je $\alpha > 90°$. Rovnako ako v prípade [1] dokážeme: pretože platí $\alpha > \alpha_1$, platí podľa citovanej vety potom aj $a > a_1$, čiže $a^2 > a_1^2$. Stade a zo vzťahu (2) dostaneme postupne

$$b^2 + c^2 - a^2 < b^2 + c^2 - a_1^2, \quad b^2 + c^2 - a^2 < 0, \text{ t. j. } x < 0,$$

čo sme mali dokázať.

Tým sme úlohu a) rozriešili.

b) V úlohe a) sme dokázali tieto vety o trojuholníku ABC:
I. Ak je $\alpha < 90°$, je $x > 0$.
II. Ak je $\alpha = 90°$, je $x = 0$.
III. Ak je $\alpha > 90°$, je $x < 0$.
Každú z týchto viet možno obrátiť.
Dôkaz. Urobíme napr. nepriamy dôkaz obrátenej vety I (ďalšie vety možno dokázať podobne): „Ak je v trojuholníku ABC číslo $x > 0$, je $\alpha < 90°$.“
O uhle α musí platiť práve jeden z troch vzťahov:

1. $\alpha > 90°$. 2. $\alpha = 90°$. 3. $\alpha < 90°$.

Keď platí $\alpha > 90°$, podľa vety III je $x < 0$, čo je spor s predpokladom $x > 0$.

Keď platí $\alpha = 90°$, podľa vety II je $x = 0$, čo je spor s predpokladom $x > 0$.

Zostáva teda prípad $\alpha < 90°$, čo sme mali dokázať.

Tým je úloha b) rozriešená.

9. a) Buďte a, b, c kladná racionální čísla, o nichž platí vztah

$$a + \sqrt{b} = \sqrt{c}\,. \tag{1}$$

Dokažte, že potom čísla b, c jsou rovna druhým mocninám racionálních čísel.

b) Buďte a, b, c, d kladná racionální čísla, při čemž číslo b není druhou mocninou racionálního čísla. Jestliže o těchto číslech platí vztah

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}\,, \tag{2}$$

potom platí $a = c$, $b = d$. Dokažte.

Řešení. a) Umocněme obě strany vztahu (1) na druhou; dostaneme rovnost

$$a^2 + b + 2a \cdot \sqrt{b} = c\,.$$

Odtud vzhledem k tomu, že je $a \neq 0$, vypočtěme $\sqrt{b}$; je

$$\sqrt{b} = \frac{c - a^2 - b}{2a}\,.$$

Číslo na pravé straně tohoto vztahu je racionální a jeho druhá mocnina je zřejmě rovna b. Tedy podle vztahu (1) je také $\sqrt{c}$ číslo racionální. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

b) Jestliže je $a = c$, je $\sqrt{b} = \sqrt{d}$; po umocnění obou stran poslední rovnosti na druhou dostaneme $b = d$, což je v souhlasu s tvrzením úlohy.

Nechť je dále $a \neq c$ (dokážeme, že to není možné); pro určitost můžeme předpokládat, že je na př. $a > c$, t. j. $a - c > 0$.

Potom vztah (2) lze uvést na tvar

$$(a - c) + \sqrt{b} = \sqrt{d},$$

který splňuje předpoklady úlohy a), takže podle výsledku této úlohy je b druhou mocninou racionálního čísla. To je však spor s předpokladem úlohy. Proto případ $a \neq c$ nemůže nastat.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

10. Číslo 5^{555} je nepředstavitelně veliké; prozradíme vám, že jeho zápis v dekadické soustavě má skoro 400 cifer. Přesto se dá zjistit jednoduchou úvahou skupina cifer, které stojí v tomto zápise na pěti posledních místech. Proveďte tuto úvahu a zjistěte uvedenou skupinu cifer.

Řešení. Sestavme si tabulku skupiny cifer, které stojí na pěti posledních místech mocnin čísla 5 pro přirozená n od $n = 1$ počínajíc; dostaneme opětným násobením číslem 5 tato čísla:

n	skupina	
1	0 0 0 0 5	A
2	0 0 0 2 5	
3	0 0 1 2 5	
4	0 0 6 2 5	
5	0 3 1 2 5	B
6	1 5 6 2 5	
7	7 8 1 2 5	
8	9 0 6 2 5	
9	5 3 1 2 5	
10	6 5 6 2 5	
11	2 8 1 2 5	
12	4 0 6 2 5	
13	0 3 1 2 5	

Když budeme pokračovat v násobení číslem 5 dále, objeví se nám totiž periodičnost; budou se zřejmě opakovat skupiny označené v tabulce písmenem **B.** Pro $n = 555$ dostaneme tedy tu skupinu tabulky **B**, která odpovídá tomu z exponentů 5 až 12, k němuž dospějeme, když od čísla 555 budeme postupně odčítat číslo 8.

Když vynecháme část tabulky označenou **A**, budou mít jednotlivé skupiny místo čísla n pořadová čísla $n - 4$ a tedy skupina čísla 5^{555} bude mít pořadové číslo $555 - 4$; dělíme-li toto číslo osmi, pak dostaneme zbytek 7, t. j. když budeme postupovat v naší tabulce od skupiny čísla 5^{11} vždy po osmi, dospějeme po určitém počtu kroků (ten udává celistvá část čísla $\frac{555 - 4}{8}$) ke skupině čísla 5^{555}. Protože čísla 5^{11}, 5^{555} mají podle naší úvahy tytéž skupiny, má číslo 5^{555} na posledních pěti místech svého zápisu v dekadické soustavě skupinu 28 125, což jsme měli vyšetřit.

11. a) Ve čtyrstěnu $A_1A_2A_3A_4$ označme T_n těžiště jeho stěny, která je protější k vrcholu A_n (kde n je některé z čísel 1, 2, 3, 4).

Dokažte: Úsečky A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3, A_4T_4 procházejí společným bodem T (zvaným těžiště čtyrstěnu $A_1A_2A_3A_4$). Přitom platí

$$A_nT_n = 4 \cdot TT_n \tag{1}$$

(kde $n = 1, 2, 3, 4$).

b) Buď dána rovina ABC a v ní bod P; dále buď dán bod Q, ležící mimo rovinu ABC. Uvažujme čtyrstěn $ABCD$, jehož vrchol D leží uvnitř polopřímky PQ, a označme T jeho těžiště.

Co vyplní bod T, když bod D probíhá vnitřek polopřímky PQ?

Řešení. a) I. Nejprve dokážeme, že na př. úsečky A_1T_1,

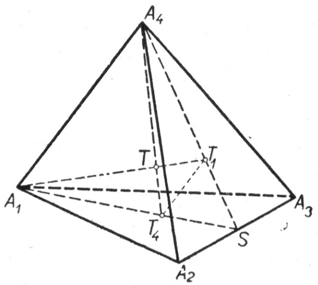
A_4T_4 mají společný bod T (který leží uvnitř každé z nich), při čemž platí

$$A_1T = 3 \cdot TT_1, \quad A_4T = 3 \cdot TT_4 . \tag{2}$$

D ů k a z (obr. 23). Označme S střed úsečky A_2A_3. Bod T_1 leží uvnitř úsečky A_4S a bod T_4 uvnitř úsečky A_1S. Protože T_1 je těžiště trojúhelníka $A_2A_3A_4$ a T_4 těžiště trojúhelníka $A_1A_2A_3$, platí

$$SA_4 = 3 \cdot T_1S, \quad SA_1 = 3 \cdot T_4S . \tag{3}$$

Úsečky A_1T_1, A_4T_4 leží až na krajní body uvnitř trojúhelníka A_1A_4S. Takové úsečky mají vždy společný bod, který leží uvnitř každé z nich; označme jej T.



Obr. 23.

Zřejmě platí

$$\triangle ST_1T_4 \sim \triangle SA_4A_1 ,$$

neboť se oba trojúhelníky shodují v úhlu při vrcholu S a dále platí vztahy (3). Proto je $\sphericalangle ST_1T_4 = \sphericalangle SA_4A_1$ a tudíž je $T_1T_4 \parallel A_4A_1$ a dále platí

$$A_4A_1 = 3 \cdot T_1T_4 . \tag{4}$$

Trojúhelníky TT_1T_4, TA_1A_4 se shodují v úhlech při vrcholu T (úhly vrcholové) a dále je $\sphericalangle TT_1T_4 = \sphericalangle TA_1A_4$ (úhly střídavé, při čemž je $T_1T_4 \parallel A_4A_1$); proto platí

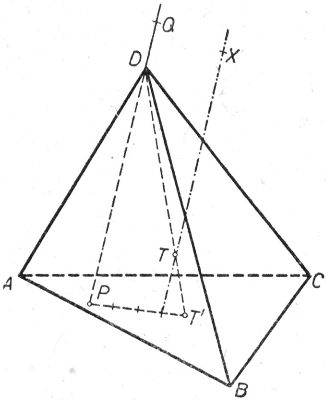
$$\triangle TT_1T_4 \sim \triangle TA_1A_4 .$$

Protože platí vztah (4), plyne z této podobnosti

$$\frac{TA_1}{TT_1} = \frac{TA_4}{TT_4} = 3 . \tag{5}$$

Tím jsou vztahy (2) dokázány.

II. Víme, že uvnitř úsečky A_1T_1 leží jediný bod T, o němž platí první vztah (2), a proto když budeme vyšetřovat společný bod úseček A_1T_1, A_2T_2 nebo společný bod úseček A_1T_1, A_3T_3, dospějeme právě k bodu T, který jsme sestrojili v odstavci I. Tím je dokázáno, že úsečky A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3, A_4T_4 mají společný bod T, který leží uvnitř každé z nich. Ze vztahů (5) a obdobných dalších dostaneme snadno vztahy (1). Tím jsme provedli řešení úlohy a).



Obr. 24.

b) I. Označme T' (srovnej s obr. 24) těžiště trojúhelníka ABC a uvnitř polopřímky PQ zvolme bod D. Uvažujme čtyrstěn $ABCD$ a označme T jeho těžiště. Podle úlohy a) platí, že bod T leží uvnitř úsečky DT', při čemž je

$$TT' = \tfrac{1}{4} \cdot DT' . \qquad (6)$$

Body P, T' mají v rovině ABC zcela určitou polohu, bod D probíhá vnitřek polopřímky PQ. V rovině, která obsahuje přímku PQ a bod T' (a taková rovina existuje alespoň jedna), uvažujme stejnolehlost **S** o středu T' a o koeficientu stejnolehlosti $\frac{1}{4}$. V této stejnolehlosti vzhledem ke vztahu (6) bod T přísluší bodu D.

Bodu P v této stejnolehlosti **S** přísluší bod O a polopřímce PQ polopřímka OX, při čemž bod X leží uvnitř poloprostoru $ABCQ$ a dále je $OX \parallel PQ$.

Bod T proto leží uvnitř polopřímky OX pro každou polohu bodu D, který leží uvnitř polopřímky PQ.

P o z n á m k a. Jestliže je $P \equiv T'$, potom splývají polopřímky OX, PQ a body O, T', při čemž platí vztah (6). Jestliže však je $P \neq T'$, potom jsou polopřímky OX, PQ různé a rovněž je $O \neq T'$; platí vztah (6) a dále je $OT' = \frac{1}{4} \cdot PT'$.

II. Obráceně, když zvolíme uvnitř polopřímky OX libovolný bod T_0, přísluší mu ve stejnolehlosti $\mathbf{S}'$ o středu T' a o koeficientu 4 stejnolehlosti v rovině položené přímkou PQ a bodem T' (taková rovina existuje alespoň jedna) bod D_0, který zřejmě padne dovnitř polopřímky PQ; odtud plyne, že bod T_0 je těžištěm čtyrstěnu $ABCD_0$. Tím je úloha řešena.

Závěr. Body T vyplní vnitřek polopřímky OX, která v rovině obsahující body P, Q, T' přísluší polopřímce PQ ve stejnolehlosti $\mathbf{S}$, jejímž středem je bod T' a jejíž koeficient je roven číslu $\frac{1}{4}$.

12. Označme T střed základny PQ daného rovnoramenného trojúhelníka OPQ. V polorovině PQO buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$, která se dotýká přímky PQ v bodě T.

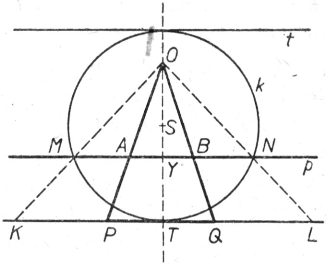
Sestrojte uvnitř úsečky OP bod A a uvnitř úsečky OQ bod B, které mají tyto vlastnosti:

(1) Je $AB \parallel PQ$.

(2) Přímka AB protne kružnici k ve dvou různých bodech M, N.

(3) Platí $MN = 3 \cdot AB$.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům a, v, r, kde $a = \frac{1}{2} \cdot PQ$, $v = OT$.



Obr. 25.

Řešení. I. Rozbor. Předpokládejme, že jsme sestrojili přímku $AB \parallel PQ$, která je řešením úlohy (obr. 25). Označení průsečíků M, N přímky AB s kružnicí k

volme tak, aby body přímky AB byly v pořádku M, A, B, N. Podle požadavků textu úlohy nutně platí

$$MN = 3 \cdot AB\,. \tag{1}$$

Proto vzhledem k souměrnosti kružnice k a trojúhelníka OPQ podle přímky OT platí

$$MA = AB = BN\,. \tag{2}$$

Označme po řadě K, L průsečíky přímek OM, ON s přímkou PQ. Potom jsou body K, P, Q, L po řadě stejnolehlé s body M, A, B, N podle středu O stejnolehlosti. Odtud vzhledem k platnosti vztahů (2) plyne

$$KP = PQ = QL\,. \tag{3}$$

II. Nyní celý předchozí postup obrátíme a provedeme tuto konstrukci (obr. 25): Na přímce PQ, v níž leží základna PQ daného rovnoramenného trojúhelníka OPQ, sestrojme body $K \neq Q$, $L \neq P$ tak, že platí vztahy (3). Označme M společný bod kružnice k a úsečky OK, a to takový, že leží uvnitř této úsečky. Bodem M veďme přímku $p \parallel PQ$. Označme $N \neq M$ další společný bod přímky p a kružnice k a dále označme A, B po řadě body společné přímce p a přímkám OP, OQ. Za předpokladu, že bod M leží uvnitř úsečky OK, uvažujme stejnolehlost o středu O, ve které bodu K přísluší bod M. V této stejnolehlosti přímce PQ přísluší přímka $p \parallel PQ$, bodům P, Q, L po řadě body A, B, N, které vzhledem k poloze bodu M uvnitř úsečky OK leží zřejmě po řadě uvnitř úseček OP, OT, OQ, OL.

Ze stejnolehlosti bodů K, P, Q, L s body M, A, B, N a z platnosti vztahů (3) plyne platnost vztahu

$$MA = AB = BN\,,$$

takže přímka p je skutečně řešením úlohy; tím je podán též důkaz správnosti řešení úlohy.

III. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda existuje uvnitř úsečky OK bod M, který je zároveň bodem kružnice k. Na tomto základě provedeme diskusi řešitelnosti. Především je

$$ST = r,\ PT = a,$$
$$OT = v,\ KT = 3a. \tag{4}$$

Protože bod K leží na tečně PTQ kružnice k, leží vně této kružnice.

Rozeznávejme tři případy:

Případ [1]. Nechť je $v < 2r$. Tu bod O leží uvnitř kružnice k a podle známé základní věty má úsečka OK s kružnicí k právě jeden společný bod M. V tomto případě má úloha právě jedno řešení.

Případ [2]. Nechť je $v = 2r$. Tu leží bod O na kružnici k. Ale přímka OK není kolmá k přímce OT (jinak by platilo $OK \parallel PQ$, což odporuje tomu, že bod K leží na přímce PQ); proto není přímka OK tečnou kružnice k a je tedy nutně její sečnou. Přitom druhý průsečík M přímky OK a kružnice k leží zřejmě uvnitř úsečky OK. V tomto případě má úloha opět právě jedno řešení.

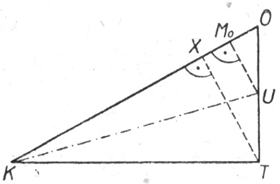
Případ [3]. Nechť je $v > 2r$. V tomto případě všechny společné body kružnice k a přímky OK, pokud existují, leží nutně uvnitř úsečky OK; to plyne z toho, že všechny body kružnice k leží v přímém pásu obou rovnoběžných tečen PQ, t této kružnice k a část přímky OK, která v tomto pásu leží, patří celá úsečce OK.

Označme U společný bod osy úhlu $\sphericalangle OKT$ a úsečky OT; dále označme X patu kolmice vedené bodem T k přímce OK (obr. 26). Podle Eukleidovy věty o odvěsně z pravoúhlého trojúhelníka OKT plyne

$$KX = \frac{KT^2}{OK},\quad OX = \frac{OT^2}{OK} \tag{4'}$$

a podle Eukleidovy věty o výšce z téhož trojúhelníka dostaneme $TX^2 = KX \cdot OX$.

Dosaďme sem z předchozích vztahů (4′) za KX, OX; po úpravě dostaneme



Obr. 26.

$$TX = \frac{KT \cdot OT}{OK}.$$

Odtud pomocí vztahů (4) snadno vypočítáme, že

$$TX = \frac{3av}{\sqrt{9a^2 + v^2}}, \tag{5}$$

neboť podle Pythagorovy věty je $OK = \sqrt{9a^2 + v^2}$. Označme M_0 patu kolmice vedené bodem U k přímce OK; dále označme $UT = \varrho$. Zřejmě platí

$$UM_0 = UT = \varrho\,. \tag{6}$$

Ze stejnolehlosti úseček TX, UM_0 podle středu O stejnolehlosti plyne

$$\frac{UM_0}{TX} = \frac{OU}{OT}$$

neboli vzhledem k (6), (4)

$$\frac{\varrho}{TX} = \frac{v - \varrho}{v};$$

po snadné úpravě dostaneme

$$\varrho(v + TX) = v \cdot TX\,,$$

t. j.

$$\varrho = \frac{v \cdot TX}{v + TX}\,.$$

Po dosazení ze vztahu (5) a úpravě obdržíme

$$\varrho = \frac{3av}{3a + \sqrt{9a^2 + v^2}}, \tag{7}$$

což je číslo menší než $\frac{1}{2}v$, jak se snadno usoudí.

A nyní dokážeme:

Případ a). Jestliže platí

$$\tfrac{1}{2}v > r > \varrho \tag{8}$$

neboli jestliže bod S leží uvnitř úsečky OU a zároveň je $r < \frac{1}{2}v$, potom má úloha dvě různá řešení.

Případ b). Jestliže platí $r = \varrho$ neboli jestliže je $S \equiv U$, má úloha právě jedno řešení.

Případ c). Jestliže platí

$$r < \varrho \tag{9}$$

neboli jestliže bod S leží uvnitř úsečky UT, nemá úloha řešení.

Důkaz. Případ a) Když platí vztahy (8), je přímka OK sečnou kružnice k, neboť vzdálenost bodu S od přímky OK je zřejmě menší než ϱ a podle (8) tedy menší než r. Podle odst. a) oba různé společné body přímky OK a kružnice k leží uvnitř úsečky OK a každý z nich tedy vede k jednomu řešení.

Případ b) je zřejmý.

Případ c). Protože bod S má od přímky OK zřejmě vzdálenost větší než UM_0 neboli ϱ, je vzhledem ke vztahu (9) vzdálenost bodu S od přímky OK větší než poloměr r kružnice k a přímka OK je nesečnou kružnice k. Proto nemá úloha řešení.

Tím je provedena diskuse všech případů [1] až [3], a protože není jiné možnosti, je provedena i diskuse celé úlohy.

13. Pro každé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) \geqq (1 + a + a^2)^2; \tag{1}$$

dokažte.

Určete všechna reálná čísla a, pro která nastane rovnost.

Řešení. I. Nechť tvrzení vyslovené v úloze není správné, t. j. nechť pro některé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) < (1 + a + a^2)^2 . \tag{2}$$

Dokážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Ze vztahu (2) postupně plynou tyto vztahy

$$\begin{aligned} 3 + 3a^2 + 3a^4 &< 1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3 , \\ 0 &< 2(a - 1) - 2a^3(a - 1), \\ 0 &< - 2(a - 1)(a^3 - 1), \\ 0 &< - 2(a - 1)(a - 1)(a^2 + a + 1), \\ 0 &< - 2(a - 1)^2(a^2 + a + 1). \end{aligned} \tag{3}$$

Nejprve dokážeme, že pro každé reálné a je výraz $a^2 + a + 1$ kladný.

Důkaz. Postupně platí

$$a^2 + a + 1 = a^2 + 2a \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = (a + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} .$$

Výraz $(a + \frac{1}{2})^2$ je pro každé reálné číslo a zřejmě nezáporný; proto, když k němu přičteme kladné číslo $\frac{3}{4}$, dostaneme kladné číslo. Tím je dokázáno, že výraz $a^2 + a + 1$ je kladný pro každé reálné číslo a.

Nyní ještě dokážeme, že výraz $- 2(a - 1)^2$ je roven nule pro $a = 1$ a pro $a \neq 1$ je záporný.

Důkaz. Výraz $(a - 1)^2$ je pro $a = 1$ zřejmě roven nule a tím je roven nule i výraz $- 2(a - 1)^2$. Pro $a \neq 1$ je výraz $(a - 1)^2$ kladný, a proto je výraz $- 2(a - 1)^2$ záporný. Tím je tvrzení dokázáno.

Součin kladného výrazu $a^2 + a + 1$ a nekladného výrazu $-2(a-1)^2$ není kladný (t. j. je buď roven nule nebo záporný); proto nemůže platit vztah (3) a předpoklad (2) vede tedy ke sporu. Tím je tvrzení uvedené v úloze dokázáno.

II. Z předchozího odstavce plyne, že vztah (1) je ekvivalentní se vztahem

$$0 \geqq -2(a-1)^2 (a^2 + a + 1) \,. \tag{4}$$

Případ rovnosti ve vztahu (4) může nastat jedině pro $(a-1)^2 = 0$ neboli pro $a = 1$, neboť výraz $a^2 + a + 1$ je pro každé reálné číslo a kladný.

Tím je řešení úlohy provedeno.

14. Označme obvyklým způsobem a, b, c strany trojúhelníka a α, β, γ jeho úhly. Platí-li pro úhly vztah $\beta = 3\alpha$, platí pro strany vztah

$$\frac{c^2}{(b-a)^2} = \frac{b+a}{a};$$

dokažte.

Řešení. Podle předpokladu je $\beta = 3\alpha$ (obr. 27); proto platí $b > a$ a tedy $b - a > 0$. Přitom jsme označili $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Rozdělme úhel $\sphericalangle ABC$ ve tři shodné úhly

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBC = \alpha \,,$$

kde D, E jsou body úsečky AC; na ní tedy leží body v pořádku A, D, E, C. Tu platí:

$\sphericalangle BDE = 2\alpha$ (vnější úhel v trojúhelníku ADB, v němž je $\sphericalangle A = \sphericalangle B$);

$\sphericalangle CEB = 3\alpha$ (vnější úhel v trojúhelníku BDE, v němž je $\sphericalangle B = \alpha$, a $\sphericalangle D = 2\alpha$).

Podle věty uu o podobnosti trojúhelníků platí

$$\triangle ABC \sim \triangle BEC \tag{1}$$

(je totiž $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EBC$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BEC$),

$$\triangle BDE \sim \triangle ABE \qquad (2)$$

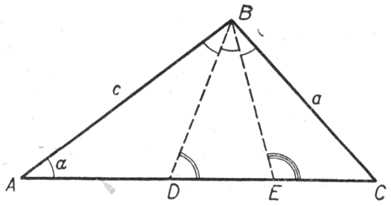
(je totiž $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ABE$, $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BAE$).

Trojúhelník ABD má při straně AB shodné úhly velikosti α; proto je rovnoramenný a platí

$$AD = BD\,. \qquad (3)$$

Trojúhelník BDC má při straně BD shodné úhly velikosti 2α; proto je rovnoramenný a platí

$$DC = BC = a\,. \qquad (4)$$



Obr. 27.

Pak je

$AD = AC - DC$ a odtud podle (4) dostaneme $AD = b - a$;

proto vztah (3) lze psát

$$AD = BD = b - a\,. \qquad (5)$$

Ze vztahu (1) plyne

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{CB}, \quad \frac{AB}{CA} = \frac{BE}{CB}$$

neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{CE}{a}, \quad \frac{c}{b} = \frac{BE}{a}.$$

Odtud plyne

$$CE = \frac{a^2}{b}, \quad BE = \frac{ac}{b}. \tag{6}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AE}{AB};$$

odtud vzhledem ke vztahům (6), (5) dostaneme

$$\frac{ac}{b} : (b - a) = \frac{AE}{c}$$

neboli

$$AE = \frac{ac^2}{b(b - a)}. \tag{7}$$

Podle sestrojení bodů D, E platí

$$DE = DC - CE,$$
$$AE = AD + DE$$

neboli

$$AE = AD + DC - CE.$$

Do posledního vztahu dosaďme ze vztahů (7), (5), (4), (6); obdržíme

$$\frac{ac^2}{b(b - a)} = b - a + a - \frac{a^2}{b}$$

neboli

$$\frac{ac^2}{b(b - a)} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Po úpravě (především rozložíme $b^2 - a^2$ a obě strany rovnosti znásobíme číslem b) dostaneme

$$\frac{c^2}{(b - a)^2} = \frac{b + a}{a},$$

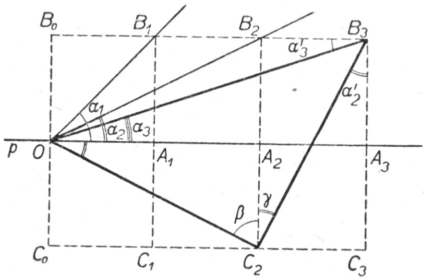
což jsme měli dokázat.

15. Buď dána přímka $p \equiv OA_1A_2A_3$, při čemž platí $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = a$, kde a je dané kladné číslo. V jedné z obou polorovin vyťatých přímkou p sestrojíme čtverce $OA_1B_1B_0$, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$. Označme $\sphericalangle B_1OA_3 = \alpha_1$, $\sphericalangle B_2OA_3 = \alpha_2$, $\sphericalangle B_3OA_3 = \alpha_3$.
Dokažte, že platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90^\circ .$$

Řešení (obr. 28). Zřejmě je

$$\alpha_1 = 45^\circ . \tag{1}$$



Obr. 28.

Sestrojme k bodům B_0, B_1, B_2, B_3 po řadě body C_0, C_1, C_2, C_3 souměrně sdružené podle dané přímky p. Dostaneme tak čtverce $OA_1C_1C_0$, $A_1A_2C_2C_1$, $A_2A_3C_3C_2$, jejichž strany mají rovněž velikost a.
Platí

$$\triangle OB_2A_2 \cong \triangle B_3C_2C_3 \text{ (sus)} , \tag{2}$$

$$\triangle OB_2A_2 \cong \triangle C_2B_3B_2 \text{ (sus)} . \tag{3}$$

Označme (viz obr. 28) $\sphericalangle OC_2A_2 = \beta$, $\sphericalangle B_2C_2B_3 = \gamma$, $\sphericalangle C_3B_3C_2 = \alpha_2'$, $\sphericalangle OB_3B_0 = \alpha_3'$.

Protože je $\sphericalangle A_2OC_2 = \alpha_2$ (souměrnost vzhledem k přímce p), je

$$\beta = 90° - \alpha_2 . \tag{4}$$

Ze vztahů (2), (3) plyne

$$\gamma = \alpha_2 , \tag{5}$$

$$\alpha_2' = \alpha_2 . \tag{6}$$

Dále je

$$\alpha_3' = \alpha_3 \text{ (střídavé úhly)} . \tag{7}$$

Sečteme-li vztahy (4), (5), dostaneme $\beta + \gamma = 90°$, takže trojúhelník OB_3C_2 má $\sphericalangle C_2 = 90°$; protože však je $OC_2 = B_3C_2$, je trojúhelník rovnoramenný a tudíž

$$\sphericalangle OB_3C_2 = 45° .$$

Z toho plyne (podle obrázku), že

$$\alpha_2' + \alpha_3' = 45° , \tag{8}$$

neboť $\sphericalangle B_2B_3A_3 = 90°$.

Nyní dosaďme do vztahu (8) ze vztahů (6), (7) a dostaneme

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 45° .$$

Přičteme-li k oběma stranám tohoto vztahu obě strany vztahu (1), dostaneme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90° ,$$

což jsme měli dokázat.

16. Buďte dány dvě různé roviny $\varkappa \parallel \varrho$. V rovině $\varkappa$ je dán kruh **K** o středu S a o poloměru $2m$; v rovině ϱ je dán čtverec $ABCD$ o straně velikosti $2a$. Buď X libovolný bod kruhu **K** a Y libovolný bod čtverce $ABCD$ (tedy na př. i bod vnitřku); označme Z střed úsečky XY.

Co vyplní všechny body Z, když bod X probíhá všechny body kruhu **K** a když bod Y probíhá všechny body čtverce $ABCD$?

Řešení. Pomocné věty. Při řešení úlohy užijeme některých známých vět. Dají se snadno odvodit použitím stejnolehlosti v rovině (ostatně viz větu 37 na str. 92 učebnice Geometrie pro 10. post. ročník).

V1. Buďte dány dvě rovnoběžné různé roviny β, γ. Když bod B probíhá rovinu β a bod C rovinu γ, potom střed D úsečky BC probíhá rovinu δ, která je rovnoběžná s rovinami β, γ a má od nich stejné vzdálenosti.

V2. Buďte dány dvě rovnoběžné roviny β, γ, které nejsou ani vrcholové, ani rovnoběžné s některou vrcholovou přímkou daného jehlanového prostoru o vrcholu V. Potom obě roviny protínají tento jehlanový prostor v podobných mnohoúhelnících **B**, **C**.

Označme po řadě $b > 0$, $c > 0$ vzdálenosti bodu V od rovin β, γ. Buďte $B_1 \neq B_2$ dva libovolně zvolené body v rovině β a C_1, C_2 po řadě společné body roviny γ s přímkami VB_1, VB_2. Potom platí

$$\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{b}{c}\,. \tag{1}$$

Když bod B_1 probíhá mnohoúhelník **B**, probíhá bod C_1 mnohoúhelník **C** a obráceně; mnohoúhelníky **B**, **C** jsou podobné (poměr podobnosti je $\frac{b}{c}$).

V3. Buďte dány dvě rovnoběžné roviny β, γ a bod V, který neleží v žádné z nich. Dále buď dán v rovině β kruh **B** o středu S_B. Potom rovina γ protne kuželový prostor o vrcholu V a řídicím kruhu **B** v kruhu **C**, jehož střed S_C leží na přímce VS_B; přitom o poloměrech r_B, r_C kruhů B, C platí

$$r_C : r_B = \frac{c}{b}\,,$$

kde $b > 0$, $c > 0$ jsou po řadě vzdálenosti bodu V od rovin β, γ.

Buďte $B_1 \neq S_B$, $C_1 \neq S_C$ po řadě body rovin β, γ, které leží v přímce s bodem V. Potom platí současně právě jedna z těchto dvojic nerovností:

a) $S_B B_1 < r_B$, $\quad S_C C_1 < r_C$,

b) $S_B B_1 = r_B$, $\quad S_C C_1 = r_C$,

c) $S_B B_1 > r_B$, $\quad S_C C_1 > r_C$.

Řešení dané úlohy. I. Označme σ rovinu rovnoběžnou s rovinami $\varkappa$, ϱ, a to takovou, že má od obou rovin $\varkappa$, ϱ rovné vzdálenosti (obr. 29).

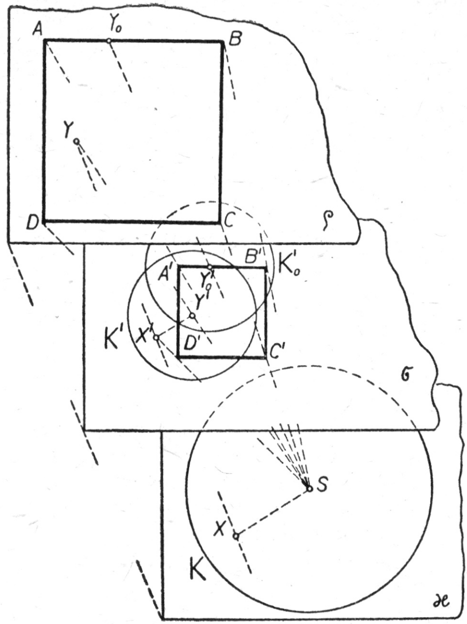
Podle věty **V1** leží středy Z úseček XY, kde bod X probíhá rovinu $\varkappa$ a bod Y rovinu ϱ, v rovině σ.

Uvažujme jehlanový prostor o vrcholu v daném bodě S a řídicím čtverci $ABCD$. Roviny ϱ, σ protnou podle věty **V2** jehlanový prostor ve čtvercích $ABCD$, $A'B'C'D'$. Když bod Y probíhá čtverec $ABCD$, probíhá podle **V2** průsečík Y' přímky SY s rovinou σ čtverec $A'B'C'D'$. Přitom platí $A'B' = \frac{1}{2} \cdot AB$ neboli $A'B' = a$; to plyne z toho, že poměr vzdáleností bodu S od rovin σ, ϱ je roven $\frac{1}{2}$.

Uvažujme nyní kuželový prostor o vrcholu Y, kde Y je určitý bod čtverce $ABCD$, a řídicím kruhu $\mathbf{K}$. Rovina σ protne tento prostor podle věty **V3** v kruhu $\mathbf{K}'$ o poloměru m, neboť poměr vzdáleností bodu Y od rovin σ, $\varkappa$ je roven $\frac{1}{2}$; střed Y' kruhu $\mathbf{K}'$ je průsečík přímky YS s rovinou σ. Když bod X probíhá kruh $\mathbf{K}$, vyplní podle věty **V3** průsečík X' přímky YX s rovinou σ kruh $\mathbf{K}'$. Bod X' patří do hledané množiny $\mathbf{Z}$ bodů Z, o nichž mluví text úlohy.

Když bod Y nyní probíhá všechny body čtverce $ABCD$, přísluší ke každé jeho poloze v rovině σ příslušný bod Y' a určitý kruh $\mathbf{K}'$ se středem Y' a poloměrem m.

Příslušné body X' těchto kruhů $\mathbf{K}'$ patří do hledané množiny $\mathbf{Z}$ bodů Z z textu úlohy. Tímto způsobem zřejmě dostáváme všechny hledané body Z. Množinu $\mathbf{Z}$ dostaneme tedy tak, že



Obr. 29.

kolem každého bodu Y' čtverce $A'B'C'D'$ sestrojíme kruh $\mathbf{K}'$ o poloměru m; množina bodů X' těchto kruhů je hledaná množina $\mathbf{Z}$. Ta se skládá zřejmě z těchto útvarů (viz obr. 30):

[1] Ze čtverce $A'B'C'D'$;

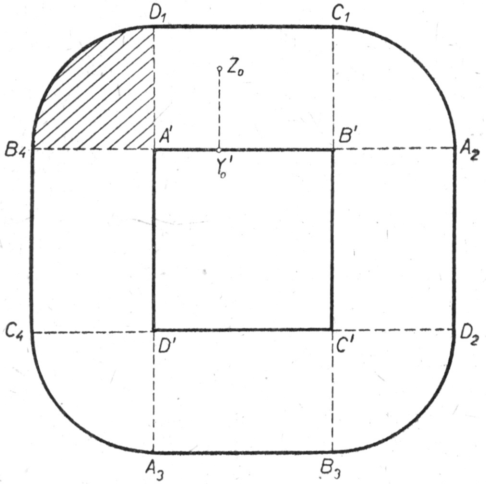
[2] ze čtyř obdélníků $A'B'C_1D_1$, $B'C'D_2A_2$, $C'D'A_3B_3$, $D'A'B_4C_4$, které nemají se čtvercem $A'B'C'D'$ žádný společný vnitřní bod, při čemž platí $B'C_1 = C'D_2 = D'A_3 = A'B_4 = m$;

[3] ze čtyř čtvrtkruhů o poloměru m, které leží v úhlech $\sphericalangle D_1A'B_4$, $\sphericalangle C_1B'A_2$, $\sphericalangle D_2C'B_3$, $\sphericalangle A_3D'C_4$; střed každého

z těchto čtvrtkruhů splývá s vrcholem příslušného pravého úhlu.

II. Nyní dokážeme, že obráceně každý bod Z_0 množiny **Z** je středem určité úsečky X_0Y_0, kde X_0 je bodem kruhu **K** a Y_0 bodem čtverce $ABCD$; naším úkolem je sestrojit ke zvolenému bodu Z_0 množiny **Z** příslušné body X_0, Y_0. Pro důkaz tohoto tvrzení rozeznávejme tyto možnosti:

Případ [1]. Nechť bod Z_0 je bodem čtverce $A'B'C'D'$. Označme Y_0 průsečík přímky SZ_0 s rovinou ϱ. Podle věty



Obr. 30.

V2 je bod Y_0 bodem čtverce $ABCD$. Za bod X_0 volme bod S, t. j. $X_0 \equiv S$. Podle věty **V1** je průsečík Z_0 přímky X_0Y_0 (neboli přímky SY_0) s rovinou σ středem úsečky X_0Y_0. Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

Případ [2]. Nechť bod Z_0 je bodem některého z obdélníků [2], ale neleží na žádné ze stran čtverce $A'B'C'D'$. Nechť pro určitost je Z_0 na př. bodem obdélníka $A'B'C_1D_1$. Veďme bodem Z_0 kolmici k přímce $A'B'$ (viz obr. 30) a označme Y'_0 její patu. Ta padne do úsečky $A'B'$, při čemž podle vlastností obdélníka a podle předpokladu o bodu Z_0 je

$$Z_0Y'_0 \leqq m.$$

Proto bod Z_0 je bodem kruhu $\mathbf{K}'_0$ o poloměru m a o středu Y'_0. Podle věty **V2** protne přímka SY'_0 rovinu ϱ v bodě Y_0, který je bodem úsečky AB.

Uvažujme kuželový prostor o vrcholu Y_0 a o řídicím kruhu $\mathbf{K}$; podle věty **V3** protne rovina σ tento kuželový prostor v kruhu o středu Y'_0 a poloměru m, t. j. právě v uvažovaném kruhu $\mathbf{K}'_0$. Patří tedy přímka Y_0Z_0 do tohoto kuželového prostoru, a proto protne rovinu $\varkappa$ v bodě X_0, který je bodem kruhu $\mathbf{K}$. Podle věty **V1** je však průsečík Z_0 přímky X_0Y_0 s rovinou σ středem úsečky X_0Y_0, při čemž podle právě provedené konstrukce je X_0 bodem kruhu $\mathbf{K}$ a Y_0 bodem čtverce $ABCD$. Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

Případ [3]. Nechť Z_0 je bodem jednoho čtvrtkruhu [3], na př. toho čtvrtkruhu, který leží v pravém úhlu $\sphericalangle B_4A'D_1$; tento čtvrtkruh je částí kruhu $\mathbf{K}'_0$ o středu $A' \equiv Y'_0$ a poloměru m. Proveďme pro bod Y'_0 touž úvahu jako v případě [2]. Dospějeme opět k bodům $Y_0 \equiv A$ a X_0, z nichž první je bodem čtverce $ABCD$ a druhý bodem kruhu $\mathbf{K}$. Střed úsečky X_0Y_0 podle věty **V1** je zřejmě daný bod Z_0. Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

III. Závěr. Protože každý bod množiny $\mathbf{Z}$ je zahrnut alespoň v jednom z diskutovaných případů, je hořejší tvrzení dokázáno a množina $\mathbf{Z}$ je skutečně množinou všech bodů Z, o nichž mluví text úlohy.

5. Úlohy II. kola kategorie B.

1. Nech a je dané reálne číslo. Urobte rozbor funkcie

$$y = ax^2 + |x^2 - 1| \qquad (1)$$

vzhľadom na rôzne hodnoty čísla a; na základe rozboru načrtnite graf tejto funkcie.

Riešenie. Ak je $|x| \geqq 1$, je $x^2 - 1 \geqq 0$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, teda

$$y = (a + 1)x^2 - 1\,.$$

Ak je $|x| < 1$, je $x^2 - 1 < 0$, teda $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$, teda

$$y = (a - 1)x^2 + 1\,.$$

Diskusia. Rozoznávajme tri prípady:

Prípad [1]. Nech je $a = -1$. Potom predpis (1) pre $|x| \geqq 1$ znie $y = -1$, pre $|x| < 1$ znie $y = -2x^2 + 1$. Priebeh funkcie zachycuje obr. 31.

Prípad [2]. Nech je $a = 1$. Potom predpis (1) pre $|x| \geqq 1$ znie $y = 2x^2 - 1$, pre $|x| < 1$ znie $y = 1$. Priebeh zachycuje obr. 32.

Prípad [3]. Nech je $|a| \neq 1$. Potom sa graf skladá z troch parabolických oblúkov; na pr. pre $a = 0$ je znázornený na obr. 33.

2. Dokažte:

a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 - x + 1 \neq 0$.

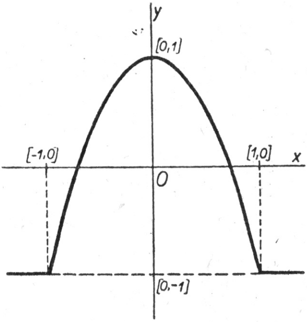
b) Pro každé reálné číslo x platí vztah

$$\frac{2}{3} \leqq \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \leqq 2.$$

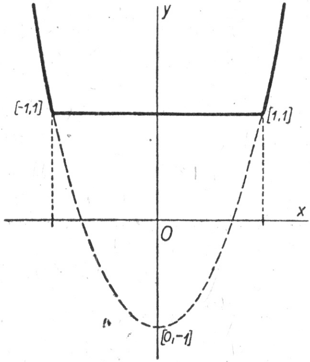
Řešení. a) Platí

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\,.$$

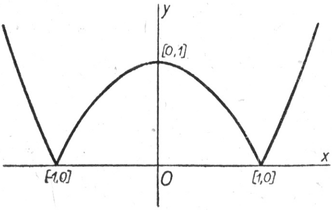
První sčítanec posledního součtu je číslo nezáporné, druhý je číslo kladné; jejich součet je tedy číslo kladné pro všechna reálná x. Tím je tvrzení dokázáno.



Obr. 31.



Obr. 32.



Obr. 33.

b) Předpokládejme, že některá z obou rovností neplatí; dokážeme, že to není možné. Je třeba se zabývat dvěma nerovnostmi.

Případ [1]. Nechť platí

$$\frac{2}{3} > \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1}. \tag{1}$$

Znásobme tuto nerovnost kladným číslem $3(x^2 - x + 1)$; dostaneme

$$2(x^2 - x + 1) > 3(x^2 + 1)$$

neboli

$$0 > x^2 + 2x + 1,$$

t. j.

$$0 > (x + 1)^2.$$

Avšak číslo $(x + 1)^2$ je nezáporné, t. j. rovné nule nebo větší než nula; proto poslední vztah není možný. Předpoklad (1) tedy vede ke sporu.

Případ [2]. Nechť platí

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > 2. \tag{2}$$

Znásobme obě strany této nerovnosti kladným číslem $x^2 - x + 1$; dostaneme

$$x^2 + 1 > 2(x^2 - x + 1)$$

neboli

$$0 > x^2 - 2x + 1,$$

t. j.

$$0 > (x - 1)^2.$$

To je spor, neboť číslo $(x - 1)^2$ je nezáporné, tedy větší než nula nebo rovné nule. Proto předpoklad (2) vede ke sporu.

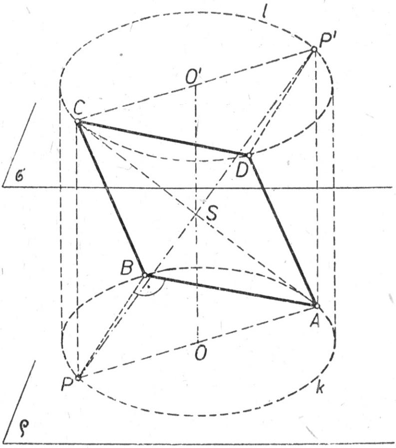
Závěr. Protože neplatí žádný ze vztahů (1), (2), platí vztahy uvedené v textu úlohy, což jsme měli dokázat.

3. Buď dána rovina ϱ a mimo ni bod C; označme P patu kolmice vedené bodem C k rovině ϱ. V rovině ϱ buď dále dán bod A různý od bodu P. Uvažujte obdélník $ABCD$, kde B je bod roviny ϱ; střed tohoto obdélníka označte S.

a) Vyšetřte množinu bodů B všech takto sestrojených obdélníků $ABCD$.

b) Vyšetřte množinu vrcholů D všech takto sestrojených obdélníků $ABCD$.

Řešení (obr. 34). a) Předně si všimněme, že středy všech obdélníků, které vyhovují úloze, splývají se středem S úsečky AC a jsou tedy totožné. Označme O střed úsečky AP a k kružnici v rovině ϱ o středu O a poloměru $\frac{1}{2}AP$. Dokážeme: Množinou bodů B je kružnice k s výjimkou bodu A.



Obr. 34.

Důkaz. Úsečka SO je střední příčkou trojúhelníka ACP, kde $\sphericalangle P = 90°$. Proto je $SO \parallel CP$, a protože je $CP \perp \varrho$, je též $SO \perp \varrho$. Bod P zřejmě patří do vyšetřované množiny, nikoli však bod A (neboť v obdélníku $ABCD$ je vždy $B \neq A$).

Uvažujme libovolný obdélník $ABCD$, který vyhovuje úloze, a to takový, že $B \neq P$ (a ovšem $B \neq A$). Potom platí

$AB \perp BC$ (sousední strany obdélníka),
$AB \perp CP$ (přímka CP stojí kolmo k rovině ϱ).

Je tedy

$$AB \perp (PBC) .$$

Proto je přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny PBC a tedy i k přímce PB, neboli $\sphericalangle PBA = 90°$. Leží tedy podle Thaletovy věty všechny vyšetřované body B na kružnici k, což jsme měli dokázat.

Obráceně, každý bod $B \neq A$ kružnice k je vrcholem jednoho obdélníka $ABCD$, který vyhovuje úloze. O bodu P je to zřejmé. Uvažujme nyní bod B kružnice k různý od bodů P, A. Pak je $\sphericalangle PBA = 90°$. Přímka AB stojí kolmo k přímkám PB, PC (neboť je $PC \perp \varrho$), a proto je

$$AB \perp (PBC) .$$

Je tedy přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny PBC a tedy i k přímce BC; proto je $\sphericalangle ABC = 90°$. Sestrojíme-li v rovině ABC k bodu B bod D souměrně sdružený podle středu S souměrnosti, je $ABCD$ rovnoběžník s pravým úhlem při vrcholu B a je to tedy obdélník.

Tím je úloha a) rozřešena.

b) Protože je $CD \parallel AB$, leží body D v rovině $\sigma \parallel \varrho$, vedené bodem C. Přitom je S pevný bod (střed dané úsečky AC). Bod D z daného bodu B dostaneme, když na prodloužení úsečky BS za bod S sestrojíme bod D tak, aby platilo $SD = SB$. Označme P', O' v rovině APC body souměrně sdružené k bodům P, O vzhledem ke středu S souměrnosti.

Zřejmě je $P'D = PB$, $O'P' = O'C = OP$, $CD = AB$, a proto je

$$\triangle CP'D \cong \triangle APB \text{ (sss)},$$

takže $\sphericalangle CDP' = 90°$. Leží tedy bod D v rovině σ na kružnici $l \equiv (O', O'C)$, tedy na kružnici shodné s kružnicí k.

Obráceně, každý bod $D \not\equiv C$ právě určené kružnice l je vrcholem jednoho obdélníka $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy. O bodu P' je to samozřejmé (viz obdélník $APCP'$). Nechť je tedy $D \not\equiv P'$, takže existuje úhel $\sphericalangle CDP' = 90°$. V rovině ACD sestrojme obdélník $ABCD$; jeho střed je zřejmě bod S. Rovina ACD protne roviny $\sigma \parallel \varrho$ v přímkách $DC \parallel p$, kde p prochází bodem A, a proto je $p \equiv AB$, takže bod B leží v rovině ϱ. Tím jsme sestrojili obdélník $ABCD$ příslušný k bodu D.

Hledanou množinou bodů D je tedy výše sestrojená kružnice l, ovšem s výjimkou bodu C. Tím je úloha b) rozřešena.

Poznámka. Úlohu je také možno řešit užitím plochy kulové $\varkappa \equiv (S, SA)$, která protne roviny ϱ, σ v kružnicích $k \equiv$ $\equiv (O, OA)$, $l \equiv (O', O'C)$.

4. V téže polorovině vyťaté danou přímkou p leží trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ tak, že body A, B, A', B' leží v přímce p. Označme $AB = c$, $A'B' = c'$; dále označme v, v' velikosti výšek v těchto trojúhelnících, které po řadě příslušejí ke stranám AB, $A'B'$ daných trojúhelníků.

Sestrojte přímku $q \parallel p$ takovou, aby protľala úsečky AC, BC, $A'C'$, $B'C'$ uvnitř po řadě v bodech M, N, M', N' takových, že platí $MN = M'N'$. Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům c, c', v, v' za předpokladu, že platí $v > v'$.

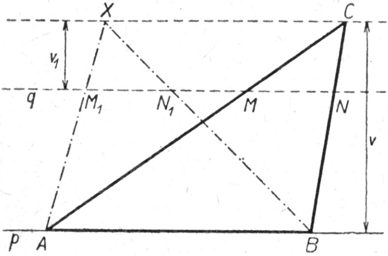
(Dokažte nejprve: Každý trojúhelník ABX, ležící v polorovině ABC, o straně AB a příslušné výšce v, vytne na hledané přímce q úsečku téže délky.)

Řešení. Pomocná věta **V**. Buďte ABC, ABX trojúhelníky, jejichž výšky příslušné ke straně AB jsou si rovny; přímka $q \parallel AB$ protne úsečky CA, CB, XA, XB po řadě v bodech M, N, M_1, N_1. Potom je $MN = M_1N_1$ (viz obr. 35).

Důkaz. Označme v_1 vzdálenost rovnoběžek XC, q; vzdálenost přímek XC, AB je podle textu úlohy v. Platí

$$\triangle ABC \sim \triangle MNC \quad \text{(shodnost v úhlech)}, \tag{1}$$

$$\triangle ABX \sim \triangle M_1N_1X \quad \text{(shodnost v úhlech)}. \tag{2}$$



Obr. 35.

Protože v podobných trojúhelnících je poměr příslušných výšek roven poměru podobnosti (což lze snadno dokázat), je podle (1) a (2)

$$\frac{MN}{AB} = \frac{v_1}{v}, \qquad \frac{M_1N_1}{AB} = \frac{v_1}{v}.$$

Odtud plyne $MN = M_1N_1$.

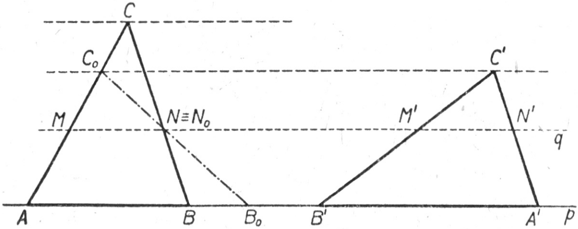
Řešení úlohy. Podle pomocné věty **V** (viz obr. 36) můžeme při konstrukci přímky q nahradit trojúhelník $A'B'C'$ pomocným trojúhelníkem AB_0C_0, kde B_0 leží na polopřímce AB a C_0 leží na polopřímce AC, při čemž je $AB_0 = A'B' = c'$ a výška trojúhelníka AB_0C_0 příslušná ke straně AB_0 je v' (leží tedy body C_0, C' na rovnoběžce k přímce AB). Hledaná přímka q, jestliže existuje, protne úsečku B_0C_0 v bodě N_0 a bude platit $MN_0 = M'N' = MN$ neboli $MN_0 = MN$; protože body N, N_0 leží v polorovině ACB (neboli v polorovině AC_0B_0), je $N \equiv N_0$.

Odtud plyne konstrukce bodů M, N, M', N':

Sestrojme trojúhelník AB_0C_0, jak bylo právě popsáno. Bod C_0 padne dovnitř úsečky AC, neboť je $v > v'$. Společný bod úseček BC, B_0C_0 označme N (viz obr. 36); bodem N veďme přímku $q \parallel AB$. Označme po řadě M, M', N' body společné přímce q a úsečkám AC, $A'C'$, $B'C'$. Podle pomocné věty **V** je

$$MN = M'N'$$

a q je hledaná přímka.



Obr. 36.

Úloha je za předpokladu $v > v'$ (t. j. když bod C_0 leží uvnitř úsečky AC) řešitelná právě tehdy, když úsečky B_0C_0, BC mají společný bod N, ležící uvnitř každé z nich. To zřejmě nastane právě tehdy, když bod B_0 leží na prodloužení úsečky AB za bod B; to znamená, že platí $c' > c$. Za tohoto předpokladu má úloha jediné řešení. Jestliže je $c' \leqq c$, nemá úloha řešení.

6. Úlohy I. kola kategorie C.

1. Do nádržky stále přitéká rovnoměrným proudem voda. Jestliže se v určitém okamžiku otevřou tři stejné odtokové trubice, vyprázdní se nádrž za 18 hodin. Kdybychom v témže okamžiku otevřeli jen dvě ze tří odtokových trubic, vyprázdnila by se nádrž za 30 hodin.

Za kolik hodin by se vyprázdnila nádrž, kdybychom ve zmíněném okamžiku otevřeli pouze jednu ze tří odtokových trubic?

Řešení. Označme 1 množství vody (t. j. jednotkové množství), které do nádrže přiteče za 1 hodinu; dále nechť jednou ze shodných odtokových trubic odteče za 1 hodinu q vody (udáno ve zvolených jednotkách pro množství).

V prvním případě za 1 hodinu ubude $3q - 1$ vody a za 18 hodin tedy ubude

$$a_1 = 18(3q - 1)\,.$$

Ve druhém případě za 1 hodinu ubude $2q - 1$ vody a za 30 hodin tedy ubude

$$a_2 = 30(2q - 1).$$

Ve třetím případě za 1 hodinu ubude $q - 1$ vody a za x hodin tedy ubude

$$a_3 = x(q - 1);$$

přitom nechť x udává dobu (v hodinách), za kterou se nádrž v tomto třetím případě vyprázdní.

V každém z těchto případů se nádrž vyprázdní, t. j. odteče všechna voda, která v daném okamžiku byla v nádrži; platí tedy $a_1 = a_2 = a_3$. Odtud dostaneme vztahy

$$18(3q - 1) = 30(2q - 1), \tag{1}$$

$$30(2q - 1) = x(q - 1). \tag{2}$$

Ze vztahu (1) plyne $q = 2$ a odtud a ze vztahu (2) dostaneme

$$x = 90\,.$$

Nádrž se ve třetím případě vyprázdní za 90 hodin; snadno se přesvědčíme, že toto číslo úloze vyhovuje.

2. Když o číslech $a, b, c, d \neq 0$ platí

$$d = a + b + c,$$

potom platí též

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2.$$

Dokažte.

Lze větu obrátit?

Řešení. I. Správnost tvrzení dokážeme, když dokážeme, že výraz

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2]$$

je roven nule pro každou čtveřici takových čísel a, b, c, d, o nichž platí

$$d = a + b + c \tag{1}$$

neboli

$$a + b + c - d = 0\,. \tag{2}$$

Výraz V upravme postupně takto:

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2 - 2ad - 2bd - 2cd] = 2ad + 2bd + 2cd - 2d^2 = 2d(a + b + c - d)\,.$$

Je tedy

$$V = 2d(a + b + c - d)\,. \tag{3}$$

Podle vztahu (2) je součin na pravé straně předchozí rovnosti roven nule, t. j.

$$V = 0\,,$$

což jsme měli dokázat.

(Poznámka. Tvrzení je zřejmě nezávislé na předpokladu $d \neq 0$.)

II. Obrácená věta zní: Jestliže pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \neq 0$ platí vztah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2, \tag{4}$$

potom platí vztah

$$d = a + b + c\,.$$

Dokážeme správnost této věty.

Stejným postupem jako v odstavci I dospějeme k tomu, že vztah (4) lze uvést na tvar (viz vztah (3))

$$2d(a + b + c - d) = 0\,,$$

který platí podle předpokladu pro každou čtveřici čísel a, b, c, $d \neq 0$.

Protože je $d \neq 0$, musí být

$$a + b + c - d = 0$$

neboli

$$d = a + b + c\,,$$

což jsme měli dokázat.

3. Jestliže přímka rozdělí trojúhelník ABC ve dva rovnoramenné trojúhelníky, má trojúhelník ABC buď dva úhly o součtu 90°, nebo dva úhly v poměru 1 : 2, nebo dva úhly v poměru 1 : 3. Dokažte.

Řešení. Označme v trojúhelníku ABC úhly $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$. Přímka p, která dělí trojúhelník ABC ve dva trojúhelníky, musí procházet jedním z jeho vrcholů, na př. vrcholem C (kdyby totiž neprocházela vrcholem, musila by protínat dvě strany trojúhelníka ABC, ale pak by jej rozdělovala na trojúhelník a čtyrúhelník). Označme D bod, ležící mezi body A, B, v němž přímka p protíná přímku AB. Potom je buď jeden z obou vedlejších úhlů $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$ tupý, nebo jsou oba tyto úhly pravé. Nechť na př. platí, že (srovnej s obr. 37)

$$\sphericalangle BDC \geqq 90°\,.$$

Uvažujme každou z obou možností zvlášť.

a) N e c h ť je $\sphericalangle BDC = 90°$; pak je též $\sphericalangle ADC = 90°$. Pak má rovnoramenný trojúhelník DBC nutně základnu BC (jedině proti základně rovnoramenného trojúhelníka může ležet pravý úhel) a trojúhelník DAC má z téhož důvodu základnu AC. Ale rovnoramenný trojúhelník pravoúhlý má při základně úhly 45°. Je tedy $\beta = \alpha = 45°$ a $\gamma = 90°$, takže platí

$$\alpha : \gamma = 1 : 2, \quad \alpha + \beta = 90°,$$

což jsme měli dokázat.

b) N e c h ť je

$$\sphericalangle BDC > 90°. \tag{1}$$

Pak má rovnoramenný trojúhelník DBC nutně základnu BC (jedině proti základně rovnoramenného trojúhelníka může ležet tupý úhel). Je tedy

$$\sphericalangle DCB = \beta\,, \tag{2}$$

$$\sphericalangle BDC = 180° - 2\beta\,. \tag{3}$$

Vzhledem ke vztahu (1) odtud plyne

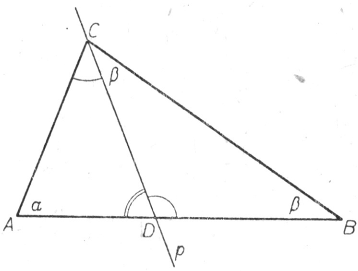
$$180° - 2\beta > 90°, \text{ t. j. } \beta < 45°.$$

Protože $\sphericalangle BDC$ je tupý, je vedlejší úhel $\sphericalangle ADC$ ostrý a trojúhelník ACD může být rovnoramenný t ř e m i z p ů s o b y.

P ř í p a d [1]. Nechť trojúhelník DAC má základnu AC. Součet obou shodných úhlů při této základně je roven úhlu $\sphericalangle BDC$, který je vnějším úhlem trojúhelníka DAC. Je tedy $\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle BDC$ a podle vztahu (3) je $\alpha = 90° - \beta$. Proto je

$$\alpha + \beta = 90°,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 37.

Případ [2]. Nechť trojúhelník DAC má základnu AD; oba úhly α, $\sphericalangle ADC$ při této základně jsou shodné, a protože úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$ jsou vedlejší, je podle (3) $\sphericalangle ADC = 2\beta$ a tedy též $\alpha = 2\beta$. Proto je

$$\alpha : \beta = 2 : 1 ,$$

což jsme měli dokázat.

Případ [3]. Nechť trojúhelník DAC má základnu DC; oba úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle DCA$ při této základně jsou shodné, a protože podle (3) je $\sphericalangle ADC = 2\beta$ (úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$ jsou vedlejší), je též

$$\sphericalangle DCA = 2\beta . \tag{4}$$

Ale $\gamma = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DCA$; odtud a ze vztahů (2), (4) dostaneme, že $\gamma = \beta + 2\beta$ neboli $\gamma = 3\beta$. Proto je

$$\beta : \gamma = 1 : 3 ,$$

což jsme měli dokázat.

Protože jiné možnosti nejsou, je tvrzení úlohy dokázáno.

4. Nechť je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod X, jehož vzdálenost od bodu S je x.

a) Největší možný součet vzdáleností bodu X od kterýchkoli dvou bodů kružnice k (různých nebo splývajících) je $2(x + r)$. Dokažte.

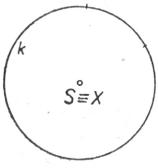
b) Jaký útvar vyplní body, jejichž součet vzdáleností od kterýchkoli dvou bodů kružnice k není větší než poloviční délka kružnice k.

Řešení. a) I. Jestliže je $x = 0$, potom je $X \equiv S$ a každý bod kružnice k má od bodu X vzdálenost r; pak je součet vzdáleností bodu X od kterýchkoli dvou bodů kružnice k roven $2r$ neboli $2(x + r)$, což je v souhlase s tím, co jsme měli dokázat (obr. 38a).

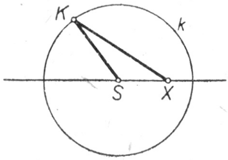
II. Nechť je nadále $x > 0$, t. j. $X \neq S$. Budiž K libovolný bod kružnice k a označme v_K vzdálenost bodů X, K. Rozeznávejme dvě možnosti.

1. Nechť bod K neleží na přímce XS, takže existuje trojúhelník XSK, ve kterém je $XS = x$, $SK = r$, $XK = v_K$; tu platí (obr. 38b) $XK < XS + SK$ (součet dvou stran trojúhelníka XSK je menší než strana třetí) neboli

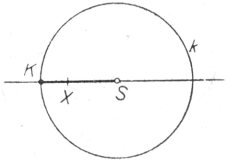
$$v_K < x + r\,. \tag{1}$$



Obr. 38a.



Obr. 38b.



Obr. 38c.

2. Nechť bod K leží na přímce XS. Rozeznávejme tyto případy:

Případ [1]. Nechť bod X je bodem úsečky KS (je $X \neq S$ a $0 < x \leqq r$; obr. 38c). Potom je buď $K \equiv X$ nebo je $K \neq X$, ale vždy platí $v_K + XS = KS$ neboli $v_K + x = r$ a tedy $v_K = r - x$. Protože je $r - x \leqq x + r$, je v tomto případě platný vztah

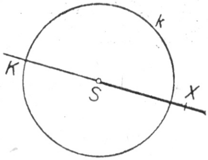
$$v_K < x + r\,. \tag{2}$$

Případ [2]. Nechť bod X je vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SK (takže je X, K, S pořádek uvažovaných bodů; obr. 38d). Potom platí $XK = XS + SK$ neboli

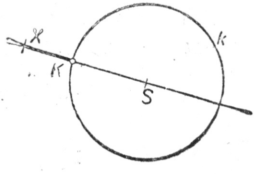
$$v_K = x + r\,. \tag{3}$$

Případ [3]. Nechť bod X je vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce KS (takže je X, K, S pořádek uvažovaných bodů a tedy $x > r$; obr. 38e). Potom platí $XK = XS - SK$ neboli $v_K = x - r$. Tu je $x - r < x + r$ a tedy

$$v_K < x + r \,. \tag{4}$$



Obr. 38d.



Obr. 38e.

Závěr odst. II. Ze vztahů (1) až (4) plyne, že pro každou polohu bodu X i pro každou polohu bodu K platí

$$v_K \leqq x + r \,. \tag{5}$$

Buď L bod kružnice k; pak o vzdálenosti v_L bodu X od bodu L rovněž platí

$$v_L \leqq x + r \,. \tag{6}$$

Sečtením vztahů (5), (6) dostaneme

$$v_K + v_L \leqq 2\,(x + r) \,,$$

což jsme měli dokázat. Případ rovnosti skutečně nastane, jak vyplývá z diskuse případu [2] pro $L \equiv K$.

Poznámka. Protože je buď $x = 0$ nebo $x > 0$, je úvahami z odstavců I, II tvrzení úlohy dokázáno.

b) Nechť bod X vyhovuje předpokladům úlohy b). Pak je největší možný součet jeho vzdáleností od kterýchkoli dvou bodů kružnice k roven $2\,(x + r)$. Podle požadavků úlohy tedy platí

$$2\,(x + r) \leqq \pi r \,,$$

kde πr je poloviční délka kružnice k. Odtud dostaneme

$$x \leqq r(\tfrac{1}{2}\pi - 1) \,;$$

číslo

$$\varrho = r(\tfrac{1}{2}\pi - 1) \tag{7}$$

je zřejmě kladné. Odtud plyne, že každý bod X, který vyhovuje úloze, je bodem kruhu o středu S a poloměru ϱ.

Nechť obráceně je X_0 libovolný bod tohoto kruhu a x_0 vzdálenost bodu X_0 od bodu S. Potom tedy platí

$$x_0 \leqq r(\tfrac{1}{2}\pi - 1)$$

neboli

$$2(x_0 + r) \leqq \pi r\,. \tag{8}$$

Ale číslo $2(x_0 + r)$ podle úlohy a) je největší možný součet vzdáleností bodu X_0 od kterýchkoli dvou bodů kružnice k a vztah (8) říká, že tento součet není větší než poloviční délka kružnice k; bod X_0 tedy patří do hledané množiny bodů.

Tím je dokázáno, že hledanou množinou bodů je kruh o středu S a poloměru ϱ, který je dán vztahem (7).

5. Dokažte, že každá dvě přirozená čísla, která jsou v desítkové soustavě zapsána symboly

$$(xyzxyz),\ (uvuvuv)\,,$$

kde x, y, z, u, v jsou některé z cifer $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$, jsou soudělná.

Řešení. Označme M první a N druhé z obou daných čísel. Lze psát

$$\begin{aligned} M &= 10^5x + 10^4y + 10^3z + 10^2x + 10y + z = \\ &= (10^3 + 1)(10^2x + 10y + z) = \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13(10^2x + 10y + z); \end{aligned}$$

dále pak

$$\begin{aligned} N &= 10^5u + 10^4v + 10^3u + 10^2v + 10u + v = \\ &= (10u + v)(10^4 + 10^2 + 1) = (10u + v) \cdot 10101 = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10u + v). \end{aligned}$$

Čísla 7 a 13 jsou tedy dělitelé obou daných čísel; jsou tedy obě daná čísla soudělná, což jsme měli dokázat.

6. Jistě znáte, jaký je tah koněm na šachovnici. Rozřešíte tedy snadno tuto úlohu:

Určete, kolik tahů koněm lze provést na čtvercové šachovnici, která má n^2 polí (kde $n > 1$ je přirozené číslo).

Řešení. Rozeznávejme případy:

a) Při $n = 2$ nelze provést žádný tah koněm.

2	2	2
2	0	2
2	2	2

Obr. 39.

2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

Obr. 40.

b) Při $n = 3$ určíme počet tahů koněm snadno podle obr. 39 (na každé pole šachovnice vepíšeme počet tahů koněm, které lze z tohoto pole celkem provést). Dostaneme celkem $2 \cdot 8 = 16$ tahů.

c) Při $n = 4$ dostaneme počet tahů podle obr. 40, to je celkem $12 \cdot 4 = 48$ tahů.

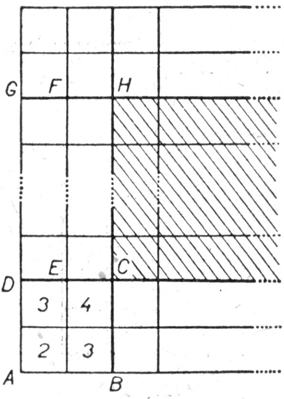
d) Při $n > 4$ oddělíme ze šachovnice při jejím obvodu dvě řady (viz obrázek 41). Zbude tak čtverec **M** o straně $n - 4$, který má $(n - 4)^2$ políček (v obr. 41 je vyšrafován). Z každého políčka tohoto čtverce **M** lze provést 8 tahů; lze tedy z políček čtverce **M** provést celkem

$$8\,(n - 4)^2 \text{ tahů.} \qquad (1)$$

Nyní určíme počet tahů, které lze provést z obou řad, jež jsme oddělili při obvodu šachovnice.

[1] Máme tu především 4 čtverce typu $ABCD$ (viz obr. 41); z nich lze provést celkem

$$12 \cdot 4 = 48 \text{ tahů.} \qquad (2)$$



Obr. 41.

[2] Konečně máme čtyři obdélníky typu $CDGH$ (viz obr. 41) o rozměrech $n - 4$, 2.

Z každého políčka obdélníka $EDGF$ lze provést 4 tahy, tedy celkem

$$4 \cdot (n - 4) \text{ tahů.} \qquad (3)$$

Z každého políčka obdélníka $CEFH$ lze provést 6 tahů, tedy ze všech jeho políček

$$6 \cdot (n - 4). \qquad (4)$$

Lze tedy ze všech políček obdélníka $CDGH$ podle (3) a (4) provést $4(n - 4) + 6(n - 4)$ neboli $10 \cdot (n - 4)$ tahů.

Ze všech čtyř obdélníků typu $CDGH$ lze tedy provést $4 \cdot 10(n - 4)$ neboli

$$40 \cdot (n - 4) \text{ tahů.} \qquad (5)$$

Počet všech tahů koněm na šachovnici podle (1), (2) a (5) je roven

$$8(n - 4)^2 + 48 + 40\,(n - 4) =$$

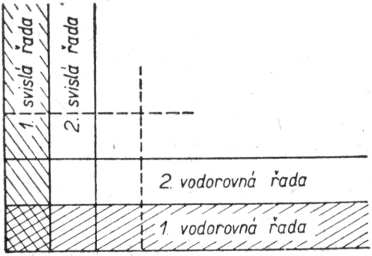
$$= 8[(n - 4)^2 + 5(n - 4) + 6] = 8(n - 4 + 3)(n - 4 + 2) =$$

$$= 8 \cdot (n - 1)\,(n - 2).$$

Všech tahů koněm na šachovnici při $n > 4$ je tedy

$$8 \cdot (n - 1)\,(n - 2)\,. \qquad (6)$$

Pro $n = 8$ (obvyklá šachovnice) je celkem 336 tahů. Snadno se přesvědčíme, že výraz (6) je platný též pro $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ (viz případy a), b), c)).



Obr. 42.

J i n é ř e š e n í. (Viz obr. 42.) Budiž $n \geqq 3$. Rozdělme všechny možné tahy koněm, o nichž mluví úloha, do osmi tříd. Snadno zjistíme, že určitý tah je tím zařazen právě do jedné z těchto tříd. Jsou to tyto t ř í d y t a h ů:

a) tah o dvě pole vpřed a jedno pole vpravo;
b) tah o dvě pole vpřed a jedno pole vlevo;
c) tah o dvě pole vzad a jedno pole vpravo;
d) tah o dvě pole vzad a jedno pole vlevo;
e) tah o jedno pole vpřed a o dvě pole vpravo;
f) tah o jedno pole vpřed a o dvě pole vlevo;
g) tah o jedno pole vzad a o dvě pole vpravo;
h) tah o jedno pole vzad a o dvě pole vlevo.

Vyšetříme nyní, kolik je možných různých tahů třídy a). Mysleme si, že jsme takový tah provedli. Potom musil kůň stát původně na poli, které patří do jedné z prvních $n - 2$ vodorovných řad a zároveň do jedné z prvních $n - 1$ svislých řad. Takových polí je celkem $(n - 1)(n - 2)$ a každému z nich přísluší právě jeden tah třídy a).

Týmž úsudkem dospějeme k tomu, že každá z uvedených osmi tříd obsahuje právě $(n - 1)(n - 2)$ různých tahů. Protože žádné dvě třídy neobsahují společný prvek, je celkem možno učinit koněm na dané šachovnici $8(n - 1)(n - 2)$ různých tahů, což jsme měli vyšetřit.

Řešil s. Vladimír Šabršula,
tř. 9c jedenáctileté střední školy v Přerově.

7. Buď přímka AB a na ní bod Z. Bodem Z sestrojme přímku $p \perp AB$ a zvolme na ní bod $C \neq Z$. Označme T těžiště trojúhelníka ABC.

Jaký útvar vyplní bod T, když bod $C \neq Z$ probíhá přímku p?

Řešení (viz obr. 43). Označme O střed úsečky AB. O těžišti T podle známé věty platí

$$OT = \tfrac{1}{3}OC\,. \tag{1}$$

Rozeznávejme dvě možnosti.

Případ [1]. Nechť je $Z \equiv O$. Potom přímky p, OC splývají a body T zřejmě vyplní kolmici vedenou bodem O k přímce AB, a to s výjimkou bodu O.

Případ [2]. Nechť je $Z \not\equiv O$ (obr. 43). Mysleme si, že máme řešit známou úlohu rozdělit úsečku OC na tři shodné díly. Proveďme to takto:

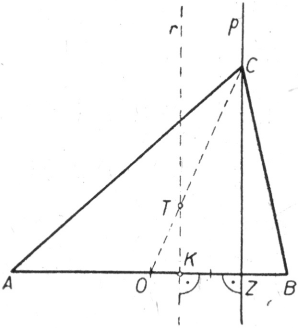
Mějme úsečku OZ rozdělenu na tři shodné díly a označme K ten bod úsečky OZ, pro nějž platí

$$OK = \tfrac{1}{3}OZ\,.$$

Jestliže bod K známe, vedeme jím rovnoběžku r k přímce ZC; ta protne úsečku OC v bodě T, o kterém platí vskutku vztah (1). Probíhá-li tedy bod $C \neq Z$ přímku p, leží příslušný bod $T \not\equiv K$ na přímce r.

Obráceně, každý bod $Q \neq K$ přímky r je těžištěm trojúhelníka ABP, kde P je průsečík přímek OQ, p. To proto, že těžištěm trojúhelníka ABP je právě bod Q, jak se snadno dokáže. Tím je úloha řešena.

8. Buď dán deltoid $ABCD$ s osou souměrnosti AC (deltoid $ABCD$ je vypuklý čtyrúhelník, který má přímku AC za osu souměrnosti). Označte S průsečík přímek AC, BD. Bodem S veďte kolmice k přímkám AB, BC, CD, DA a označte po řadě M, N, P, Q jejich paty.



Obr. 43.

a) Ve čtyrúhelníku $MNPQ$ platí $MQ \| NP$. Dokažte.

b) Označte $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = 2\gamma$. Vyjádřete velikosti úhlů čtyrúhelníka $MNPQ$ pomocí úhlů α, γ.

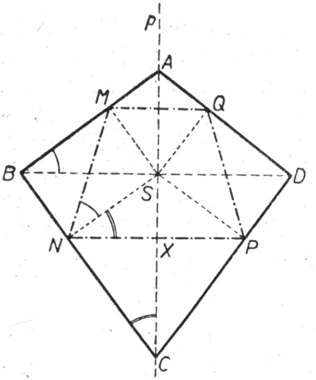
c) Rozhodněte, kdy je čtyrúhelník $MNPQ$ lichoběžník a kdy rovnoběžník.

Řešení (obr. 44). a) V souměrnosti o ose $p \equiv AC$ je bod A k sobě souměrně sdružen; stejně to platí i o bodu C. Obrazem bodu B v této souměrnosti je bod D a obráceně. Obrazem přímky AB je přímka AD a obráceně. Proto obraz bodu M leží na přímce AD. Protože je $\sphericalangle SMA = 90°$, je i obraz tohoto úhlu úhel pravý. Odtud plyne, že obrazem bodu M je bod Q. Stejně se zjistí, že body N, P jsou souměrně sdruženy podle osy p. Proto je

$$MQ \perp p, \; NP \perp p, \; BD \perp p$$

a přímky MQ, NP, BD jsou rovnoběžné.

b) Trojúhelníky SBM, SBN mají při vrcholech M, N pravé úhly. Kružnice nad průměrem BS tedy prochází také body M, N. Proto je



Obr. 44.

$\sphericalangle MBS = \sphericalangle MNS$ (obvodové úhly), $\sphericalangle MBS = R - \alpha$ (z trojúhelníka ABS, kde je $\sphericalangle S = 90°$). Je tedy

$$\sphericalangle MNS = R - \alpha\,. \qquad (1)$$

Označme X průsečík přímek NP, p. Tu platí

$$\sphericalangle SNX + \sphericalangle NSC = 90°$$

(neboť trojúhelník NSX má $\sphericalangle X = 90°$). Dále je

$$\sphericalangle NCS + \sphericalangle NSC = 90°$$

(neboť trojúhelník SCN má $\sphericalangle N = 90°$). Porovnáním obou posledních rovností dostaneme $\sphericalangle SNX = \sphericalangle NCS$, kde $\sphericalangle NCS = \gamma$; tedy

$$\sphericalangle SNX = \gamma\,. \qquad (2)$$

Konečně platí

$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle MNS + \sphericalangle SNX\,.$$

Odtud podle (1), (2) je

$$\sphericalangle MNP = 90° - \alpha + \gamma\,. \qquad (3)$$

O úhlech $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NMQ$ platí

$$\sphericalangle MNP + \sphericalangle NMQ = 180° \text{ (úhly přilehlé).}$$

Proto je podle (3)

$$\sphericalangle NMQ = 180° - (90° - \alpha + \gamma)$$

neboli

$$\sphericalangle NMQ = 90° + \alpha - \gamma \, . \tag{4}$$

Ze souměrnosti čtyrúhelníka $MNPQ$ podle osy p a ze vztahů (3), (4) plyne, že

$$\sphericalangle NPQ = 90° - \alpha + \gamma, \quad \sphericalangle PQM = 90° + \alpha - \gamma \, .$$

c) Čtyrúhelník $MNPQ$ bude lichoběžníkem, když platí

$$\sphericalangle MNP \neq \sphericalangle NMQ \, , \tag{5}$$

a bude obdélníkem, když oba přilehlé úhly $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NMQ$ si budou rovny (každý z nich 90°), t. j. když bude platit

$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle NMQ \, . \tag{6}$$

Případ (6) nastane, když podle (3), (4) je

$$90° - \alpha + \gamma = 90° + \alpha - \gamma$$

neboli

$$2\gamma = 2\alpha \, ,$$

$$\gamma = \alpha \, . \tag{7}$$

V tomto případě jsou všechny strany deltoidu $ABCD$ sobě rovny a je to kosočtverec. Obráceně, je-li $ABCD$ kosočtverec, platí (7) a úhly čtyrúhelníka $MNPQ$ jsou podle (3), (4), (5), (6) vesměs pravé, takže $MNPQ$ je obdélník. Jinak je tento čtyrúhelník rovnoramenný lichoběžník se základnami NP, MQ.

9. Nechť o reálných číslech a, b, c vesměs různých od nuly platí vztah

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 0. \tag{1}$$

Určete všechna přirozená čísla n, pro která platí vztah

$$\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)\left(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right)\left(\frac{1}{c^n}+\frac{1}{a^n}\right)=0\,. \tag{2}$$

Řešení. Protože je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, mají zlomky ve vztazích (1), (2) smysl. Na levé straně vztahu (1) vytkněme $\frac{1}{a^2b^2c^2}$; dostaneme

$$\frac{1}{a^2b^2c^2}(a+b)(b+c)(c+a)=0\,,$$

a protože je $\frac{1}{a^2b^2c^2} \neq 0$, platí

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0\,.$$

Odtud plyne, že alespoň jeden ze tří činitelů na levé straně poslední rovnosti musí být roven nule; platí tedy alespoň jeden ze vztahů

$$a+b=0,\ b+c=0,\ c+a=0$$

neboli platí alespoň jeden ze vztahů

$$[1]\quad a=-b\,,\qquad [2]\ b=-c\,,\qquad [3]\ c=-a\,.$$

Nechť na př. platí vztah [3]. Potom pro liché přirozené číslo n je

$$\frac{1}{c^n}+\frac{1}{a^n}=\frac{1}{c^n}+\frac{1}{(-c)^n}=\frac{1}{c^n}-\frac{1}{c^n}=0,$$

t. j. platí

$$\frac{1}{c^n}+\frac{1}{a^n}=0\,.$$

Proto skutečně platí vztah (2). Protože však alespoň jeden ze tří vztahů [1] až [3] vždycky platí, je při lichém přirozeném čísle n vždycky jeden ze tří činitelů levé strany vztahu (2) roven nule a tudíž vztah (2) platí.

Naproti tomu pro sudé přirozené n je

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} > 0, \quad \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} > 0, \quad \frac{1}{c^n} + \frac{1}{a^n} > 0\,.$$

Proto z platnosti vztahu [3] při sudém n nikterak neplyne platnost vztahu (2).

Závěr. Z platnosti vztahu (1) za předpokladu, že a, b, c jsou reálná čísla vesměs různá od nuly, plyne platnost vztahu (2) právě tehdy, jestliže je n liché přirozené číslo.

10. Buď N přirozené číslo, které má tyto vlastnosti:

(1) Je druhou mocninou přirozeného čísla.

(2) Jeho zápis v desítkové soustavě má na místě jednotek cifru 6.

Dokažte, že na místě desítek v zápise tohoto čísla stojí lichá cifra.

Řešení. Číslo N má tvar

$$(10a + b)^2, \tag{1}$$

kde a je některé celé nezáporné číslo a b je některé z čísel $0, 1, 2, \ldots, 9$. Podle (1) tedy je

$$N = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

O cifře na místě desítek v zápisu čísla N bude rozhodovat součet s jednotek čísla $2ab$ a desítek čísla b^2 (platí, že $b^2 < 100$). Nyní dokážeme, že na místě jednotek v právě zmíněném součtu s je lichá cifra.

Důkaz. Když číslo N má na místě jednotek cifru 6, potom musí být číslo b rovno číslu 4 nebo číslu 6; pak je totiž $4^2 = 16$, $6^2 = 36$ a na místě jednotek je tedy šestka; jiná možnost není. Odtud dále plyne, že k číslu $2ab$ musíme přičíst buď 1 nebo

3 (počet desítek čísel 16 nebo 36). Avšak číslo $2ab$ je sudé; proto když k němu přičteme číslo 1 nebo 3, dostaneme číslo s, které je liché. Tím je důkaz tvrzení úlohy proveden.

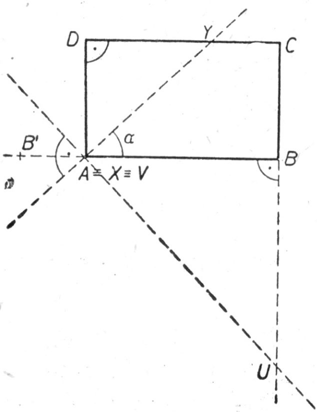
11. Buď dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$. Na přímkách AB, BC, CD, DA zvolte po řadě body X, U, Y, V tak, aby platilo $XY \perp UV$.

Potom platí

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b}.$$

Dokažte.

Řešení. I. Uvažujme nejprve případ, kdy platí $A \equiv X \equiv V$.



Obr. 45.

Označme AB' polopřímku opačnou k polopřímce AB. Uvažujme dvě možnosti:

a) Nechť je $Y \equiv D$. Pak je $U \equiv B$ a tvrzení dané úlohy je samozřejmé.

b) Nechť je $Y \not\equiv D$ (obr. 45). Pak jsou dvě možnosti:

Případ [1]. Bod Y leží uvnitř úhlu $\sphericalangle DAB$.

Případ [2]. Bod Y leží uvnitř úhlu $\sphericalangle DAB'$ vedlejšího k úhlu $\sphericalangle DAB$.

Důkaz tvrzení úlohy provedeme pro případ [1]; případ [2] se dokáže obdobně. Dokažme, že platí

$$\triangle AUB \sim \triangle AYD. \tag{1}$$

Důkaz. Každý z obou trojúhelníků především existuje; bod Y totiž neleží na přímce AD, neboť je $Y \not\equiv D$; proto je též $U \not\equiv B$. Dále je $\sphericalangle ADY = \sphericalangle ABU = 90°$. Označíme-li $\sphericalangle YAB = \alpha$, je $\alpha < 90°$ a platí

$$\sphericalangle DAY = 90° - \alpha, \quad \sphericalangle BAU = 90° - \alpha;$$

proto je $\sphericalangle DAY = \sphericalangle BAU$. Oba trojúhelníky (1) se tedy shodují ve dvou úhlech, a proto jsou podobné. Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (1) nyní plyne

$$\frac{AU}{AY} = \frac{AB}{AD} \quad \text{neboli} \quad \frac{AU}{AY} = \frac{a}{b},$$

t. j.

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b}, \tag{2}$$

což jsme měli dokázat.

II. Když obě nebo jedna z přímek $UV \perp XY$ neprocházejí bodem A, sestrojíme bodem A přímky

$$u \| UV, \; x \| XY \tag{3}$$

a označíme po řadě $X' \equiv A$, Y' průsečíky přímky x s přímkami AB, CD a dále U', $V' \equiv A$ průsečíky přímky u s přímkami BC, DA. Vzhledem k platnosti vztahů (3) se snadno dokáže, že platí

$$UV = U'V', \; XY = X'Y', \; U'V' \perp X'Y'. \tag{4}$$

Ale na úsečky $U'V'$, $X'Y'$ lze nyní užít výsledku (2) z odst. I, takže o nich platí vztah

$$\frac{U'V'}{X'Y'} = \frac{a}{b}.$$

Dosadíme-li sem z prvních dvou vztahů (4), dostaneme

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b},$$

což jsme měli dokázat.

Tím je úloha řešena.

12. Buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a uvnitř této kružnice bod $A \neq S$.

Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jehož vrcholy B, C, D leží na kružnici k a jehož strana $AB = r$.

Řešení. Pomocné úlohy. Při řešení dané úlohy užijeme těchto dvou výsledků (srovnej s obr. 46):

V1. Dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (A, r)$, kde $S \neq A$, se protínají ve dvou bodech $B \neq B'$ právě tehdy, jestliže platí vztah

$$AS < 2r.$$

Přitom je přímka AS osou úsečky BB', takže úsečky AB, AB' leží v opačných polorovinách. Dále přímka BB' je osou úsečky AS.

V2. Buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$, přímka AB a kladné číslo $m < 2r$. Potom v kružnici k existují právě dvě různé tětivy CD, C_1D_1, o nichž platí

$$CD = C_1D_1 = m, \; CD \| AB, \; C_1D_1 \| AB\,.$$

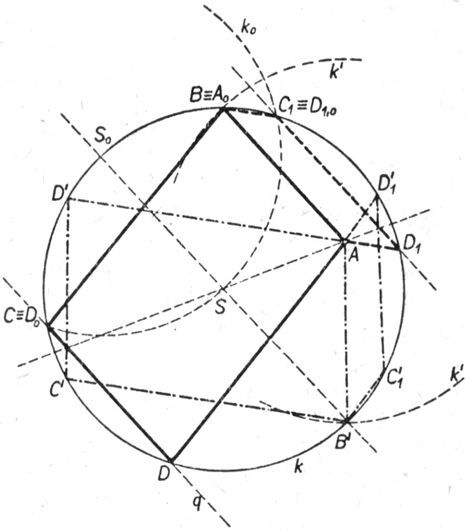
Řešení úlohy **V2**. Předpokládejme, že jsme našli řešení úlohy **V2**. Máme tedy na kružnici k takové body C, D, o nichž platí $CD = m$, $CD \| AB$.

Proveďme posunutí kružnice k tak, že bod D přejde v bod C; velikost posunutí je m a směr posunutí je dán polopřímkou DC. Označme $D_0 \equiv C$ novou polohu bodu D a $k_0 \equiv (S_0, r)$ novou polohu kružnice $k \equiv (S, r)$; protože bod D_0 leží na kružnici k_0, je bod $D_0 \equiv C$ společným bodem kružnic k, k_0. Podle toho provedeme konstrukci.

Posuňme kružnici k do polohy $k_0 \equiv (S_0, r)$ tak, že o bodu S_0 platí

$$SS_0 = m, \; SS_0 \| AB\,.$$

Přitom ze dvou možných poloh bodu S_0 zvolíme jednu (změna polohy znamená jen výměnu označení bodů C, D). Označme $D_0 \equiv C$ jeden ze společných bodů kružnic k, k_0. Obráceným (zpětným) posunutím přejde bod S_0 v bod S a bod $D_0 \equiv C$ v bod D; protože přitom kružnice k_0 přejde v kružnici k, leží bod $D \not\equiv C$ na kružnici k a dále na přímce $q \| AB$, vedené bodem $D_0 \equiv C$. Podle konstrukce zřejmě platí $CD = m$, $CD \| AB$.



Obr. 46.

Úloha má dvě různá řešení, neboť podle věty **V1** je středná $SS_0 = m$ obou kružnic k, k_0 menší než $2r$, a proto tyto kružnice mají společné dva různé body $D_0 \neq D_{1,0}$; tyto body jsou podle téže věty souměrně sdružené podle přímky SS_0. Z toho plyne, že i obě hledané tětivy CD, C_1D_1 jsou odděleny přímkou SS_0 a tudíž jsou navzájem různé.

Řešení dané úlohy. I. Rozbor. Předpokládejme, že jsme sestrojili rovnoběžník $ABCD$, který splňuje požadavky úlohy. O něm platí

$$AB = CD, \ AB \parallel CD .$$

Leží tedy bod B jednak na kružnici k a jednak na kružnici $k' \equiv (A, r)$. Úsečka CD, která je podle požadavků úlohy tětivou kružnice k, má velikost r a platí $CD \parallel AB$. Těchto dvou nutných podmínek užijeme ke konstrukci hledaného rovnoběžníka.

II. Sestrojme kružnici $k' \equiv (A, r)$. Podle **V1** se kružnice k', k protnou ve dvou různých bodech B, B', neboť o středné platí $AS < r$ (bod A leží uvnitř kružnice k); oba body B, B' jsou souměrně sdružené podle přímky AS (viz obr. 46).

Každý z bodů B, B' povede k jedné skupině řešení. Konstrukci provedeme podle **V2** jen pro bod B. (Konstrukce pro bod B' se provede zcela obdobně; příslušné výsledky však snadno obdržíme, když k výsledkům, sestrojeným pro bod B, sestrojíme útvary souměrně sdružené podle přímky AS, neboť v této souměrnosti přecházejí body B, B' jeden v druhý a kružnice k přechází v sebe samu.)

Podle konstrukce v úloze **V2** sestrojíme tětivy CD, resp. C_1D_1 kružnice k, pro něž $CD = AB$, $CD \parallel AB$, resp. $C_1D_1 = AB$, $C_1D_1 \parallel AB$. Úsečky CD ani C_1D_1 neleží v přímce AB; kdyby totiž přímka AB vyťala na kružnici k tětivu délky r, pak by kromě bodu B i bod A ležel na kružnici k, po případě vně kružnice, neboť $AB = r$. To však odporuje předpokladu, že A je vnitřní bod kružnice k. Existují tedy čtyrúhelníky $ABCD$, ABC_1D_1; to jsou však nutně podle **V2** rovnoběžníky, neboť podle konstrukce o nich platí

$$DC \parallel AB, \ DC = AB \ \text{a} \ D_1C_1 \parallel AB, \ D_1C_1 = AB.$$

Oba rovnoběžníky $ABCD$, ABC_1D_1 podle předchozí konstrukce zřejmě vyhovují požadavkům úlohy a jsou navzájem různé; to plyne z toho, že mají společnou stranu AB, kdežto body C, C_1 jsou podle konstrukce navzájem různé.

III. Nyní dokážeme, že úloha má čtyři řešení.

Sestrojíme-li k oběma rovnoběžníkům

$$ABCD,\ ABC_1D_1 \tag{1}$$

útvary souměrně sdružené podle osy AS souměrnosti, dostaneme další rovnoběžníky

$$AB'C'D',\ AB'C_1'D_1'. \tag{2}$$

Dokážeme, že všechny čtyři rovnoběžníky (1), (2) jsou navzájem různé. O dvojici rovnoběžníků (1) a tím i o dvojici (2) jsme to dokázali. Stačí, když dokážeme, že jsou různé rovnoběžníky

$$ABCD,\ AB'C'D' \tag{3}$$

a rovnoběžníky

$$ABCD,\ AB'C_1'D_1' \tag{4}$$

(zbývající dvojice dostaneme z těchto dvojic užitím souměrností podle přímky AS). Důkaz proveďme pro dvojici (3); důkaz pro dvojici (4) se provede zcela obdobně.

Předpokládejme naopak, že rovnoběžníky (3) splývají; dokážeme, že to není možné. Oba rovnoběžníky mají společný vrchol A; protože úsečky AB, AB' jsou podle **V1** přímkou AS odděleny, nemohou strany AB, AB' splynout. Připusťme, že splyne strana AB prvního rovnoběžníka se stranou AD' druhého. Dokážeme, že ani to není možné.

Nechť splývají strany AB, AD'; pak musí splývat i body B, D'. Ze vztahu $B \equiv D'$ vyplývá, že musí vzhledem k souměrnosti podle přímky AS splývat též body D, B' neboli musí platit $D \equiv B'$. Pak však již nutně musí být $C \equiv C'$. Protože podle konstrukce je $AB = AB' = r$, plyne z předchozího, že $AD = r$; proto je rovnoběžník $ABCD$ kosočtverec o straně velikosti r. Protože body B, C, D leží na kružnici k

a protože je $BC = CD = r$, jsou tyto body tři ze sousedních vrcholů pravidelného šestiúhelníka vepsaného kružnici k. O tomto pravidelném šestiúhelníku je však známo, že čtyrúhelník $SBCD$ je kosočtverec o straně velikosti r. Protože body D, B lze vést po řadě jen po jedné rovnoběžce ke stranám CB, BD, usoudíme snadno, že oba rovnoběžníky $ABCD$, $SBCD$ nutně splývají, t. j. že platí $A \equiv S$. To však je proti předpokladu textu dané úlohy, že je $A \not\equiv S$. Nemohou proto rovnoběžníky (3) splynout.

Tím je dokázáno, že daná úloha má čtyři různá řešení (3), (4).

13. Určte všetky prirodzené čísla p, pre ktoré je číslo

$$N = p^2 - 25$$

nezáporné a deliteľné ôsmimi.

Riešenie. Nech $N = p^2 - 25$ je číslo deliteľné ôsmimi; potom príslušné prirodzené číslo p je rozdielne od čísel 1, 2, 3, 4. Preto je nevyhnutne $p > 4$. Avšak platí

$$N = (p - 5)(p + 5)\,. \qquad (1)$$

Ak je N deliteľné ôsmimi, musí byť jedno z čísel

$$p - 5,\ p + 5 \qquad (2)$$

párne. Avšak z toho vyplýva, že číslo p je nevyhnutne nepárne číslo a z toho ďalej, že obe čísla (2) sú párne (súčet aj rozdiel dvoch nepárnych čísel je párne číslo). Je teda číslo p nepárne, väčšie než 4; čísla (2) sú obe párne a jedno z nich musí byť deliteľné štyrmi.

Každé nepárne číslo $p > 4$ možno písať v tvare

$$p = 5 + 2k\,, \qquad (3)$$

kde k je celé nezáporné číslo a ke každému celému nezápornému číslu k vzťah (3) priraďuje nepárne číslo $p > 4$. Tu je

$$p - 5 = 2k,\ p + 5 = 2(k + 5)\,. \qquad (4)$$

Rozoznávajme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech číslo k vo vzťahu (3) je nepárne; potom číslo $k + 5$ v druhom vzťahu (4) je párne a číslo $2(k + 5)$ je súčin dvoch párnych čísel a teda je deliteľné štyrmi. Pretože číslo $p - 5$ je párne, je číslo N deliteľné ôsmimi.

Prípad [2]. Nech číslo k vo vzťahu (3) je párne; potom číslo $2k$ v prvom vzťahu (4) je deliteľné štyrmi a pretože $p + 5$ je párne číslo, je číslo N deliteľné ôsmimi.

Z týchto výsledkov vyplýva: Číslo N dané vzťahom (1) je deliteľné ôsmimi pre každé nepárne $p > 4$. Pre párne prirodzené čísla p je N zrejme nepárne číslo a teda nie je deliteľné ôsmimi.

14. Riešte sústavu rovníc

$$\frac{x}{a} + ay = a, \tag{1}$$

$$ax + \frac{y}{a} = 1, \tag{2}$$

kde x, y sú neznáme a $a \neq 0$ je dané reálne číslo.

Riešenie. Znásobme rovnicu (2) číslom $-a^2 \neq 0$ a pripočítajme k nej rovnicu (1). Dostaneme rovnicu

$$\frac{x}{a} - a^3x = a - a^2$$

alebo

$$x \cdot \frac{1 - a^4}{a} = a(1 - a)$$

a teda

$$x(1 - a^4) = a^2(1 - a). \tag{3}$$

Ďalej znásobme rovnicu (1) číslom $-a^2 \neq 0$ a pripočítajme k nej rovnicu (2); dostaneme postupne

$$y\left(\frac{1}{a} - a^3\right) = 1 - a^3,$$

$$y \cdot \frac{1 - a^4}{a} = 1 - a^3$$

a teda

$$y(1 - a^4) = a(1 - a^3). \tag{4}$$

I. Riešenie (x, y) danej sústavy musí splňovať každú z rovníc (3), (4). Každá z týchto rovníc má jediné riešenie, ak je $1 - a^4 \neq 0$, t. j. ak je

$$(1 - a)(1 + a)(1 + a^2) \neq 0.$$

Stade ľahko vyplýva, že vedľa $a \neq 0$ musí platiť

$$a \neq 1, \ a \neq -1.$$

Potom dvojica

$$x = \frac{a^2(1 - a)}{1 - a^4}, \ y = \frac{a(1 - a^3)}{1 - a^4}$$

alebo

$$x = \frac{a^2}{(1 + a)(1 + a^2)}, \ y = \frac{a(1 + a + a^2)}{(1 + a)(1 + a^2)}$$

je riešením danej sústavy, ako sa ľahko presvedčíme dosadením do rovníc (1), (2).

II. Ak je $a = 1$, sú zrejme obe dané rovnice totožné a riešenie je

$$x, \ y = 1 - x,$$

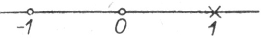
kde x je ľubovoľné číslo.

III. Ak je $a = -1$, daná sústava znie

$$x + y = 1,$$
$$x + y = -1$$

a je zrejme sporná; riešenie neexistuje.

Poznámka. Na obrázku 47 sú vyznačené výnimočné prípady na osi čísel pre číslo a. Krúžok značí, že riešenie alebo sústava neexistuje, krížik, že sústava má nekonečne mnoho riešení. Pre ostatné čísla a má sústava jediné riešenie.



Obr. 47.

15. Nech sú dané dva rôzne body A, B. Urobme po rade kružidlom tieto konštrukcie:

(1) Zostrojme priesečníky kružníc (B, BA), (A, AB) a jeden z nich označme C. Ďalej zostrojme priesečník $D \neq A$ kružníc (B, BA), (C, CA) a konečne priesečník $E \neq C$ kružníc (B, BA), (D, DC).

(2) Zostrojme priesečníky U, V kružníc (A, AB), (E, EA).

(3) Zostrojme priesečník $X \neq A$ kružníc (U, UA), (V, VA).

Dokážte:

a) Body A, B, E ležia v priamke.

b) Platí $\triangle EAU \sim \triangle UAX$.

c) Platí $AX = BX$.

Poznámka. V texte úlohy používame označenie (S, SQ) pre kružnicu so stredom S a s polomerom SQ.

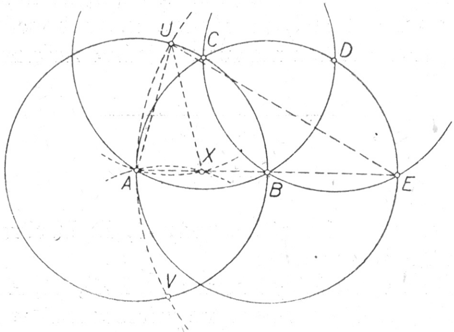
Riešenie (obr. 48). Označme $r = AB$. Body C, D, E iste existujú (konštrukcia pravidelného šesťuholníka). Kružnice $(A, AB = r)$, $(E, EA = 2r)$ majú strednú $AE = 2r$; táto splňuje trojuholníkovu nerovnosť

$$EA - AB < AE < EA + AB\,,$$

lebo je $EA - AB = r$, $EA + AB = 3r$ a nerovnosť

$$r < 2r < 3r$$

skutočne platí. Z toho vyplýva, že obe kružnice (A, AB), (E, EA) sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch U, V, pričom priamka ABE je osou úsečky UV.



Obr. 48.

Body U, A, V, ktoré ležia na kružnici $(E, EA = 2r)$, sú podľa predošlého tri rôzne body, a preto kružnice (U, UA), (V, VA) existujú a majú zhodné polomery $UA = VA = r$. Pretože priamka UV neprechádza bodom A, je $UV < 2r$, lebo body U, V ležia na kružnici $(A, AB = r)$. Je tedy stredná UV zhodných kružníc (U, UA), (V, VA) menšia než súčet $2r$ ich polomerov, a preto sa tieto kružnice pretnú v bode $X \neq A$, ktorý leží na priamke ABE, ako vyplýva zo súmernosti oboch týchto kružníc podľa tejto priamky. Body A, X sú súmerne združené podľa priamky UV; pretože kružnica (E, EA) prechádza bodom A, oddeľuje priamka UV body A, B. Z oboch týchto výsledkov vyplýva, že bod X leží vnútri polpriamky AB.

Teraz o trojuholníkoch EAU, UAX platí

$$EA = EU = 2r, \quad UA = UX = r,$$

t. j. sú rovnoramenné; pritom majú pri základňách AU, AX spoločný uhol $\sphericalangle UAE$ a teda sa zhodujú vo všetkých uhloch.

Preto je

$$\triangle EAU \sim \triangle UAX .$$

Pretože pomer veľkostí príslušných strán je $\frac{EA}{UA} = 2$, platí o príslušných stranách

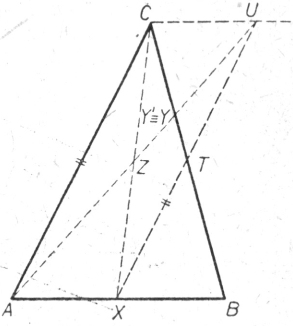
$$AU = 2 \cdot AX;$$

pretože $AU = AB$, platí teda

$$AB = 2 \cdot AX ,$$

takže bod X je stredom úsečky AB, čo sme mali dokázať.

16. Trojuholník ABC má obsah 24 cm^2. Označme X stred strany AB a Y taký bod strany BC, že platí $BY = 2 \cdot CY$; ďalej označme Z spoločný bod úsečiek CX, AY. Vypočítajte obsah štvoruholníka $XBYZ$.



Obr. 49a.

Riešenie (pozri obr. 49a). Zostrojíme stred T strany BC a na predĺžení úsečky XT za bod T určíme bod U tak, aby platilo $TU = TX$. Podľa vlastnosti strednej priečky trojuholníka ABC je $XU = CA$ a $AXUC$ je rovnobežník. Jeho uhlopriečka AU obsahuje jednu z ťažníc trojuholníka XUC. Druhá ťažnica tohto trojuholníka je úsečka CT. Ťažisko trojuholníka XUC

je bod Y' úsečky CT, pre ktorý platí $CY' = \frac{2}{3}CT = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}BC) = = \frac{1}{3}BC = CY$. Je teda $Y' \equiv Y$ a priamky AY, AU splynú. Bod Z je preto priesečníkom uhlopriečok rovnobežníka $AXUC$, t. j. platí

$$CZ = XZ\,. \tag{1}$$

Okrem toho je bod Y ťažiskom trojuholníka XUC; preto je $YZ = \frac{1}{3}ZU = \frac{1}{3}AZ$, alebo

$$AZ = 3 \cdot YZ\,. \tag{2}$$

Ak označíme teraz p obsah trojuholníka ABC, platí pre obsahy obrazcov

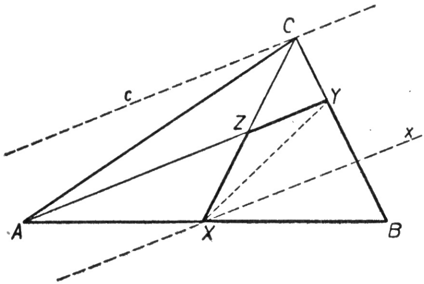
$$AXC = \tfrac{1}{2}p, \quad AYC = \tfrac{1}{3}p\,,$$

a ďalej

$$AXZ = \tfrac{1}{2} \cdot AXC = \tfrac{1}{4}p\,.$$

Preto obsah P štvoruholníka $XBYZ$ je

$$P = p - \tfrac{1}{3}p - \tfrac{1}{4}p = \tfrac{5}{12}p = 10\ (\mathrm{cm}^2)\,.$$



Obr. 49b.

Inakšie riešenie (obr. 49b). Označme $O(MNP)$ obsah trojuholníka MNP. V našej úlohe platia vzťahy (v cm²)

$$O(ABC) = 24\,,$$

$O(AXC) = O(BXC) = 12$ (lebo je $AX = BX$), (1)

$O(ABY) = \frac{2}{3} \cdot O(ABC) = 16$ (lebo je $BY = \frac{2}{3} \cdot BC$), (2)

$O(ACY) = \frac{1}{3} \cdot O(ABC) = 8$ (lebo je $CY = \frac{1}{3} \cdot BC$), (3)

$O(AXY) = \frac{1}{2} \cdot O(ABY) = 8$ (lebo je $AX = BX$), (4)

$O(BXY) = \frac{2}{3} \cdot O(BXC) = 8$ (lebo platí (1) a $BY = \frac{2}{3} \cdot BC$), (5)

$O(CXY) = \frac{1}{3} \cdot O(BXC) = 4$ (lebo platí (1) a $CY = \frac{1}{3} \cdot BC$). (6)

Označme $c \parallel AY$, $x \parallel AY$ rôzne rovnobežky vedené bodmi C, X. Keďže trojuholníky ACY, AXY majú spoločnú stranu AY a rovnaké obsahy (viď (3), (4)), musia byť aj ich výšky príslušné ku strane AY rovnaké. Preto sú vzdialenosti rovnobežiek AY, c a AY, x tiež rovnaké. Podľa známej vety je preto bod Z stredom úsečky XC, t. j. platí $CZ = XZ$. Odtiaľ plynie

$$O(CZY) = O(XZY) = \tfrac{1}{2} \cdot O(CXY) = 2 \text{ (podľa (6)).} \qquad (7)$$

Obsah o štvoruholníka $XBYZ$ je súčtom obsahov $O(XZY)$, $O(BXY)$ (pozri (7), (5)), t. j.

$$o = 2 + 8\,.$$

Odpoveď. Obsah štvoruholníka $XBYZ$ je 10 cm^2.

Riešil s. Jozef Bárdoš,
tr. 9a jedenásťročnej strednej školy v Sabinove.

7. Úlohy II. kola kategorie C.

1. Riešte rovnicu

$$\frac{x}{x-m} + \frac{x}{x+m} = \frac{2x}{x+1} \qquad (1)$$

s neznámou x.

Urobte diskusiu riešiteľnosti danej rovnice vzhľadom na dané reálne číslo m.

Riešenie. Ak je x riešením rovnice (1), musí byť

$$x \neq m, \ x \neq -m, \ x \neq -1; \tag{2}$$

inak by zlomky v rovnici (1) nemali zmysel. Znásobme obe strany v (1) výrazom $(x - m)(x + m)(x + 1) \neq 0$. Dostaneme po rade rovnice

$$x(x + m)(x + 1) + x(x - m)(x + 1) - 2x(x - m)(x + m) = \\ = 0,$$

$$x[x^2 + mx + x + m + x^2 - mx + x - m - 2x^2 + 2m^2] = 0,$$

$$x[2x + 2m^2] = 0,$$

$$2x[x + m^2] = 0.$$

Musí byť teda buď $x = 0$, buď $x + m^2 = 0$. Pýtajme sa, či číslo x, ktoré vyhovuje jednej z týchto podmienok, je riešením rovnice (1); máme dva prípady.

Prípad [1]. Keď je $x = 0$, vzhľadom k vzťahom (2) musí byť $m \neq 0$. Ak je $m \neq 0$, je $x = 0$ skutočne riešením rovnice (1), ako sa ľahko presvedčíme dosadením do rovnice (1).

Prípad [2]. Keď je $x + m^2 = 0$, čiže $x = -m^2$, musí vzhľadom na (2) platiť:

a) Jednak $-m^2 \neq m$ alebo $m(m + 1) \neq 0$, t. j. o čísle m musí platiť $m \neq 0$, $m \neq -1$.

b) Jednak $-m^2 \neq -m$, čiže $m(m - 1) \neq 0$, t. j. o čísle m musí platiť $m \neq 0$, $m \neq 1$.

c) Jednak $-m^2 \neq -1$, čiže $(m - 1)(m + 1) \neq 0$, t. j. musí platiť $m \neq 1$, $m \neq -1$.

Číslo $x = -m^2$ je riešením rovnice (1), keď je zároveň $m \neq 0$, $m \neq 1$, $m \neq -1$. Potom je totiž ľavá strana rovnice (1)

$$L = \frac{-m^2}{-m(m+1)} + \frac{-m^2}{-m(m-1)} =$$

$$= \frac{-m^2}{-m(m+1)(m-1)} \cdot (m - 1 + m + 1) =$$

$$= \frac{2m^3}{m(m+1)(m-1)} = \frac{2\,m^2}{(m+1)(m-1)};$$

pravá strana je

$$P = \frac{-2\,m^2}{-m^2+1} = \frac{2m^2}{(m+1)(m-1)}\,.$$

Výrazy L, P majú za predpokladu $m(m+1)(m-1) \neq 0$ význam a je $L = P$, takže $x = -m^2$ je riešením rovnice.

Záver. 1. Ak je $m = 0$, má rovnica (1) tvar

$$\frac{2x}{x} = \frac{2x}{x+1}$$

a nemá zrejme vôbec žiadne riešenie.

2. Ak je $m = -1$, má rovnica (1) tvar

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+1}$$

a má vzhľadom na (2) jediné riešenie $x = 0$ (pozri prípad [1]).

3. Ak $m = 1$, potom rovnica (1) má tvar

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

a má teda tiež jediné riešenie $x = 0$ (pozri prípad [1]).

4. Ak číslo m splňuje podmienky $m \neq 0$, $m \neq -1$, $m \neq 1$, má rovnica (1) dve rôzne riešenia

$$x = 0,\ x = -m^2\,.$$

2. Dokážte, že každú celistvú čiastku korún väčšiu než 7 Kčs možno vyplatiť pomocou trojkorunových a päťkorunových štátoviek.

Udajte najmenší počet trojkorunových a päťkorunových štátoviek, ktorým možno vyplatiť čiastku 364 Kčs.

Riešenie. Čiastky od 8 Kčs do 17 Kčs možno vyplatiť napr. takto:

$$\left.\begin{aligned} 8 &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1, \\ 9 &= 3 \cdot 3, \\ 10 &= 5 \cdot 2, \\ 11 &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2, \\ 12 &= 3 \cdot 4, \\ 13 &= 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1, \\ 14 &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3, \\ 15 &= 5 \cdot 3, \\ 16 &= 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2, \\ 17 &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4. \end{aligned}\right\} \qquad (z)$$

Čiastku x Kčs väčšiu než 17 Kčs rozložíme na súčet $x = z + d$, kde číslo z je práve jediné z čísel (z); pritom počty jednotiek v číslach x, z sa navzájom rovnajú a číslo $\frac{d}{10}$ je celistvý počet desiatok čísla x. Čiastku z Kčs vyplatíme potom podľa jedneho zo vzťahov (z) a čiastku d vyplatíme v päťkorunáčkach $\left(\text{ich počet je } 2 \cdot \frac{d}{10}\right)$. Tým je prvá časť úlohy rozriešená.

Čiastku 364 Kčs rozložíme na súčet

$$364 = 14 + 350 = (5 \cdot 1 + 3 \cdot 3) + 5 \cdot 35 \cdot 2 = 5 \cdot 71 + 3 \cdot 3.$$

Počet päťkorunových štátoviek už zrejme nemožno zvýšiť (na úkor trojkorunových), takže najmenší počet štátoviek potrebných k výplate je

71 kusov päťkorunáčok a 3 kusy trojkorunáčok.

3. Buď dána úsečka S_1S_2 a uvnitř této úsečky bod P. Označme $S_1P = v_1$, $S_2P = v_2$; nechť o číslech v_1, v_2 platí $v_1 \geqq v_2$. Opišme kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ o daných poloměrech r_1, r_2; dále označme $p \perp S_1S_2$ přímku, která prochází bodem P.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na kružnici k_1, bod C na kružnici k_2 a aby body B, D ležely na přímce p.

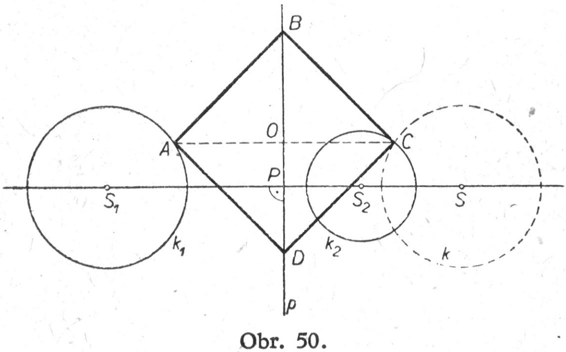
Jestliže kružnice k_1, k_2 nemají společný bod na přímce p a jestliže platí

$$|r_1 - r_2| \leqq v_1 - v_2 < r_1 + r_2\,, \tag{1}$$

potom má úloha řešení; dokažte.

(Užijte souměrnosti vzhledem k přímce p.)

Řešení (srovnej s obr. 50). Nechť existuje čtverec $ABCD$, který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 50.

Označme $k \equiv (S, r_1)$ kružnici, která je souměrně sdružená s kružnicí k_1 podle přímky p. Protože je $S_1S_2 \perp p$, leží bod S uvnitř polopřímky PS_2, při čemž je

$$PS_2 \leqq PS;$$

proto vzdálenost s bodů S_2, S je

$$s = v_1 - v_2\,. \tag{2}$$

Body A, C jsou souměrně sdružené podle osy p; bod C leží jednak na kružnici k_2 (podle požadavku úlohy), jednak na kružnici k (to plyne ze souměrnosti bodů A, C podle osy p). Je tedy bod C společným bodem kružnic k_2, k. Na základě toho provedeme konstrukci.

Sestrojíme ke kružnici k_1 kružnici $k \equiv (S, r_1)$ souměrně sdruženou podle přímky p. Jeden ze společných bodů kružnic k_2, k označme C. Bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky p označme A; bod A leží na kružnici k_1. Označme O střed úsečky AC; ten leží jistě na přímce p. Na každou z obou opačných polopřímek, ve které bod O rozděluje přímku p, nanesme úsečku $\frac{1}{2} \cdot AC$; dostaneme body $B \not\equiv D$. Čtyrúhelník $ABCD$ je hledaný čtverec.

Správnost provedené konstrukce je zřejmá. Provedeme diskusi. Především je z konstrukce zřejmé, že musí být $A \not\equiv C$. V úvahu tedy přicházejí jen ty body společné kružnicím k a k_2, které neleží na přímce p.

Kružnice k, k_2 mají společný bod:
a) když se protínají nebo
b) když se dotýkají nebo
c) když splývají.

Případ a) nastane, když platí o vzdálenosti $s = v_1 - v_2$ středů S, S_2 vztah

$$|r_1 - r_2| < v_1 - v_2 < r_1 + r_2 .$$

Případ b) nastane, když platí

buď

$$v_1 - v_2 = r_1 + r_2$$

anebo

$$|r_1 - r_2| = v_1 - v_2 .$$

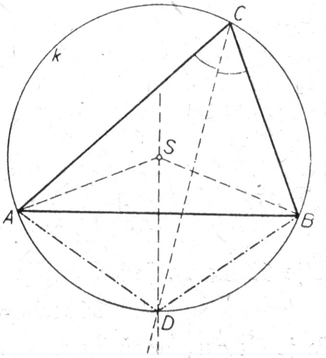
Případ c) nastane, když je $v_1 = v_2$ a $r_1 = r_2$.

Když platí (1), pak nastává vždy jeden z případů a), b), c).

Závěr. V případech a), b) řešení úlohy existuje, když společné body kružnic k_1, k_2 neleží na přímce p. V případě c) je nekonečně mnoho řešení; každý bod kružnice k_2 může být hledaným bodem C, pokud však neleží na přímce p.

4. Buď dán trojúhelník ABC a kružnice $k \equiv (S, r)$ tomuto trojúhelníku opsaná. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ protne kružnici k ještě v druhém průsečíku $D \not\equiv C$.

Dokažte, že trojúhelník ABD je rovnoramenný a že přímka SD je jeho osou souměrnosti.



Obr. 51.

Řešení (obr. 51). Víme, že polovina úhlu trojúhelníka je úhel ostrý. Proto o obou shodných úhlech $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle DCB$ platí

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB < 90° .$$

Tyto úhly jsou obvodové a k nim příslušné středové úhly jsou rovny jejich dvojnásobkům, takže jsou duté; jsou to tedy úhly $\sphericalangle ASD$, $\sphericalangle DSB$. Tyto úhly jsou tudíž shodné a styčné (mají společné rameno SD a ramena SA, SB jsou různé polopřímky, neboť jinak by bylo $A \equiv B$). Proto v souměrnosti o ose SD jsou polopřímky SA, SB souměrně sdružené, a protože je $SA = SB = r$, jsou i body A, B souměrně sdružené podle osy SD. Je tedy přímka SD osou úsečky AB. Protože však bod D je různý od bodů A, B a leží na kružnici k, nemůže již padnout na přímku AB; proto existuje trojúhelník DAB, při čemž přímka DS je osou úsečky AB, t. j. $DA = DB$. Je tedy trojúhelník DAB rovnoramenný a přímka DS je jeho osou souměrnosti, což jsme měli dokázat.

8. Úlohy I. kola kategorie D.

1. Päť chlapcov pracovalo šesť dní na chmeľovej brigáde. Za vykonanú prácu im mala byť vyplatená odmena úmerná vykonanej práci, ale s tou výhradou, že z tejto odmeny im zrazia na stravovanie čiastku 6 Kčs denne za každého chlapca. Pritom priemerný denný výkon prvého chlapca bol 6, druhého 11, tretieho 12, štvrtého 15 a piateho 16 vertelov načesaného chmeľu. Za vykonanú prácu dostali chlapci po zjednanej zrážke odmenu v rýdzej čiastke celkom 180 Kčs. Vypočítajte, ako sa chlapci spravodlivo rozdelia o túto čiastku.

Riešenie. Za stravovanie zaplatili chlapci 180 Kčs, lebo $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. Celková odmena, ktorú chlapci dostali, sa rovná súčtu rýdzej čiastky 180 Kčs a čiastky 180 Kčs, ktorú museli zaplatiť za stravovanie, t. j. 360 Kčs.

Túto čiastku rozdelíme v pomere

$$6 : 11 : 12 : 15 : 16\,,$$

čo je 60 dielov. Jeden diel je

$$360 : 60 = 6 \text{ (Kčs)}.$$

To je čiastka, ktorú by chlapec dostal za týždeň, keby denne načesal jeden vertel.

Pri bezplatnom stravovaní by chlapci dostali po rade

$$6 \cdot 6,\ 6 \cdot 11,\ 6 \cdot 12,\ 6 \cdot 15,\ 6 \cdot 16\,,$$

t. j.

$$36,\ 66,\ 72,\ 90,\ 96 \text{ (Kčs)}.$$

Pretože stravovanie za 6 dní (po 6 Kčs denne) každého chlapca stálo $6 \cdot 6$ neboli 36 Kčs, musíme od každej práve vypočítanej čiastky odčítať 36 Kčs. Preto chlapci dostanú po rade tieto čiastky:

$$36 - 36,\ 66 - 36,\ 72 - 36,\ 90 - 36,\ 96 - 36$$

alebo

$$0, \quad 30, \quad 36, \quad 54, \quad 60 \text{ (Kčs)}.$$

(Kontrola: Súčet týchto rýdzych čiastok je skutočne 180 Kčs.)

2. Siedmi spolužiaci si na začiatku prázdnin vzájomne sľúbili, že každý napíše trom ďalším z nich zprávu o svojom prázdninovom pobyte.

Je to možné zariadiť tak, aby každý z nich dostal práve tri listy od tých troch spolužiakov, ktorým sám napísal?

R i e š e n i e. Keby to bolo možné, písal by žiak A žiakovi B a žiak B žiakovi A, čo znamená, že by všetci žiaci napísali dohromady párny počet listov.

V skutočnosti písal každý žiak tri listy, takže všetkých 7 žiakov odoslalo $3 \cdot 7$ listov; to je však nepárne číslo. Preto nie je možné zariadiť rozoslanie listov tak, aby každý žiak dostal práve tri listy od tých troch spolužiakov, ktorým sám písal.

3. Buďte dány dvě úsečky o velikostech p, q. Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně velikosti p a označte O střed kružnice jemu opsané. Na prodloužení úsečky AB za bod B určete bod X tak, aby platilo $BX = q$. Na prodloužení úsečky BC za bod C určete bod Y tak, aby platilo $CY = q$. Na prodloužení úsečky CA za bod A určete bod Z tak, aby platilo $AZ = q$.

a) Pak je trojúhelník XYZ rovnostranný; dokažte.

b) Pak platí $OX = OY = OZ$ a kružnice $k \equiv (O, OX)$ prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníka XYZ. Dokažte.

Ř e š e n í (obr. 52). a) O trojúhelníku XYZ máme dokázat, že platí

$$XY = YZ = ZX.$$

D ů k a z. Podle textu úlohy je trojúhelník ABC rovnostranný, neboť platí

$$AB = BC = CA = p.$$

Podle konstrukce bodů X, Y, Z je

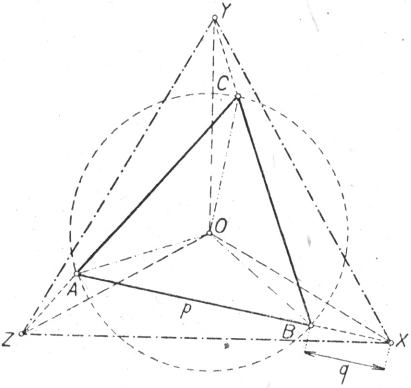
$$BX = CY = AZ = q. \qquad (1)$$

Protože je

$$AX = AB + BX = p + q\,,$$
$$BY = BC + CY = p + q\,,$$
$$CZ = CA + AZ = p + q\,,$$

platí dále

$$AX = BY = CZ\,. \tag{2}$$



Obr. 52.

Dále platí $\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, BCA = 60°$ (trojúhelník ABC je rovnostranný); proto platí $\sphericalangle\, XBY = 180° - \sphericalangle\, ABC = 180° - 60° = 120°$. Podobně se dokáže, že $\sphericalangle\, YCZ = 120°$, $\sphericalangle\, ZAX = 120°$.

Trojúhelníky BYX, CZY se shodují podle věty sus, neboť podle (1) je

$$BX = CY\,,$$

podle (2) je

$$BY = CZ\,,$$

a dále je

$$\sphericalangle XBY = \sphericalangle YCZ = 120°.$$

Je tedy skutečně

$$\triangle BYX \cong \triangle CZY \text{ (sus)} . \tag{3}$$

Stejně dokážeme, že platí

$$\triangle CZY \cong \triangle AXZ . \tag{4}$$

Ve shodných trojúhelnících jsou příslušné strany shodné. Podle vztahu (3) tedy je

$$XY = YZ$$

a podle vztahu (4) je

$$YZ = ZX .$$

Z obou těchto vztahů dostaneme

$$XY = YZ = ZX ,$$

což jsme měli dokázat.

b) Je známa věta: „Každému trojúhelníku se dá opsat jen jedna kružnice."

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Tu platí

$$OA = OB = OC . \tag{5}$$

Podle textu úlohy máme dokázat, že platí

$$OX = OY = OZ .$$

Důkaz. Úsečka OX je strana trojúhelníka OBX, ve kterém je

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBC + \sphericalangle CBX = 30° + 120° = 150° .$$

Úsečka OY je strana trojúhelníka OCY, ve kterém je rovněž

$\sphericalangle OCY = 150°$ (to se dokáže stejně jako v předchozím případě).

O trojúhelnících OBX, OCY platí

$$\triangle OBX \cong OCY \text{ (sus)},$$

neboť se shodují v úhlech $\sphericalangle OBX = \sphericalangle OCY = 150°$, dále je podle (5)

$$OB = OC$$

a podle (1) je

$$BX = CY .$$

V těchto shodných trojúhelnících si příslušejí strany OX, OY, které jsou proto shodné; je tedy

$$OX = OY . \tag{6}$$

Stejně se dokáže, že platí

$$\triangle OCY \cong \triangle OAZ \text{ (sus)};$$

odtud plyne, že

$$OY = OZ . \tag{7}$$

Spojením vztahů (6), (7) dostaneme $OX = OY = OZ$, což jsme měli dokázat.

4. Narýsujte trojúhelník ABC. Konstrukcí určete uvnitř strany AC bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo

$$AX = XY, \; XY \parallel AB .$$

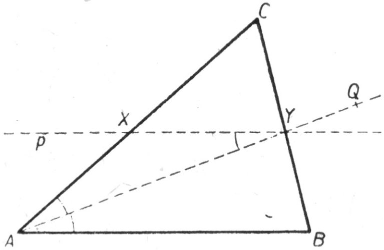
Dokažte správnost provedené konstrukce.

Řešení (obr. 53). I. Rozbor úlohy. Předpokládejme, že jsme našli takové body X, Y, že platí $AX = XY$, $XY \parallel AB$. Pak však je trojúhelník XAY rovnoramenný a strana AY je jeho základnou. Avšak úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné; proto je

$$\sphericalangle XAY = \sphericalangle AYX . \tag{1}$$

Protože dále je $XY \parallel AB$, jsou střídavé úhly $\sphericalangle AYX$, $\sphericalangle YAB$ shodné (viz učebnice M7, str. 284, věta 4'); platí tedy

$$\sphericalangle AYX = \sphericalangle YAB\,. \tag{2}$$



Obr. 53.

Spojením vztahů (1), (2) dostaneme $\sphericalangle XAY = \sphericalangle YAB$. Odtud plyne, že polopřímka AY je osou úhlu $\sphericalangle XAB$ neboli úhlu $\sphericalangle CAB$.

II. Konstrukce. Na základě tohoto výsledku provedeme konstrukci bodů X, Y takto:

1. Sestrojíme osu AQ úhlu $\sphericalangle CAB$ a označíme Y její průsečík se stranou BC.
2. Bodem Y sestrojíme přímku $p \parallel AB$; její průsečík se stranou AC označíme X.

XY je hledaná úsečka.

III. Důkaz správnosti konstrukce. Nyní máme dokázat, že body X, Y, které jsme právě sestrojili, skutečně splňují tyto dvě podmínky:

$$XY \parallel AB,\ AX = XY\,.$$

První tvrzení je jistě správné, neboť tak jsme sestrojili přímku $p \equiv XY$.

Druhé tvrzení je rovněž správné, neboť je

$\sphericalangle XAY = \sphericalangle YAB$ (podle konstrukce je AQ osa úhlu $\sphericalangle CAB$) a dále

$\sphericalangle YAB = \sphericalangle XYA$ (střídavé úhly jsou si rovny, neboť je $AB \parallel XY$).

Z toho plyne, že $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYA$, takže trojúhelník XAY je rovnoramenný (proti shodným úhlům v trojúhelníku leží shodné strany), t. j. platí $AX = XY$, což jsme měli dokázat.

Úloha má proto vždycky právě jedno řešení.

5. Daný je zlomok

$$\frac{-x}{a^2 + y^2},$$

kde a je dané číslo rôzne od nuly; čísla x, y volíme ľubovoľne. Potom pre každú dvojicu čísel x, y

a) menovateľ daného zlomku je kladné číslo; dokážte to;

b) znamienko daného zlomku je opačné k znamienku čísla x, alebo sa číslo x aj daný zlomok súčasne rovnajú nule; dokážte to.

Riešenie. a) Pretože číslo a je rôzne od nuly, je číslo a^2 kladné. Číslo y sa buď rovná nule, buď je od nuly rôzne; preto je y^2 nezáporné číslo (t. j. nula alebo kladné číslo). Súčet $a^2 + y^2$ je súčtom kladného a nezáporného čísla, teda je to kladné číslo. Tým sme dokázali, že menovateľ daného zlomku je kladné číslo.

b) Pretože menovateľ daného zlomku je podľa predošlej úlohy a) kladné číslo, má daný zlomok zmysel (existuje).

Ak je $x = 0$, potom $-x = 0$ a zlomok sa rovná nule. Ak je x kladné číslo, je $-x$ záporné číslo a teda aj zlomok je záporné číslo (podiel záporného a kladného čísla je záporné číslo).

Ak je x záporné číslo, je $-x$ a teda aj zlomok kladné číslo (podiel dvoch kladných čísel je kladné číslo).

Tým sme dokázali: Ak je $x = 0$, rovná sa daný zlomok nule. Ak je $x \neq 0$, má daný zlomok znamienko opačné k znamienku čísla x.

6. Buďte a, b, c tři jakkoli zvolená čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2]$$

je číslo nezáporné; dokažte.

Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c, pro které je číslo x rovno nule.

Řešení. Proveďme výkony naznačené v daném výrazu; dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} x &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - [a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + \\ &+ c^2 + 2ca + a^2] = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 - \\ &- 2ab - 2bc - 2ca = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2. \end{aligned}$$

Je tedy

$$x = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 . \qquad (1)$$

Jsou známy tyto věty: Druhá mocnina nuly je nula. Druhá mocnina čísla kladného nebo záporného je číslo kladné. Je-li součet několika nezáporných čísel roven nule, je každé z těchto čísel rovno nule.

Protože číslo x je podle výsledku (1) součtem druhých mocnin čísel $a - b$, $b - c$, $c - a$, je to číslo nula nebo číslo kladné, t. j. číslo nezáporné. To jsme měli dokázat.

Když zvolíme $a - b = 0$, $b - c = 0$, $c - a = 0$ neboli když zvolíme $a = b$, $b = c$, $c = a$, bude též $(a - b)^2 = 0$, $(b - c)^2 = 0$, $(c - a)^2 = 0$; pak bude též $x = 0$.

Obráceně, když je $x = 0$, pak o číslech a, b, c platí

$$a = b = c ,$$

což ihned dokážeme.

Důkaz. Protože každé z čísel $(a - b)^2$, $(b - c)^2$, $(c - a)^2$ je číslo nezáporné, může být jejich součet roven nule jen tehdy, když každé z nich je rovno nule. Ale na př. ze vztahu $(a - b)^2 = 0$ plyne $(a - b) \cdot (a - b) = 0$, t. j. musí platit $a - b = 0$, takže je $a = b$. Z dalších dvou vztahů odvodíme podobně, že musí platit $b = c$, $c = a$ neboli musí platit $a = b = c$.

Výsledek. Všechny trojice čísel a, b, c, pro něžje $x = 0$, tedy dostaneme, když utvoříme všechny trojice sobě rovných čísel.

7. Narýsujte trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Na prodloužení strany AC za bod C určete bod B_1 tak, aby bylo $CB_1 = CB$. Na prodloužení strany BC za bod C určete bod A_1 tak, aby bylo $CA_1 = CA$. Bodem C sestrojte přímku p kolmou k přímce A_1B_1 a označte D její patu.

a) Platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$. Dokažte.

b) Přímka p protne přímku AB v bodě F, který leží uvnitř úsečky AB. Dokažte.

c) Bod F, který jste sestrojili, je středem úsečky AB. Dokažte.

d) Pomocí předchozích výsledků dokažte známou větu, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku půlí jeho přeponu.

Řešení. Užijeme označení bodů, přímek a úhlů, jak je uvedeno na obr. 54. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý (je $\sphericalangle C = 90°$), platí

$$\alpha + \beta = 90°. \tag{1}$$

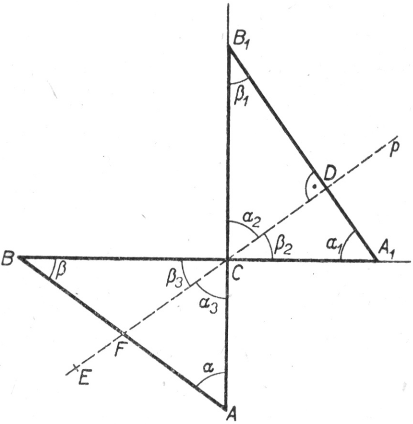
a) Máme dokázat, že platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$.

Důkaz. Podle provedené konstrukce trojúhelníka A_1B_1C z daného trojúhelníka ABC platí $CA = CA_1$, $CB = CB_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1CA_1$ (úhly vrcholové). Oba trojúhelníky se tedy shodují podle věty sus.

Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne (viz obr. 54)

$$\alpha = \alpha_1, \ \beta = \beta_1; \tag{2}$$

přitom je podle (1) každý z těchto úhlů ostrý.



Obr. 54.

b) Pata D kolmice p vedené bodem C k přímce A_1B_1 padne dovnitř úsečky A_1B_1.

Důkaz. Protože α_1, β_1 jsou podle úlohy a) ostré úhly, padne bod D dovnitř ramen A_1B_1, B_1A_1 těchto úhlů (viz též učebnici M7, str. 267, příklad 17), t. j. dovnitř úsečky A_1B_1, která je společnou částí těchto polopřímek.

Odtud plyne, že úhel α_2 leží uvnitř úhlu $\sphericalangle A_1CB_1$, a proto je ostrý; protože $\alpha_2 = \alpha_3$ (vrcholové úhly), padne úhel α_3 dovnitř úhlu $\sphericalangle ACB$. Proto má polopřímka CE (opačná k polopřímce CD) s úsečkou AB společný bod F, který leží uvnitř této úsečky (viz učebnici M7, str. 172, obr. 31).

c) Protože jsou trojúhelníky A_1CD, B_1CD pravoúhlé (pravé úhly jsou při vrcholu D), platí

$$\alpha_2 = 90° - \beta_1, \quad \beta_2 = 90° - \alpha_1$$

a tedy vzhledem k (2), (1) je

$$\alpha_2 = 90° - \beta = \alpha, \ \beta_2 = 90° - \alpha = \beta; \text{ je tedy } \alpha_2 = \alpha, \ \beta_2 = \beta .$$

Protože však je $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$ (úhly vrcholové), dostaneme odtud $\alpha_3 = \alpha$, $\beta_3 = \beta$.

Odtud plyne:

[1] V trojúhelníku FAC je

$$\alpha_3 = \alpha ,$$

a proto též

$$FC = FA . \tag{3}$$

[2] V trojúhelníku FBC je

$$\beta_3 = \beta ,$$

a proto též

$$FB = FC . \tag{4}$$

Spojením vztahů (4), (3) dostaneme $FB = FA$, t. j. bod F je středem úsečky AB. To jsme měli dokázat.

d) Podle vztahů (3), (4) z úlohy c) dostaneme

$$FA = FB = FC ,$$

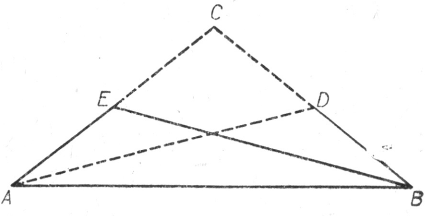
t. j. bod F má od každého z vrcholů trojúhelníka ABC touž vzdálenost. Bod F je proto středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané.

Protože ABC byl libovolně zvolený trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C, platí výsledek právě odvozený pro každý pravoúhlý trojúhelník, t. j. platí: Střed F kružnice, opsané trojúhelníku pravoúhlému, je středem jeho přepony.

8. Rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB má obvod 50 cm. Označte D stred strany BC a E stred strany AC.

Obvod trojuholníka ABE je o 8 cm väčší než obvod trojuholníka ACD.

Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka ABC a postup výpočtu odôvodnite.



Obr. 55.

Riešenie (obr. 55). Označme $z = AB$ (základňa rovnoramenného trojuholníka ABC), $r = CA = CB$ (rameno). Predovšetkým platí

$$\triangle ABE \cong \triangle BAD \text{ (sus)},$$

lebo $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ (trojuholník ABC je rovnoramenný), $AE = BD = \frac{1}{2}r$ a strana AB je spoločná pre oba trojuholníky. Môžeme preto vo svojich úvahách o veľkostiach strán trojuholník ABE nahradiť trojuholníkom BAD.

Trojuholníky ADB, ADC sa zhodujú v spoločnej strane AD a ďalej v stranách BD, DC (lebo bod D je stredom úsečky BC). Keď teda od obvodu trojuholníka ABD odčítame obvod trojuholníka ADC, dostaneme

$$AB - AC = 8 \quad \text{alebo} \quad z - r = 8 .$$

Základňa z je teda o 8 väčšia než rameno r, t. j.

$$z = r + 8 . \tag{1}$$

Ale obvod trojuholníka ABC je

$$z + 2r = 50 .$$

V tomto súčte môžeme podľa (1) nahradiť základňu z súčtom $r + 8$, čím dostaneme

$$3r + 8 = 50\,.$$

Trojnásobok ramena zväčšený o 8 sa teda rovná číslu 50; trojnásobok ramena je teda 42. Preto platí

$$3r = 42$$

a z toho

$$r = 14\,.$$

Na základe tohto výsledku teraz ľahko vypočítame podľa (1)

$$z = 14 + 8 = 22\,.$$

Teda je $AB = 22$, $CA = CB = 14$.

Skúška. Základňa je skutočne o 8 väčšia než rameno. Pretože sa trojuholníky ADB, ADC zhodujú v strane AD a v stranách $BD = DC$, líšia sa ich obvody práve o toľko, o koľko sa líšia strany AB, AC, t. j. o 8. Obvod trojuholníka ABC je teda $2 \cdot 14 + 22 = 50$, čo súhlasí s predpokladom úlohy.

9. Vzdálenost Prahy a Brna po železniční trati je $s = 255$ km. Rychlík projede tuto trať za dobu $t = 4\frac{3}{4}$ hod. Chceme-li, aby se doba jízdy rychlíku zkrátila o $p = 10\ \%$, o kolik procent (označte q) se musí zvýšit průměrná rychlost c rychlíku?

Řešení. Když vlak ujede průměrnou rychlostí c km/hod dráhu s km, potřebuje k tomu doby

$$t = \frac{s}{c}\ (\text{hodin})\,. \qquad (1)$$

Když vlak ve druhém případě pojede průměrnou rychlostí c' km/hod, která je o $q\ \%$ vyšší než rychlost c, pak je

$$c' = c\left(1 + \frac{q}{100}\right)\ \text{km/hod.}$$

Označme v tomto druhém případě jízdní dobu t'. O číslech s, c', t' potom platí vztah

$$t' = \frac{s}{c'}$$

neboli

$$t' = s : \left[c\left(1 + \frac{q}{100}\right)\right].$$

Proveďme úpravu tohoto výsledku; postupně dostaneme

$$t' = s : \left[c \cdot \frac{100 + q}{100}\right] = s \cdot \frac{100}{c\,(100 + q)},$$

t. j.

$$t' = \frac{s}{c} \cdot \frac{100}{100 + q}. \qquad (2)$$

Podle textu úlohy se zvýšením rychlosti na c' km/hod zmenší doba jízdy o p %, t. j. platí

$$t' = t \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Tento výraz snadno upravíme, když členy v závorce uvedeme na téhož jmenovatele 100; dostaneme

$$t' = t \cdot \frac{100 - p}{100}.$$

Dosaďme do tohoto výsledku za t ze vztahu (1) a výraz, který tak dostaneme, porovnejme s pravou stranou výrazu (2); obdržíme rovnost

$$\frac{s}{c} \cdot \frac{100 - p}{100} = \frac{s}{c} \cdot \frac{100}{100 + q}.$$

Protože číslo t ve vztahu (1) je různé od nuly, můžeme poslední rovnici znásobit číslem $\frac{c}{s}$, čímž obdržíme

$$\frac{100-p}{100}=\frac{100}{100+q}. \tag{3}$$

Podle textu úlohy je $p = 10$, takže po dosazení tohoto čísla do předchozí rovnice dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{9}{10}=\frac{100}{100+q}.$$

Obě strany této rovnice znásobíme číslem $10 \cdot (100 + q)$, čímž dostaneme

$$9 \cdot (100+q) = 1000\,.$$

Odtud postupně obdržíme

$$9q = 1000 - 900\,,$$

$$9q = 100\,,$$

$$q = \frac{100}{9},$$

$$q = 11\,\frac{1}{9}\,.$$

Odpověď. Chceme-li, aby se jízdní doba rychlíku zkrátila o 10 %, musí se průměrná rychlost rychlíku zvýšit o $11\frac{1}{9}$ %.

Jiné řešení. Doba jízdy t se má zkrátit o $p = 10$ %, tedy na 90 %, t. j. v poměru 90 : 100 neboli 9 : 10. Jestliže se doba t zmenší v poměru 9 : 10, musí se rychlost c zvětšit v poměru převráceném 10 : 9. Původní rychlost c je 100 %, nová rychlost je $100 \cdot \frac{10}{9} = \frac{1000}{9} = 111\,\frac{1}{9}$. Zvýšila se tedy o $q = 11\frac{1}{9}$ %.

Řešení zaslal s. J. Adámek,
předseda OVMO v Praze 12.

10. Buďte a, b, c čísla, která nejsou všechna současně rovna nule; přitom o nich platí vztah

$$ab + bc + ca = 0\,. \tag{1}$$

Potom výraz

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \tag{2}$$

má pro všechna taková čísla a, b, c touž hodnotu. Dokažte správnost tohoto tvrzení a vypočtěte hodnotu daného výrazu.

Řešení. Alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly (předpoklad úlohy). Proto je alespoň jedno z čísel a^2, b^2, c^2 kladné, při čemž některá z nich mohou být rovna nule, ale žádné není záporné; jsou to tedy nezáporná čísla. Proto je součet těchto čísel kladný. To znamená, že číslo

$$a^2 + b^2 + c^2$$

je různé od nuly a zlomek (2) má pro všechna přípustná čísla a, b, c význam (t. j. existuje).

Upravme nyní čitatele Q zlomku (2); platí postupně

$$Q = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)\,.$$

Ale výraz v poslední závorce je podle předpokladu (1) roven nule, takže $Q = a^2 + b^2 + c^2$, což je číslo rovné jmenovateli daného zlomku (2).

Zlomek (2) má tedy tvar $\dfrac{Q}{Q}$ neboli je roven číslu 1; pro každou přípustnou trojici čísel a, b, c má tedy touž hodnotu. To jsme měli dokázat.

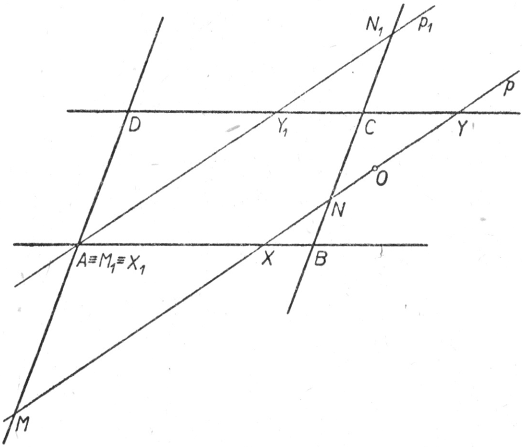
11. Buď dán rovnoběžník $ABCD$ a libovolný bod O. Bodem O sestrojte přímku p, která má tuto vlastnost:

Přímka p protne rovnoběžky AB, DC v bodech X, Y a rovnoběžky AD, BC v bodech M, N tak, že platí $XY = MN$.

Dokažte správnost nalezené konstrukce a rozhodněte, kolik má úloha řešení.

Řešení. Při řešení této úlohy užijeme této známé věty (označme ji V): Buďte a, b dvě různé rovnoběžky. Protněme je přímkou u v bodech U_1, U_2. Potom každá přímka $v \| u$ protíná přímky, a, b v bodech V_1, V_2 a platí $U_1U_2 = V_1V_2$.

Důkaz věty. Jsou-li u, v různé rovnoběžky, je čtyrúhelník $U_1U_2V_2V_1$ rovnoběžník a věta je proto správná. Jsou-li u, v splývající přímky, potom je $U_1 \equiv V_1$, $U_2 \equiv V_2$; pak je věta samozřejmě platná.



Obr. 56a.

I. Proveďme nejprve rozbor úlohy. Předpokládejme, že existuje přímka p, která má vlastnosti požadované v úloze (viz obr. 56a, b). Označme po řadě X, Y, M, N průsečíky přímky p s přímkami AB, CD, AD, BC. Rozlišujeme dvě možnosti:

[1] Polopřímky XY, MN mají týž smysl (obr. 56a).

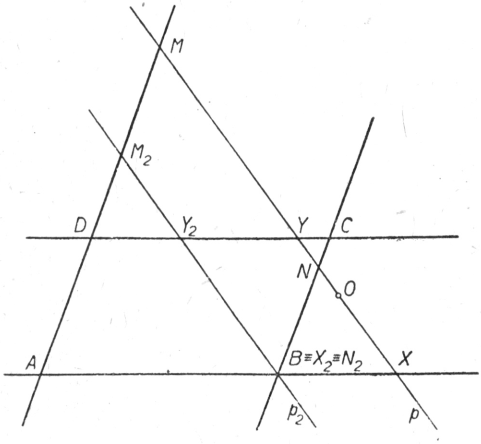
[2] Polopřímky XY, MN nemají týž smysl (obr. 56b).

Případ [1] (obr. 56a). Veďme bodem A přímku $p_1 \| p$ a označme po řadě N_1, Y_1 její průsečíky s přímkami BC, CD. Potom podle věty **V** postupně platí

$$AN_1 = MN = XY = AY_1$$

neboli

$$AN_1 = AY_1 . \tag{1}$$



Obr. 56b.

Přitom polopřímky AN_1, AY_1, které mají společný počátek A, splývají. Proto ze vztahu (1) plyne, že i oba body N_1, Y_1 splývají; protože N_1 leží na přímce BC, Y_1 leží na přímce CD, splývají body N_1, Y_1 s bodem C. Odtud plyne, že přímka p_1 splývá s přímkou AC, t. j. platí $p_1 \equiv AC$.

Případ [2] (obr. 56b). Veďme bodem B přímku $p_2 \| p$

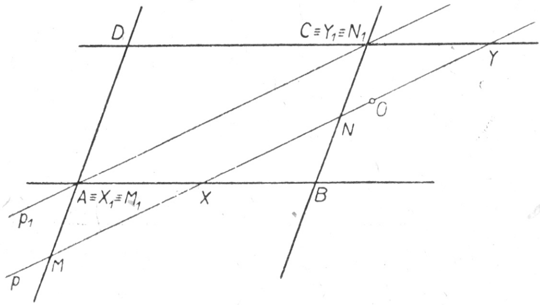
a označme po řadě M_2, Y_2 její průsečíky s přímkami AD, CD. Potom podle věty **V** postupně platí

$$BM_2 = NM = XY = BY_2$$

neboli

$$BM_2 = BY_2 .$$

Přitom polopřímky BM_2, BY_2, které mají společný počátek B, splývají; protože bod M_2 leží na přímce AD a bod Y_2 na přímce CD, splývají body M_2, Y_2 s bodem D. Odtud plyne, že přímka p_2 splývá s přímkou BD, t. j. platí $p_2 \equiv BD$.



Obr. 57a.

II. Z výsledku rozboru plyne, že hledaná přímka p musí být rovnoběžná právě s jednou z přímek AC, BD. Podle toho provedeme konstrukci:

Případ [1]. Bodem O veďme přímku $p \parallel AC$ (obr. 57a) a zaveďme označení jako v obrázku. Podle věty **V** platí

$$XY = AC, \; AC = MN$$

a tedy též

$$XY = MN,$$

takže přímka p je jednou z přímek, které vyhovují podmínkám úlohy a požadavkům úlohy.

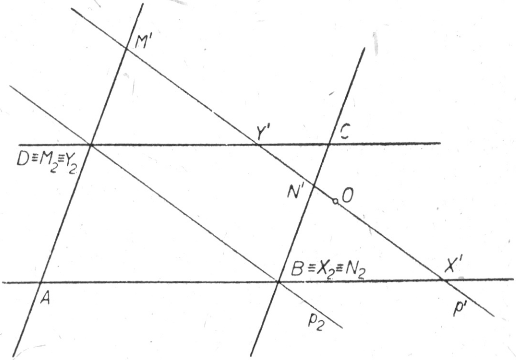
Případ [2]. Bodem O veďme přímku $p' \parallel BD$ (obr. 57b) a zaveďme označení jako v obrázku. Podle věty **V** platí

$$X'Y' = BD, \quad BD = M'N'$$

a tedy též

$$X'Y' = M'N',$$

takže přímka p' je jednou z přímek, které vyhovují podmínkám a požadavkům úlohy.



Obr. 57b.

Závěr. Podle rozboru musí být hledaná přímka rovnoběžná právě s jednou z přímek AC, BD. Avšak daným bodem O lze sestrojit právě jednu přímku $p \parallel AC$ a právě jednu přímku $p' \parallel BD$, což jsme právě provedli; proto má daná úloha vždycky právě dvě (různá) řešení (viz obě konstrukce v obr. 57a, b).

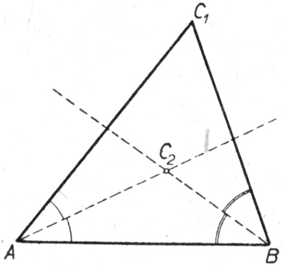
12. V trojúhelníku ABC_1 označme úhly

$$\sphericalangle C_1AB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC_1 = \beta, \quad \sphericalangle BC_1A = \gamma.$$

Uvnitř trojúhelníka ABC_1 leží bod C_n takový, že platí

$$\sphericalangle C_nAB = \frac{1}{n}\alpha, \quad ABC_n = \frac{1}{n}\beta;$$

přitom je n dané přirozené číslo větší než číslo 1.



Obr. 58.

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle ACnB$ pomocí velikosti úhlu γ.

Řešení (obr. 58). O úhlech trojúhelníka ABC_1 platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ neboli

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma. \qquad (1)$$

Označme $\sphericalangle AC_nB = \gamma_n$. O úhlech trojúhelníka ABC_n platí

$$\sphericalangle AC_nB = 180° - \sphericalangle BAC_n - \sphericalangle ABC_n$$

neboli

$$\gamma_n = 180° - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n},$$

t. j.

$$\gamma_n = 180° - \frac{\alpha + \beta}{n}.$$

Dosaďme do tohoto výsledku ze vztahu (1) za $\alpha + \beta$; dostaneme

$$\gamma_n = 180° - \frac{180° - \gamma}{n}$$

neboli

$$\gamma_n = 180° - \frac{180°}{n} + \frac{\gamma}{n}.$$

Po vytknutí čísla 180 z prvních dvou členů pravé strany poslední rovnosti obdržíme konečně

$$\gamma_n = 180^\circ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\gamma}{n}.$$

Skutečně se nám podařilo vyjádřit velikost úhlu γ_n pomocí velikosti úhlu γ a čísla n.

13. a) Ak m je prirodzené číslo, platí

$$\frac{1}{5} < \frac{1+m}{5+m}; \quad \frac{1+m}{5+m} < 1;$$

dokážte to.

b) Vypočítajte hodnoty výrazu

$$\frac{1+m}{5+m}$$

pre $m = 100, 200, 300$ a označte ich po rade z_1, z_2, z_3.

Určte rozdiely $z_2 - z_1$, $z_3 - z_2$ a rozhodnite, ktorý z nich je väčší.

Riešenie. a) Správnosť prvej nerovnosti dokážeme, keď dokážeme, že rozdiel

$$r = \frac{1+m}{5+m} - \frac{1}{5}$$

je kladné číslo pre každé prirodzené číslo m, ktoré do tohto výrazu dosadíme.

Dôkaz. Postupne platí

$$r = \frac{5(1+m) - (5+m)}{(5+m) \cdot 5} = \frac{4m}{5 \cdot (5+m)}.$$

Všimnime si teraz posledný zlomok. Čitateľ $4m$ je prirodzené číslo; aj menovateľ $5(5 + m)$ je prirodzené číslo. Preto je zlomok kladné číslo a tým aj rozdiel r je kladné číslo. Tým sme dokázali správnosť prvej nerovnosti.

Správnosť druhej nerovnosti dokážeme, keď dokážeme, že rozdiel

$$r' = 1 - \frac{1 + m}{5 + m}$$

je kladné číslo pre každé prirodzené číslo m.

Dôkaz. Postupne platí

$$r' = \frac{5 + m - (1 + m)}{5 + m} = \frac{4}{5 + m}.$$

Všimnime si posledný zlomok. Čísla 4, $5 + m$ sú prirodzené čísla; preto je číslo r' kladné číslo, čo sme mali dokázať.

Tým sme rozriešili úlohu a).

b) Tu platí

$$z_1 = \frac{101}{105}, \quad z_2 = \frac{201}{205}, \quad z_3 = \frac{301}{305}.$$

Ďalej je

$$z_2 - z_1 = \frac{201}{205} - \frac{101}{105} = \frac{201 \cdot 105 - 205 \cdot 101}{205 \cdot 105} =$$

$$= \frac{21\,105 - 20\,705}{205 \cdot 105} = \frac{400}{205 \cdot 105}; \tag{1}$$

$$z_3 - z_2 = \frac{301}{305} - \frac{201}{205} = \frac{301 \cdot 205 - 201 \cdot 305}{305 \cdot 205} =$$

$$= \frac{61\,705 - 61\,305}{305 \cdot 205} = \frac{400}{305 \cdot 205}. \tag{2}$$

Menovateľ zlomku (1) je $205 \cdot 105$, kdežto menovateľ zlomku (2) je $305 \cdot 205$. Tu $305 \cdot 205 - 205 \,.\, 105 = 205(305 - 105) = 205 \cdot 200$, čo je prirodzené číslo. Preto má zlomok (1) menšieho menovateľa než zlomok (2). Je teda prvý zlomok väčší než druhý, a preto platí

$$z_2 - z_1 > z_3 - z_2\,.$$

Odpoveď. Prvý z rozdielov je väčší než druhý.

14. Daný je výraz

$$4x^4y^2 + 1 - x^2 \cdot (4y^2 + 1)\,.$$

Dokážte: Ak dosadíme do tohto výrazu za x, y ľubovoľnú dvojicu čísel, o ktorých platí $x > 1$, $y > 1$, je hodnota daného výrazu vždy kladné číslo.

Riešenie. Označme daný výraz Q a upravme ho postupne takto:

$$\begin{aligned}Q &= 4x^4y^2 + 1 - x^2(4y^2 + 1) = (4x^4y^2 - 4x^2y^2) - (x^2 - 1) = \\ &= 4x^2y^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x^2y^2 - 1) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(2xy + 1)(2xy - 1)\,.\end{aligned}$$

Daný výraz Q sa teda rovná výrazu

$$Q = (x + 1)(x - 1)(2xy + 1)(2xy - 1)\,. \qquad (1)$$

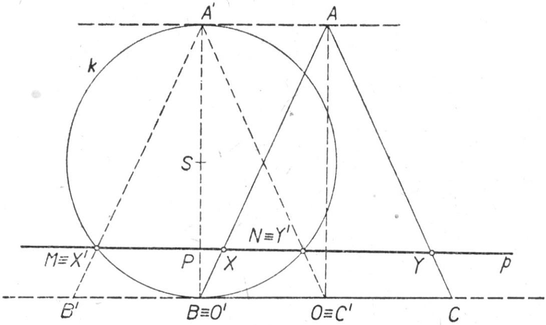
Avšak podľa predpokladu je $x > 1$, $y > 1$; preto vo výraze (1) je

[1] prvý činiteľ kladné číslo,
[2] druhý činiteľ kladné číslo,
[3] tretí činiteľ kladné číslo,
[4] štvrtý činiteľ kladné číslo, ako ihneď dokážeme. Súčin xy je číslo väčšie než 1 (súčin dvoch čísel väčších než 1 je väčší než 1); preto je $2xy$ číslo väčšie než 2 a teda číslo $2xy - 1$ je väčšie než 1, teda kladné číslo.

Všetky štyri činitele výrazu (1) sú teda kladné čísla; ale súčin samých kladných čísel je kladné číslo. Teda číslo Q je kladné, čo sme mali dokázať.

15. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Ďalej je v polrovine BCA daná kružnica k, ktorá sa dotýka v bode B priamky BC a ktorej priemer sa rovná vzdialenosti bodu A od priamky BC.

Zostrojte takú sečnicu p kružnice k, ktorá má tieto vlastnosti:
(1) Je $p \parallel BC$.
(2) Sečnica p pretína kružnicu k v bodoch M, N a strany AB, AC trojuholníka v bodoch X, Y; pritom platí $MN = XY$.
Dokážte, že taká priamka p je práve jedna.



Obr. 59.

Riešenie (obr. 59). I. Rozbor. Predpokladajme, že sme danú úlohu rozriešili, t. j. že sa nám podarilo zostrojiť priamku p, ktorá splňuje požiadavky vyslovené v texte úlohy (pozri obr. 59).

Označme O stred úsečky BC, takže OA je os súmernosti rovnoramenného trojuholníka ABC (je teda $OA \perp BC$, $OB = OC$). Ďalej označme S stred danej kružnice k, ktorej polomer je $r = \frac{1}{2}OA$. Bod S leží vnútri polroviny BCA. Označenie bodov M, N voľme tak, aby bod N padol dovnútra polroviny BSC.

Premiesťme teraz trojuholník ABC do novej polohy $A'B'C'$ (novú polohu bodu O označme O') takto:

[1] Bod O' splýva s bodom B.

[2] Úsečka $O'C'$ splýva s úsečkou BO, t. j. bod C' splýva s bodom O. (To je možné, lebo platí $BO = OC$.)

[3] Bod A' padne dovnútra polroviny BCS alebo BCA. Pretože priamka BC je dotyčnicou kružnice k v bode B, je $BS \perp BC$ a bod A' leží na polpriamke BS a ďalej na kružnici k, takže BA' je priemerom kružnice k.

Označme X', Y' nové polohy bodov X, Y. Pretože bod X má od priamky BC vzdialenosť d, ktorá sa rovná vzdialenosti priamok $BC \parallel p$, má aj bod X' od priamky BC vzdialenosť d. Avšak pretože bod X' leží v tej istej polrovine BCA ako priamka p, padne bod X' na priamku p. Rovnako sa dokáže, že bod Y' padne na priamku p. Pritom platí $X'Y' = XY$ (premiestenie), $XY = MN$ (podľa predpokladu, že priamka p je riešením); teda je $X'Y' = MN$. Ale priamka BS je zrejme osou súmernosti ako kružnice k, tak aj trojuholníka $A'B'C'$ a priamky p. Preto sú body M, N súmerne združené podľa priamky BS a to isté platí aj pre body X', Y'. Označme P priesečník priamok BS, p; platí teda $PM = PN = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot X'Y' = PX' = PY'$. Teda $PM = PX'$, $PN = PY'$; pretože body M, X' ležia na tejže polpriamke PM (ktorá je časťou priamky p), nevyhnutne navzájom splývajú, t. j. $M \equiv X'$. Rovnako sa dokáže, že splývajú aj body N, Y', alebo že platí $N \equiv Y'$.

Ak má teda úloha riešenie, je bod $M \equiv X'$ spoločným bodom kružnice k a úsečky $A'B'$; bod $N \equiv Y'$ je potom spoločným bodom kružnice k a úsečky $A'C'$. Na základe tohto rozboru úlohy urobíme teraz konštrukciu.

II. Konštrukcia. Premiestime trojuholník ABC do novej polohy tak, ako je to popísané v predošlom odstavci I. Označme $M \not\equiv A'$ priesečník priamky $A'B'$ s kružnicou k a $N \not\equiv A'$ priesečník priamky $A'C'$ s tou istou kružnicou k. Potom

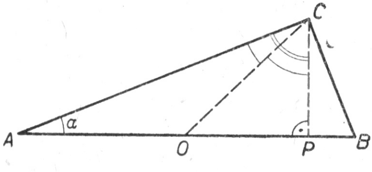
MN je hľadaná priamka $p \parallel BC$, ktorá má s úsečkou AB spoločný bod X a s úsečkou AC spoločný bod Y. Táto konštrukcia je zrejme správna.

III. Diskusia. Priamka AA' je dotyčnicou kružnice k v bode A'; každá iná priamka prechádzajúca bodom A' je sečnicou kružnice k. Teda priamka $A'B'$ je sečnicou kružnice k (priamky $A'B'$, AA' sú iste navzájom rozdielne). Preto na priamke $A'B'$ okrem bodu A' leží ešte druhý priesečník s kružnicou k; je to zrejme hľadaný bod $M \neq A'$. Tým sme dokázali, že úloha má vždy práve jedno riešenie.

16. Buď dán pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě AB, ve kterém platí $BC < AC$. Označte P patu kolmice vedené bodem C k přímce AB; dále označte O střed úsečky AB a $\sphericalangle CAB = \alpha$.

a) Body na přímce AB leží v pořádku A, O, P, B; dokažte.

b) Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle OCP$ pomocí velikosti úhlu α.



Obr. 60.

Řešení. a) Protože oba úhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ jsou ostré, padne pata P kolmice, vedené bodem C k přímce AB, dovnitř úsečky AB (obr. 60).

Protože je $BC < AC$, platí o příslušných protějších úhlech k těmto stranám trojúhelníka ABC, že

$$\alpha < \sphericalangle ABC . \tag{1}$$

Přitom platí (ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC)

$$\sphericalangle ABC = 90° - \alpha\,. \tag{2}$$

Z trojúhelníka ACP, v němž je při vrcholu P pravý úhel, vypočteme velikost úhlu $\sphericalangle ACP$; platí

$$\sphericalangle ACP = 90° - \alpha\,. \tag{3}$$

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem (2), vidíme, že platí

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC;$$

podle vztahu (1) odtud plyne, že

$$\alpha < \sphericalangle ACP\,. \tag{4}$$

Je známo, že střed O přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC je středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané; proto je $OB = OA = OC$. Z toho plyne, že trojúhelník OAC je rovnoramenný (se základnou AC). Proto úhly při jeho základně AC jsou shodné; platí tedy

$$\sphericalangle ACO = \alpha\,. \tag{5}$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (4), dostaneme

$$\sphericalangle ACO < \sphericalangle ACP\,.$$

Protože však oba tyto úhly se společným ramenem AC leží v téže polorovině vyťaté přímkou AC, padne polopřímka CO (až na svůj počátek C) dovnitř úhlu $\sphericalangle ACP$. Z toho plyne, že body na úsečce AB leží v pořádku A, O, P, B. To jsme měli dokázat.

b) Z předchozího odstavce a) plyne, že

$$\sphericalangle OCP = \sphericalangle ACP - \sphericalangle ACO\,.$$

Dosaďme sem ze vztahů (3), (5) za úhly $\sphericalangle ACP$, $\sphericalangle ACO$; dostaneme

$$\sphericalangle OCP = 90° - \alpha - \alpha$$

neboli

$$\sphericalangle OCP = 90° - 2\alpha \,.$$

Tím jsme vypočítali velikost úhlu $\sphericalangle OCP$ pomocí velikosti úhlu α, což bylo naším úkolem.

9. Úlohy II. kola kategorie D.

1. Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = 6\frac{3}{5}$ cm, $BC = 4\frac{2}{3}$ cm; označte F střed strany AB. Výpočtem řešte úlohu:

Na polopřímce BC určete bod X takový, aby obsah trojúhelníka AFX byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníka $ABCD$. (Vypočtěte velikost x úsečky BX.)

Řešení (obr. 61). Obsah P obdélníka $ABCD$ je (v cm²)

$$P = 6\frac{3}{5}\cdot 4\frac{2}{3}\,.$$

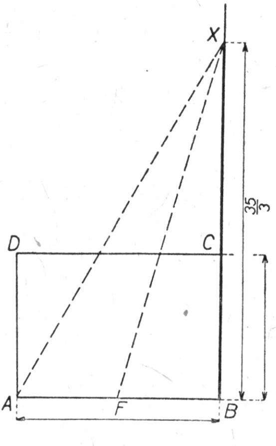
$\frac{5}{8}$ obsahu P je

$$6\frac{3}{5}\cdot 4\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\,. \qquad (1)$$

Trojúhelník AFX má stranu

$$AF = 6\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} \qquad (2)$$

a velikost příslušné výšky v centimetrech označíme x; obsah tohoto trojúhelníka je (v cm²)



Obr. 61.

$$\frac{1}{2}\cdot AF\cdot x\,.$$

Dosaďme sem za AF ze vztahu (2); dostaneme

$$\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x\,.$$

Toto číslo má být rovno číslu (1); tím dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3}\,.$$

Znásobme tuto rovnici číslem převráceným k číslu $\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$; pak se na pravé straně zkrátí $6\frac{3}{5}$ a dostaneme

$$x = \frac{5}{8} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 4\,;$$

odtud postupně dostáváme

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3},$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3},$$

$$x = \frac{35}{3},$$

$$x = 11\frac{2}{3}\,.$$

Velikost úsečky BX je $11\frac{2}{3}$ cm.

Zkouška. Obsah T trojúhelníka AFX je (v cm^2)

$$T = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11\frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 33 \cdot 1 \cdot 35}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{4}\,.$$

Obsah P obdélníka $ABCD$ je (v cm^2)

$$P = 6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{33 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{11 \cdot 14}{5}.$$

$\frac{5}{8}$ obsahu P je

$$\frac{11 \cdot 14}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11 \cdot 7}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{77}{4},$$

což je rovno číslu T.

2. Číslovanie stránok učebnice matematiky pre 6. ročník sa začína číslom 5 a končí sa číslom 272. Podobne v učebnici pre 7. ročník sa začína číslovanie stránok číslom 3 a končí sa číslom 320; v učebnici pre 8. ročník začína sa číslovanie číslom 3 a končí sa číslom 255.

Koľko cifier by sme museli napísať, keby sme chceli znova všetky uvedené strany rovnakým spôsobom očíslovať vo všetkých troch učebniciach?

Riešenie. V učebnici M6 je očíslované číslom:

a) jednociferným	5 strán, k čomu treba	5	cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180	„ ,
c) trojciferným	173 „ „ „ „	519	„ .

V učebnici M7 je očíslované číslom:

a) jednociferným	7 strán, k čomu treba	7	cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180	„ ,
c) trojciferným	221 „ „ „ „	663	„ .

V učebnici M8 je očíslované číslom:

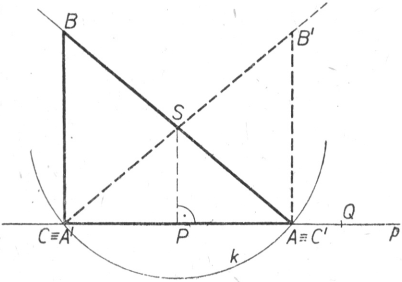
a) jednociferným	7 strán, k čomu treba	7	cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180	„ ,
c) trojciferným	156 „ „ „ „	468	„ .

To je celkom 2209 cifier.

Na očíslovanie uvedených strán v spomínaných troch učebniciach treba 2209 cifier.

3. Dané sú dva rôzne body S, P, kde SP sa rovná 31 mm; bod S je stredom prepony AB a bod P je stredom odvesny AC pravouhlého trojuholníka ABC. Zostrojte tento trojuholník, ak je $AB = 98$ mm.

Dokážte, že úloha má riešenie len vtedy, keď je úsečka SP kratšia než polovica prepony AB.



Obr. 62.

Riešenie (obr. 62). Rozbor. Úsečka SP je strednou priečkou trojuholníka ABC, a preto je $SP \parallel BC$. Z toho vyplýva, že

$$\sphericalangle BCP + \sphericalangle CPS = 180° \tag{1}$$

(priľahlé uhly). Pretože $\sphericalangle BCP = 90°$ (pravý uhol trojuholníka ABC), vyplýva zo vzťahu (1)

$$\sphericalangle CPS = 90° .$$

Trojuholník ASP je teda pravouhlý (pravý uhol je pri vrchole P); poznáme v ňom preponu $SA = \frac{1}{2}AB$ a odvesnu SP. Môžme ho teda zostrojiť (veta Ssu pre pravouhlý trojuholník).

Konštrukcia. Zostrojíme úsečku $SP = 31$ mm. V bode P zostrojíme kolmicu p k priamke SP a zvolíme jednu z oboch opačných polpriamok, na ktoré rozdeľuje bod P priamku p; označme ju PQ. Na polpriamke PQ bude ležať bod A. Zostrojíme ho takto: okolo bodu S opíšeme kružnicu k s polomerom

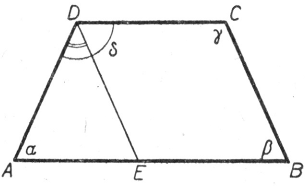
$\frac{1}{2}AB$. Spoločný bod polpriamky PQ a kružnice k je hľadaný bod A.

Bod B leží na polpriamke opačnej k polpriamke SA; zostrojíme ho tak, že na túto polpriamku nanesieme úsečku $SB = SA$. Bod C leží na polpriamke opačnej k polpriamke PA; zostrojíme ho tak, že na túto polpriamku nanesieme úsečku $PC = PA$.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Podľa urobenej konštrukcie je trojuholník ASP pravouhlý ($\sphericalangle P = 90°$). Ďalej je podľa našej konštrukcie SP strednou priečkou trojuholníka ABC, a preto je $BC \| SP$. Stade ľahko dokážeme (podobne ako v rozbore), že uhol $\sphericalangle BCA = 90°$. Preto trojuholník ABC má všetky vlastnosti, ktoré požaduje úloha.

Diskusia. Úloha má riešenie, keď kružnica k a priamka p majú spoločný bod rozdielny od bodu P, t. j. keď priamka p má s kružnicou k dva rôzne spoločné body A, A' (platí $PA = PA'$). To nastane vtedy, keď je $SP < \frac{1}{2} \cdot AB$, čo je v danej úlohe splnené. Potom má úloha dve rôzne riešenia. Oba trojuholníky ABC, $A'B'C'$ sú navzájom súmerne združené podľa priamky SP.

4. Načrtněte libovolný lichoběžník $ABCD$ o základnách $AB \| CD$ tak, aby základna AB byla větší než základna CD.



Obr. 63.

Dokažte, že součet úhlů lichoběžníka při základně CD je větší než součet úhlů při základně AB.

Řešení (obr. 63). Označme po řadě α, β, γ, δ úhly lichoběžníka $ABCD$ při jeho vrcholech A, B, C, D. Především platí

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 360° \qquad (1)$$

(součet úhlů čtyrúhelníka).

Na polopřímku BA naneseme úsečku CD; dostaneme úsečku $BE = CD$ (bod E leží uvnitř úsečky AB, neboť je $AB > CD$ a tedy též $AB > BE$). Čtyrúhelník $EBCD$ je rovnoběžník, neboť je $EB = DC$, $EB \parallel DC$, a proto je

$$\sphericalangle EDC + \gamma = 180° \text{ (úhly přilehlé).} \qquad (2)$$

Protože polopřímka DE dělí úhel δ ve dva úhly styčné, je

$$\sphericalangle EDC < \delta .$$

Proto když ve vztahu (2) nahradíme úhel $\sphericalangle EDC$ úhlem δ, dostaneme

$$\delta + \gamma > 180° . \qquad (3)$$

Ze vztahu (1) a z výsledku (3) snadno usoudíme, že

$$\alpha + \beta < 180° .$$

Je tedy skutečně

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta ,$$

což jsme měli dokázat.