01. ročník matematické olympiády

4. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 01. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1951/52. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1953. pp. 21–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404417

4. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

A. ÚLOHY I. KOLA, KATEGORIE A

1. Jaký vztah platí mezi úhly α, β, γ, platí-li

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$,

b) $\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha \,.\, \operatorname{tg}2\beta \,.\, \operatorname{tg}2\gamma$?

Řešení. a) Daný vztah lze postupně upravovati takto:

$$2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + 2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma =$$
$$= 2\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma =$$
$$= \left[\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\cos\frac{1}{2}\gamma;$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \cos\frac{1}{2}\gamma\right] +$$
$$+ \cos\frac{1}{2}\gamma\left[\sin\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] = 0;$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin\frac{1}{2}(\pi-\gamma)\right] +$$
$$+ \cos\frac{1}{2}\gamma\left[\cos\frac{1}{2}(\pi-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] = 0;$$

$$2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)+$$

$$+2\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)=0;$$

$$\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)\right]=0.$$

Tomu lze vyhovět, když:

(1) buď

$$\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)=0,\ \text{t. j. když}\ \alpha+\beta+\gamma=(4k+1)\pi,$$

kde k je libovolné číslo celé ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$),

(2) nebo když

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)+$$

$$+\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{4}(\pi+\alpha+\beta-\gamma)=0.$$

Tento vztah lze upravit takto:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)-\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\right]+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{1}{2}\gamma\left[\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)+\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\right]\right\}=0,$$

$$\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}\gamma\right]-$$

$$-\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}\gamma\right]=0,$$

takže

$$\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma)-$$
$$-\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{4}(-\alpha+\beta+\gamma)=0.$$

Nalezený vztah nelze rozřešit prostředky školské matematiky. Lze však udat některá částečná řešení. Vztahu vyhovíme třeba tak, že položíme $-\alpha+\beta+\gamma=\pi$; daný vztah pak přejde ve tvar

$$\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma)-$$
$$-\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta+\gamma)=0,$$

čili $\cos\frac{1}{2}\alpha=0$. Odtud plyne $\alpha=(2k-1)\pi$, kde k je celé,

takže $\beta+\gamma=2k\pi$. Podobně bychom dostali částečné řešení

$$\alpha+\gamma=2k\pi,\ \beta=(2k-1)\pi \text{ nebo } \alpha+\beta=2k\pi,\ \gamma=$$
$$=(2k-1)\pi.$$

b) Daný vztah má význam, když

$$2\alpha\neq\frac{1}{2}\pi+l\pi,\quad 2\beta\neq\frac{1}{2}\pi+m\pi,\quad 2\gamma\neq\frac{1}{2}\pi+n\pi, \tag{1}$$

kde l, m, n jsou celá čísla. Je vždy $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\neq1$. Kdyby totiž $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta=1$, pak by z daného vztahu plynulo $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\gamma$, čili $\operatorname{tg}^2 2\alpha=-1$, což není možné. Lze tedy psát

$$\operatorname{tg}2\gamma=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta-1}=-\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta),$$

čili

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = k\pi, \tag{2}$$

kde k je celé číslo.

Protože postup lze obrátit, máme výsledek: danému vztahu je vyhověno právě tehdy, je-li (za předpokladu (1)) vyhověno (2).

2. Jsou-li p_1, p_2, q_1, q_2 reálná čísla a je-li $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, pak aspoň jedna z rovnic

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$
$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

má reálné kořeny. Dokažte!

Řešení. Kdyby měly obě rovnice kořeny imaginární, bylo by

$$p_1^2 - 4q_1 < 0,\ p_2^2 - 4q_2 < 0, \text{ čili } p_1^2 < 4q_1,\ p_2^2 < 4q_2.$$

Pak by bylo $p_1^2 + p_2^2 < 4(q_1 + q_2)$ a vzhledem k podmínce dané v úloze by bylo také

$$p_1^2 + p_2^2 < 2p_1p_2, \text{ čili } (p_1 - p_2)^2 < 0,$$

což je nemožné, neboť p_1, p_2 jsou reálná čísla.

3. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček AB, AC, BD, CD a přímky $p \parallel AC$, $q \parallel BD$. Proveďte diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že jsme nalezli řešení. Pak posunutí, které převede bod D v bod C, nechť převede bod B v bod B'. Bod B' nesplyne s bodem C (jinak by bylo $B \equiv D$) a neleží na přímce AC mimo bod C (jinak by bylo $AC \equiv CB' \parallel DB$; avšak úhlopříčky nejsou v žádném čtyřúhelníku vypuklém ani nevypuklém rovnoběžné). Body A, C, B'

tvoří tedy trojúhelník, v němž jsou známy směry dvou stran $AC \parallel p$, $CB' \parallel BD \parallel q$ a jejich velikosti $\overline{AC}$, $\overline{CB'} = \overline{BD}$.

Konstrukce je tedy tato: zvolíme bod C, jím vedeme přímky $p' \parallel p$, $q' \parallel q$. Bod C rozdělí přímku p' na dvě polopřímky: vybereme jednu z nich a označíme ji CX. Bod C rozdělí přímku q' na dvě polopřímky: vybereme jednu z nich a označíme ji CY. Na polopřímkách CX, CY sestrojíme body A, B' tak, aby úsečka CA měla předepsanou velikost a aby bylo $\overline{CB'} = \overline{BD}$. Sestrojíme dále bod B tak, aby úsečka AB měla předepsanou velikost a aby bylo $\overline{BB'} = \overline{CD}$. Konečně sestrojíme bod D tak, aby bylo $B'C \upuparrows BD$ a $\overline{B'C} = \overline{BD}$. Úloha je řešitelná, jsou-li splněny tyto předpoklady:

1. Lze sestrojit bod B, t. j. $|\overline{AB} - \overline{CD}| \leqq \overline{AB'} \leqq \overline{AB} + \overline{CD}$.

2. Trojice bodů A, B, C; B, C, D; C, D, A; D, A, B neleží v přímce.

Úloha má nejvýše čtyři řešení, neboť vyjdeme-li z polopřímek CX, CY, dostaneme nejvýše dvě řešení (dva trojúhelníky $AB'B$ souměrně sdružené podle přímky AB'), vyjdeme-li z polopřímek CX' a CY' opačných k CX, CY, dostaneme opět nejvýše dvě řešení.

CX, CY'; CX' 2.

4. Jsou dány dvě různoběžky p, p' a na nich dva různé body A, A' (A na p, A' na p'). Určete bod M na přímce p a bod M' na přímce p' tak, aby bylo $\overline{AM} = \overline{A'M'}$ a aby úsečka MM' měla danou velikost d. Proveďte diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že jsme nalezli řešení a že $M \neq A$. Posunutí, které převádí bod M' v bod A', převede bod A v bod, který označíme M'', a bod M v bod, který označíme M_0. Protože podle předpokladu je $\overline{A'M''} = \overline{AM}$ a úsečky AM'' a MM_0 jsou shodné a souhlasně rovnoběžné délky $A'M'$, je AMM_0M'' kosočtverec.

Proto leží bod M_0 na jedné z os přímek p, $p'' \equiv AM''$. Úsečky $M'A'$ a MM_0 jsou rovněž shodné a souhlasně rovnoběžné, tedy $\overline{MM'} = \overline{M_0A'} = d$, takže bod M_0 leží na kružnici se středem v A' a poloměrem d.

Z tohoto rozboru plyne konstrukce:

Při daných různoběžkách p, p', bodech A, A' na p, p' a délce d sestrojíme nejprve bodem A přímku p'' rovnoběžnou s přímkou p. Sestrojíme dále osy o_1, o_2 přímek p a p'' a kružnici $k \equiv (A', d)$. Každému průsečíku M_0 kružnice k s jednou z os o_1, o_2 odpovídá právě jedno řešení úlohy, jak vyplývá z obrácení postupu.

1. Je-li $M_0 \not\equiv A$, sestrojíme bodem M_0 rovnoběžku q s přímkou p', která protne p v bodě, který označíme M. Je $M \not\equiv M_0$. Posunutí, které převede bod M_0 v bod M, převede bod A' v bod $M' \not\equiv A'$, který leží na p' a pro který vskutku platí $\overline{A'M'} = (\overline{M_0M} =) \overline{AM}$, $\overline{M'M} = \overline{A'M_0} = d$. Že ke každému ze sestrojených bodů M_0 existuje právě jeden bod M a jeden bod M', vyplývá z úvodního rozboru.

2. Je-li $M_0 \equiv A$, je jedno řešení $M \equiv A$, $M' \equiv A'$. Další řešení dostaneme jako v případě 1.

Existují tedy nejvýše čtyři řešení podle toho, kolik je průsečíků kružnice k s dvojicí os o_1, o_2.

5. Buď n přirozené číslo a $x_1, x_2, \dots x_n$ čísla reálná. Dokažte, že když platí

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

pak je nutně $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Řešení. Daný vztah lze přepsat ve tvaru

$$nx_1^2 + nx_2^2 + \dots + nx_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \\ + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n,$$

při čemž každé číslo x_i se vyskytuje právě v $n - 1$ součinech $2x_ix_k$. Lze tedy psát

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 0,$$

a to lze splnit jen tehdy, jsou-li všecky rozdíly v závorkách rovny nule, t. j. je-li

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

6. Dokažte, že pro každé reálné x, y, z platí

$$x + y + z \leqq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení. Jsou-li x, y, z, reálná čísla, vždy platí

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqq 0.$$

Odtud plyne

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz - 2zx + 2z^2 \geqq 0,$$

čili

$$(x + y + z)^2 \leqq 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

a pak

$$|x + y + z| \leqq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)},$$

a tedy tím spíše

$$x + y + z \leqq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Rovnost nastane, je-li $x = y = z \geqq 0$.

7. Úsečka AB velikosti d se pohybuje tak, že její krajní body zůstávají na dvou pevných navzájem kolmých přímkách. Co vyplní při tom bod X přímky AB, jehož dělicí poměr (ABX) je roven danému číslu $\lambda \neq 0; 1$? Může být křivka opsaná bodem X kružnice? Jsou mezi křivkami opsanými bodem X dvě podobné nebo shodné?

Řešení. Dané dvě navzájem kolmé přímky zvolíme za osy souřadnic; bod A nechť leží na ose x, bod B na ose y a jejich souřadnice buďte $A \equiv [x_1; 0]$, $B \equiv [0; y_2]$. Z podmínek naší úlohy vyplývá jednak:

$$x_1^2 + y_2^2 = d^2, \tag{1}$$

jednak vztah pro bod $X \equiv [x; y]$:

$$x = \frac{x_1}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{-\lambda y_2}{1-\lambda}. \tag{1'}$$

Odtud plyne $x_1 = (1 - \lambda)x$, $y_2 = -\frac{1}{\lambda}(1 - \lambda)y$. Dosadíme-li za x_1, y_2 do rovnice (1), vyjde po úpravě

$$\frac{(1-\lambda)^2}{d^2}x^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{d^2\lambda^2}y^2 = 1. \tag{2}$$

Každý bod X leží tedy na elipse o rovnici (2). Obráceně, je-li $[x; y]$ libovolný bod této elipsy, určíme čísla $x_1 = (1 - \lambda)x$ a $y_2 = -\frac{1}{\lambda}(1 - \lambda)y$. Použijeme-li rovnice (2), dostaneme, že mezi čísly x_1, y_2 platí rovnice (1). To znamená, že vzdálenost bodů $[x_1; 0]$, $[0; y_2]$ je d; mimo to jsou splněny rovnice (1'), t. j. bod $[x, y]$ má vzhledem k bodům $[x_1; 0]$, $[0; y_2]$ dělicí poměr λ, a náleží tudíž mezi hledané body X. Proto je elipsa (2) geometrickým místem všech bodů X.

Elipsa (2) je kružnicí tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{(1-\lambda)^2}{d^2} = \frac{(1-\lambda)^2}{d^2\lambda^2},$$

čili $1 = \frac{1}{\lambda^2}$, t. j. $\lambda = -1$ (je totiž $\lambda \neq 1$).

Bod X je pak středem úsečky AB.

Vyšetřeme, kterým λ odpovídají elipsy podobné, resp. shodné, předpokládáme-li d pevně zvolené. Pro dvě hodnoty $\lambda_1 = \lambda_2$ dostaneme dvě elipsy totožné, jak plyne z rovnice (2). Nechť je tedy $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Aby dvě elipsy, odpovídající hodnotám λ_1, λ_2 byly podobné, musí být úměrné jejich poloosy a tedy také čtverce těchto poloos, t. j. musí platit

$$\frac{d^2}{(1-\lambda_1)^2} : \frac{d^2\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2} = \frac{d^2}{(1-\lambda_2)^2} : \frac{d^2\lambda_2^2}{(1-\lambda_2)^2}, \tag{3}$$

nebo

$$\frac{d^2}{(1-\lambda_1)^2} : \frac{d^2\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2} = \frac{d^2\lambda_2^2}{(1-\lambda_2)^2} : \frac{d^2}{(1-\lambda_2)^2}. \tag{3'}$$

Za našeho předpokladu $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$ je rovnice (3) ekvivalentní s rovnicí

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2, \tag{4}$$

rovnice (3′) s rovnicí

$$(\lambda_1\lambda_2)^2 = 1. \tag{4'}$$

1. Platí-li (4), musí být $\lambda_1 = -\lambda_2$ (neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2$), a tedy $|\lambda_1| \neq 1$. V tomto případě jde o podobnost, neboť koeficient úměrnosti je $\left|\dfrac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}\right| \neq 1$. Kdyby totiž bylo $\left|\dfrac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}\right| = 1$, bylo by $(1-\lambda_1)^2 = (1+\lambda_1)^2$, t. j. $\lambda_1 = 0$, a to je spor, takže shodnost je vyloučena.

2. Bude-li platit rovnice (4′), mohou nastat dva případy:

a) $\lambda_1\lambda_2 = 1$, pak je nutně $|\lambda_1| \neq 1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, $\lambda_2 \neq 0$ a můžeme psát $\lambda_1 = \dfrac{1}{\lambda_2}$. Koeficient úměrnosti je

$$\left|\frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2}\right| = \left|\frac{\lambda_2-\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\right| = \left|\frac{\lambda_2-1}{1-\lambda_2}\right| = 1,$$

takže jde o shodnost.

b) $\lambda_1\lambda_2 = -1$ ($|\lambda_1| \neq 1$, $\lambda_2 \neq 0$), pak je $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\lambda_2}$.

Koeficient úměrnosti je

$$\left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\right| = \left|\frac{\lambda_2+1}{1-\lambda_2}\right| \neq 1,$$

neboť $\lambda_2 \neq 0$.

Shodnost je tedy vyloučena a jde o podobnost.

Dostáváme tedy podobnost pro případy

$$\lambda_1 = -\lambda_2, \qquad |\lambda_1| \neq 0; 1,$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2}, \qquad |\lambda_1| \neq 0; 1,$$

a shodnost v případě

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \qquad |\lambda_1| \neq 0; 1.$$

8. Soustava čtverců má tuto vlastnost:

Jeden vrchol každého čtverce leží na přímce p, druhý na přímce q a třetí na přímce r.

Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců soustavy leží také na přímce.

Užitím předchozího výsledku sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol A leží na dané přímce a, vrchol B na dané přímce b, vrchol C na dané přímce c a vrchol D na dané přímce d. Diskuse.

Řešení. Prvou část úlohy budeme řešit v poněkud precisnější formulaci (viz dále Úloha 1). Nejprve však zavedeme tyto úmluvy:

Všechny vyšetřované geometrické útvary leží v pevné dané rovině, v níž je určen kladný smysl otáčení. Tuto rovinu vezmeme za souřadnicovou rovinu o osách x, y (kladný směr osy y vznikne z kladného směru osy x otočením o $+90°$).

Souřadnice bodu A budeme značit x_A a y_A a budeme psát $A = [x_A, y_A]$. Smluvíme se dále na tomto označení:

1. Jsou-li A, B dva body a λ číslo reálné, budeme znakem $A + B$ značit bod $[x_A + x_B, y_A + y_B]$ a znakem λA bod $[\lambda x_A, \lambda y_A]$. Místo $(-1) A$ budeme stručně psát $-A$.

2. Je-li A bod v naší rovině, budeme znakem A^* značit bod, který vznikne z bodu A otočením o $+90°$ kolem počátku, tedy $A^* = [-y_A, x_A]$. Snadno nahlédneme, že

$$(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^*$$

(jsou-li A, B body a λ, μ reálná čísla).

3. Jestliže bod A leží na přímce a, budeme stručně psát

$$A \varepsilon a.$$

Jsou-li p, q dvě přímky, bude úhel $\sphericalangle pq$ značit úhel, o který je nutno otočit přímku p, abychom dostali přímku rovnoběžnou s přímkou q. Tento úhel je určen až na celistvý násobek $180°$. Jsou-li dány čtyři body A, B, C, D, budeme říkat, že *tvoří čtverec* (A, B, C, D) (kladně orientovaný), když A, B, C, D jsou vrcholy čtverce o stranách AB, BC, CD, DA a když strana AD vznikne ze strany AB otočením o $90°$ (kladně) kolem bodu A.*)

Věta 1. Čtyři body A, B, C, D tvoří čtverec tehdy a jen tehdy, když

$$C - B = (B - A)^*, \tag{1}$$

$$B - A = C - D. \tag{2}$$

Věta 2. Buďtež (A, B, C, D), (A', B', C', D') dva čtverce. Nechť ze vztahů $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$ jsou splněny alespoň dva. Pak jsou splněny i vztahy zbývající.

Věty 1 a 2 jsou zřejmé.

---

*) Za čtverec pokládáme i útvar vytvořený čtyřmi splývajícími body.

Úloha 1. Jsou dány tři přímky a, b, c. Vyšetřte, co je soubor d vrcholů D čtverců (A, B, C, D), kde $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$. Proveďte diskusi.

Řešení. 1. Nechť $\sphericalangle ab = 45°$, $\sphericalangle bc = 45°$ a nechť přímky a, b, c se neprotínají v jednom bodě. Potom neexistuje čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$.

2. V každém jiném případě je d přímka.

Abychom mohli dokázat řešení úlohy 1, odvodíme si pět pomocných vět číslovaných I až V.

I. Nechť přímky a, c nejsou kolmé. Pak pro každé $B \varepsilon b$ *existuje právě jeden* čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a$, $C \varepsilon c$.

Důkaz existence. Budiž y soubor bodů $Y = B + (X - B)^*$, kde X probíhá body přímky c (to znamená, že y je přímka, která vznikne z přímky c otočením o $90°$ kolem bodu B). Je tedy y přímka kolmá k c, tedy y není rovnoběžná s a. Přímky y a a protínají se tedy v jistém bodě A. Určeme bod C vztahem*) $A = B + (C - B)^*$. Je tedy $C \varepsilon c$, $A \varepsilon a$.
Určeme ještě bod D vztahem (2) z věty 1. Tvoří tedy body (A, B, C, D) podle této věty čtverce.

Důkaz unicity. Buďtež (A, B, C, D), (A', B', C', D') dva různé čtverce takové, že A, $A' \varepsilon a$; C, $C' \varepsilon c$. Podle věty 2 je $A \neq A'$, $C \neq C'$.

Podle věty 1 je

$$C - B = (B - A)^*,$$

$$C' - B = (B - A')^*,$$

---

*) To tedy znamená
$$x_A = x_B - y_C + y_B,$$
$$y_A = y_B + x_C - x_B,$$
čili
$$x_C = x_B - (y_B - y_A),$$
$$y_C = y_B + (x_B - x_A),$$
takže $C - B = (B - A)^*$.

a tedy $C - C' = (A' - A)^*$. Vznikne tedy vektor $\overline{C'C}$ z vektoru $\overline{AA'}$ otočením o $90°$; ježto oba vektory jsou nenulové a ježto první leží na přímce c a druhý na a, jsou přímky a a c k sobě kolmé, což je spor.

II. Nechť a není kolmé k c. Buďtež (A_1, B_1, C_1, D_1) a (A_2, B_2, C_2, D_2) dva čtverce takové, že $A_1, A_2 \varepsilon a$, $B_1, B_2 \varepsilon b$, $C_1, C_2 \varepsilon c$, při čemž $B_1 \neq B_2$ (takové čtverce podle I existují). Pak $D_1 \neq D_2$.

Důkaz. Předpokládejme, že $D_1 = D_2$. Pak je $A_1 \neq A_2$, $C_1 \neq C_2$ (jinak by podle věty 2 bylo $B_1 = B_2$). Dle věty 1 je

$$C_1 - D_1 \overset{(2)}{=} B_1 - A_1 \overset{(1)}{=} -(C_1 - B_1)^* \overset{(2)}{=} -(D_1 - A_1)^*;$$

(čísla v závorkách nad rovnítky značí odkazy na vztahy (1) a (2) z věty 1).

Tedy $C_1 - D_1 = (A_1 - D_1)^*$ a podobně $C_2 - D_2 = (A_2 - D_2)^*$. Ježto $D_1 = D_2$, dostaneme odečtením $C_1 - C_2 = (A_1 - A_2)^*$. Ježto $C_1, C_2 \varepsilon c$, $A_1, A_2 \varepsilon a$, $C_1 \neq C_2$, $A_1 \neq A_2$, jsou přímky c a a k sobě kolmé, což je spor.

III. Nechť a není kolmé k c. Budiž d' přímka spojující body D_1, D_2 z věty II (je $D_1 \neq D_2$). Pro libovolné reálné λ budiž $A = A(\lambda) = A_1 + \lambda(A_2 - A_1)$, $C = C(\lambda) = C_1 + \lambda(C_2 - C_1)$, $B = B(\lambda) = B_1 + \lambda(B_2 - B_1)$, $D = D(\lambda) = D_1 + \lambda(D_2 - D_1)$. Pak $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d'$ a body (A, B, C, D) tvoří čtverec.

Důkaz. Z věty 1 plyne

$$C_1 - B_1 = (B_1 - A_1)^*,$$
$$C_2 - B_2 = (B_2 - A_2)^*.$$

Znásobíme první rovnici číslem $1 - \lambda$, druhou číslem λ a sečteme je; dostaneme $C - B = (B - A)^*$. Dále plyne z věty 1

$$B_1 - A_1 = C_1 - D_1,$$
$$B_2 - A_2 = C_2 - D_2.$$

Znásobíme opět první rovnici číslem $1 - \lambda$, druhou číslem λ a sečteme je; dostaneme $B - A = C - D$.

Body (A, B, C, D) tvoří tedy čtverec. Ostatní je zřejmé.

IV. Předpoklady stejné jako v III. Pak $d' = d$.

Důkaz. α) Budiž $D \varepsilon d$. Pak existuje čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$. Zvolme reálné λ tak, aby $B(\lambda) = B$ (to lze, ježto $B_1 \neq B_2$); podle III je $\big(A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda) D(\lambda)\big)$ čtverec, pro který $A(\lambda) \varepsilon a$, $B(\lambda) \varepsilon b$, $C(\lambda) \varepsilon c$ a přitom $B(\lambda) = B$. Podle I je tedy $D(\lambda) = D$. Avšak podle III je $D(\lambda) \varepsilon d'$. Tedy $D \varepsilon d'$.

β) Budiž $D \varepsilon d'$. Zvolme reálné λ tak, aby $D(\lambda) = D$ (to lze, ježto $D_1 \neq D_2$). Podle III je $\big(A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)\big)$, čtverec a $A(\lambda) \varepsilon a$, $B(\lambda) \varepsilon b$, $C(\lambda) \varepsilon c$, tedy $D(\lambda) \varepsilon d$. Avšak $D = D(\lambda)$, tedy $D \varepsilon d$.

V. Nechť nyní přímky a, c jsou k sobě kolmé. Zvolme přímku a za přímku $x = y$, přímku c za přímku $x = -y$. Budiž p přímka $x = 0$ a q přímka $y = 0$ (je tedy úhel $\sphericalangle ap = 45°$, $\sphericalangle aq = 135°$).

α) Je-li (A, B, C, D) čtverec, pro který $A \varepsilon a$, $C \varepsilon c$, je $B \varepsilon p$, $D \varepsilon q$.

Důkaz. Vrchol B, resp. D dostaneme, otočíme-li vrchol A, resp. C kolem středu $S = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C$ čtverce (A, B, C, D) o $+90°$, tedy

$$B = S + (A - S)^*, \quad D = S + (C - S)^*,$$

a dále

$$x_B = x_S - y_A + y_S = \frac{1}{2} x_A + \frac{1}{2} x_C - y_A + \frac{1}{2} y_A + \frac{1}{2} y_C = 0,$$

neboť $x_A = y_A$, $x_C = -y_C$, $y_D = y_S + x_C - x_S = \frac{1}{2} y_A + \frac{1}{2} y_C + x_C - \frac{1}{2} x_A - \frac{1}{2} x_C = 0$ z téhož důvodu. Je tedy $D \varepsilon q$.

β) Budiž $B \varepsilon p$, $D \varepsilon q$. Potom zřejmě existuje čtverec (A, B, C, D). Je pak $A \varepsilon a$, $C \varepsilon c$.

Důkaz. Podle věty Vα), aplikujeme-li ji na čtverec (B, C, D, A), leží (ježto $p \perp q$) bod C, resp. A, na přímce, která vznikne z p, resp. q otočením o $45°$ kolem společného průsečíku (tedy kolem počátku); je tedy $C \varepsilon c$, $A \varepsilon a$.

Důkaz vlastního řešení. Bod 1. Je $a \perp c$. Pak $b \parallel p$ (viz větu V), $b \neq p$. Množiny b, p nemají žádný společný bod, tedy podle Vα) neexistuje čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$.

Bod 2. Případ α). $a \perp c$. Pak $d = q$.

Důkaz. Nechť $D \varepsilon d$. Existuje tedy čtverec (A, B, C, D) tak, že $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, tedy podle Vα) je $D \varepsilon q$.

Nechť $D \varepsilon q$. Budiž B společný bod přímek p a b. Pak pro čtverec (A, B, C, D) dle Vβ) platí $A \varepsilon a$, $C \varepsilon c$, tedy $D \varepsilon d$.

Případ β). a není kolmé k c. Pak podle IV je $d = d'$.

Poznámka. Z důkazu plyne ihned konstrukce přímky d, pokud existuje. V případě, že a není kolmé k c, vypadá tato konstrukce takto: Zvolme na přímce b dva různé body B_1, B_2. Otočme přímku c kolem B_i $(i = 1,2)$ o $90°$. Otočená přímka protne přímku a v bodě A_1, resp. A_2. Sestrojme čtverec (A_i, B_i, C_i, D_i) pro $i = 1,2$. Body D_1, D_2 jsou různé a jejich spojnice je přímka d.

V případě, že $a \perp c$, je d přímka vzniklá z c otočením o $45°$ kolem průsečíku přímek a, c.

Úloha 2. Buďtež dány čtyři přímky a, b, c, d. Sestrojit čtverec (A, B, C, D) tak, aby $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d$.

Řešení. I. Čtverec (A, B, C, D) kladně orientovaný.

Případ 1. Alespoň jedna z dvojic přímek a, c nebo b, d představuje dvojici přímek navzájem kolmých. Bez újmy obecnosti lze předpokládat (cyklickou záměnou označení a, b, c, d lze toho dosáhnout), že $a \perp c$.

Definujme přímky p, q takto: Obě procházejí společným průsečíkem přímek a, c a svírají s nimi úhly: $\sphericalangle ap = \sphericalangle cq = 45°$.

Budiž $\mathbf{B}$, resp. $\mathbf{D}$ soubor společných bodů přímek b, p, resp. d, q. Pak všechny hledané čtverce (A, B, C, D) najdeme takto: Zvolíme libovolně bod D v množině $\boldsymbol{D}$ a bod B v množině $\boldsymbol{B}$ (tím jsou body A, C jednoznačně určeny).

Důkaz vyplývá ihned z vět Vα) a Vβ), uvedených v důkazu řešení předcházející úlohy.

Případ 2. Není ani $a \perp c$ ani $b \perp d$.

Podle předcházející úlohy 1 sestrojme přímku d' (viz poznámku uvedenou za předcházející úlohou).

Případ α). Přímky d' a d nemají společný bod. Potom neexistuje řešení.

Případ β). Přímky d' a d jsou totožné. Potom každý čtverec (A, B, C, D), pro který $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, je řešením.

Případ γ). Přímky d' a d mají právě jeden společný bod D. Potom existuje právě jeden hledaný čtverec (A, B, C, D). Přímku a otočíme o $90°$ kolem bodu D. Otočená přímka protne přímku c v jediném bodě C (není totiž $a \perp c$); body D, C je čtverec jednoznačně určen.

Vše okamžitě plyne z řešení úlohy 1.

II. Čtverec (A, B, C, D) záporně orientovaný.

Označíme $a = a'$, $b = d'$, $c = c'$, $d = b'$ a provedeme tutéž konstrukci jako v I. pro přímky a', b', c', d'. Určíme tím všechny čtverce (A', B', C', D') kladně orientované, pro něž $A' \varepsilon a'$, $B' \varepsilon b'$, $C' \varepsilon c'$, $D' \varepsilon d'$. Položíme-li dále $A' = A$, $B' = D$, $C' = C$, $D' = B$, dostaneme z těchto čtverců právě všechny záporně orientované čtverce (A, B, C, D), pro něž je $A \varepsilon a$, $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon d$. (Uvedené řešení je autorské. V podstatě se opírá o komplexní čísla, bylo však formálně upraveno. Názornější řešení synthetické lze podat na př. užitím stereometrie.)

9. Pro které hodnoty nezávisle proměnné x nabývá lomená lineární funkce

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{1}$$

hodnoty x? Proveďte diskusi vzhledem k různým hodnotám koeficientů a, b, c, d.

Řešení. Funkce (1) má smysl jen tehdy, není-li současně $c = d = 0$. Aby $y = x$, je nutné a stačí, aby nastal jeden z těchto případů:

$$1.\ c = 0\ (d \neq 0),\ x = \frac{1}{d}(ax + b), \tag{2}$$

nebo

$$2.\ c \neq 0,\ x \neq -\frac{d}{c}\ \text{a}\ x = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{3}$$

Případ 1. Jsou tyto možnosti:

α) $a \neq d$, pak existuje jediné x, které má hledanou vlastnost; je $x = \dfrac{b}{d - a.}$

β) $a = d$, $b \neq 0$, pak neexistuje žádné x, pro které by $x = x + \dfrac{b}{d}$, tedy ani x, vyhovující dané podmínce.

γ) $a = d$, $b = 0$, pak (2) je splněna pro každé x, takže každé x vyhovuje podmínce.

Případ 2. Z rovnice (3) a podmínky $x \neq -\dfrac{d}{c}$ plyne

$$cx^2 + (d - a)\,x - b = 0. \tag{4}$$

Označme Δ diskriminant

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc.$$

Rozlišujeme:

α) $\Delta > 0$;

pak kořeny (4) jsou

$$x_1 = \frac{1}{2c}(a - d + \sqrt{\Delta}), \qquad x_2 = \frac{1}{2c}(a - d - \sqrt{\Delta}).$$

Aby x_1, resp. x_2, vyhovovalo úloze, musí být ještě $x_1 \neq -\dfrac{d}{c}$, resp. $x_2 \neq -\dfrac{d}{c}$. To je splněno, není-li $-\dfrac{d}{c}$ kořenem rovnice (4), t. j. platí-li $\dfrac{d^2}{c} - (d - a)\dfrac{d}{c} - b \neq 0$, čili $ad - bc \neq 0$. Potom tedy existují dvě různá x_1, x_2, vyhovující úloze.

Je-li $ad - bc = 0$, je pro $x \neq -\dfrac{d}{c}$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax + \dfrac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c},$$

takže jediné x, vyhovující úloze, je $x = \dfrac{a}{c}$, pokud $\dfrac{a}{c} \neq$

$\neq -\dfrac{d}{c}$, čili $a \neq -d$. Je-li $a = -d$, neexistuje žádné takové x.

β) $\Delta = 0$;

pak $x = \dfrac{a-d}{2c}$ je jediné x, vyhovující úloze, opět pokud $\dfrac{a-d}{2c} \neq -\dfrac{d}{c}$ čili pokud $a + d \neq 0$. Je-li $a = -d$, neexistuje řešení.

γ) $\Delta < 0$;
pak neexistuje (reálné) řešení.

10. Buďte A, O, B tři různé body svislé roviny, která protne vodorovnou rovinu jdoucí bodem O v přímce KOL. Označme $\sphericalangle AOL = \alpha$, $\sphericalangle BOL = \beta$ ostré úhly a $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ dvě úsečky.

Po polopřímkách AO, BO se pohybují směrem k O body vlivem tíže zemské bez tření; jeden je bod M, jehož výchozí polohou je bod A, druhý je bod N s počáteční polohou v bodě B.

Určete čas, v němž bude přímka MN vodorovná a proveďte diskusi o existenci řešení. Body M, N se počnou pohybovat ze svých výchozích poloh současně.

Řešení. Složky zrychlení v přímkách AO, resp. BO jsou $g \sin \alpha$, resp. $g \sin \beta$. Označme s_1, resp. s_2 dráhu, kterou vykonal bod M, resp. N za t časových jednotek od počátku pohybu. Pak je (jde o pohyby rovnoměrně zrychlené):

$$s_1 = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha, \quad s_2 = \frac{g}{2} t^2 \sin \beta.$$

Výška bodu M, resp. N, nad vodorovnou rovinou v okamžiku t je $(a - s_1) \sin \alpha$, resp. $(b - s_2) \sin \beta$. Podle podmínky úlohy je nutně

$$(a - s_1) \sin \alpha = (b - s_2) \sin \beta.$$

Po dosazení za s_1 a s_2 a po úpravě vyjde

$$\frac{g}{2} t^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) = a \sin \alpha - b \sin \beta.$$

Ježto α, β jsou ostré úhly, je $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$, t. j. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $\sin \alpha = \sin \beta$, čili $\alpha = \beta$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $a \neq b$, je úloha neřešitelná, neboť přímka MN splývá stále s přímkou OAB. Je-li $\alpha = \beta$ a $a = b$, nemá úloha smysl, neboť $M \equiv N$ a přímka MN není definována.

Je-li $\alpha \neq \beta$, na př. $\alpha > \beta$, lze z rovnice (1) vypočíst příslušný čas t_0:

$$t_0^2 = \frac{2}{g} \cdot \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Úloha bude mít v tomto případě řešení tehdy a jen tehdy, jestliže t_0^2 vyjde kladné, t. j. je-li

$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} > 0;$$

protože $\sin \alpha > \sin \beta$, musí být

$$a \sin \alpha - b \sin \beta > 0. \tag{1}$$

Je ovšem třeba, aby v čase t_0 se dostaly body M, N do takových poloh, které jsou nad vodorovnou rovinou, t. j. aby platilo

$$(a - s_1) \sin \alpha > 0 \text{ nebo } (b - s_2) \sin \beta > 0,$$

kde $s_1 = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin \alpha$, $s_2 = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin \beta$. Použijeme-li na př. první nerovnosti a dosadíme za t_0^2, dostaneme

$$\left(a - \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \sin^2 \alpha\right) \sin \alpha > 0,$$

čili s použitím vztahů $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$

$$a \sin \alpha < b \sin \beta. \tag{2}$$

Úloha je tedy podle (1), (2) řešitelná tehdy, a jen tehdy, platí-li

$$\frac{b}{a} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{a}{b}.$$

11. Dokažte, že pro $n > 1$ celé platí:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Řešení. Označme

$$s_{n-1} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \tag{1}$$

pro celé $n > 1$. Pro celé $m > 1$ platí

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)}.$$

Je tedy $s_{n-1} < s'_{n-1}$, kde

$$s'_{n-1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} \tag{2}$$

pro celé $n > 1$. Ale

$$s'_{n-1} = \frac{n-1}{n}$$

podle výsledku cvič. 67b z učebnice Matematika pro 3. tř. gymnasií. Je tudíž

$$s_{n-1} < \frac{n-1}{n},$$

při čemž zlomek vpravo je pro celé $n > 1$ vždy pravý.

12. Buď $ABCD$ čtverec. Uvnitř strany AB zvolte m různých bodů a veďte jimi rovnoběžky se stranou BC. Podobně uvnitř strany BC zvolte n různých bodů a veďte jimi rovnoběžky ke straně AB.

Kolik pravoúhlých rovnoběžníků vzniklo provedenou konstrukcí?

Řešení. Dostaneme dvě soustavy rovnoběžných příček, z nichž první soustava obsahuje $m + 2$ příček (i se stranami čtverce) a druhá $n + 2$ příček. Strany každého rovnoběžníka leží ve dvou dvojicích příček; každá dvojice se skládá ze dvou různých příček téže soustavy. Obráceně, vezmeme-li dvě dvojice $p_1 || p_2$ a $q_1 || q_2$ a dvě dvojice $p'_1 || p'_2$ a $q'_1 || q'_2$ tak, aby aspoň jedna z prvních čtyř příček p_1, p_2, q_1, q_2 se nevyskytovala mezi příčkami p'_1, p'_2, q'_1, q'_2, dostaneme dva různé rovnoběžníky.

V první soustavě lze utvořit $\binom{m+2}{2}$ dvojic různých příček, v druhé soustavě $\binom{n+2}{2}$. Všech pravoúhlých čtyřúhelníků tedy je $\binom{m+2}{2} \cdot \binom{n+2}{2}$,

13. Pro která přirozená čísla n je možno zlomek $\dfrac{n^2+4n+6}{n(n^4-1)}$ vyjádřit desetinným rozvojem a) ukončeným, b) ryze periodickým, c) neryze periodickým?

Řešení. Daný zlomek má smysl pro přirozená čísla $n > 1$.

a) Čitatel není nikdy dělitelný pěti. Pro $n = 2$ je $n^2 + 4n + 6 = 18$ a každé přirozené číslo $n > 2$ lze psát ve tvaru $n = 5k + z$, kde $z = 0, \pm 1, \pm 2$ a k je přirozené, takže $n^2 + 4n + 6 = 5(5k^2 + 2kz + 4k) + z^2 + 4z + 6$. Je-li $z = 0$, vyjde při dělení pěti zbytek 1; je-li $z = 1$, vyjde rovněž zbytek 1; je-li $z = -1$ nebo $z = 2$, vyjde zbytek 3; je-li $z = -2$, vyjde zbytek 2. Naproti tomu jmenovatel je vždy násobek pěti. Pro $n = 2$ je $n(n^4 - 1) = 30$ a pro $n > 2$ je

$$n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) =$$
$$(5k + z)[5(5k^2 + 2kz) + z^2 - 1][5(5k^2 + 2kz) + z^2 + 1].$$

Je-li $z = 0$, je první činitel dělitelný pěti, je-li $z = \pm 1$, je druhý činitel dělitelný pěti, je-li $z = \pm 2$, je třetí činitel dělitelný pěti. Proto daný zlomek vede buď k rozvoji ukončenému (M III str. 43) nebo k rozvoji neryze periodickému (M III cvič. 134).

b) Jmenovatel $n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ je vždy dělitelný třemi, neboť z činitelů $n - 1, n, n + 1$ je vždy jeden dělitelný třemi. K rozvoji ukončenému může vést jen tehdy, dá-li se krátit třemi. Každé přirozené číslo $n \geqq 2$ lze napsat ve tvaru $n = 3h + z$, kde $z = 0, \pm 1$ a h je přirozené. Pro $z = 1$ však číslo $n^2 + 4n + 6 = 3(3h^2 + 6h + 3) + 2$ není dělitelné třemi; zbývají tedy případy $z = 0$ a $z = -1$.

α) Pro $z = 0$ je $\dfrac{n^2+4n+6}{n(n^4-1)} = \dfrac{3h^2 + 4h + 2}{(3h-1)h(3h+1)(9h^2+1)}$,

což pro $h = 1$ vede ke zlomku $\dfrac{9}{80} = 0{,}1125$. Je-li h tvaru $h = px$, kde p je liché prvočíslo různé od 5 a x přirozené číslo, pak prvočíslem p nelze krátit.

Je-li h tvaru $h = 2^r \cdot 5^s$, kde r a s jsou přirozená čísla, pak $3h + 1 = 3 \cdot 2^r \cdot 5^s + 1$ je liché číslo nedělitelné pěti, které obsahuje aspoň jednoho lichého prvočinitele p různého od 5. Poněvadž $3h^2 + 4h + 2 = (3h + 1)(h + 1) + 1$, nelze prvočinitelem p krátit.

Je-li dále $h = 2^r$, kde r je přirozené číslo, pak $n - 1 = 3h - 1 = 3 \cdot 2^r - 1$, $n + 1 = 3h + 1 = 3 \cdot 2^r + 1$ jsou dvě po sobě jdoucí lichá čísla nedělitelná třemi a alespoň jedno z nich není dělitelné pěti. Jestliže číslo $n + 1$ není dělitelné pěti, je dělitelné nějakým prvočíslem q různým od 2, 3, 5 a protože je $n^2 + 4n + 6 = (n + 1)(n + 3) + 3$, prvočíslem q nelze krátit. Jestliže číslo $n + 1$ je dělitelné 5, číslo $n - 1$ není dělitelné 5 a je to tedy buď prvočíslo různé od 2, 3, 5, nebo je to součin takových prvočísel. Protože $n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11$, můžeme eventuálně krátit 11. Jestliže je $r > 2$, je $n - 1 = 3 \cdot 2^r - 1 > 11$, tedy i po případném zkrácení 11 zbude ve jmenovateli prvočinitel různý od 2, 3, 5, kterým krátit nelze. Snadným výpočtem zjistíme, že také případy $r = 1, 2$ ($h = 2, 4$) vedou k nekonečným rozvojům.

Je-li konečně $h = 5^s$, kde s je přirozené číslo, je $n = 3 \cdot 5^s$. Čísla $n - 1$, $n + 1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla, nedělitelná 3 a 5 a jedno z nich není dělitelné 4. Jestliže číslo $n + 1$ není dělitelné 4, je dělitelné lichým prvočíslem q různým od 3 i 5 a protože je $n^2 + 4n + 6 = (n + 1)(n + 3) + 3$, nelze tímto prvočíslem krátit.

Jestliže číslo $n - 1$ není dělitelné 4, lze psát $n - 1 = 2 \cdot Q$, kde číslo Q je buď liché prvočíslo různé od 3, 5 nebo součin takových prvočísel. V tomto případě lze event. krátit 11, neboť

$$n^2 + 4n + 6 = (n - 1)(n + 5) + 11,$$

ale ve jmenovateli zbude vždy prvočíslo, kterým krátit nelze; pro $s = 1$ je totiž

$$Q = \frac{3 \cdot 5 - 1}{2} = 7$$

a pro $s > 1$ je $Q > 1$.

β) Pro $z = -1$ je $\dfrac{n^2+4n+6}{n(n^4-1)} = \dfrac{3h^2+2h+1}{(n-1)nh(n^2+1)}$,

což pro $h = 1$ vede ke zlomku $\dfrac{6}{10} = 0{,}6$. Je-li h tvaru $h = px$, kde p je liché prvočíslo různé od 5 a x přirozené číslo, pak prvočíslem p nelze krátit.

Je-li h tvaru $h = 2^r \cdot 5^s$, kde r a s jsou přirozená čísla, pak $n = 3h - 1 = 3 \cdot 2^r \cdot 5^s - 1$ je liché číslo nedělitelné pěti, které obsahuje aspoň jednoho lichého prvočinitele p různého od 5. Poněvadž $3h^2 + 2h + 1 = (3h-1)(h+1) + 2$, proto nelze prvočinitelem p krátit.

Je-li dále $h = 2^r$, kde r je přirozené číslo, pak čísla $n = 3h - 1$, $n - 1 = 3h - 2$ nejsou dělitelná třemi a aspoň jedno z nich není dělitelné pěti, při čemž $n = 3 \cdot 2^r - 1$ je liché a $n - 1 = 3 \cdot 2^r - 2 = 2(3 \cdot 2^{r-1} - 1)$ pro $r > 1$ obsahuje lichý faktor $3 \cdot 2^{r-1} - 1$; aspoň jedno z těchto čísel tedy obsahuje lichého prvočinitele q různého od 3 a od 5. Je-li to číslo n, pak prvočinitelem q nelze krátit, a je-li to číslo $n - 1$, lze krátit nejvýš jedenácti, neboť $n^2 + 4n + 6 = (n-1)(n+5) + 11$; poněvadž však pro $r = 2, 3$ nastane první případ (čísla $3 \cdot 2^2 - 1$, $3 \cdot 2^3 - 1$ nejsou dělitelná pěti), může to nastat pouze pro $r > 3$, ale pak i po tomto zkrácení zbude ve jmenovateli aspoň jeden další lichý prvočinitel q_1 různý od 3 a od 5, kterým se nedá krátit, neboť $3 \cdot 2^{r-1} - 1 > 22$. Pro $r = 1$ zlomek krátit nelze, neboť je roven $\dfrac{17}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 26.}$.

Je-li konečně $h = 5^s$, kde s je přirozené číslo, pak číslo $n - 1 = 3h - 2 = 3 \cdot 5^s - 2$ je liché a nedělitelné pěti ani třemi. Poněvadž $n^2 + 4n + 6 = (n-1)(n+5) + 11$, dá se čitatel proti faktoru $n - 1$ ve jmenovateli zkrátit nejvýše jedenácti; poněvadž dále $n - 1 > 12$, proto i po tomto zkrácení zbude ve jmenovateli aspoň jeden další lichý prvočinitel p různý od 3 a od 5, kterým se nedá krátit.

Daný zlomek vede k rozvoji neryze periodickému s jedinými výjimkami $n = 3$ a $n = 2$, kdy vede k rozvoji ukončenému.

14. Je dána posloupnost $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$, při čemž platí $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$; a_1, b_1 jsou kladná čísla.

a) Vyjádřete $a_n^2 - 2b_n^2$ pomocí a_1, b_1.

b) Dokažte, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

Řešení.

a) Ze vztahů $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ plyne $a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = 9a_n^2 + 24a_nb_n + 16b_n^2 - 8a_n^2 - 24a_nb_n - 18b_n^2 = a_n^2 - 2b_n^2$, a odtud matematickou indukcí

$$a_n^2 - 2b_n^2 = a_1^2 - 2b_1^2 \text{ pro každé přirozené číslo } n. \qquad (1)$$

b) Posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel, při čemž $a_{n+1} > 3a_n$, $b_{n+1} > 3b_n$; odtud matematickou indukcí odvodíme, že pro $n > 1$ je $a_n > 3^{n-1} \cdot a_1$, $b_n > 3^{n-1} \cdot b_1$.

Z rovnosti (1) plyne $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{a_1^2 - 2b_1^2}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})}$ a odtud

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right| = \frac{|a_1^2 - 2b_1^2|}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})} < \frac{|a_1^2 - 2b_1^2|}{3^{2n-2} \cdot b_1(a_1 + b_1\sqrt{2})} = \frac{A}{3^{2n-2}},$$

kde $A = \frac{|a_1 - b_1\sqrt{2}|}{b_1} \geqq 0$. Volíme-li libovolné kladné číslo k, lze stanovit přirozené číslo m tak, aby

$$\frac{A}{3^{2m-2}} < k.$$

Je-li $A > 0$, vyhovíme tomu pro $3^{2m-2} > \frac{A}{k}$, a tedy

$$(2m - 2) \log 3 > \log \frac{A}{k}, \; m > 1 + \frac{\log (A : k)}{\log 3};$$

pak pro každé $n \geqq m$ je tím spíše $\frac{A}{3^{2n-2}} < k$. Je-li $A = 0$, nastane to pro každé přirozené n. Posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right\}$ je tedy nulová, takže $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

15. V rovině ϱ jsou dány dva body A, B a dva duté úhly α, β. Bod X roviny ϱ otočíme jednak kolem středu A o úhel α v daném smyslu do polohy X', jednak kolem bodu B o úhel β v daném smyslu (stejném nebo opačném) do polohy X''. Co vyplní všecky ty body X, pro něž má úsečka $X'X''$ danou velikost $d > 0$?

Řešení. První otáčení rozložme v souměrnosti s osami o_1, o_2, druhé v souměrnosti s osami o_1, o_3. To je vždy možné: je-li $A \mathrel{\neq} B$, zvolíme $o_1 \equiv AB$, je-li $A \equiv B$, zvolíme za o_1 libovolnou přímku vedenou bodem A. Složením otáčení $(o_2 o_1)$, $(o_1 o_3)$ vznikne shodnost $\mathbf{S}$, která převede bod X' v bod X''. Nyní je třeba rozeznávat dva případy:

a) $o_2 \| o_3$; to nastane tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha = \beta$ a jsou-li smysly daných otáčení souhlasné (uvědoměme si, že přímka o_1 přejde v o_2 otočením o ostrý úhel $\frac{1}{2}\alpha$ v daném smyslu otáčení). Shodnost $\mathbf{S}$ je pak posunutí, ve zvláštním případě, je-li totiž $o_2 \equiv o_3$, identita. Avšak v posunutí mají bod a jeho obraz konstantní vzdálenost, rovnou velikosti posunutí. Lze tedy nalézt body X', X'' žádané vlastnosti tehdy a jen tehdy, je-li velikost posunutí rovna d. K tomu je předně nutné, aby bylo $A \mathrel{\neq} B$ (je-li $A \equiv B$, je A samodružným bodem posunutí, toto posunutí je identita a má tudíž velikost rovnou nule). Dále, označíme-li C obraz bodu A ve shodnosti $\mathbf{S}$, je nutně $\overline{AC} = d$, $\sphericalangle ABC = \alpha = \beta$. Naopak, jestliže rovnoramenný trojúhelník s rameny rovnými úsečce AB a s úhlem α při temeni má základnu d, má posunutí $\mathbf{S}$ velikost d. Vyslovená vlastnost je tedy nutnou a postačující podmínkou, aby bylo možno najít vůbec nějaký bod X žádané vlastnosti. Je-li splněna, vyplní body X', a tudíž i body X, celou rovinu.

b) o_2, o_3 jsou různoběžky; to nastane vždy, je-li $\alpha \neq \beta$, ale i v případě, že $\alpha = \beta$ a smysly obou daných otáčení jsou opačné. Shodnost $\mathbf{S} \equiv (o_2 o_3)$ je pak otáčení, jehož středem je průsečík D přímek o_2, o_3; úhel tohoto otáčení je jistý dutý nebo přímý úhel γ (libovolného smyslu). Body X', X'', jejichž vzdálenost je d, vyplní takovou kružnici se středem D, v níž tětiva délky d přísluší středovému úhlu γ. Ježto body X' vyplní kružnici se středem D, vyplní i jejich obrazy ve shodnosti $(o_2 o_1)$, t. j. body X, kružnici; její střed je obraz bodu D ve shodnosti $(o_2 o_1)$.

16. Je dán pravoúhlý rovnoběžník. Z bodu M jeho roviny spustíme kolmice na jeho strany (prodloužené) a označíme P, Q, R, S průsečíky těchto kolmic s dvojicemi rovnoběžných stran.

a) Určete geometrické místo průsečíků $PR \cdot QS$ a $PS \cdot QR$.

b) Určete všecky body M v rovině, které vedou k jednomu a témuž bodu nalezeného geometrického místa.

Řešení. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby strany rovnoběžníka byly rovnoběžné s osami souřadnic a jeho střed ležel v počátku. Vrcholy rovnoběžníka nechť mají souřadnice $C \equiv [a; b]$, $B \equiv [a; -b]$, $D \equiv [-a; b]$, $A \equiv [-a; -b]$, kde $a > 0$, $b > 0$. Průsečík přímek PR, QS, pokud tyto přímky a průsečík existují, budiž bod $U \equiv [\xi, \eta]$. Označme x, y souřadnice bodu M. Vyjádříme parametricky přímku PR ($P \equiv [x; -b]$, $R \equiv [-a; y]$), tedy

$$\begin{aligned} \xi &= x - t(a + x), \\ \eta &= -b + t(b + y), \end{aligned} \tag{1}$$

a jedinou rovnicí přímku QS ($Q \equiv [x; b]$, $S \equiv [a; y]$), tedy

$$(\xi - a)(b - y) = (x - a)(\eta - y). \tag{2}$$

Řešením rovnic (1), (2) vyjde parametr t průsečíku U:

$$t = \frac{b(x - a)}{bx - ay}. \tag{3}$$

Tento výsledek platí, jestliže je $bx - ay \neq 0$, t. j. jestliže bod M neleží na přímce AC. Pro body této přímky však je $PR \| QS$ a nevznikne bod U. Dosadíme z rovnice (3) do (1); po úpravě vyjde

$$\xi = a\,\frac{ab - xy}{bx - ay}, \qquad \eta = -\,b\,\frac{ab - xy}{bx - ay}.$$

Označíme-li $u = \dfrac{ab - xy}{bx - ay}$, dostaneme $\xi = au$, $\eta = -\,bu$, t. j. všecky body U leží na přímce BD. Obráceně ke každému číslu u lze nalézt dvojici x, y, t. j. bod M tak, že platí $u = \dfrac{ab - xy}{bx - ay}$, čili

$$ab - xy = u(bx - ay). \tag{4}$$

To znamená: každý bod rovnoosé hyperboly (4)*), pokud neleží na přímce $bx - ay = 0$ (t. j. přímce AC), vede k témuž bodu U. Hledané geometrické místo je tedy přímka BD; ke každému jejímu bodu vedou všechny body M, které leží na hyperbole (4), s výjimkou bodů A, C, neboť tyto dva body jsou průsečíky každé hyperboly (4) s přímkou AC.

Obdobně dostaneme geometrické místo bodů V; stačí vyměnit body P, Q, t. j. ve výsledku psát $-b$ místo $+b$. Dostaneme přímku AC, hyperboly budou mít rovnici

$$ab + xy = v\,(bx + ay). \tag{5}$$

Vyloučené body budou body B, D.

---

*) Hyperbola (4) se pro $u = 1$, t. j. pro $M \equiv B$, a $u = -1$, t. j. $M \equiv D$, rozpadá ve dvojici přímek.

1. Řešte soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a_1, \\ x_2 + x_3 &= a_2, \\ x_3 + x_4 &= a_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + x_n &= a_{n-1}, \\ x_n + x_1 &= a_n. \end{aligned}$$

Řešení. Násobíme-li dané rovnice postupně čísly $+1$, -1, $+1$, -1, ... a sečteme-li je, dostaneme

$$x_1(1 \pm 1) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_n,$$

kde znaménko $+$ platí, je-li n liché, a znaménko $-$, je-li n sudé.

I. Pro n liché je

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \dots + \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots - \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \dots + \frac{1}{2}a_n,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots - \frac{1}{2}a_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_4 - \dots + \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n.$$

II. Pro n sudé má soustava řešení jen tehdy, je-li $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots - a_n = 0$. Pak možno x_1 volit libovolně a z daných rovnic plyne

$$
\begin{aligned}
x_2 &= a_1 - x_1, \\
x_3 &= -a_1 + a_2 + x_1, \\
x_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - x_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{n-1} - x_1.
\end{aligned}
$$

2. V rovině jsou dány čtyři různé body A, B, S, O. Sestrojte kružnici k_1 procházející body A, B a kružnici k_2 se středem S tak, aby bod O byl jejich středem stejnolehlosti. Proveďte diskusi.

Řešení. Předpokládejme, že kružnice k_1 a k_2, vyhovující úloze, existují, a označme S_1 střed kružnice k_1. Pak platí:

(1) S_1 leží na ose o úsečky AB.

(2) S_1 leží na přímce OS a je $S_1 \neq O$ (jinak by kružnice k_2 stejnolehlá s k_1 podle středu $O \equiv S_1$ musela být s k_1 soustředná, což je ve sporu se vztahem $O \neq S$).

Po této předběžné úvaze přistoupíme k řešení:

Jsou-li dány čtyři různé body A, B, S, O, je nutno rozlišovat 3 případy:

1. Přímky OS a o jsou různé rovnoběžky. Pak podle předchozího řešení neexistuje.

2. Přímky OS a o splývají. Zvolíme-li na OS libovolný bod X různý od O, pak kružnice $k_1 = (X, \overline{XA})$, $k_2 = (S, r)$, kde

$$
r = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{OS}}{\overline{OX}},
$$

vyhovují úloze. Existuje tedy nekonečně mnoho řešení.

3. Přímky OS a o jsou různoběžné. Označme jejich průsečík S_1.

a) $S_1 \equiv O$, pak podle úvodní konstrukce řešení neexistuje.

b) $S_1 \not\equiv O$. Potom kružnice $k_1 = (S_1, \overline{S_1A})$, $k_2 = (S, r)$, kde $r = \dfrac{\overline{AS_1} \cdot \overline{OS}}{\overline{OS_1}}$, vyhovují úloze. Je to jediné řešení, neboť kružnice k_1 je středem S_1 a bodem A jednoznačně určena. Podle (3) určíme k_2.

3. Dokažte, že rovinný obrazec souměrný podle dvou různých středů není ohraničený (t. j. neleží v žádném kruhu).

Řešení. Nechť obrazec $\mathbf{O}$ je souměrný podle dvou různých středů S_1, S_2. Sestrojme přímku $o_3 \equiv S_1S_2$, veďme body S_1, S_2 k ní kolmice $o_1 \perp o_3$, $o_2 \perp o_3$. Souměrnost podle středu S_1 lze (jakožto otáčení o 180°) rozložit v souměrnosti podle os o_1, o_3, souměrnost podle středu S_2 lze rozložit v souměrnosti podle os o_3, o_2. Sestrojíme tedy k obrazci $\mathbf{O}$ obrazec $\mathbf{O}_1$ souměrně sdružený podle osy o_1, k obrazci $\mathbf{O}_1$ obrazec $\mathbf{O}_3$ souměrně sdružený podle osy o_3; dále k obrazci $\mathbf{O}_3$ opět obrazec souměrně sdružený podle osy o_3, a to je obrazec $\mathbf{O}_1$; konečně k obrazci $\mathbf{O}_1$ obrazec $\mathbf{O}_2$ souměrně sdružený podle osy o_2, a to je podle našeho předpokladu $\mathbf{O}$.

Obrazec $\mathbf{O}_2$ vznikl zřejmě z obrazce $\mathbf{O}$ užitím souměrností podle os o_1, o_2; avšak tyto souměrnosti se skládají v posunutí ve směru S_1S_2 a velikosti $2 \cdot \overline{S_1S_2}$. Toto posunutí převádí obrazec $\mathbf{O}$ v týž obrazec. Budiž A libovolný bod obrazce $\mathbf{O}$. Provedeme-li naše posunutí n-krát, přejde bod A v jistý bod A_n obrazce $\mathbf{O}$ a bude platit

$$\overline{AA_n} = 2\,n \cdot \overline{S_1S_2}.$$

Pro vhodně zvolené n je úsečka $\overline{AA_n}$ delší než průměr libovolné kružnice, a tím je tvrzení dokázáno.

4. Dokažte, že $\frac{1}{2} \leqq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} -$ $- \frac{1}{2n} < 1$, kde n je přirozené číslo.

Řešení. Platí

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \quad \frac{1}{2n} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ \ldots \ + \frac{1}{2n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

takže

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Pro součet na levé straně platí

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geqq \frac{1}{2},$$

při čemž rovnost nastane pro $n = 1$. Poněvadž

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \ldots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n},$$

platí pro součet na pravé straně

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \leqq \frac{n}{n+1} < 1.$$

5. Je dána kružnice k, na ní bod A, dále kružnice k' téhož poloměru a na ní bod A'. Udejte otáčení, které převádí kružnici k v k' a bod A v A'. Diskuse.

Řešení. Nejprve si dokážeme: *otáčení a posunutí lze nahradit jediným otáčením* (otáčení složeno s posunutím dává otáčení). Otáčení rozložíme ve dvě souměrnosti s osami o_1, o_2 tak, aby druhá osa o_2 byla kolmá ke směru posunutí. Posunutí rozložíme ve dvě souměrnosti s osami o_3, o_4 tak, aby první osa o_3 procházela středem otáčení. Výsledná shodnost, která vznikne složením daného otáčení a posunutí, se dá zřejmě složit ze souměrnosti podle os o_1, o_4. Tyto přímky jsou však různoběžné (není $o_1 \parallel o_2$, je $o_2 \equiv o_3$, $o_3 \parallel o_4$), proto je výsledná shodnost otáčení. (Otáčení o nulový úhel nepovažujeme v tomto příkladě za otáčení.)

Jestliže středy S a S' kružnic k, k' splývají, úloha je triviální. Budeme tedy předpokládat, že body S a S' jsou různé. Předpokládejme, že úloha má řešení, t. j. že existuje otáčení $\boldsymbol{R}$, které převádí bod S v bod S' (následkem toho také kružnici k v kružnici k') a bod A ležící na kružnici k v bod A' ležící na kružnici k'.

Nechť posunutí $\boldsymbol{P}$ převádí bod S' v bod S (a tedy kružnici k' v kružnici k). Proveďme postupně otáčení $\boldsymbol{R}$ a posunutí $\boldsymbol{P}$. Výsledná shodnost $\boldsymbol{R}'$ je podle toho, co jsme dokázali, zase otáčení. Toto otáčení $\boldsymbol{R}'$ převádí body kružnice k v body téže kružnice, tedy střed otáčení $\boldsymbol{R}'$ je v bodě S.

Posunutí $\boldsymbol{P}$ převede bod A' v některý bod A'' ležící na k. Není možné, aby bod A splynul s bodem A'', v tomto případě by shodnost $\boldsymbol{R}'$ byla identita, ale my jsme dokázali, že $\boldsymbol{R}'$ je (nenulové) otáčení.

Nechť tedy body A a A'' jsou různé, $\boldsymbol{P}^{-1}$ budiž posunutí, které převádí bod S v bod S'. Provedeme-li postupně otáčení $\boldsymbol{R}'$ a posunutí $\boldsymbol{P}^{-1}$, dostaneme (jak jsme dokázali) otáčení převádějící kružnici k a bod A v kružnici k' a bod A'. Tedy je-li $A'' \not\equiv A$, úloha má řešení.

Nyní dokážeme, že toto řešení je jediné. Všimněme si, že bod A'', a tedy také otáčení $\boldsymbol{R}'$ jsou stanoveny jednoznačně. Jestliže $\boldsymbol{R}$ je jakékoli otáčení vyhovující dané úloze, potom postupným provedením tohoto otáčení $\boldsymbol{R}$ a posunutí $\boldsymbol{P}$ dostáváme otáčení $\boldsymbol{R}'$ jednoznačně určené (až na smysl otáčení). Tedy otáčení $\boldsymbol{R}$ vznikne složením jednoznačně určených shodností: otáčení $\boldsymbol{R}'$ a posunutí $\boldsymbol{P}^{-1}$.

Tedy: Daná úloha má řešení tehdy a jen tehdy, převede-li posunutí $\boldsymbol{P}$ bod A' v bod $A'' \not\equiv A$.

Konstrukci můžeme provést na př. takto ($A \not\equiv A''$): Sestrojíme bod A'', v bodě S najdeme dvojici přímek o_1, o_2 tak, aby složením souměrnosti s osou o_1 a souměrnosti s osou o_2 vzniklo otáčení převádějící bod A v bod A'' a aby osa o_2 byla kolmá na spojnici SS'. Přímka o_1 protne osu s úsečky SS' v bodě O, který je středem hledaného otáčení.

6. Buď n přirozené číslo. Kolik je mezi čísly n^2, $(n+2)^2$ přirozených čísel, z nichž žádné není druhou mocninou přirozeného čísla?

Řešení. Budiž x přirozené číslo, o němž platí

$$n^2 < x^2 < (n+2)^2,$$

kde n je dané přirozené číslo. Platí tedy také

$$n < x < n+2,$$

a tedy $x = n + 1$.

Číslo x^2 je tedy jediným přirozeným číslem, ležícím mezi přirozenými čísly n^2, $(n+2)^2$, které má tu vlastnost, že je čtvercem přirozeného čísla. Mezi čísly n^2, $(n+2)^2$ je však

$$(n+2)^2 - n^2 - 1 = 4n + 3$$

přirozených čísel, a tedy hledaných čísel je

$$(4n+3) - 1 = 4n + 2 = 2(2n+1).$$

7. Buďte $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ čísla, o nichž platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Potom pro libovolná čísla x, y, z platí

$$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (az + bx + cy)^2 + \\ + (ay + bz + cx)^2.$$

Dokažte!

Řešení. Levou stranu vztahu, jehož platnost máme dokázat, označíme L, pravou stranu P.

Potom

$$P - L = 2(ab + bc + ca) \cdot (xy + yz + xz) = \\ = 2abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot (xy + yz + xz) = 0$$

neboli $L = P$, což bylo dokázat.

8. Kovové kusy každý o váze asi 170 kg a tvaru velmi přibližně kvádru o rozměrech 20 cm, 30 cm, 35 cm byly po čtyřech dávány do dřevěných beden o tloušťce 2 cm a posílány autem na místa určení. Truhlárna, která vyrábí bedny, chce zvýšit produktivitu a uspořit materiál. Jak zařídíte uskladnění kusů do beden, aby spotřeba dříví na bedny na kus klesla a počet balených kusů stoupl, když může z dopravních důvodů jedna bedna vážit nejvýše 1200 kg? Kterou abstraktní úlohu matematickou můžete položit a řešit na základě uvedené konkretní úlohy praktické?

Řešení. Kdyby se do bedny vkládalo 7 kovových kusů, zbylo by na váhu bedny jen 10 kg, což při uvedených rozměrech kusu a při smrkovém dříví ($s \doteq 0{,}8$) nestačí. Proto bedna může obsahovat nejvýše 6 kusů.

Případ 5 kusů v bedně tvaru kvádru není třeba uvažovat, poněvadž by vznikl buď v bedně nevyužitý prostor, nebo rozměry bedny uvnitř by byly 100 cm, 30 cm, 35 cm, nebo 20 cm, 150 cm, 35 cm, nebo 20 cm, 30 cm, 175 cm. Pro ně spotřeba dřeva je větší než $\frac{5}{4}$ spotřeby dřeva na bednu se 4 kusy. Pro bednu se 4 kusy byly rozměry uvnitř buď 40, 35, 60, nebo 20, 70, 60, nebo 40, 70, 35 (cm).

Spotřeba dřeva v cm^3 byla buď 25 824, nebo 29 664, nebo 29 048. Bedna se 6 kusy uvnitř bude mít objem vnitřku $6 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 35\ cm^3$. Spotřeba dříví při dané tloušťce 2 cm závisí na povrchu kvádru, do něhož kusy složíme. Jsou-li rozměry vnitřku a, b, c (měřeny v cm), je spotřeba dřeva na bednu $4(ab + ac + bc) + 16(a + b + c) + 64$ (měřeno v cm^3).

Aby spotřeba byla co nejmenší, musí být povrch nejmenší při daném objemu. 6 kusů udaných rozměrů lze srovnat do kvádrů o rozměrech (v cm) 20, 30, 210, nebo 35, 30, 120, nebo 20, 35, 180, nebo 60, 30, 70, nebo 40, 30, 105, nebo 90, 40, 35, nebo 60, 60, 35, nebo 20, 105, 60, nebo 20, 70, 90. Výpočtem objemu dřeva potřebného na každou příslušnou bednu zjistíme, že u kvádru o rozměrech 60 cm, 60 cm, 35 cm je spotřeba nejmenší a činí 33 744 cm^3. (Jak patrno, potvrzuje se stará zkušenost, že z kvádrů téhož objemu má nejmenší povrch ten, který se tvarem co nejvíc podobá krychli.)

Je patrno, že při 4 kusech bedna nejvhodnějších vnitřních rozměrů, t. j. 40 cm, 35 cm, 60 cm, na níž se spotřebovalo nejméně dřeva, t. j. 25 824 cm^3, měla spotřebu dřeva větší, než jsou dvě třetiny (objem vnitřku u bedny se 4 kusy je roven $\frac{2}{3}$ objemu bedny s 6 kusy) objemu dřeva potřebného na novou bednu. (Tyto dvě třetiny činí 22 496 cm^3.)

Truhláři tedy výrobou beden s rozměry vnitřku 60 cm, 60 cm, 35 cm ušetřili dříví a poněvadž do bedny vkládali víc kusů, pomohli rychleji zboží odvážet a jestliže vyráběli týž počet beden jako dříve, zvýšili produktivitu. Zpracovali víc dříví (v cm^3) a umožnili odvoz víc kusů v témž čase.

Abstraktních úloh odtud plynoucích je možno sestavit mnoho. Na př.: Určit tři kladná čísla x, y, z, pro něž je dán jejich součin a pro které výraz $m(xy + xz + yz) + p(x + y + z) + q$ je číslo nejmenší při daných m, p, q (kladných).

9. Na úsečkách AB, BC, CA tvořících trojúhelník ABC zvolte celkem dva různé body M, N. Dokažte, že úsečka MN není větší než největší ze stran trojúhelníka ABC.

Řešení. Předně dokážeme: *Budiž dán trojúhelník ABC a bod X jeho strany BC. Pak úsečka AX je menší nebo rovna větší ze stran AB, AC.* Je-li $X \equiv B$ nebo $X \equiv C$, je tvrzení zřejmě správné. Leží-li bod X mezi B, C, zvolíme označení vrcholů tak, aby platilo $AB \geqq AC$, t. j. též $\sphericalangle ACB \geqq \sphericalangle ABC$. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka je $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ACB \geqq \sphericalangle ABC$; v trojúhelníku ABX tedy platí $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ABX \equiv \sphericalangle ABC$, t. j. $\overline{AB} > \overline{AX}$.

Zvolme nyní dva různé body M, N na úsečkách $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, CA. Pokud budou oba ležet na téže úsečce (buď oba uvnitř, nebo jeden, po př. oba splývají s krajními body úsečky), bude správnost tvrzení zřejmá.

Nechť tedy body M, N náležejí po řadě na př. stranám AB, BC trojúhelníka ABC, ale nenáležejí oba téže straně, t. j. $N \not\equiv B$. Na trojúhelník ABN aplikujeme předchozí výsledek; úsečka MN je tedy menší nebo rovna větší z úseček AN, BN. Avšak podle téhož výsledku je úsečka AN menší nebo rovna větší ze stran AB, AC; mimo to je úsečka BN menší nebo rovna straně BC. Tím je tvrzení dokázáno.

10. Sestrojte dva trojúhelníky, které nejsou shodné, ale u nichž pět základních prvků (t. j. stran a úhlů) jednoho je rovno pěti základním prvkům druhého.

Řešení. Zvolíme označení stran tak, aby platilo v prvním trojúhelníku $a \leqq b \leqq c$, v druhém $a' \leqq b' \leqq c'$. Oba trojúhelníky se shodují aspoň ve dvou úhlech, tudíž se shodují ve všech třech úhlech a jsou podobné. Dvojice stran k sobě příslušných jsou a, a'; b, b'; c, c', jak vyplývá z jejich uspořádání podle velikosti. Je tedy

$$a' = ka, \qquad b' = kb, \qquad c' = kc, \tag{1}$$

kde $k \neq 1$, neboť trojúhelníky nejsou shodné. Označme jako čárkovaný ten z obou trojúhelníků, jehož strany jsou větší než příslušné strany druhého trojúhelníka; pak je $k > 1$, $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$. Oba trojúhelníky se shodují ještě ve dvou stranách. Avšak podle našich úmluv je $a < a' \leqq b' \leqq c'$, t. j. strana a se neshoduje se žádnou stranou trojúhelníka čárkovaného. Dále je $b < b' \leqq c'$; musí tedy platit $b = a'$. Nemůže být $c = a'$; neboť pak by bylo $a < b = c$, t. j. podle (1) též $a' < b' = c'$ a trojúhelníky by se neshodovaly ve dvou dvojicích stran. Ježto víme, že $c < c'$, je nutně $c = b'$. Strany obou trojúhelníků tedy jsou a, ka, k^2a; ka, k^2a, k^3a. Trojúhelníky s těmito stranami jsou skutečně podobné (t. j. shodují se ve všech vnitřních úhlech) podle věty *sss* o podobnosti trojúhelníků.

Nyní jde jen o to, zda pro některé číslo $k > 1$ skutečně existuje trojúhelník o stranách a, ka, k^2a. K tomu je nutné a stačí, aby největší ze stran byla menší než součet obou zbývajících. Ježto $k > 1$, je $k^2a > ka > a$; nutná a postačující podmínka tedy zní:

$$a + ka > k^2a,$$

čili

$$1 + k > k^2,$$

neboli

$$k^2 - k - 1 < 0.$$

Trojčlen $k^2 - k - 1$ rozložíme na kořenové činitele

$$k^2 - k - 1 = \left[k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right] \cdot \left[k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right].$$

Má tedy být

$$\left[k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right] \cdot \left[k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right] < 0 \quad (2)$$

za předpokladu $k > 1$.
Protože $\sqrt{5} > 1$, je

$$(1 - \sqrt{5}) < 0$$

a

$$-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) > 0.$$

Je tedy

$$k - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) > 0.$$

Z nerovnosti (2) plyne

$$k - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) < 0,$$

čili

$$k < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Úloha má tedy řešení tehdy a jen tehdy, jestliže pro k platí

$$1 < k < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

11. Pro která přirozená čísla n je výraz

$$\frac{n - 37}{n + 43}$$

roven druhé mocnině racionálního čísla?

Řešení. Daný výraz je roven druhé mocnině racionálního čísla, je-li

$$\begin{aligned} n - 37 &= k^2 m, \\ n + 43 &= h^2 m, \end{aligned} \tag{1}$$

kde k, h, m jsou celá čísla, $h \neq 0$, $m \neq 0$ a $|k|$, $|h|$ čísla nesoudělná. Odtud plyne $(h^2 - k^2)\,m = 80$ čili

$$(h + k)(h - k)\,m = 80. \tag{2}$$

Poněvadž n je přirozené číslo, je $n + 43$ také přirozené číslo, takže m je kladné. Poněvadž se v rovnicích (1) čísla k, h vyskytují pouze ve druhých mocninách, můžeme vzít v úvahu jen ty případy, když $k \geqq 0$, $h > 0$, takže $h + k > 0$. Pak vzhledem k (2) také $h - k > 0$ a $h + k \geqq h - k$. Poněvadž dále čísla h, k jsou celá a nesoudělná, jsou čísla $h + k$, $h - k$ buď obě lichá a nesoudělná nebo mají největšího společného dělitele 2. Proto je třeba vyloučit ještě ty dvojice $h + k$, $h - k$, které jsou násobky některé jiné takové dvojice, takže zbývají případy:

$h + k$	$h - k$	m	h	k	n
1	1	80	1	0	37
4	2	10	3	1	47
5	1	16	3	2	101
8	2	5	5	3	82
10	4	2	7	3	55
10	8	1	9	1	38
20	2	2	11	9	199
40	2	1	21	19	398

12. Dokažte: Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak platí

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geqq \frac{3}{2}.$$

Řešení. Položme $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$; pak $a = \frac{1}{2}(-x + y + z)$, $b = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $c = \frac{1}{2}(x + y - z)$.

Proto

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} =$$

$$= \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) - \frac{3}{2} \geqq \frac{3}{2},$$

neboť $$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geqq 2.$$

13. Je-li přirozené číslo N psáno v desítkové soustavě ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots, + a_n \cdot 10^n$, kde a_0, a_1, a_2, ..., a_n jsou číslice, a utvoříme-li čísla $b_1 = a_1 - 2a_0$, $b_2 = a_2 - 2b_1$, $b_3 = a_3 - 2b_2$, ..., $b_n = a_n - 2b_{n-1}$, pak číslo N je dělitelné sedmi tehdy a jen tehdy, je-li sedmi dělitelné číslo b_n.

Řešení. Platí: $a_1 = b_1 + 2a_0$, $a_2 = b_2 + 2b_1$, $a_3 = b_3 + 2b_2$, ..., $a_n = b_n + 2b_{n-1}$, takže

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n =$$

$$= a_0 + 10b_1 + 20a_0 + 10^2 b_2 + 2 \cdot 10^2 b_1 + 10^3 b_3 +$$

$$+ 2 \cdot 10^3 b_2 + \ldots + 10^n b_n + 2 \cdot 10^n b_{n-1} =$$

$$= 21a_0 + 21 \cdot 10b_1 + 21 \cdot 10^2 b_2 + \ldots + 21 \cdot 10^{n-1} b_{n-1} +$$

$$+ 10^n b_n =$$

$$= 7(3a_0 + 3 \cdot 10b_1 + 3 \cdot 10^2 b_2 + \ldots + 3 \cdot 10^{n-1} b_{n-1}) +$$

$$+ 10^n b_n.$$

a) Je-li číslo b_n dělitelné sedmi, je sedmi dělitelné i číslo N.

b) Je-li $N = 7k$, je $10^n b_n = 7[k - (3a_0 + 3 \cdot 10b_1 + + 3 \cdot 10^2 b_2 + \ldots + 3 \cdot 10^{n-1} b_{n-1})]$. Poněvadž čísla 7 a 10 jsou nesoudělná, proto musí být sedmi dělitelné číslo b_n.

Poznámka. Z důkazu je vidno, že táž věta platí i pro dělitelnost třemi.

14. U dvou hmotných koulí, které se nedotýkají a mají pevnou vzájemnou polohu, byla měřením zjištěna jejich nejmenší vzdálenost a, velikost vnější tečny t a velikost vnitřní tečny u.

a) Vyjádřete vzdálenost středu koulí a jejich poloměry jako funkce veličin a, t, u.

b) Jaká je podmínka pro to, aby se poloměry koulí lišily nejvýše o úsečku d?

Řešení. Naměřené hodnoty nutně splňují nerovnost $0 < a < < u < t$. To dokážeme nakonec.

Označme r_1, r_2 poloměry obou koulí (označení zvolme tak, aby bylo $r_1 \geqq r_2$) a c vzdálenost jejich středů. Pak platí:

$$a = c - (r_1 + r_2),$$

$$t = \sqrt{c^2 - (r_1 - r_2)^2},$$

$$u = \sqrt{c^2 - (r_1 + r_2)^2},$$

čili

$$r_1 + r_2 = c - a, \tag{1}$$

$$u^2 = c^2 - (r_1 + r_2)^2, \tag{2}$$

$$t^2 - u^2 = 4r_1r_2. \tag{3}$$

Dosadíme z rovnice (1) do (2); vyjde $c = \dfrac{a^2 + u^2}{2a}$. Poloměry r_1, r_2 jsou vzhledem k (1) a (3) kořeny kvadratické rovnice (neznámá r):

$$r^2 + \frac{a^2 - u^2}{2a} r + \frac{t^2 - u^2}{4} = 0,$$

t. j.

$$r_1 = \frac{u^2 - a^2}{4a} + \frac{1}{4a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2},$$

$$r_2 = \frac{u^2 - a^2}{4a} - \frac{1}{4a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2}.$$

Tyto rovnice spolu se vztahem $c = \dfrac{a^2 + u^2}{2a}$ řeší úlohu a), neboť za předpokladu $u > a$, $u < t$ je $r_1 \geqq r_2 > 0$; platí totiž

$$\left(\frac{u^2 - a^2}{4a}\right)^2 > \frac{1}{16a^2} [(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2],$$

jak se snadno přesvědčíme provedením.

Úloha b) dává podmínku $r_1 - r_2 \leqq d$, čili

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(u^2 + a^2)^2 - 4a^2t^2} \leqq d,$$

t. j.

$$u^2 + a^2 \leqq 2a \sqrt{d^2 + t^2};$$

s pomocí rovnice $c = \dfrac{a^2 + u^2}{2a}$ dostaneme $c \leqq \sqrt{d^2 + t^2}$.

Nyní si všimneme nerovností $0 < a < u < t$. Musí být $0 < < a$, protože se koule nedotýkají. V každém skutečném příkladě poloměry r_1, r_2 jsou kladná čísla a tedy nerovnost $u < t$ plyne z rovnice (3). Nerovnost $a < u$ odvodíme takto:

$$a = c - (r_1 + r_2) > 0,$$

$$a[c + (r_1 + r_2)] = c^2 - (r_1 + r_2)^2 = u^2;$$

avšak

$$c + (r_1 + r_2) > c - (r_1 + r_2) = a,$$

t. j.

$$a^2 < u^2,$$

čili

$$a < u.$$

15. Jsou dány body A, A', $B \neq A$. Otáčení, které převede bod A v bod A', převede bod B v jistý bod B'. Co vyplní body B', které dostaneme všemi takovými otáčeními?

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $A \neq A'$. Každé otáčení, které převádí bod A v bod A', lze rozložit ve dvě souměrnosti: první má za osu přímku o, která je osou úsečky AA', druhá má za osu jistou přímku o' procházející bodem A'. První z těchto souměrností převádí bod B v určitý pevný bod B''. Druhá souměrnost převede tento bod B'' v bod B'. Střed B_0 úsečky $B'B''$ je pata kolmice spuštěné z bodu B'' na přímku o'. Otáčí-li se přímka o' kolem bodu A', vyplní bod B_0 (podle Thaletovy věty) kružnici k sestrojenou nad průměrem $A'B''$; z této kružnice ovšem musíme vyloučit bod ležící na přímce BB'' (neboť příslušná přímka o' je rovnoběžná s přímkou o a nevzniká otáčení). Bod B' vyplní kružnici k' stejnolehlou ke kružnici k podle středu B'' s poměrem stejnolehlosti $\lambda = 2$. Kružnice k' bude procházet bodem B'' a jejím středem bude bod A'. Také z kružnice k' třeba vyloučit bod ležící na přímce BB''.

Jestliže je $A' \equiv A$ ($A \neq B$), potom bod A jako samodružný je středem otáčení a hledané geometrické místo je kružnice se středem v A a procházející bodem B, s vyloučením bodu B.

Případ $A \neq A' \equiv B$ je zahrnut v naší úvaze.

16. Budiž D průsečík osy úhlu CAB trojúhelníka s jeho stranou BC. Budiž dále DE rovnoběžka vedená bodem D

k přímce CA a E její průsečík se stranou AB; budiž konečně EF rovnoběžka vedená bodem E k přímce BC a F její průsečík se stranou CA. Dokažte, že platí:

$$\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{AE}.$$

Řešení. Máme zřejmě dokázat, že $\overline{AE} = \overline{FC}$. Polopřímky DE, AC jsou nesouhlasně rovnoběžné a proto je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\alpha$, takže v $\triangle\, ADE$ je $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \frac{1}{2}\alpha$ a tím i $\overline{AE} = \overline{ED}$.

Z konstrukce plyne, že $CDEF$ je rovnoběžník a tedy $\overline{ED} = \overline{FC}$, t. j. $\overline{AE} = \overline{FC}$.

C. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE A

1. Jestliže číslo n je celé, potom i výraz

$$V = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$$

je celé číslo. Dokažte!

Řešení. Je

$$V = \frac{1}{120}(n^5 - 5n^3 + 4n) = \frac{1}{120}(n^4 - 5n^2 + 4)\,n =$$

$$= \frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Máme tedy dokázat, že součin

$$K = k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

(kde k je celé číslo) pěti po sobě následujících celých čísel je dělitelný číslem $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$, neboli že číslo K je dělitelné třemi nesoudělnými čísly 3; 5; 8. To znamená, že máme dokázat tato tvrzení:

(1) Jednoho z pěti činitelů čísla K lze psát ve tvaru $3p$;

(2) jednoho z pěti činitelů čísla K lze psát ve tvaru $5q$;

(3) číslo K lze psát ve tvaru $K = 8r$, při čemž p, q, r jsou čísla celá.

Důkaz každého z těchto tří tvrzení provedeme zvlášť.

(1) Číslo k lze psát ve tvaru

$$k = 3k' + z,$$

kde k' je číslo celé a číslo z je rovno jednomu z čísel 0; 1; 2. Pro $z = 0$ je činitel k dělitelný třemi, pro $z = 1$ je činitel $k + 2 = 3(k' + 1)$ a pro $z = 2$ je činitel $k + 1 = 3(k' + 1)$ dělitelný třemi, neboť $k' + 1$ je číslo celé.

(2) Číslo k lze psát ve tvaru

$$k = 5k' + z,$$

kde k' je číslo celé a číslo z je rovno jednomu z čísel 0; 1; 2; 3; 4. Pro $z = 0$ je hledaným činitelem číslo k. Pro ostatní hodnoty z jsou to po řadě činitelé $k + 4$, $k + 3$, $k + 2$, $k + 1$, jejichž hodnota je vždy rovna $5(k' + 1)$, kde $k' + 1$ je zřejmě číslo celé.

(3) Jestliže je činitel k sudé číslo, jsou sudí i činitelé $k + 2$, $k + 4$ a tvrzení je dokázáno.

Jestliže je činitel k liché číslo, t. j. platí-li $k = 2m + 1$, kde m je celé číslo, jsou činitelé

$$k + 1 = 2(m + 1), \qquad k + 3 = 2(m + 2)$$

čísla sudá; tu zbývá dokázat, že jedno z čísel $m + 1$, $m + 2$ je sudé. Je-li $m + 1$ sudé, je to dokázáno; je-li $m + 1$ liché, je $m + 2$ sudé a je to zase dokázáno.

Jiné řešení. Výraz (1) vpravo lze psát pro $n \geqq 3$ ve tvaru

$$V = \binom{n+2}{5};$$

za této podmínky je V tedy jistě číslo celé. Ale V je zřejmě celé číslo i pro $n = 0; 1; 2$.

Jestliže je $n < 0$, potom položíme-li ve výrazu (1)

$$n = -m,$$

kde m je celé kladné, nabude výraz V tvaru

$$V = -\frac{1}{120} \cdot (m+2)(m+1)\,m\,(m-1)(m-2) = -V',$$

kde

$$V' = \frac{1}{120} \cdot (m-2)(m-1)\,m\,(m+1)(m+2).$$

Podle předchozího je V' celé číslo pro $m > 0$ a tím i výraz V pro $n < 0$.

2. Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí skupinou číslic 6000.

Řešení. Podle binomické poučky obdržíme:

$$x = 11^{100} = (1+10)^{100} = 1 + 100 \cdot 10^1 + 100 \cdot 99 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 +$$

$$+ 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^3 + z.$$

Při tom z je součet zbývajících členů tvaru $\binom{10}{k} \cdot 10^3$ pro $k \geqq$ $\geqq 4$; protože příslušné kombinační číslo je číslo přirozené, je hodnota každého takového členu v dekadické soustavě zapsána číslem končícím alespoň čtyřmi nulami. Ale ani o čtvrtém členu v našem výrazu není třeba uvažovat, neboť součin $99 \cdot 98 \cdot \frac{1}{6}$ je číslo přirozené a ten máme ještě znásobit číslem 10^5, takže jde opět o číslo končící alespoň čtyřmi nulami. Součet prvních tří členů je $1 + 1000 + 495\,000 = 496\,001$. Číslo x má tedy v dekadické soustavě na posledních čtyřech místech skupinu číslic 6001 a proto číslo $x - 1$ končí skupinou 6000.

3. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který lze vepsat do kružnice, jestliže jsou dány velikosti a, b, c, d jeho stran.

Řešení. V rovině, v níž budeme provádět všechny úlohy, zvolme kladný smysl otáčení. Jsou-li dány tři navzájem různé body A, B, C, budeme úhlem $A(BC)$ rozumět úhel, o který je nutno otočit polopřímku AB, abychom dostali polopřímku AC. Velikost tohoto úhlu je jednoznačně určena až na celistvý násobek 2π (v míře obloukové).

Vypuklý čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme kladně orientovaný, když při obíhání jeho obvodu v kladném smyslu následují za sebou vrcholy pořádku A,B,C,D.

Naše úloha se redukuje v podstatě na úlohu: sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány jeho vrcholy A, B (o vzdálenosti a) a úsečky $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$. O všech číslech a, b, c, d předpokládáme, že jsou kladná.

Provedeme nejprve rozbor této úlohy a ukážeme, že takový čtyřúhelník existuje nejvýše jeden. Dejme tomu, že takový čtyřúhelník $ABCD$ existuje. Sestrojme podobný čtyřúhelník $D'C'B'A'$ (při této podobnosti odpovídají bodům A, B, C, D postupně body A', B', C', D') tak, že $A' \equiv C$, $B' \equiv D$.

Podle věty o obvodových úhlech víme, že $A(BD) + C(DB) = \pi$, a z podobnosti plyne (pozor na orientaci), že $A'(D'B') = A(BD)$; tedy bod C leží na úsečce BD'. Podobně zjistíme, že bod D leží na úsečce AC'.

Stejně $A(BD) + C'(B'D') = A(BD) + C(DB) = \pi$, tedy úsečky AB a $C'D'$ jsou rovnoběžné. Z popsaných vlastností okamžitě plyne, že body A, B, D', C' jsou navzájem různé a tvoří lichoběžník o základnách AB, $C'D'$ a ramenech AC', BD'. Z podobnosti dále plyne: $a' = \overline{A'B'} = \lambda a$, $b' = \overline{B'C'} = \lambda b$, $c' = \overline{C'D'} = \lambda c$, $d' = \overline{D'A'} = \lambda d$, kde $\lambda = \dfrac{c}{a}$ (neboť $\overline{A'B'} = \overline{CD}$). Náš kladně orientovaný lichoběžník $ABD'C'$ má tedy základny $\overline{AB} = a$, $\overline{D'C'} = \dfrac{c^2}{a}$ a ramena $\overline{BD'} =$

$$= \overline{BC} + \overline{A'D'} = b + \frac{c}{a}d = \frac{ab + cd}{a},\ \overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{B'C'} =$$

$$= d + \frac{c}{a}b = \frac{ad + bc}{a}.$$

Takový lichoběžník o daných stranách, o dané orientaci a daných dvou vrcholech na základně (v našem případě jsou to vrcholy A, B) existuje nejvýše jeden v případě $c \neq a$ a sestrojí se známým způsobem rozkladem na rovnoběžník o sousedních stranách AC', $C'D'$ a na trojúhelník o stranách $|\overline{AB} - \overline{C'D'}| = \left|a - \dfrac{c^2}{a}\right| = \left|\dfrac{a^2 - c^2}{a}\right|$, $\overline{AC'} = \dfrac{ad + bc}{a}$, $\overline{BD'} = \dfrac{ab + cd}{a}$.

Existuje tedy též nejvýše jeden hledaný čtyřúhelník, neboť uvedeným lichoběžníkem a stranami $\overline{BC} = b$, $\overline{DA} = d$ je náš čtyřúhelník určen jednoznačně.

Současně z uvedeného postupu vyplývá konstrukce tohoto čtyřúhelníku v případě $c \neq a$: Sestrojíme úsečky velikosti $a' = \lambda a = c$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$, dále trojúhelník o stranách $|a - c'|$, $b + d'$, $d + b'$. K němu připojíme rovnoběžník o stranách $d + b'$, c'. Tím obdržíme náš lichoběžník, na jehož ramena naseme úsečky velikosti b resp. d; pozor na okolnost, že může být $c > a$.

Případ $c = a$, $b \neq d$ převedeme na předcházející cyklickou záměnou stran. Případ $c = a$, $b = d$ je jasný. Dále z uvedeného postupu vyplývá, že nutná podmínka pro existenci hledaného čtyřúhelníka je, aby existoval trojúhelník o stranách $|a - c'|$, $b + d'$, $d + b'$. Dokážeme si nyní, že tato podmínka je též postačující. Jestliže tato podmínka je splněna a je-li $c \neq a$, můžeme snadno sestrojit kladně orientovaný lichoběžník $ABD'C'$ o základnách $\overline{AB} = a$, $\overline{C'D'} = c'$, a ramenech $\overline{BD'} = b + d'$, $\overline{AC'} = d + b'$ (při tom $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$, kde $\lambda = \dfrac{c}{a}$). Na ramenech BD', resp. AC' najdeme body D, resp. C tak, že $\overline{BC} = b$ a že $\overline{AD} = d$. To je možné, neboť $b < \overline{BD'}$, $d < \overline{AC'}$.

Předpokládejme nejprve, že $c < a$ (tedy též $c' < a$) a prodlužme strany AC' a BD', až se protnou v bodě E. Trojúhelníky $EC'D'$ a EAB jsou podobné s poměrem podobnosti $c' : a = \lambda c : a = \lambda^2$. Tedy $\overline{EC'} = \lambda^2 \overline{EA}$, $d + b' = \overline{C'A} = \overline{EA} - \overline{EC'} = (1 - \lambda^2)\,\overline{EA}$, tedy $\overline{EA} = \dfrac{d + b'}{1 - \lambda^2}$.

Podobně $\overline{EB} = \dfrac{b + d'}{1 - \lambda^2}$. Jsou tedy též podobné trojúhelníky EAB a ECD, neboť úhly u vrcholu E mají společné a platí

$$\overline{EC} = \overline{EB} - \overline{BC} = \frac{b + d'}{1 - \lambda^2} - b = \frac{\lambda d + \lambda^2 b}{1 - \lambda^2},$$

$$\overline{ED} = \overline{EA} - \overline{AD} = \frac{d + b'}{1 - \lambda^2} - d = \frac{\lambda b + \lambda^2 d}{1 - \lambda^2};$$

tedy $\overline{EC} : \overline{ED} = (d + \lambda b) : (b + \lambda d) = \overline{EA} : \overline{EB}$.

Úhly u vrcholů A a C ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tedy výplňkové a proto bod C leží na kružnici procházející body ABD (body C, A jsou přímkou BD odděleny).

Případ $c > a$ převede se snadno na předcházející (stačí sestrojit tětivový čtyřúhelník o stranách $\bar{a} = c$, $\bar{b} = d$, $\bar{c} = a$, $\bar{d} = b$; předcházející podmínka pro existenci takového čtyřúhelníka je totiž splněna: z délek $|a^2 - c^2|$, $ab + cd$, $ad + bc$

jakožto stran, lze sestrojit trojúhelník; tyto délky rovnají se postupně délkám $|\bar{c}^2 - \bar{a}^2|$, $\overline{cd} + \overline{ab}$, $\overline{bc} + \overline{ad}$ a přitom je $\bar{c} < \bar{a}$. Tedy existuje tětivový čtyřúhelník o stranách (postupně vzatých) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$).

Je-li $c = a$, je řešením naší úlohy lichoběžník o základnách b, d, o ramenech $a = c$ v případě, že $b \neq d$, a obdélník, když $a = c$, $b = d$.

Poznámka. Z trojúhelníkových nerovností pro trojúhelník o stranách $|a^2 - c^2|$, $ab + cd$, $ad + bc$ se snadno zjistí, že tento trojúhelník existuje právě tehdy, platí-li současně

$$a < b + c + d,$$

$$b < c + d + a,$$

$$c < d + a + b,$$

$$d < a + b + c.$$

To je tedy nutná a postačující podmínka pro existenci hledaného čtyřúhelníka.

4. Rovina je pokryta sítí shodných rovnostranných trojúhelníků. Dokažte, že neexistuje čtverec, jehož všecky vrcholy by ležely ve vrcholech sítě (t. j. ve vrcholech trojúhelníků sítě).

Řešení. Zvolíme jeden mřížový bod za počátek O souřadnic a osu x položíme do přímky obsahující strany trojúhelníků. Je-li velikost strany rovnostranného trojúhelníka rovna jedné, jsou souřadnice každého mřížového bodu sítě ve tvaru $\left(\frac{1}{2}n_1; \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}\right)$, kde n_1, n_2 jsou celá čísla téže parity. Obráceně každý bod $\left(\frac{1}{2}n_1; \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}\right)$, kde n_1, n_2 jsou celá čísla téže parity, je mřížovým bodem sítě.

Předpokládejme, že máme čtverec žádané vlastnosti, jehož jeden vrchol je v počátku souřadnic (toho lze vždy dosáhnout vhodnou volbou počátku). Jsou-li A, B dva vrcholy tohoto čtverce sousední k bodu O, a má-li bod A souřadnice $(x;\ y)$, má bod B souřadnice buď $(-y;\ x)$ nebo $(y;\ -x)$.*) Jsou-li body A, B mřížovými body sítě, je $x = \frac{1}{2}n_1$, $y = \frac{1}{2}n_2\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}n_3$, $x = \frac{1}{2}n_4\sqrt{3}$, kde n_1, n_2, n_3, n_4 jsou celá čísla, ne všechna rovna nule. To je však nemožné.

Jiné řešení úlohy. Zvolme vrchol jednoho trojúhelníka sítě o straně $2a$ (kde $a \neq 0$) za počátek O roviny komplexních čísel; budiž OA jedna ze stran tohoto trojúhelníka, potom budiž OA kladná poloosa x roviny komplexních čísel. Pak každý vrchol sítě je vyjádřen komplexním číslem tvaru

$$ka + lai\sqrt{3}, \tag{1}$$

kde k, l jsou celá čísla.

Protože strany čtverce jsou si rovny, je možno jednu z nich otočením převést v sousední stranu; středem otáčení je vrchol společný oběma stranám, úhel otočení je $90°$.

Zvolme vrchol předpokládaného čtverce v počátku O roviny komplexních čísel, což není na újmu obecnosti úlohy. Druhý a sousední vrchol Q může být kterýkoli jiný bod sítě; tento vrchol je určen komplexním číslem tvaru (1), kde čísla k_1, l_1 nejsou současně rovna nule.

Otočení o $90°$ převede bod Q v bod Q' a jemu přísluší komplexní číslo

$$\pm\, i\,(k_1a + l_1ai\sqrt{3}) = \mp\ l_1a\sqrt{3} \pm k_1ai, \tag{2}$$

*) Skutečně, je-li $B \equiv [x', y']$, platí $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, $xx' + yy' = 0$. Aspoň jedno z čísel x, y je různé od nuly; budiž na př. $y \neq 0$. Položme $x' = ty$ $\left(\text{t. j. } t = \dfrac{x'}{y}\right)$ a dosaďme za x' do rovnice $xx' + yy' = 0$; vyjde $y' = -tx$. Z první rovnice pak dostaneme $t^2 = 1$, t. j. $t = \pm 1$.

neboť násobení číslem $\pm i$ znamená rotaci kolem bodu O o $\pm$ 90°. Aby bod Q' byl bodem sítě, musí být reálná část čísla (2) celistvým násobkem čísla a. To je splněno jedině pro $l_1 = 0$, t. j. bod Q leží na ose x a strana čtverce $\overline{OQ} = k_1 a$, neboť $k_1 \neq 0$. Ale na ose y neleží žádný bod Q' takový, aby bylo $\overline{OQ'} = k_1 a$ a aby to byl bod sítě. (Upravené řešení s. Boh. Cenkla, 3b tř. Slovanského gymnasia v Olomouci.)

D. ÚLOHY II. KOLA, KATEGORIE B

1. Jsou dány dvě různé přímky p, q a bod A. Každé otáčení které převádí přímku p v přímku q, převádí bod A v jistý bod A'. Co vyplní všecky tyto body A'?

Řešení. Střed každého otáčení, které převádí přímku p v přímku q, je stejně vzdálen od obou těchto přímek; leží tedy na jedné z os souměrnosti přímek p, q, jsou-li různoběžné, nebo na ose souměrnosti přímek p, q, jsou-li rovnoběžné. Obráceně každý bod osy souměrnosti přímek p, q je zřejmě středem aspoň jednoho otáčení, které převádí p v q. Budiž X střed otáčení, který leží na ose o přímek p, q. Otáčení rozložme na dvě osové souměrnosti tak, aby první měla osu v přímce o; tato souměrnost převádí přímku p v q, proto musí druhá souměrnost převádět přímku q v samu sebe. Nyní jsou možné dva případy:

a) leží-li bod X mimo přímku q, je osa o' druhé souměrnosti kolmá k přímce q;

b) leží-li bod X na přímce q (a to nastane jedině pro průsečík přímek p, q, jsou-li různoběžné), je buď $o' \perp q$, nebo $o' \equiv q$.

Označme A'' obraz bodu A v osové souměrnosti (o).

Případ A. Je-li $p \parallel q$, vyplní body A' přímku r rovnoběžnou s přímkou q a procházející bodem A''. Každá souměrnost (o') totiž převede bod A'' v nějaký bod přímky r a obráceně ke každému bodu P přímky r existuje souměrnost (o'), která převádí A'' v P. Přímka r může splynout s přímkou $q\,(p)$, leží-li bod A'' na $q\,(p)$, t. j. leží-li bod A na $p\,(q)$.

Případ B. Jsou-li p, q dvě různoběžky, označíme o_1, o_2 jejich osy, A''_1, A''_2 obrazy bodu A v souměrnostech (o_1), (o_2). Body A' vyplní dvě přímky r_1, r_2 rovnoběžné s q a procházející body A''_1, A''_2. Pro $o' \equiv q$ leží rovněž obrazy bodů A''_1, resp. A''_2 na přímkách r_2, resp. r_1, neboť body A''_1, A''_2 jsou souměrně sdružené podle průsečíku přímek p, q. Přímky r_1, r_2 splynou navzájem a tedy i s přímkou q tehdy a jen tehdy, leží-li oba body A''_1, A''_2 na přímce q, t. j. leží-li bod A na přímce p.

2. Najděte všechna čtyřciferná čísla tvaru $aabb$ (kde $a \neq 0$ a b jsou arabské cifry), která jsou čtverci celého čísla!

Řešení. Předpokládejme, že takové číslo*) $c = n^2$ existuje. Pak

$$c = 1100a + 11b,$$

kde

$$0 < a \leqq 9, \qquad 0 \leqq b \leqq 9. \tag{1}$$

Protože $n^2 = 11(100a + b)$, je n dělitelné jedenácti, t. j.

$$n = 11m$$

a

$$11m^2 = 100a + b = 99a + (a + b). \tag{2}$$

Je tedy i $a + b$ dělitelno jedenácti. Avšak ze vztahů (1) vyplývá

$$0 < a + b \leqq 18,$$

*) V celém řešení píšeme místo „celé číslo“ stručně „číslo“.

takže

$$a + b = 11. \tag{3}$$

Dosazením do (2) dostaneme po zkrácení jedenácti

$$m^2 = 9a + 1.$$

Z čísel 1, 2, ..., 9 má právě $a = 7$ vlastnost, že $9a + 1$ je čtverec, a to čísla 8. Z rovnice (3) je pak $b = 4$. Existuje-li tedy řešení c, je $c = 7744$. Je však $7744 = (11 \cdot 8)^2$, takže číslo 7744 je skutečně řešení.

3. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)\, ab \leqq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte, kdy platí rovnost!

Řešení. Abychom toto tvrzení dokázali, stačí ukázat, že hodnota výrazu $V = (a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2)$ je pro všechna reálná a, b číslo nezáporné.

Upravujme postupně výraz

$$\begin{aligned} V &= (a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2) = a^3(a - b) - b^3(a - b) = \\ &= (a - b)(a^3 - b^3) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) = \\ &= (a - b)^2 \left[\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right]. \end{aligned}$$

1. Hodnota výrazu V je zřejmě číslo nezáporné, neboť první činitel je čtverec reálného čísla (což je vždy číslo nezáporné), druhý činitel je roven součtu dvou nezáporných čísel, tedy také číslo nezáporné; protože ani jeden z činitelů není záporný, je součin číslo nezáporné.

2. Aby bylo $V = 0$, je nutné a stačí, aby jeden z obou činitelů byl roven nule.

a) Buď je $(a - b)^2 = 0$, t. j. $a = b$;

b) nebo je druhý činitel, jímž je součet dvou nezáporných čísel, roven nule; tu je nutné a stačí, aby platilo současně $\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = 0$, $\frac{3}{4}a^2 = 0$. Z druhé podmínky plyne $a = 0$ a po dosazení do první podmínky je $b^2 = 0$, t. j. $b = 0$, neboli musí tedy platit $a = b = 0$. Ale tento vztah je už zahrnut v případě a).

Výraz V je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$.

4. Čtyřstěn $MNPQ$ nechť má nejdelší hranu délky d. Dokažte, že pro každé dva body A, B povrchu čtyřstěnu platí nerovnost $\overline{AB} \leqq d$, kde AB je vzdálenost bodů A, B.

Řešení. V důkazu použijeme věty (viz úlohu B 9 I. kola): *Trojúhelník TUV nechť má nejdelší stranu délky v. Pak pro každé dva body X, Y obvodu trojúhelníka platí nerovnost* $\overline{XY} \leqq v$, kde XY je *vzdálenost bodů* X, Y. Je-li $A \equiv B$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy že $A \not\equiv B$. Pak aspoň jeden z vrcholů M, N, P, Q neleží na přímce AB. Zvolme označení tak, aby bod M neležel na přímce AB. Rovina ABM protne čtyřstěn v trojúhelníku MKL, neboť průsečnice rovin ABM, NPQ musí protnout obvod trojúhelníka NPQ ve dvou různých bodech K, L, jinak by totiž ležely body A, B, M v přímce.

Podle citované věty je úsečka AB menší nebo rovna největší z úseček KL, LM, MK. Avšak podle téže věty je každá z úseček KL, LM, MK menší nebo rovna největší straně té stěny čtyřstěnu, v níž leží. Proto je $\overline{KL} \leqq d$, $\overline{LM} \leqq d$, $\overline{MK} \leqq d$, a tudíž i $\overline{AB} \leqq d$.

1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

Řešení. Podle předpokladu je $a > 0$, $b > 0$ a proto je i racionální číslo $c > 0$, neboť odmocnina z kladného čísla je kladná a součet dvou kladných čísel $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ je číslo opět kladné.

Z daného vztahu plyne, že $\sqrt{b} = c - \sqrt{a}$, $b = c^2 + a - 2c\sqrt{a}$, takže

$$\sqrt{a} = \frac{c^2 + a - b}{2c}, \quad \sqrt{b} = \frac{c^2 - a + b}{2c},$$

což jsou čísla racionální. Vedle toho je $a + 2\sqrt{ab} + b = c^2$, takže je

$$c^2 > a + b;$$

odtud plyne, že $c^2 + a - b > 2a > 0$, $c^2 - a + b > 2b > 0$, takže čísla $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou kladná.

2. Tabulka čísel

$$\begin{array}{c} a_1\ b_1\ c_1 \\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ e_2 \\ a_3\ b_3\ c_3\ d_3\ e_3\ f_3\ g_3 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

Řešení. Pišme místo sudého čísla s, místo lichého l. Pak počínajíc druhým řádkem lze první čtyři čísla v každém řádku zapsat schematicky takto:

2. řádek .... $l\ s\ l\ s$ ..
3. řádek ... $l\ l\ s\ l$ ...
4. řádek .. $l\ s\ s\ s$ ....
5. řádek . $l\ l\ l\ s$ .....

Z prvních tří čísel pátého řádku je patrno, že ve třech dalších řádcích se budou první čtyři čísla opakovat co do parity (sudost, lichost) jako v řádcích druhém, třetím a čtvrtém; toto schema se tedy po každém čtvrtém řádku opakuje. Protože se v našem schematu mezi prvními čtyřmi čísly od 2. řádku počínajíc vyskytuje alespoň jedno sudé číslo, je tvrzení úlohy dokázáno.

3. Budiž $ABCD$ vypuklý různoběžník, v němž $\overline{AB} = \overline{CD}$ a buďtež R, S středy stran AD, BC. Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS. Dokažte, že platí vztah

$$\sphericalangle\, BAU = \sphericalangle\, CDV.$$

Řešení. Označme $\overline{AR} = \overline{RD} = x$. Veďme úsečku RM tak, aby platilo $RM \uparrow\uparrow AB$, $\overline{RM} = \overline{AB}$, takže je $M \mathrel{=\!\!|\!\!=} B$ ($BM \uparrow\uparrow AR$, $\overline{BM} = x$; čtyřúhelník $ARMB$ je rovnoběžník podle poučky: Jestliže ve čtyřúhelníku $UVXY$ je $UV \uparrow\uparrow YX$, $\overline{UV} = \overline{XY}$, je to rovnoběžník).

Dále veďme úsečku RN tak, aby platilo $RN \uparrow\uparrow DC$, $\overline{RN} = \overline{DC}$, takže je $N \not\equiv C$ a $NC \uparrow\uparrow RD$, $\overline{NC} = \overline{RD} = x$.

Je tedy $\overline{BM} = \overline{NC} = x$, $BM \uparrow\uparrow NC$ (je totiž $AR \uparrow\uparrow RD$). Přímky BM, NC nesplývají, jinak by bylo $AD \parallel BC$, což je proti předpokladu. Také úsečky RM, RN nesplývají, neboť není $AB \parallel CD$, a tedy RMN je trojúhelník, v němž je $\overline{RM} = \overline{AB} = \overline{DC} = \overline{RN}$, t. j. $\overline{RM} = \overline{RN}$.

Úsečky BM, CN jsou podle naší úvahy nesouhlasně rovnoběžné a proto si navzájem odpovídají ve středové souměrnosti o středu S, v které je bod C obrazem bodu B. V téže souměrnosti si tedy odpovídají body M, N, takže bod S je středem základny MN rovnoramenného trojúhelníka RMN. Tudíž je

$$\sphericalangle BAU = \sphericalangle MRS = \sphericalangle NRS = \sphericalangle CDV.$$

4. Rozměry obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC, a to v případě, že čísla p, q jsou a) nesoudělná, b) soudělná.

Řešení. (Výrokem „úhlopříčka protíná čtverec sítě" rozumíme v dalším, že taková úhlopříčka obsahuje alespoň jeden bod ležící uvnitř čtverce.)

a) Označení zvolme tak, aby bylo $p > q$. Uvažovaná úhlopříčka AC daného obdélníka $ABCD$ neobsahuje mezi body A, C žádný vrchol sítě. Neboť jinak by existovala přirozená čísla $p_1 < p$, $q_1 < q$ tak, že by platilo $\dfrac{q}{p} = \dfrac{q_1}{p_1}$ (podobnost trojúhelníků), čili $p_1q = pq_1$. Ježto p, q jsou čísla nesoudělná, bylo by číslo p dělitelem čísla p_1, a to je ve sporu se vztahem $p_1 < p$.

Úhlopříčka AC protíná jeden čtverec v každém z p „sloupců", které jsou mezi A, B. Dva čtverce protíná jen v tom sloupci, kde překračuje jednu z $q - 1$ přímek sítě, které jsou rovnoběžné s AB. Více než dva čtverce v sloupci nemůže protínat, neboť by pak platilo $\frac{q}{p} > 1$, a to je ve sporu s naším předpokladem $p > q$.

Celkový počet čtverců, které protíná úhlopříčka AC, je tedy

$$p + q - 1. \tag{1}$$

b) Buďte p, q čísla soudělná a d jejich největší společný dělitel; pak čísla $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ jsou nesoudělná. Pro obdélník čtvercové sítě o stranách velikosti $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$ dostaneme podle (1), že jeho úhlopříčka u prochází celkem

$$x = \frac{p}{d} + \frac{q}{d} - 1 \tag{2}$$

čtverci sítě.

Úhlopříčka AC daného obdélníka $ABCD$ obsahuje celkem $d + 1$ bodů čtvercové sítě (včetně bodů A, C) a rozpadá se tedy na d úseček velikosti u, které nemají žádný společný vnitřní bod. Každou z těchto úseček považujeme za úhlopříčku obdélníka o rozměrech $\frac{p}{d}, \frac{q}{d}$. Pak každá z těchto d úhlopříček prochází podle (2) právě x čtverci sítě; jde tedy úhlopříčka AC celkem $x \cdot d$, neboli

$$xd = p + q - d \tag{3}$$

čtverci sítě. Výraz (1) je speciální případ výrazu (3) pro $d = 1$.