Antonín Slavík

Hassler Whitney a teorie matroidů

In: Martina Bečvářová (author); Jindřich Bečvář (author); Zdeněk Halas (author); Magdalena Hykšová (author); Antonín Slavík (author); Ivan Netuka (author); Jiří Veselý (author); Jaroslav Zhouf (author): Matematický svět mezi válkami. (Czech). Praha: České vysoké učení technické v Praze, Ústav aplikované matematiky Fakulty dopravní ČVUT, 2020. pp. 247–266.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404400

Hassler Whitney a teorie matroidů

Antonín Slavík

Abstract. In the 1930s, Hassler Whitney observed that concepts such as independent sets, rank, and basis make sense not only in linear algebra, but also in graph theory. By isolating their key properties, he arrived at the notion of a matroid, and developed the basics of matroid theory, including duality. We examine the contents of his landmark paper published in 1935, and briefly describe some subsequent papers by Takeo Nakasawa, Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane, and Richard Rado. Along the way, we point out the relations between matroids and lattices, configurations in projective geometry, and the greedy algorithm.

Key words. Matroid, matrix, graph, independence, rank, nullity, basis, circuit, duality, lattice, projective geometry, system of distinct representatives, greedy algorithm.

1. Úvod

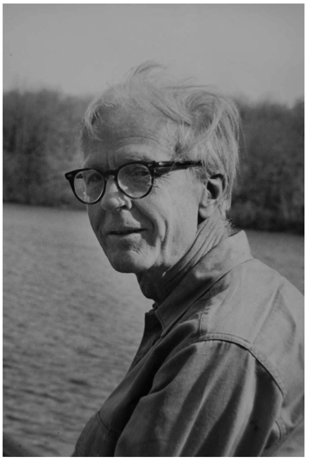
Teorie matroidů je významnou součástí diskrétní matematiky s přesahy do algebry, teoretické informatiky a dalších disciplín. Pojem matroidu zavedl ve 30. letech 20. století americký matematik Hassler Whitney (1907–1989) v souvislosti s výzkumem v teorii grafů (věnoval se zejména barvení grafů, problematice rovinných grafů a duálním grafům). V tomto textu se pokusíme přiblížit Whitneyovy úvahy a výsledky. Stručně popíšeme i některé navazující práce ukazující souvislosti matroidů s teorií svazů, projektivní geometrií a hladovým algoritmem. Výklad je koncipován tak, aby byl srozumitelný i pro čtenáře bez předchozích znalostí o matroidech. Ve srovnání s podobně zaměřeným textem [Vo] zacházíme do větších podrobností, věnujeme se detailněji grafovým matroidům, dualitě a zmiňujeme též výsledky japonského matematika Takeo Nakasawy, který je považován za druhého otce matroidů.

Výzkum v teorii matroidů pokračuje i v současnosti, vycházejí stále nové publikace věnované tomuto tématu. K základním pramenům patří monografie [Ran], [We1], [Wt], [T] a zejména novější [O]. Přehledové články [NN], [Wi2] představují čtivý a přístupný úvod do teorie matroidů. Pro zájemce o historii je nepostradatelným pomocníkem kniha [Ku], kde jsou přetištěny a stručně komentovány klíčové časopisecké práce včetně Whitneyova článku z roku 1935. O historii teorie grafů, která podstatně přispěla ke zrodu teorie matroidů, se lze dočíst např. v [BW], [BLW], [S2], [Š].

2. Hassler Whitney

Hassler Whitney byl jedním z předních amerických matematiků 20. století. Dosáhl významných výsledků především v diskrétní matematice, matematické analýze a algebraické topologii. Uvedeme pouze velmi stručný životopis; podrobnější informace o Whitneyově životě a díle lze najít v pěkné knize [Ke], která obsahuje i mnoho unikátních fotografií. Whitney vystudoval Yaleovu univerzitu, kde získal dva bakalářské tituly – z fyziky a z hudby. Postupně však začal více inklinovat k matematice a doktorské studium již absolvoval na Harvardově univerzitě u slavného matematika George Davida Birkhoffa. Whitneyova disertace byla zaměřena na teorii grafů, zejména na barvení grafů a témata související s rovinnými grafy. Po ukončení doktorského studia získal díky Birkhoffovi místo na Harvardu. Od roku 1952 působil na univerzitě v Princetonu a rovněž ve známém Institute for Advanced Study. Získal řadu významných ocenění, např. Wolfovu cenu, Steele Prize, Lester R. Ford Award a National Medal of Science. Během 2. světové války byl Whitney členem panelu aplikované matematiky v National Defense Research Committee, pracoval na zlepšení systému zaměřování nepřátelských strojů z letadel (viz [MC]). V pozdějším věku se intenzivně zajímal o výuku matematiky na základních školách, kde dokonce i sám vyučoval.

Zmíníme ještě několik dalších zajímavostí. Po celý život byl Whitney nadšeným horolezcem. Podstatně k tomu přispěl jeho dvouletý pobyt ve Švýcarsku, kam odcestoval ve svých 14 letech společně s matkou a sourozenci a již v tomto věku zdolával vrcholky alpských velikánů. Kromě horolezectví si Whitney udržoval kondici i běháním (údajně běhal obden 6 až 12 mil). Další jeho vášní byla hra na housle a na violu (byl členem sboru Princeton Musical Amateurs). Whitney měl celkem pět dětí z prvních dvou manželství, třetí a poslední sňatek uzavřel v 78 letech. Po Whitneyově smrti byl jeho popel přepraven do Evropy a uložen na vrcholu švýcarské hory Dents Blanches.



Obr. 1. Whitney v roce 1973 (Wikimedia Commons, autorka S. Thurston)

3. Definice matroidu

Při práci na své doktorské disertaci si Whitney všiml některých překvapivých souvislostí mezi grafy (a jejich podgrafy) a konečnými množinami vektorů (a jejich podmnožinami). V obou případech lze hovořit o tzv. nezávislých množinách, zavést pojmy báze, hodnost, nulita, kružnice, atd. Své úvahy Whitney shrnul v článku *On the Abstract Properties of Linear Dependence* [Wh3] z roku 1935. Jeho stručný obsah je následující: V první části nazvané *Matroids* zavedl Whitney pojem matroidu, který zobecňuje struktury z teorie grafů a lineární algebry. Ukázal, že matroidy lze definovat čtyřmi ekvivalentními způsoby.[1] Ve druhé části *Separability, Dual Matroids* se věnoval tzv. separabilním matroidům a zavedl pojem duálního matroidu, který zobecňuje známou konstrukci duálního grafu k zadanému rovinnému grafu. Třetí část článku nazvaná *Matrices and Matroids* rozebírá vztahy mezi matroidy a maticemi. Článek uzavírá *Appendix*, kde jsou charakterizovány matroidy reprezentovatelné maticemi nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. V následujícím textu rozebereme Whitneyho úvahy podrobněji.

První ze čtyř ekvivalentních definic matroidu je založena na pojmu hodnost:

Nechť M je konečná množina a každé její podmnožině je přiřazeno číslo $r(N)$, tzv. hodnost N. Tento systém se nazývá matroid, jsou-li splněny následující podmínky:

(1) *Hodnost prázdné množiny je* 0.

(2) *Pro každou podmnožinu N a prvek e neležící v N platí $r(N+e) = r(N)+k$, kde $k \in \{0,1\}$.*

(3) *Pro každou podmnožinu N a prvky e_1, e_2 neležící v N platí: Pokud $r(N+e_1) = r(N+e_2) = r(N)$, pak $r(N+e_1+e_2) = r(N)$.*

Ve formulaci jednotlivých podmínek se přidržujeme poněkud nestandardního Whitneyova zápisu, kde $+$ značí sjednocení, např. $N+e$ znamená sjednocení množiny N s jednoprvkovou množinou $\{e\}$. Stejně jako Whitney budeme matroid ztotožňovat s množinou M, přestože správnější by bylo definovat matroid jako dvojici $\mathcal{M} = (M, r)$; množina M se pak označuje jako nosná množina matroidu $\mathcal{M}$.

Patrně nejjednodušším příkladem matroidu je tzv. maticový matroid, kde prvky množiny M jsou sloupcové vektory libovolné matice.[2] Hodnost libovolné podmnožiny $N \subset M$ je pak dimenze lineárního obalu N. Snadno se ověří, že jsou splněny všechny tři podmínky z definice matroidu: U první z nich vycházíme z toho, že lineárním obalem prázdné množiny je triviální vektorový prostor obsahující pouze nulový vektor. Dále je zřejmé, že přidáním jednoho vektoru se dimenze lineárního obalu buď nezmění, nebo vzroste o jedničku. Platnost třetí podmínky plyne z toho, že pokud $r(N+e_1) = r(N+e_2) = r(N)$, pak vektory e_1, e_2 leží v lineárním obalu N, a tudíž $r(N+e_1+e_2) = r(N)$.

---

[1] Situaci dobře vystihuje citát z [Ku, s. 18]: *A curious feature of matroid theory not shared by other areas of mathematics is that there are many natural and quite different ways of defining a matroid.*

[2] Z tohoto příkladu vychází i terminologie – termín matroid je odvozen od slova *matrix*.

V každém matroidu lze zavést následující pojmy:

- *Nulita* množiny $N \subset M$ je číslo $n(N) = |N| - r(N)$.
- $N \subset M$ je *nezávislá množina*, pokud $n(N) = 0$ (neboli $r(N) = |N|$).
- *Báze* je maximální nezávislá množina (vzhledem k inkluzi).
- *Kružnice* je minimální závislá množina (vzhledem k inkluzi).

V maticovém matroidu mají pojmy nulita, nezávislá množina a báze stejný význam jako v lineární algebře. Kružnice je pak každá minimální lineárně závislá množina vektorů.[3]

Whitney formuluje a dokazuje některá tvrzení související se zavedenými pojmy, např.:

- Pokud $A \subset B \subset M$, pak $r(A) \leq r(B)$, $n(A) \leq n(B)$.
- Podmnožina nezávislé množiny je nezávislá.
- $N \subset M$ je nezávislá množina, právě když je obsažena v nějaké bázi, což nastává právě tehdy, když neobsahuje žádnou kružnici.

Jiný způsob, jak definovat matroidy, je založen na tom, že předepíšeme axiomy pro nezávislé množiny:

Nechť M je konečná množina a každá její podmnožina je buď „nezávislá“, nebo „závislá“. Nechť platí následující podmínky:

(1) (*Prázdná množina je nezávislá.*)[4]

(2) *Podmnožina nezávislé podmnožiny je nezávislá.*

(3) *Pokud $N = e_1 + \cdots + e_p$ a $N' = e'_1 + \cdots + e'_{p+1}$ jsou nezávislé množiny, pak existuje i takové, že $e'_i \notin N$ a $N + e'_i$ je nezávislá.*

Poznamenejme, že v případě maticového matroidu plyne platnost třetí podmínky ze Steinitzovy věty o výměně. Pokud by totiž každá množina $N + e'_i$ byla závislá, znamenalo by to, že $e'_1, \ldots, e'_{p+1}$ leží v lineárním obalu $e_1, \ldots, e_p$, a tedy podle Steinitzovy věty platí $p + 1 \leq p$, což je spor.

K ověření skutečnosti, že nová definice matroidu je ekvivalentní s původní definicí, stačí položit

$$r(N) = \text{počet prvků největší nezávislé podmnožiny } N$$

a ukázat, že jsou splněny všechny tři požadavky kladené na hodnost.

Další možná definice matroidu je založena na tom, že předepíšeme axiomy pro báze:

---

[3] Existuje tedy netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna nulovému vektoru. Všechny koeficienty v této lineární kombinaci musí být nenulové (jinak by bylo možné některý vektor vynechat). Lineární kombinaci si lze představit jako lomenou čáru složenou z vektorů, která začíná a končí ve stejném bodě, což navozuje představu kružnice.

[4] Tuto podmínku uvádíme v závorce, neboť Whitney ji explicitně nezmiňuje, ale z kontextu je zřejmé, že předpokládá její platnost. Ekvivalentně lze požadovat existenci aspoň jedné nezávislé množiny.

Nechť M je konečná množina a každá její podmnožina buď je, nebo není „báze“. Nechť platí následující podmínky:

(1) (*Existuje aspoň jedna báze.*)[5]

(2) *Vlastní podmnožina báze není bází.*

(3) *Pokud B a B' jsou báze a $e \in B$, pak existuje prvek $e' \in B'$ takový, že $B - e + e'$ je báze.*

Tato definice je ekvivalentní s předchozí – stačí definovat nezávislé množiny jako množiny obsažené v nějaké bázi a ověřit, že jsou splněny všechny tři podmínky kladené na nezávislé množiny.

Podobně jako v lineární algebře mají báze v matroidech následující vlastnosti:

- Každé dvě báze M mají stejný počet prvků.
- B je báze M, právě když $r(B) = r(M)$ a $n(B) = 0$.
- Každou nezávislou množinu lze doplnit na bázi.

Whitney zmiňuje ještě čtvrtou ekvivalentní definici matroidu založenou na axiomech pro kružnice:[6]

Nechť M je konečná množina a každá její podmnožina buď je, nebo není „kružnice“. Nechť platí následující podmínky:

(1) (*Prázdná množina není kružnice.*)[7]

(2) *Vlastní podmnožina kružnice není kružnicí.*

(3) *Jsou-li P_1, P_2 kružnice, $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1 \setminus P_2$, pak existuje kružnice P_3 obsažená v $P_1 \cup P_2$ obsahující e_2 a neobsahující e_1.*[8]

Definujeme-li nezávislé množiny jako množiny neobsahující žádnou kružnici, pak lze ověřit, že tato definice je ekvivalentní s definicí pomocí nezávislých množin.[9]

4. Matroidy a grafy

Druhým důležitým typem matroidů jsou tzv. grafové matroidy. Whitney je v článku [Wh3] zmiňuje jen velmi stručně, a to hned v úvodu:

This paper has a close connection with a paper by the author on linear graphs; we say a subgraph of a graph is independent if it contains no circuit. Although graphs are, abstractly, a very small subclass of the class of matroids,

---

[5] Whitney tuto podmínku explicitně nezmiňuje.

[6] Existují i jiné ekvivalentní přístupy, např. definice založená na operaci uzávěru, viz [O], [We1].

[7] Whitney tuto podmínku explicitně neuvádí.

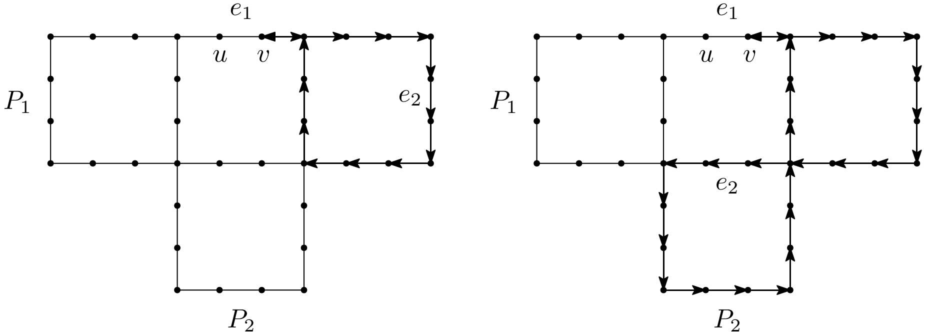
[8] Tato podmínka bývá v novějších textech uváděna ve zjednodušené podobě: Jsou-li P_1, P_2 dvě různé kružnice a $e \in P_1 \cap P_2$, pak existuje kružnice P_3 obsažená v $P_1 \cup P_2$, která neobsahuje e.

[9] Whitney zde postupuje mírně odlišně a dokazuje ekvivalenci s první definicí založenou na hodnosti.

(see the appendix), many of the simpler theorems on graphs, especially on non-separable and dual graphs, apply also to matroids. For this reason, we carry over various terms in the theory of graphs to the present theory.

Článkem citovaným v první větě úryvku je míněna Whitneyova práce *Non-Separable and Planar Graphs* [Wh2] z roku 1932. Byl to právě výzkum v teorii grafů, který Whitneyho dovedl k matroidům.

Každému neorientovanému grafu G lze přiřadit grafový matroid, ve kterém je M množinou všech hran grafu G a pojem kružnice má stejný význam jako v teorii grafů – jde o cyklus, tj. uzavřenou cestu po hranách grafu, která každým vrcholem prochází nejvýše jednou. Abychom se přesvědčili, že se skutečně jedná o matroid, je potřeba ověřit třetí podmínku kladenou na kružnice (splnění prvních dvou podmínek je zřejmé): *Jsou-li P_1, P_2 kružnice v grafu G a jsou-li dány hrany $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1 \setminus P_2$, pak existuje kružnice P_3 obsažená v $P_1 \cup P_2$ obsahující e_2 a neobsahující e_1.* Nechť hrana e_1 spojuje vrcholy u, v. Myšlenka, jak najít kružnici P_3, je následující: Jdeme z vrcholu v (opačným směrem, než je u) po kružnici P_1 tak dlouho, dokud neprojdeme hranou e_2. Poté pokračujeme dále, dokud nenajdeme nejbližší průsečík P_1 s P_2 (víme, že kružnice se musí protnout nejpozději ve vrcholu u). Z tohoto vrcholu se po hranách P_2 vrátíme zpátky do vrcholu v (tak, abychom se vyhnuli u). Tah, který jsme tímto způsobem zkonstruovali, ještě nemusí být hledanou kružnicí. Na začátku a na konci tahu mohou být shodné hrany, které odstraníme. Po této úpravě získáme buď přímo hledanou kružnici P_3 (obr. 2 vlevo), nebo sjednocení několika kružnic (obr. 2 vpravo) – z nich vybereme tu, která obsahuje hranu e_2.



Obr. 2. Nalezení kružnice neobsahující e_1 a obsahující e_2

Před dalším výkladem o grafových matroidech je užitečné připomenout několik základních pojmů z teorie grafů:

- Souvislý graf, který neobsahuje kružnici, se nazývá *strom.*
- Graf, který neobsahuje kružnici (ale nemusí být souvislý), se nazývá *les.*
- Kostra souvislého grafu je podgraf, který je stromem a obsahuje všechny vrcholy grafu (ekvivalentně lze říct, že jde o maximální podstrom daného grafu).

- Pro každý strom platí[10] $|E| = |V| - 1$. Pro každý les s k souvislými komponentami platí $|E| = |V| - k$.

Nyní si můžeme rozmyslet, že v každém grafovém matroidu platí následující tvrzení:

- Množina hran je nezávislá, právě když neobsahuje kružnici (takové množiny se v teorii grafů nazývají acyklické).
- Je-li graf souvislý, pak jeho bází je každá kostra grafu a hodnost grafu je $|V| - 1$.
- Báze libovolného grafu s k souvislými komponentami je sjednocení koster těchto komponent, hodnost grafu je $|V| - k$.
- Nulita grafu s k komponentami je $|E| - |V| + k$; jde o maximální počet hran, které lze odebrat z grafu tak, aby zůstal zachován počet komponent. Tato hodnota je nulová, právě když jde o les.

Pojmy hodnost a nulita grafu se vyskytují již ve Whitneyově starším článku [Wh1], který by se dal označit jako „popularizační". Je věnován principu inkluze a exkluze, o kterém Whitney tvrdí, že je dobře znám logikům, ale zasloužil by si, aby se s ním seznámili i matematikové.[11] V článku představuje tři aplikace: 1) nalezení počtu čísel nepřevyšujících dané číslo, která nejsou dělitelná danými čísly, 2) vzorec pro počet permutací bez pevných bodů, 3) výpočet koeficientů chromatického polynomu. Je-li dán graf G s n vrcholy, pak počet způsobů, jak je obarvit pomocí λ barev tak, aby sousední vrcholy měly různé barvy, je jisté číslo $P(\lambda)$, kde P je polynom stupně n nazývaný chromatický polynom grafu G.[12] Whitney ukázal, že pro chromatický polynom platí

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j} (-1)^{i+j} m_{ij} \lambda^{n-i},$$

kde m_{ij} je počet podgrafů grafu G s hodností i a nulitou j.

5. Dualita

Hodnost a nulita grafu hrály klíčovou roli i ve Whitneyově článku [Wh2], jehož ústředním tématem jsou duální a rovinné grafy. Připomeňme, že graf se nazývá rovinný, pokud jej lze nakreslit do roviny tak, aby se jeho hrany nekřížily. Hrany rovinného grafu dělí rovinu na oblasti nazývané stěny.

Existuje standardní geometrická konstrukce, jak k libovolnému rovinnému grafu G přiřadit tzv. duální graf G^*: Do každé stěny grafu G umístíme jeden vrchol duálního grafu G^*. Počet hran bude stejný jako v původním grafu

---

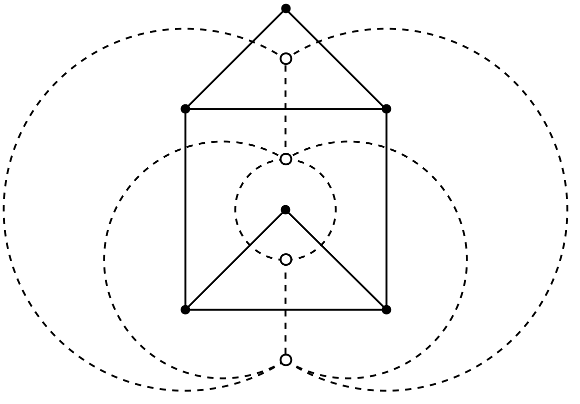
[10] Používáme standardní značení z teorie grafů: V je množina vrcholů a E je množina hran daného grafu.

[11] Dnes tato poznámka působí poněkud kuriózně, neboť princip inkluze a exkluze je běžnou součástí úvodních kurzů kombinatoriky, viz např. [MN].

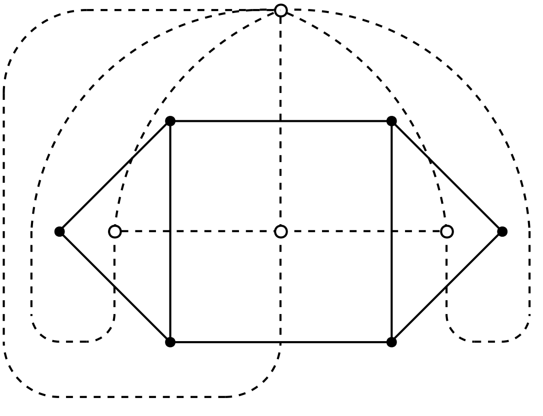
[12] K tomuto výsledku dospěl George David Birkhoff v roce 1912, když se zabýval barvením rovinných map a snažil se vyřešit problém čtyř barev, viz [Bi1], [BW], [BLW] a [S2].

a sestrojíme je tak, že každá hrana e^* v G^* kříží právě jednu hranu e v G a spojuje vrcholy odpovídající stěnám, které odděluje e. Máme tudíž bijekci mezi hranami G a G^*, viz obrázek 3.

Hovoříme sice o duálním grafu, správně bychom však měli používat termín multigraf – jde o zobecnění grafu, ve kterém dva vrcholy mohou být spojeny více než jednou hranou. Viz opět příklad na obr. 3, kde prostřední dva vrcholy duálního grafu jsou spojeny dvojicí hran.



Obr. 3. Graf (plnou čarou) a jeho duální graf (čárkovaně)



Obr. 4. Jiné nakreslení stejného grafu a jeho duální graf (čárkovaně)

Duální graf G^* obecně závisí na nakreslení původního grafu G – může se stát, že duální grafy ke dvěma různým nakreslením grafu G nejsou izomorfní. Na obr. 4 je jiné nakreslení grafu z obr. 3 a jeho duální graf. Maximální stupeň vrcholu v tomto duálním grafu je 6, zatímco maximální stupeň vrcholu v duálním grafu na obr. 3 je 5; odtud plyne, že duální grafy nejsou izomorfní.

Duální grafy se přirozeně vyskytují např. v úlohách souvisejících s barvením map, jako je známý problém čtyř barev. Místo barvení jednotlivých států, které představují stěny rovinného grafu, je mnohem jednodušší přejít k duálnímu grafu a barvit jeho vrcholy.

Každý souvislý graf G je izomorfní se svým druhým duálem G^{**}. Kromě toho platí, že při výše popsané bijekci mezi hranami G a G^* odpovídají kružnicím v G minimální řezy v G^* a naopak. Připomeňme, že řez je množina hran, po jejichž odstranění se zvětší počet komponent grafu (speciálně tedy platí, že souvislý graf se stane nesouvislým). Řez se nazývá minimální, pokud žádná jeho vlastní podmnožina není řezem.

Vztah mezi kružnicemi v G a minimálními řezy v G^* je klíčem k nové definici duálního grafu; jde o tzv. algebraický (nebo též abstraktní) duál:

Graf G^* je algebraickým duálem grafu G, jestliže existuje bijekce mezi jejich hranami taková, že množina hran v G je kružnice, právě když odpovídající množina hran v G^* je minimální řez.

Whitneyho definice duálu z roku 1932 vypadá na první pohled odlišně – je formulována v řeči nulity a hodnosti, dá se však ukázat, že je ekvivalentní s předchozí definicí:

Graf G^* je algebraickým duálem grafu G, jestliže existuje bijekce mezi jejich hranami taková, že pokud H je libovolný podgraf G a $G^* \setminus H^*$ je doplněk odpovídajícího podgrafu v G^*, pak $n(H) + r(G^* \setminus H^*) = r(G^*)$.

Whitney zformuloval a dokázal některá tvrzení o algebraických duálech:

- Je-li G^* algebraickým duálem G, pak $r(G^*) = n(G)$, $n(G^*) = r(G)$.
- Je-li G^* algebraickým duálem G, pak G je algebraickým duálem G^*.
- G má algebraický duál, právě když je rovinný.

Hlavním výsledkem článku [Wh2] je tedy formulace čistě kombinatorické definice duálního grafu, která pracuje pouze se zadaným grafem, nikoliv jeho konkrétním nakreslením do roviny. Samotná definice ani nepředpokládá, že G je rovinný graf – tato skutečnost je důsledkem existence algebraického duálu.

Vraťme se však k matroidům. Jsou-li grafy speciálními případy matroidů, bylo by možné zavést pojem duálního matroidu? Whitney v článku [Wh3] ukazuje, že přechod od grafů k matroidům je velmi přímočarý:

M^* je duální matroid k M, pokud existuje bijekce mezi jejich prvky taková, že pro každý podmatroid N matroidu M platí[13]

$$n(N) + r(M^* \setminus N^*) = r(M^*).$$

Vzápětí dokazuje větu, která bývá v novějších textech brána přímo za definici duálního matroidu:

[13] Používáme stejné symboly r, n pro hodnost a nulitu v M i v M^*.

M^* je duální matroid k matroidu M, pokud existuje bijekce mezi jejich prvky taková, že báze v M odpovídají doplňkům bází v M^* a naopak.[14]

Odtud je již zřejmé, že (na rozdíl od grafů!) ke každému matroidu existuje duální matroid, který je určen jednoznačně až na izomorfismus. Zcela jasná je i skutečnost, že pokud M^* je duální matroid k M, pak M je duální matroid k M^*. Kromě toho Whitney ukazuje, že pro hodnost a nulitu duálního matroidu platí $r(M^*) = n(M)$, $n(M^*) = r(M)$.

Je poučné rozmyslet si, jak vypadají duální matroidy k některým konkrétním matroidům. Whitney se podrobně věnuje maticovým matroidům a ukazuje, že jejich duály jsou opět maticové matroidy. Rozebereme jeho úvahy podrobněji: Nechť je dána matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Víme, že prvky příslušného maticového matroidu M jsou sloupce matice A. Tvoří-li sloupce na pozicích $j_1, \ldots, j_p$ kružnici, pak existují koeficienty $b_1, \ldots, b_n$ takové, že

$$a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

přičemž $b_j \neq 0$, právě když $j \in \{j_1, \ldots, j_p\}$. Obsahuje-li M celkem s kružnic, pak touto úvahou získáme celkem s sad čísel $b_{i1}, \ldots, b_{in}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, ze kterých sestavíme matici $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times n}$. Whitney ji nazývá kružnicovou maticí (*circuit matrix*) matice A a dokazuje, že maticový matroid příslušný k B je duálním matroidem k M. Dualita maticových matroidů se dá interpretovat i geometricky: Pokud maticový matroid M odpovídá matici, jejíž řádkové vektory generují jistý podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, pak duální matroid M^* odpovídá libovolné matici, jejíž řádkové vektory generují ortogonální doplněk $U^\perp$.

Whitneyova definice duálního matroidu byla přímo inspirována definicí algebraického duálu k rovinnému grafu. Jak však vypadá duální matroid ke grafovému matroidu $M(G)$, který vznikne z libovolného (ne nutně rovinného) grafu G? Uvažujme matroid $M^*(G)$, jehož prvky jsou hrany grafu G a kružnice jsou právě všechny minimální řezy v G (ekvivalentně lze říct, že nezávislé množiny jsou právě všechny množiny hran, které nejsou řezy v G). Matroid $M^*(G)$ se nazývá kografový matroid příslušný ke grafu G a lze ukázat (viz např. [Wi1, kapitola 32]), že jde o duální matroid ke grafovému matroidu, neboli $M(G)^* = M^*(G)$. Pokud G je rovinný graf a G^* jeho duál, pak samozřejmě platí též $M^*(G) = M(G^*)$, neboť pojem duálního matroidu zobecňuje pojem duálního grafu. Poznamenejme, že G^* sice nemusí být určen jednoznačně, různé duální grafy G^* však vedou vždy ke stejnému matroidu $M(G^*)$.

Vidíme, že pojem duálního matroidu představuje jednoduchou, přitom však velmi hlubokou myšlenku, která propojuje na první pohled zcela odlišné koncepty, jako je kolmost ve vektorových prostorech a dualita v teorii grafů. Již jsme připomněli užitečnost duality v problémech souvisejících s barvením map. Další využití duality spočívá v tom, že každé tvrzení z teorie matroidů platí nejen v libovolném matroidu M, ale i v jeho duálním matroidu M^*. Uveďme jednoduchý příklad. Víme, že v každém matroidu platí následující tvrzení:

[14] Často se dokonce ztotožňují prvky původního a duálního matroidu. Báze v M^* jsou pak přímo doplňky bází v M.

Jsou-li P_1, P_2 kružnice, $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1 \setminus P_2$, pak existuje kružnice P_3 obsažená v $P_1 \cup P_2$ obsahující e_2 a neobsahující e_1.

Toto tvrzení speciálně platí nejen v každém grafovém matroidu, ale také v každém kografovém matroidu, kde kružnicím odpovídají minimální řezy. Zcela bez námahy tak dostáváme další výsledek z teorie grafů:

Jsou-li P_1, P_2 minimální řezy, $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1 \setminus P_2$, pak existuje minimální řez P_3 obsažený v $P_1 \cup P_2$ obsahující e_2 a neobsahující e_1.

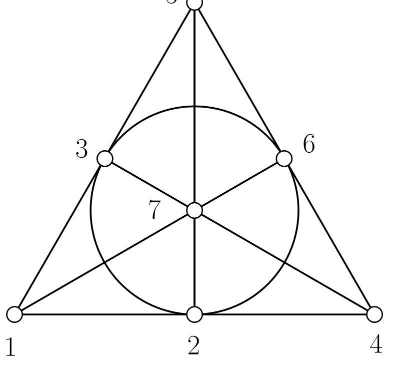
6. Klasifikace matroidů

Ani dualitou ještě Whitneyho průkopnický článek [Wh3] nekončí. Autor otevírá další důležitou otázku, která je dodnes aktuální: Jak vypadají všechny možné matroidy? Je každý matroid izomorfní s nějakým grafovým matroidem, případně maticovým matroidem, nebo existují i zcela odlišné typy matroidů? Zatím jsme uvažovali pouze maticové matroidy odpovídající reálným maticím, avšak konstrukce maticového matroidu dává smysl pro matice nad libovolným tělesem. Můžeme se tedy ptát, zda každý matroid je reprezentovatelný maticí nad vhodným tělesem.

Whitney uvádí příklad matroidu M', který není reprezentovatelný žádnou reálnou maticí. Matroid má sedm prvků označených $1, \ldots, 7$ a jeho bázemi jsou právě všechny trojice prvků kromě následujících sedmi (na obr. 5 jsou znázorněny úsečkami a kružnicí):

$$124, \quad 135, \quad 167, \quad 236, \quad 257, \quad 347, \quad 456.$$

To znamená, že každá k-prvková podmnožina matroidu, kde $k \leq 2$, má hodnost k. Každá alespoň čtyřprvková podmnožina má hodnost 3 a každá tříprvková podmnožina má hodnost 2 nebo 3 podle toho, zda je nebo není ve výše uvedeném seznamu.



Obr. 5. Matroid M' (Fanův matroid)

Whitney nejprve ověří, že jde skutečně o matroid, a poté sporem dokáže, že M' není reprezentovatelný reálnou maticí (využívá přitom jisté dříve dokázané tvrzení o kružnicových maticích). V poznámce pod čarou uvádí zajímavou informaci:

After the author had noted that M' … corresponds to no linear graph, and had discovered a matroid with nine elements corresponding to no matrix, Saunders MacLane found that M' corresponds to no matrix, and is a well known example of a finite projective geometry (see O. Veblen and J. W. Young, Projective Geometry, pp. 3–5).

Souvislost s projektivní geometrií je následující: Interpretujeme-li prvky matroidu $1, \dots, 7$ jako body v rovině a výše zmíněné trojice netvořící báze jako přímky, pak dostáváme tzv. Fanovu rovinu z obr. 5, nejmenší konečnou projektivní rovinu.[15] Z tohoto důvodu se Whitneyův matroid M' nazývá Fanův matroid.

Článek [Wh3] uzavírá ještě *Appendix*, jehož hlavním výsledkem je věta charakterizující matroidy reprezentovatelné maticemi nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Tvrzení věty je technicky poměrně komplikované, proto je nebudeme uvádět. Stojí však za zmínku, že v samotném závěru článku se Whitney vrací k příkladu matroidu M'. Zdůvodňuje, proč M' není izomorfní s žádným grafovým matroidem, je však reprezentovatelný maticí nad $\mathbb{Z}_2$ (její sloupce tvoří všechny nenulové vektory nad $\mathbb{Z}_2$, kterých je právě sedm). Článek končí následujícím konstatováním:

The problem of characterizing linear graphs from this point of view is the same as that of characterizing matroids which correspond to matrices (mod 2) with exactly two ones in each column.

Skutečně, každý grafový matroid je reprezentovatelný maticí nad $\mathbb{Z}_2$. Z dnešního pohledu jde o jednoduché pozorování – stačí vzít matici incidence příslušného grafu, tj. matici, jejíž řádky odpovídají vrcholům grafu a sloupce hranám. V každém sloupci jsou právě dvě jedničky, a to v řádcích odpovídajících vrcholům, které spojuje příslušná hrana; v ostatních řádcích jsou nuly. Snadno se ověří, že množina sloupců je lineárně nezávislá nad $\mathbb{Z}_2$, právě když příslušná množina hran neobsahuje kružnici.

7. Další publikace o matroidech

Za druhého otce teorie matroidů je považován japonský matematik Takeo Nakasawa (1913–1946), který v letech 1935 až 1936 publikoval sérii tří článků *Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit I, II, III* [Na1], [Na2] a [Na3]. Nezávisle na Whitneyovi a téměř současně zavedl pojem tzv. B_1-prostoru, který je ekvivalentní s matroidem.

[15] O konečných projektivních rovinách se lze dočíst např. v [MN, kapitola 8]. Článek [Br] ukazuje důležitou roli Fanovy roviny v nejrůznějších oblastech diskrétní matematiky.

B_1-prostorem je libovolná množina, v níž každá konečná posloupnost prvků $a_1, \dots, a_s \in B_1$ je buď „závislá“ (pak píšeme $a_1 \dots a_s = 0$ nebo stručněji jen $a_1 \dots a_s$), nebo „nezávislá“ (píšeme $a_1 \dots a_s \neq 0$), přičemž jsou splněny následující podmínky:

(1) *Pro každé $a \in B_1$ platí aa.*

(2) *Pokud $a_1 \dots a_s$, pak $a_1 \dots a_s x$.*

(3) *Pokud $a_1 \dots a_i \dots a_s$, pak $a_i \dots a_1 \dots a_s$.*

(4) *Pokud $a_1 \dots a_s \neq 0$, $xa_1 \dots a_s$ a $a_1 \dots a_s y$, pak $xa_1 \dots a_{s-1} y$.*

Nakasawa píše, že jeho cílem bylo sestavit systém axiomů popisujících pojem lineární závislosti v n-rozměrném projektivním prostoru. Po definici B_1-prostoru pokračuje v zavádění dalších pojmů, jako je lineární prostor, báze a dimenze, a zkoumání jejich vlastností. V roce 1936, kdy Nakasawa pracoval na posledním ze série tří článků, byl již seznámen s Whitneyovou prací [Wh3]. Připojil tedy krátkou poznámku, kde vysvětluje, že B_1-prostory s konečným počtem prvků jsou totožné s Whitneyovými matroidy.

Nakasawovy články byly publikovány v němčině v časopise tokijské univerzity. Jsou psány mnohem méně přístupným stylem, než Whitneyova práce [Wh3]. To jsou nejspíše hlavní důvody, proč zůstaly dlouhou dobu bez povšimnutí. Pravděpodobně prvním západním matematikem, který na ně upozornil, byl Joseph P. S. Kung v knize [Ku]. Nakasawův životopis,[16] reprinty jeho článků [Na1]–[Na3] a jejich překlady do angličtiny lze najít v knize [NK]. Je třeba podotknout, že Nakasawova teorie byla ve srovnání s Whitneyovou teorií matroidů méně propracovaná – chybí zde souvislosti s teorií grafů i dualita.

Krátce po otištění Whitneyova článku [Wh3] se ve stejném ročníku časopisu *American Journal of Mathematics* objevil článek *Abstract Linear Dependence and Lattices* [Bi2], jehož autorem je Garrett Birkhoff (1911–1996), syn George Davida Birkhoffa a přední odborník v teorii svazů. Jedná se o krátkou, avšak zásadní práci, která propojila teorii matroidů s teorií svazů.[17] Birkhoff ukázal, že každému matroidu lze přirozeným způsobem přiřadit svaz, tj. algebraickou strukturu se dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$, které mají podobné vlastnosti jako množinový průnik a sjednocení. Birkhoffovy myšlenky lze snáze popsat, pokud nejprve v daném matroidu M definujeme uzávěr libovolné množiny $A \subset M$ předpisem

$$c(A) = \{x \in M : r(A \cup \{x\}) = r(A)\}.$$

Řekneme, že A je uzavřená množina (v Birkhoffově terminologii *linearly complete set*), pokud $c(A) = A$. Nyní definujeme svaz $L(M)$: Jeho prvky

[16] Nakasawa je autorem pouze čtyř matematických článků. V roce 1938 ztratil místo na tokijské univerzitě a přestal se věnovat matematice. Odešel do Mandžukua, kde pracoval jako úředník. V roce 1945 byla oblast obsazena Sověty, Nakasawa byl poslán na Sibiř a v následujícím roce zemřel ve věku 33 let.

[17] Počátkům teorie svazů se věnuje např. publikace [Bil].

jsou právě všechny uzavřené podmnožiny matroidu M a operace $\wedge$, $\vee$ jsou definovány vztahy

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = c(A \cup B).$$

Aby byla definice korektní, je potřeba ještě ověřit, že průnik dvou uzavřených množin je uzavřená množina.

Předchozí konstrukce funguje pro libovolný matroid M, Birkhoff však postupuje tak, že z M nejprve odstraní všechny prvky s nulovou hodností a dále ztotožní závislé prvky. Tím získá nový matroid M^* (hvězdička zde neznamená dualitu) a výše popsaným způsobem zkonstruuje svaz $L(M^*)$. Každá jednoprvková podmnožina matroidu M^* má hodnost 1 a každá dvouprvková má hodnost 2; matroidy s těmito vlastnostmi se nazývají jednoduché (ekvivalentně lze říct, že jde o matroidy neobsahující kružnici tvořenou jedním nebo dvěma prvky).[18] Je zřejmé, že každá jednoprvková podmnožina jednoduchého matroidu je uzavřená.

Birkhoff se dále věnuje otázce, jak vypadají svazy, které lze zkonstruovat výše popsaným způsobem, tj. jako $L(M)$ pro nějaký jednoduchý matroid M. Každý takový svaz zjevně musí mít konečný počet prvků; tato podmínka je nutná, avšak nikoliv postačující. Birkhoffovi se podařilo nalézt nutné a postačující podmínky, které zde nebudeme uvádět; svazy splňující tyto podmínky se nazývají geometrické. Birkhoff tedy ukázal, že studium jednoduchých matroidů je v zásadě ekvivalentní se studiem geometrických svazů.

V roce 1936 vyšel v *American Journal of Mathematics* další důležitý článek *Some Interpretations of Abstract Linear Dependence in Terms of Projective Geometry* [ML], který přímo navazuje na Whitneyovu práci [Wh3]. Jeho autorem je americký matematik Saunders Mac Lane (1909–2005), který v té době působil na Harvardu. Význam článku spočívá v tom, že propojil teorii matroidů s projektivní geometrií.

Mac Lane nejprve uvažuje tzv. schematické rovinné obrazce (*schematic plane figures*) v rovině, což jsou abstraktní systémy bodů a přímek (které mohou, ale nemusí odpovídat skutečnému geometrickému obrazci) splňující následující požadavky:

- Každá dvojice bodů určuje právě jednu přímku.
- Každá přímka obsahuje aspoň dva body.
- Žádná přímka neobsahuje všechny body.
- Existují aspoň dva body.

Schematickému rovinnému obrazci lze přiřadit matroid, jehož prvky jsou body. Prázdná množina má hodnost 0 a jednobodové množiny hodnost 1. Víceprvkové množiny bodů mají buď hodnost 2, pokud jejich prvky leží na přímce, nebo hodnost 3 v opačném případě. Je zjevné, že takto zkonstruovaný matroid je

[18] Přechod od matroidu M k jednoduchému matroidu M^* se nazývá *simplifikace*; viz [O, oddíl 1.7].

jednoduchý a má hodnost 3. Obráceně platí, že každý jednoduchý matroid s hodností 3 odpovídá nějakému schematickému rovinnému obrazci – za přímky stačí vzít maximální (vzhledem k inkluzi) množiny bodů s hodností 2. Takto lze získat i dříve zmíněný Fanův matroid (viz obr. 5).

Předchozí úvahy se snadno zobecní na prostorové, případně n-rozměrné schematické obrazce. Jde o systémy, kde kromě bodů vystupují též „k-rozměrné roviny“, kde $k \in \{1, \dots, n-1\}$. V trojrozměrném případě $n = 3$ je třeba k předchozím axiomům přidat ještě následující:

- Každá trojice bodů neležících na přímce určuje právě jednu rovinu.
- Každá rovina obsahuje tři body neležící na přímce.
- Žádná rovina neobsahuje všechny body.
- Obsahuje-li rovina dva body jisté přímky, pak obsahuje celou přímku.

Ve vícerozměrném případě je situace analogická. Pomocí n-rozměrného schematického obrazce lze zkonstruovat matroid, jehož prvky jsou body a hodnost libovolné neprázdné množiny bodů je nejmenší číslo r takové, že daná množina je obsažena v $(r-1)$-rozměrné rovině. Tento matroid je jednoduchý a má hodnost $n+1$; obráceně, každý matroid s těmito vlastnostmi odpovídá n-rozměrnému schematickému obrazci, ve kterém se k-rozměrné roviny shodují s maximálními množinami bodů o hodnosti $k+1$.

Tyto úvahy nápadně připomínají situaci v projektivní geometrii: n-rozměrný projektivní prostor $P_n(K)$ nad tělesem K vzniká z $(n+1)$-rozměrného vektorového prostoru K^{n+1}, ze kterého odebereme nulový vektor a každý nenulový vektor ztotožníme se všemi jeho násobky. Jednorozměrným podprostorům K^{n+1} odpovídají v $P_n(K)$ body, dvourozměrným podprostorům přímky atd.

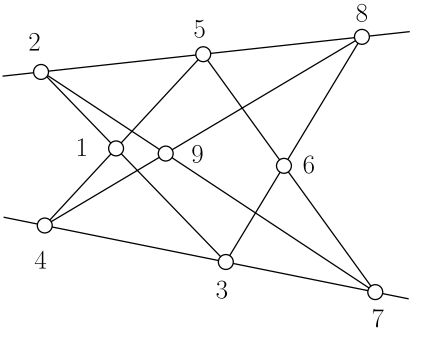
Od přechozích úvah již není daleko k pozorování, že jednoduchý matroid o hodnosti $n+1$ je reprezentovatelný maticí nad tělesem K, právě když odpovídá schematickému obrazci v n-rozměrném projektivním prostoru nad K (viz [O, Theorem 6.1.3]). Otázce reprezentovatelnosti matroidů maticemi se Mac Lane věnuje v další části článku, kde píše:

… Whitney has constructed a matroid of rank 3 *which cannot be represented as a matrix. This matroid has* 9 *elements* $1, 2, \dots, 9$ *and the following* 20 *circuit complements:*

$$712, 814, 923, 734, 836, 945, 756, 825; 16, 19, 69, 13, 15, 24, 26, 35, 46, 78, 79, 89.$$

Any attempt to represent this matroid yields a figure in which the lines 16, 19, *and* 69 *coalesce into one line* 169. *A geometric representation reveals at once that this is simply Pascal's theorem for the hexagon* 723845 *inscribed in the degenerate conic composed of the two lines* 743 *and* 825. *The points* 1, 6, *and* 9 *are the intersections of opposite sides of the hexagon.*

Řeč je pravděpodobně o stejném příkladu, který Whitney zmínil bez dalších podrobností v článku [Wh3] v poznámce pod čarou. Mac Lane si uvědomil, že tento příklad má jednoduchou geometrickou interpretaci: Jde o matroid o hodnosti 3, který odpovídá rovinnému schematickému obrazci tvořenému 9 body, viz obr. 6. Pokud by tento matroid byl reprezentovatelný maticí nad nějakým tělesem K, pak zmíněný schematický obrazec musí být obsažen v projektivní rovině (dvourozměrném projektivním prostoru) nad K.



Obr. 6. Mac Laneův příklad nereprezentovatelného matroidu

V projektivní rovině nad libovolným tělesem však platí Pappova věta,[19] podle které by body 1, 6, 9 musely ležet na přímce, což je spor. To znamená, že daný matroid[20] není reprezentovatelný maticí nad žádným tělesem. Mac Lane ještě dodává, že podobným způsobem lze využít Desarguesovu větu k sestrojení matroidu o deseti prvcích, který rovněž není reprezentovatelný žádnou maticí. Další informace o této problematice lze najít v [O, kapitola 6].

8. Matroidy v diskrétní matematice

Po krátké exkurzi do světa algebry a projektivní geometrie se na závěr vraťme k diskrétní matematice. Zmíníme ještě dva pěkné a snadno formulovatelné výsledky, které ilustrují souvislosti teorie matroidů s jinými částmi matematiky.

Nechť jsou dány množiny $A_1, \dots, A_n$, které jsou podmnožinami konečné množiny X. Řekneme, že prvky $x_1, \dots, x_n$ tvoří systém různých reprezentantů, pokud jsou navzájem různé a platí $x_i \in A_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Nutnou a postačující podmínku pro existenci takového systému udává slavná Hallova věta publikovaná roku 1935 britským matematikem Philipem Hallem (1904–1982):

Systém různých reprezentantů existuje, právě když pro každé $m \in \{1, \dots, n\}$ platí, že sjednocení libovolných m množin z $A_1, \dots, A_n$ má aspoň m prvků.[21]

[19] Pascalova věta, kterou zmiňuje Mac Lane, tvrdí, že průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce leží na jedné přímce. Pappova věta je jejím speciálním případem, kdy kuželosečka degeneruje na dvojici přímek.

[20] V současné literatuře se vyskytuje pod názvem *non-Pappus matroid*.

[21] Historie Hallovy věty a příbuzných výsledků je rozebrána v [S1].

Uvažujme dále situaci, kdy X je matroid. Můžeme se ptát, zda existuje systém různých reprezentantů, který tvoří nezávislou množinu. Odpověď na tuto otázku nalezl německo-britský matematik Richard Rado (1906–1989) a publikoval ji roku 1942 v práci [Ra1]:

Nezávislý systém různých reprezentantů existuje, právě když pro každé $m \in \{1, \dots, n\}$ platí, že sjednocení libovolných m množin z $A_1, \dots, A_n$ má hodnost aspoň m.[22]

Další související výsledky lze najít v [O, oddíl 11.2].

Matroidy hrají důležitou roli i v teoretické informatice, neboť souvisejí s tzv. hladovým algoritmem. Typickým příkladem použití hladového algoritmu je nalezení minimální kostry grafu. V této úloze je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran $w : E \to \mathbb{R}$. Úkolem je najít jeho kostru, pro kterou je součet ohodnocení hran minimální. První algoritmus pro řešení tohoto problému publikoval český matematik Otakar Borůvka (1899–1995) v roce 1926.[23] O něco známější a myšlenkově jednodušší je tzv. hladový algoritmus, který popsal americký matematik Joseph Bernard Kruskal (1928–2010) v roce 1956. Hladový algoritmus začíná s prázdným seznamem hran. Poté zkoumá jednotlivé hrany grafu v pořadí od nejmenšího po největší ohodnocení. Pro každou hranu otestuje, zda jejím přidáním do seznamu nevznikne kružnice – pokud ne, uloží ji do seznamu. Po skončení algoritmu se v seznamu nachází $|V| - 1$ hran, které tvoří minimální kostru grafu.

Zobecněním problému minimální kostry je následující úloha: Je dán matroid s ohodnocením prvků $w : M \to \mathbb{R}$. Najděte maximální (vzhledem k inkluzi) nezávislou podmnožinu, pro kterou je součet ohodnocení prvků maximální.[24] Skutečnost, že k řešení úlohy lze opět použít hladový algoritmus, si nezávisle na sobě uvědomilo několik matematiků (Richard Rado 1957 [Ra2], Dominic J. A. Welsh 1968 [We2], Jack Edmonds 1971 [E]). Postup je přímočarým zobecněním algoritmu pro hledání minimální kostry: Algoritmus začíná s prázdným seznamem prvků. Poté zkoumá jednotlivé prvky matroidu v pořadí od největšího po nejmenší ohodnocení. Pro každý prvek otestuje, zda po jeho přidání zůstane seznam nezávislou množinou (tj. zda nevznikne kružnice) – pokud ano, uloží prvek do seznamu. Po skončení algoritmu se v seznamu nachází hledaná maximální nezávislá množina s maximálním ohodnocením.

Právě popsaná úloha má řadu aplikací v kombinatorické optimalizaci – jde o problémy související s rozvrhováním úkolů (s cílem minimalizovat pokutu za zpožděné úkoly), přiřazování úkolů pracovníkům (s cílem upřednostnit prioritní úkoly), apod.

---

[22] Hallova věta je speciálním případem tohoto tvrzení pro matroid, ve kterém jsou všechny množiny nezávislé.

[23] O Borůvkově algoritmu pro hledání minimální kostry a okolnostech jeho vzniku se lze dočíst např. v [FV] a [NMN].

[24] Úlohu o hledání minimální kostry grafu lze snadno převést na maximalizační problém, stačí změnit znaménko u ohodnocení všech hran.

Zmíněný maximalizační problém dává smysl nejen v matroidech, ale obecněji v tzv. dědičných systémech nezávislých množin (*hereditary family of independent sets*). Jde o zobecnění matroidů, kde se nepožaduje platnost třetí podmínky pro nezávislé množiny. Předpokládá se tedy pouze to, že prázdná množina je nezávislá a podmnožina nezávislé množiny je rovněž nezávislá. Platí pozoruhodný výsledek, že hladový algoritmus nalezne optimální řešení uvedeného maximalizačního problému pro každé ohodnocení $w : M \to \mathbb{R}$ právě tehdy, když M je matroid. Matroidy jsou tedy ve třídě dědičných systémů charakterizovány právě tím, že v nich funguje hladový algoritmus. Podrobnosti lze najít v [O, oddíl 1.8].

9. Závěr

Příběh teorie matroidů přesvědčivě dokládá vzájemnou provázanost zdánlivě nesouvisejících částí matematiky. Zároveň ukazuje sílu abstrakce – pojmy a výsledky týkající se různých matematických struktur se stávají průzračnějšími, jakmile jsou přeformulovány v abstraktnějším jazyce matroidů.

Hassler Whitney je jedním z nemnoha matematiků 20. století, jejichž objevy se staly součástí základních univerzitních kurzů v bakalářském studiu. Jen těžko mohl tušit, kde všude najdou matroidy uplatnění a do jaké šíře i hloubky se celá teorie rozvine.

LITERATURA

[BW] L. Beineke, R. Wilson, *Modern Graph Theory*, s. 331–352, in R. Wilson, J. J. Watkins (eds.), *Combinatorics: Ancient and Modern*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2013, x+381 stran. ISBN 978-0-19-965659-2.

[BLW] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1998, x+239 stran. ISBN 0-19-853916-9.

[Bil] Š. Bilová, *Vývoj teorie svazů do roku 1948*, s. 227–238, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.), *Matematika v proměnách věků II*, edice Dějiny matematiky, svazek 16, Prometheus, Praha, 2001, 267 stran. ISBN 80-7196-218-X.

[Bi1] G. D. Birkhoff, *A Determinant Formula for the Number of Ways of Coloring a Map*, Annals of Mathematics **14** (1912), s. 42–46.

[Bi2] G. Birkhoff, *Abstract Linear Dependence and Lattices*, American Journal of Mathematics **57** (1935), s. 800–804.

[Br] E. Brown, *The Many Names of* $(7,3,1)$, Mathematics Magazine **75** (2002), s. 83–94. ISSN 0025-570X.

[E] J. Edmonds, *Matroids and the Greedy Algorithm*, Mathematical Programming **1** (1971), s. 127–136. ISSN 0025-5610.

[FV] E. Fuchs, Z. Voglová, *Otakar Borůvka, grafové algoritmy a teorie matroidů*, Rozpravy Národního technického muzea 200, Národní technické muzeum, Praha, 2006, s. 77–87. ISBN 80-7037-158-7.

[Ke] K. Kendig, *Never a Dull Moment: Hassler Whitney, Mathematics Pioneer*, MAA Press, Providence, R.I., 2018, xix+385 stran. ISBN 978-1-4704-4828-8.

[Ku] J. P. S. Kung, *A Source Book in Matroid Theory*, Birkhäuser, Boston, 1986, 413 stran. ISBN 0-8176-3173-9.

[ML] S. Mac Lane, *Some Interpretations of Abstract Linear Dependence in Terms of Projective Geometry*, American Journal of Mathematics **58** (1936), s. 236–240.

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2002, 382 stran. ISBN 80-246-0084-6.

[MC] J. McCleary, *Airborne Weapons Accuracy: Topologists and the Applied Mathematics Panel*, The Mathematical Intelligencer **28** (2006), s. 17–21. ISSN 0343-6993.

[Na1] T. Nakasawa, *Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I*, Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, **2** (1935), s. 235–255.

[Na2] T. Nakasawa, *Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. II*, Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, **3** (1936), s. 45–69.

[Na3] T. Nakasawa, *Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. III* (*Schluss*), Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, **3** (1936), s. 123–136.

[NN] D. L. Neel, N. A. Neudauer, *Matroids You Have Known*, Mathematics Magazine **82** (2009), s. 26–41. ISSN 0025-570X.

[NMN] J. Nešetřil, E. Milková, H. Nešetřilová, *Otakar Borůvka on Minimum Spanning Tree Problem. Translation of Both the 1926 Papers, Comments, History*, Discrete Mathematics **233** (2001), s. 3–36. ISSN 0012-365X.

[NK] H. Nishimura, S. Kuroda, *A Lost Mathematician, Takeo Nakasawa. The Forgotten Father of Matroid Theory*, Birkhäuser, Basel, 2009, xii+234 stran. ISBN 978-3-7643-8572-9.

[O] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Second Edition, Oxford University Press, Oxford, 2011, xiii+684 stran. ISBN 9780198566946.

[Ra1] R. Rado, *A Theorem on Independence Relations*, The Quarterly Journal of Mathematics **13** (1942), s. 83–89.

[Ra2] R. Rado, *Note on Independence Functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **7** (1957), s. 300–320.

[Ran] R. von Randow, *Introduction to the Theory of Matroids*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 109, Springer, Berlin, 1975, viii+102 stran. ISBN 978-3-540-07177-8.

[S1] A. Slavík, *Hallova věta, její aplikace a historie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **63** (2018), s. 175–195. ISSN 0032-2423.

[S2] A. Slavík, *Transformation of Mathematics Between World Wars: the Case of Combinatorics*, in M. Bečvářová (ed.), *The Development of Mathematics Between The World Wars*, World Scientific, 2021, v tisku. ISBN 978-1-78634-930-9.

[Š] P. Šišma, *Teorie grafů 1736–1963*, edice Dějiny matematiky, svazek 8, Prometheus, Praha, 1997, 171 stran. ISBN 80-7196-065-9.

[T] W. T. Tutte, *Introduction to the Theory of Matroids*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, Volume 37, American Elsevier Publishing Company, New York, 1971, xi+84 stran. ISBN 978-0-444-00096-5.

[Vo] Z. Voglová, *Hassler Whitney a počátky teorie matroidů*, s. 162–172, in E. Fuchs (ed.), *Matematika v proměnách věků IV*, edice Dějiny matematiky, svazek 32, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007, 223 stran. ISBN 978-80-7204-536-5.

[We1] D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976, xi+431 stran. ISBN 978-0-12-744050-7.

[We2] D. J. A. Welsh, *Kruskal's Theorem for Matroids*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **64** (1968), s. 3–4. ISSN 0008-1981.

[Wt] N. White (ed.), *Theory of Matroids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, 316 stran. ISBN 978-0-521-30937-0.

[Wh1] H. Whitney, *A Logical Expansion in Mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society **38** (1932), s. 572–579.

[Wh2] H. Whitney, *Non-Separable and Planar Graphs*, Transactions of the American Mathematical Society **34** (1932), s. 339–362.

[Wh3] H. Whitney, *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, American Journal of Mathematics **57** (1935), s. 509–533.

[Wi1] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Fourth Edition, Prentice Hall, Harlow, 1996, viii+171 stran. ISBN 0-582-24993-7.

[Wi2] R. J. Wilson, *An Introduction to Matroid Theory*, American Mathematical Monthly **80** (1973), s. 500–525. ISSN 0002-9890.

Poděkování. Text byl sepsán s podporou grantu GAČR *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity*, registrační číslo 18-00449S.

Adresa

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz