Magdalena Hykšová

Základy teorie pravděpodobnosti v meziválečném Československu

In: Martina Bečvářová (author); Jindřich Bečvář (author); Zdeněk Halas (author); Magdalena Hykšová (author); Antonín Slavík (author); Ivan Netuka (author); Jiří Veselý (author); Jaroslav Zhouf (author): Matematický svět mezi válkami. (Czech). Praha: České vysoké učení technické v Praze, Ústav aplikované matematiky Fakulty dopravní ČVUT, 2020. pp. 185–208.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404398

Základy teorie pravděpodobnosti v meziválečném Československu

Magdalena Hykšová

Abstract. The aim of this chapter is to point out several interesting contributions to the foundations of probability theory published in Czechoslovakia in the first half of the 20th century. Although they are remarkable both from mathematical as well as didactic point of view, they have remained almost unknown by our time. The greatest stress is put on the works of Karel Rychlík and Otomar Pankraz that illustrate the reactions to the latest development, its reflection in university education and elaboration of original ideas. Rychlík published the first textbook in Czechoslovakia (and one of the first textbooks in Europe at all) based on Kolmogorov's axiomatic theory, lecture notes of Pankraz contain his contribution to logical probability theory and the proposal of an axiomatization based on the concept of conditional probability. Finally, contributions of Bohuslav Hostinský to geometric probability and its foundations are mentioned.

Key words. Probability theory, Probability axioms, Bohuslav Hostinský, Otomar Pankraz, Karel Rychlík.

1. Úvod

První polovina 20. století představuje z hlediska historie matematiky neobyčejně zajímavé období, v němž byla řada matematických oblastí postavena na pevný axiomatický základ a etablována jako ucelená teorie. Mezi tyto oblasti patřila i teorie pravděpodobnosti, která se do té doby potýkala s potížemi spojenými s klasickou definicí, a to především s otázkou, které případy lze považovat za „stejně možné“. Připomeňme, že při takovémto rozhodování se obvykle používal tzv. *princip nedostatečného důvodu*, podle něhož se za „stejně možné“ považují takové jevy, u nichž není důvod předpokládat, že jeden nastane spíše než jiný.[1] Tento princip však vedl k řadě paradoxů, kdy lze na základě principu nedostatečného důvodu odvodit pro jeden jev více různých hodnot pravděpodobností; mezi nejznámější patří Bertrandův paradox, o němž se zmíníme ve 4. části. Další motivací pro hledání vhodnější definice byl rozvoj geometrické pravděpodobnosti, k němuž docházelo v druhé polovině 19. století a který vyústil ve snahy o využití teorie množin a teorie míry v oblasti

[1] Tuto myšlenku lze objevit již v knize [Ber] Jacoba Bernoulliho (1655–1705) z roku 1713 a potom v konkrétnější podobě v knize [Lap] Pierra Simona de Laplace (1749–1827) z roku 1812.

teorie pravděpodobnosti. Mezi podněty k axiomatickému založení patřil i šestý ze slavných 23 Hilbertových problémů prezentovaných na mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900, v němž David Hilbert (1862–1943) vyzval k *axiomatickému přístupu ve fyzikálních disciplínách, kde již nyní hraje matematika rozhodující roli; to jsou v první řadě počet pravděpodobnosti a mechanika.* K tomu pak dodal: *Co se týče axiomů teorie pravděpodobnosti, zdá se mi žádoucí, aby jejich logická výstavba byla doprovázena exaktním a uspokojivým rozvojem metody střední hodnoty v matematické fyzice, zejména v kinetické teorii plynů.*[2]

Završením vývoje teorie míry a pravděpodobnosti první třetiny 20. století a určitou syntézou prací, které v této době publikovali kromě jiných Émile Borel (1871–1956), Maurice Fréchet (1878–1973), Francesco Cantelli (1875–1966), Alexandr Alexandrovič Čuprov (1874–1926), Paul Lévy (1886–1971), Hugo Steinhaus (1887–1972), Stanisław Ulam (1909–1984) a Richard von Mises (1883–1953),[3] byla kniha *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Ko] z roku 1933. Její autor, ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), zde podal axiomatickou definici, která se stala (až na výjimky, o nichž se zmíníme dále) všeobecně uznaným východiskem a základem teorie pravděpodobnosti.

Kolmogorovova axiomatická definice

Kolmogorov definoval pravděpodobnost následujícím způsobem:[4]

Definice (Kolmogorov). *Buď E množina prvků $\xi, \eta, \psi, \ldots$, které se nazývají elementární jevy, a $\mathfrak{F}$ množina podmnožin množiny E; prvky množiny $\mathfrak{F}$ se v dalším budou nazývat náhodné jevy.*

I. *$\mathfrak{F}$ je množinové těleso.*[5]

II. *$\mathfrak{F}$ obsahuje množinu E.*

III. *Každé množině A z $\mathfrak{F}$ je přiřazeno nezáporné reálné číslo $P(A)$. Toto číslo $P(A)$ se nazývá pravděpodobnost (Wahrscheinlichkeit) jevu A.*

IV. $P(E) = 1$.

V. *Jsou-li A a B disjunktní, pak platí $P(A+B) = P(A) + P(B)$.*

VI. *Pro klesající posloupnost $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ jevů z $\mathfrak{F}$, kde $\mathfrak{D}_n A_n = 0$,[6] platí rovnost $\lim P(A_n) = 0$.*

Soustava množin $\mathfrak{F}$ spolu s určitým přiřazením čísel $P(A)$, splňující axiomy I.–VI., se nazývá pravděpodobnostní pole.

[2] Přeloženo z [Hi], s. 272.

[3] Podrobněji viz článek [SV] G. Shafera a V. Vovka.

[4] Přeloženo z [Ko], str. 2 (axiomy I–V) a s. 13 (axiom VI).

[5] Tj. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ a pro libovolné dvě množiny $A, B \in \mathfrak{F}$ je rovněž $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathfrak{F}$; pro průnik, sjednocení a rozdíl množin Kolmogorov používal tehdy obvyklé značení AB, $A+B$ a $A-B$. Uvědomme si, že podmínky I a II říkají, že $\mathfrak{F}$ je algebra podmnožin množiny E.

[6] Takto Kolmogorov značí množinový součin $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$, tj. průnik $\bigcap_n A_n$.

Po zavedení axiomu VI Kolmogorov dokázal větu o spočetné aditivitě, kterou lze v dnešním značení přepsat následujícím způsobem.

Jestliže $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F}$, $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{F}$ a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, potom platí:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Potom Kolmogorov poznamenal, že definici pravděpodobnostního pole lze jednoduše vyjádřit slovy:

Buď E libovolná množina, $\mathfrak{F}$ těleso podmnožin množiny E, které obsahuje množinu E, a $P(A)$ nezáporná úplná aditivní množinová funkce [tj. σ-aditivní míra] *definovaná na $\mathfrak{F}$; těleso $\mathfrak{F}$ spolu s množinovou funkcí $P(A)$ pak tvoří pravděpodobnostní pole.*[7]

Nakonec Kolmogorov dokázal, že každé pravděpodobnostní pole $(\mathfrak{F}, P)$ lze jednoznačně rozšířit na pravděpodobnostní pole $(B\mathfrak{F}, P)$, kde $B\mathfrak{F}$ je *Borelovo těleso*, tj. těleso uzavřené také na spočetná sjednocení; na tato tělesa se pak v dalším omezil.

Z dnešního pohledu bychom tedy mohli říci, že Kolmogorov došel k obvyklému zavedení pravděpodobnosti jako reálné funkce definované na σ-algebře $\mathfrak{F}$ podmnožin množiny E, která pro $A \in \mathfrak{F}$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, splňuje podmínky:

$$P(E) = 1; \qquad P(A) \geq 0; \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\,.$$

Ohlasy Kolmogorovovy teorie

Hned v roce 1934 vyšlo několik článků, které se explicitně hlásily ke Kolmogorovově teorii. Mezi ně patří mj. pojednání Josepha Lea Dooba, Eberharda Hopfa a také společná práce Zbigniewa Łomnického a Stanisława Ulama (viz [Do1], [Do2], [Hop] a [LU]). První učebnicí založenou na Kolmogorovově axiomatice byla kniha *Random Variables and Probability Distributions* [Cr] švédského matematika a statistika Haralda Craméra (1893–1985) z roku 1937. Z Kolmogorovovy definice vyšla také učebnice *Kurs teorii verojatnostej* [Gl] sovětského matematika a logika Valerije Ivanoviče Glivenka (1897–1940) z roku 1939, a potom řada dalších učebnic vydaných v období po druhé světové válce, kdy se axiomatická teorie stala takřka nedílnou součástí vysokoškolské výuky pravděpodobnosti.

Mezi první reakce patřila rovněž učebnice *Úvod do počtu pravděpodobnosti* [Ry3], kterou v roce 1938 vydal český matematik Karel Rychlík (1885–1968), o němž se podrobněji zmíníme v 2. části.

[7] Přeloženo z [Ko], str. 15.

Ne všichni matematikové ovšem přijali Kolmogorovovu axiomatickou definici bez výhrad. V této souvislosti je třeba upozornit především na články [Pa8]–[Pa10], které vydal český matematik Otomar Pankraz (1903–1976) v letech 1939 a 1940 a o nichž se podrobněji zmíníme ve 3. části. Pankraz souhlasil s Kolmogorovovem v tom, že pravděpodobnost by měla být definována jako množinová funkce, na rozdíl od něj se však domníval, že by měla být od začátku definována jako funkce dvou argumentů, což také lépe odpovídá obvyklým filosofickým interpretacím – logické, subjektivní i četnostní, stejně jako geometrické pravděpodobnosti. Názor, že výchozím pojmem teorie pravděpodobnosti by měla být pravděpodobnost podmíněná, vyslovil již dříve například John Maynard Keynes v knize [Ke] či Hans Reichenbach v monografii [Rei]. Pankraz tyto myšlenky spojil s Kolmogorovovým přístupem založeným na teorii míry a podal abstraktní axiomatickou definici založenou na pojmu podmíněné pravděpodobnosti. Výhrady ke Kolmogorovově definici Pankraz vyjádřil těmito slovy:

V Kolmogorovově systému jest axiomaticky vyjádřena jen věta o sčítání pr.-stí. Větu o násobení pr.-stí zavádí pomocí dodatečné definice podmíněné pr., stojící mimo axiomy. Toto rozlišování dvou pr.-ostí, nepodmíněné a podmíněné, nemá však žádného logického oprávnění a jeho význam pro p. pr. jest pouze konvenční a může míti odůvodnění jen s hlediska počtářské techniky, že se tím psaní některých vzorců snad zjednoduší.

V zásadě jde tu však o otázku, zda pr. jest definitoricky množinová funkce jednoho či dvou argumentů. Kolmogorov se snaží vystačiti s množinovou funkcí $P(A)$ o jednom argumentu, kterou ve svých axiomech definuje. Současně ale přichází k tomu, že při formulaci Bayesových vzorců s touto jednoargumentovou funkcí nevystačí, a proto zavádí množinovou funkci

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

o dvou argumentech A a B, o které dokazuje, že rovněž axiomům vyhovuje. Při tom ovšem musí předpokládat, že množina A jest konstantní, a tímto obratem z funkce dvouargumentové učiní funkci o jednom argumentu, pro kterou pak samozřejmě zvolené axiomy platí. ([Pa8], s. 56)

Nezávisle na Pankrazovi představili podobnou axiomatickou definici v 50. letech 20. století Karl Popper ([Po1], [Po2]) a Alfréd Rényi ([Rn1]–[Rn5]); myšlenka, že pravděpodobnost by měla být definována jako dvouargumentová funkce, je živá i ve 21. století. Pankrazovy práce jsou zajímavé i z hlediska logické interpretace pravděpodobnosti, v širších kruzích však zůstaly téměř neznámé.

Misesova axiomatická definice – teorie kolektivů

Jinou axiomatickou definici, byť méně obecnou a zaměřenou výhradně na četnostní pojetí pravděpodobnosti, podal rakouský matematik a fyzik Richard von Mises (1883–1953) v práci [Mi1] z roku 1919. Základním pojmem této teorie byl tzv. *kolektiv*, který byl již dříve používán ve smyslu množiny objektů určitého druhu nebo posloupnosti výsledků určitého náhodného pokusu, v němž se sledovala četnost výskytu sledovaných znaků.[8]

Pro názornost uveďme nejprve citát z pozdější knihy [Mi2] z roku 1928, v níž se Mises snažil přiblížit základní myšlenky své teorie nematematikům:[9]

1. O pravděpodobnosti lze hovořit pouze tehdy, je-li dán dobře určený a přesně vymezený kolektiv.

2. Kolektiv je hromadný jev nebo opakovaný děj splňující následující dva požadavky: relativní četnosti jednotlivých znaků musí mít určitou limitu a ta musí zůstat nezměněna, když se z celku vyjme část prvků, jejichž pozice je libovolně zvolená.

3. Splnění posledního požadavku se označuje jako princip nepravidelnosti nebo princip vyloučení herního systému.

4. Limita relativní četnosti, s níž se vyskytuje určitý znak, nezávisle na volbě pozic, se nazývá „pravděpodobnost výskytu tohoto znaku v uvažovaném kolektivu“. Jestliže se někdy objeví pouze slovo „pravděpodobnost“, pak se tak stane jen pro zestručnění a dodatek je třeba mít vždy na paměti.

Konkrétní formulace podmínky nepravidelnosti se v různých Misesových pracích liší, základní smysl však zůstává stejný: Podle Misese by se teorie pravděpodobnosti měla týkat jen náhodných jevů a cílem podmínky nepravidelnosti měla být specifikace toho, co pojem *náhodný* znamená. V citované knize [Mi2] nalezneme výstižný ilustrační příklad: představme si, že podél silnice jsou ve stometrových rozestupech umístěny kamenné patníky, z nichž každý desátý, vyznačující kilometr, je větší. O takovéto posloupnosti bychom určitě neřekli, že je náhodná; vydáme-li se po silnici, pak můžeme snadno předpovědět, zda příští patník bude velký nebo malý. Kdybychom přitom patníky počítali, pak by se relativní četnost velkých patníků s rostoucí vzdáleností přibližovala k 1/10. Jestliže bychom však při počítání brali v úvahu například každý druhý patník, pak bychom získali relativní četnost 1/5 nebo 0 podle toho, zda by v naší vybrané posloupnosti byly velké patníky zahrnuty nebo nikoli. Podobně bychom mohli dojít k relativní četnosti 1/2 apod. Naproti tomu při opakovaném hodu dvojicí nevychýlených kostek bude limitní relativní četnost výskytu 12 ok rovna 1/36 a tato hodnota se nezmění, omezíme-li se na nekonečnou podposloupnost, která může být vybrána libovolně, ale bez zohlednění výsledků jednotlivých hodů.

Nyní se vraťme k Misesově původní axiomatické definici. Jejím základem byly nekonečné posloupnosti prvků charakterizovaných různými *znaky*, které Mises vyjadřoval jako body v k-dimenzionálním *příznakovém prostoru* M.

---

[8] Pojem *kolektiv* se formoval zejména v pracích Roberta Leslie Ellise (1817–1859), Johna Venna (1834–1923), Gustava Theodora Fechnera (1801–1887), Georga Ferdinanda Helma (1851–1923), Heinricha Brunse (1848–1919), Emanuela Czubera (1851–1925) a Alexia Meinonga (1853–1920).

[9] Přeloženo z [Mi2], str. 29.

Například pro posloupnost hodů jednou kostkou by znakem byl počet ok, který padl v daném pokusu, pro posloupnost tvořenou tahy číselné loterie by takovým znakem byla uspořádaná pětice konkrétních vylosovaných čísel, při sledování pohybu molekuly plynu by byl znakem vektor rychlosti. Mises pak uvádí:[10]

Definice (Mises). Nekonečná posloupnost $K = (e_n)$, kde každému prvku e_n je jako *znak* přiřazena uspořádaná k-tice reálných čísel, přičemž ne všechny členy mají stejný znak (ani po odstranění libovolného konečného počtu členů), se nazývá *kolektivem*, jsou-li splněny následující podmínky:

Požadavek 1: Existence limity. Pro každou podmnožinu $A \subseteq M$ existuje limita

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} = W_A\,, \tag{M1}$$

kde N_A udává, kolikrát se mezi prvními N členy vyskytuje člen se znakem z množiny A.

Požadavek 2: Nepravidelnost přiřazení. Uvažujme dvě libovolné disjunktní podmnožiny A, $B \subseteq M$ příznakového prostoru a předpokládejme, že existují limity W_A, W_B dané vztahem (M1), které nejsou obě nulové. V posloupnosti K vynechme všechny členy, jejichž znak nepatří ani do A, ani do B, zbývající členy očíslujme 1, 2, 3, … a z této posloupnosti pak vyberme podposloupnost K' takovým způsobem, že volba indexu nezávisí na znaku příslušného prvku. Potom existují také limity W'_A, W'_B dané vztahem (1) a platí:

$$W'_A : W'_B = W_A : W_B\,. \tag{M1}$$

Limita (M1) se pak nazývá *pravděpodobnost výskytu znaku náležejícího do* [množiny] *A v kolektivu K.*

Jak Mises dále ukázal, z první podmínky mimo jiné plyne, že takto definovaná pravděpodobnost je reálné číslo z intervalu $[0,1]$ a že pro libovolné disjunktní podmnožiny A, B příznakového prostoru platí:

$$W_{A\cup B} = W_A + W_B.$$

K tomu jen dodejme, že poslední zmíněné tvrzení lze zobecnit na sjednocení konečného počtu disjunktních množin, spočetná aditivita požadovaná Kolmogorovem však obecně neplatí.

V pozdějších pracích (viz [Mi3] a [Mi4]) Mises výskyt určitého sledovaného znaku vyjádřil pomocí posloupnosti nul a jedniček, kde jednička značí, že daný člen má sledovaný znak, a nula znamená, že nikoli. Hodnota N_A je pak prostým součtem prvních N členů uvedené posloupnosti nul a jedniček.

Ohlasy Misesovy teorie

Misesova teorie popsaná v citovaných pracích [Mi1], [Mi2] a podrobněji pak v monografii [Mi3] z roku 1931 byla mnohými matematiky více či méně

[10] Volně přeloženo z [Mi1], s. 55–56.

kriticky přejímána, upravována a komentována. Její modifikace navrhli mj. Karl Dörge (1899–1977) v pojednání [Dor], Erich Kamke (1890–1961) v knize [Ka], Hans Reichenbach (1891–1953) v knize [Rei] a Erhard Tornier (1894–1982) v článku [To]. Byť byl i nadále uznáván její význam pro praktické aplikace, jako základ teorie pravděpodobnosti se v průběhu 30. let prosadila Kolmogorovova obecnější a abstraktní definice, která také umožňovala i jiné než četnostní interpretace.[11]

O reakcích českých matematiků se zmíníme podrobněji v následujících částech. Na tomto místě uveďme jen krátký citát z recenze Misesovy knihy [Mi3], kterou napsal Otomar Pankraz pro Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. Recenze přibližuje základní myšlenky Misesovy teorie a reaguje na některé námitky, které byly proti této teorii vznášeny. Za problematické bylo považováno již samotné použití limity nekonečné posloupnosti pokusů: vynecháme-li v posloupnosti libovolný konečný počet členů, její limita se nezmění. Náš život je však konečný, při opakování jakéhokoli pokusu jsme proto schopni zjistit právě takovéto „zbytečné členy“. Kromě toho často hledáme pravděpodobnost určitého neopakovatelného jevu či domněnky, které Mises ze své teorie vyloučil.

Na námitku týkající se využití analytického pojmu limity Pankraz reagoval slovy, že *není oprávněna, neboť z postupu, kterým Mises odvozuje zákony velkých čísel, velmi jasně vyplývá, že s analytickou limitou úplně vystačíme. Vážnější jsou námitky, které se opírají o princip nemožnosti herního systému a o operaci „spojení“. Východisko z těchto nesnází nalézám v tom, že Misesovy požadavky prohlásíme za principy, které mají přímý vztah ke zkušenosti, a nikoliv za čistě logické axiomy (třebas ze zkušenosti odvozené) … O celkovém významu knihy postačí říci, že jest nezbytná pro každého (pro teoretika i pro praktika), kdo s počtem pravděpodobnosti pracuje.*[12]

Sám Mises reagoval v práci [Mi4] na námitku, že ve skutečnosti jsou všechny pokusy konečné, přirovnáním ke geometrii: … *každá přímka, s níž se setkáme v realitě, má konečnou délku, ale geometrie je založena na pojmu nekonečné přímky a používá například pojem rovnoběžek, který nemá žádný smysl, omezíme-li se na úsečky konečné délky. Jiná námitka vidí rozpor mezi existencí limity četností a tzv. Bernoulliho větou, která říká, že posloupnost libovolné délky, řekněme* 1/4, *se může objevit také v případech, kdy se pravděpodobnost rovná* 1/2. *Bylo však dokázáno, … že obě tvrzení jsou navzájem slučitelná, a to dokonce explicitní konstrukcí nekonečné posloupnosti splňující obě podmínky. Dokonce bych řekl, že skutečný význam Bernoulliho věty je nepřístupný jakékoli teorii, která nezačíná četnostní definicí pravděpodobnosti.*[13]

Dodejme, že přes mnohou kritiku je obecně četnostní pojetí pravděpodobnosti základem dnes široce využívaných statistických metod, například intervalů spolehlivosti odhadu střední hodnoty náhodné veličiny aj.

---

[11] Podrobněji viz například Lambalgenův článek [Lam].

[12] Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **61** (1932), s. 362–363.

[13] Přeloženo z [Mi4], s. 192–193.

2. Karel Rychlík

Z didaktického hlediska jsou neobyčejně zajímavé „pravděpodobnostní" aktivity českého matematika Karla Rychlíka (1885–1968), který působil jako řádný profesor matematiky na České technice, resp. na ČVUT v Praze, a k tomu jako soukromý docent pravidelně vypisoval volitelné přednášky na různá témata na České univerzitě, resp. na Karlově univerzitě v Praze.[14] Ve svých odborných matematických pracích se Rychlík věnoval především teorii čísel a tehdy se formující abstraktní algebře. Protože však na technice vyučoval základní matematický kurz a přednášel o počtu pravděpodobnosti pro studenty pojistné matematiky, živě se zajímal o aktuální dění i v oblasti matematické analýzy a teorie pravděpodobnosti.

Nepravidelné posloupnosti

Krátce po vydání Misesovy knihy *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* [Mi3] z roku 1931, hned v letním semestru školního roku 1931/32, Rychlík vypsal na univerzitě přednášku *Počet pravděpodobnosti* (*Misesova teorie*). V roce 1933 uveřejnil recenzi[15] Kamkeovy knihy *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* [Ka], vydané o rok dříve, a publikoval dvojici článků [Ry1] a [Ry2] věnovaných studiu funkcí komplexní proměnné definovaných pomocí mocninných řad

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

kde $A = (a_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ je nepravidelná posloupnost ve smyslu Kamkeovy teorie, tj. posloupnost splňující následující podmínky: Každý její člen je roven jednomu z konečného počtu navzájem různých reálných čísel $A_1, A_2, \dots, A_h$, existují limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, h,$$

a limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A_{k,r}, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, h,$$

kde symbol $N_n(A, A_\nu)$ značí relativní četnost hodnoty A_ν mezi prvními n členy posloupnosti A a $A_{k,r}$ značí vybranou posloupnost $(a_r, a_{r+k}, a_{r+2k}, \dots)$, kde k, r jsou přirozená čísla, pro která $k > 1$, $0 \le r \le k-1$. Za předpokladu, že se navíc v posloupnosti A vyskytují aspoň dvě z čísel $A_1, \dots, A_h$ v nekonečném počtu, Rychlík prostředky matematické analýzy dokázal, že pro analytickou funkci definovanou mocninnou řadou

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

[14] Podrobné informace o životě a díle Karla Rychlíka lze nalézt v knize [Hy1].

[15] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **62** (1933), s. 65.

je přirozenou hranicí jednotková kružnice.[16] Rychlík přitom navázal na pojednání [Bö] Paula Eugena Böhmera (1877–1958), který obdobné tvrzení dokázal pro nepravidelné posloupnosti sestávající z nul a jedniček ve smyslu Misesovy teorie.

V závěru Rychlík ještě vyšetřoval chování funkce $f(x)$ na jednotkové kružnici a dokázal, že *pro k-tý kořen z jednotky* ε *platí při radiální limitě* [tj. pro limitu vzhledem k množině $\{r\varepsilon,\ r \in (0,1)\}$]:[17]

$$\lim_{z\to\varepsilon}(\varepsilon - z)f(z) = 0.$$

Kolmogorovova axiomatická teorie

V roce 1933, kdy vyšla citovaná Kolmogorovova kniha [Ko], Rychlík zrušil univerzitní výběrovou přednášku z lineární algebry, původně vypsanou na zimní semestr školního roku 1933/34, a nahradil ji přednáškou *Úvod do počtu pravděpodobnosti* (*se stanoviska axiomatického*). Přednášku s podobným názvem *Počet pravděpodobnosti s hlediska axiomatického* na univerzitě vypsal také v zimním semestru školního roku 1936/37. V roce 1936, ještě před vydáním zmíněné Cramérovy učebnice [Cr], byla do vydavatelského programu Jednoty československých matematiků a fyziků zařazena Rychlíkova učebnice *Úvod do počtu pravděpodobnosti* [Ry3][18] založená na Kolmogorovově axiomatické teorii. Tiskem tato kniha vyšla v roce 1938 a zařadila se mezi první učebnice vykládající teorii pravděpodobnosti podle Kolmogorova.

Rychlík v knize [Ry3] nejprve zavádí základní pojmy pomocí teorie množin – například elementární jev, množina elementárních jevů, náhodný jev jako podmnožina množiny elementárních jevů apod. Po krátké diskusi klasické definice pravděpodobnosti se pak obrací k axiomům pro rozložení pravděpodobnosti v množinovém tělese, dále se věnuje zobrazení a ekvivalenci pokusů, podmíněné pravděpodobnosti a odvození Bayesových vzorců, nezávislosti rozkladů a náhodných jevů, pojmům matematické naděje, rozptylu a vytvořující funkce. Potom se zabývá spojitým rozložením pravděpodobnosti na přímce (neobjevuje se zde však přímo pojem spojité náhodné veličiny), spočetným rozložením pravděpodobnosti a zákonem velkých čísel. Zbývající část práce je věnována posloupnostním modelům pro rozložení pravděpodobnosti a jejich aplikacím. V dodatku Rychlík uvádí přehled základních pojmů teorie množin a doplňuje velmi podrobný seznam literatury.

Oproti Kolmogorovově vědecké práci [Ko], kde bylo žádoucí podat teorii v plné obecnosti, se Rychlík omezil v podstatě jen na konečné množiny, a tedy axiomy I–V, a až na konci výkladu zavedl náhodnou veličinu na spočetné množině a ocitoval axiom VI. To však bylo dáno odlišným účelem

[16] Tj. funkce $f(z)$ je uvnitř jednotkového kruhu analytická, není ji však možné analyticky rozšířit.

[17] [Ry1], s. 2.

[18] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **66** (1937), s. D57.

práce – Rychlíkova kniha [Ry3] byla napsána jako učební text pro studenty pojišťovnictví na technice, byť autor pravděpodobně myslel i na studenty z univerzity, kde rovněž přednášel. Na druhé straně se Rychlík snažil všechny pojmy pečlivě objasnit a důkazy podrobně rozepsat a vysvětlit, aby byly pro studenty dobře pochopitelné.

Rychlíkova kniha byla svou aktuálností v tehdejší české literatuře zcela ojedinělá a ojedinělou ještě poměrně dlouho zůstala. Kromě toho, že záhy po jejím uveřejnění zpřístupnila studentům Kolmogorovovu axiomatickou teorii pravděpodobnosti, spočívá její přínos i v tom, že vedle této abstraktní a skutečnosti poněkud vzdálené teorie věnovala poměrně velkou pozornost také o něco starší a v té době již převážně kritizované teorii Misesově a ukázala její použitelnost v praktických aplikacích, například v souvislosti s úmrtnostními tabulkami. Nepovažoval ji však za základ teorie pravděpodobnosti, ale jen za jednu z možných interpretací abstraktní axiomatické definice. Lze se domnívat, že zařazením této části se Rychlík také snažil ukázat, že přijetí Kolmogorovovy axiomatiky nebrání tomu, aby byl i nadále používán v praxi obvyklý četnostní přístup.

Posloupnostní model Rychlík přeformuloval rovněž do řeči teorie množin: Stejně jako v axiomatické definici uvažoval pokus $\mathfrak{E}$, jehož možné výsledky jsou vyjádřeny množinou E elementárních jevů, dále tzv. množinové těleso $\mathfrak{F}$, tj. neprázdnou množinu podmnožin množiny E uzavřenou na průnik, sjednocení a rozdíl libovolných dvou množin (viz pozn. 5), a množinovou funkci P definovanou v $\mathfrak{F}$ jako pravděpodobnost. Potom postupoval takto: Opakujme pokus $\mathfrak{E}$ a zaznamenejme si vždy jeho výsledek. Při neomezeném opakování dostáváme posloupnost

$$Z:\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \quad \text{kde } \xi_n \in E.$$

Četností (*frekvencí*) množiny $A \subset E$, tedy náhodného jevu, v prvních n členech posloupnosti Z se rozumí hodnota $R_n(A; Z)$ udávající, kolikrát se mezi prvky $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vyskytuje prvek z množiny A. Existuje-li limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(A; Z)}{n} = R(A; Z),$$

nazývá se její hodnota *limitní četností množiny A v posloupnosti Z*. Jestliže pro každou množinu $A \in \mathfrak{F}$ existuje $R(A; Z)$ a je-li

$$R(A; Z) = P(A),$$

pak se Z nazývá *posloupnostním modelem pro dané rozložení pravděpodobnosti.*

Hned v roce vydání učebnice [Ry3] vyšla pozitivní recenze, kterou napsal Rychlíkův asistent na technice Otomar Pankraz, jenž zde ocenil jak Rychlíkovo zpracování problematiky, tak i Kolmogorovovo pojetí. Vyzdvihl zde například samotnou definici náhodného jevu jako množiny elementárních jevů, popsal Rychlíkovy axiomy a jeho posloupnostní model rozložení pravděpodobnosti a kromě jiného poznamenal:[19] *Průkaznost nových metod jest nesporná a záleží nyní na didaktických výkladech, které by nejjednodušeji umožnily přesunouti myšlení ze starších forem k novým směrům. To jest již jen otázkou škol a jest sympatické, že České vysoké učení technické v Praze tyto nové metody podporuje. Spis prof. Rychlíka, ačkoli jest skromně označen jako Úvod, podává na četných místech původní autorovy úvahy a naznačuje, v jakém směru jest možno studium p. p. prohloubiti. To se děje přibráním dalšího axiomu, který vede k zavedení Lebesgueovy míry do p. p.*

3. Otomar Pankraz

Jak již bylo zmíněno v úvodní části, z hlediska základů teorie pravděpodobnosti jsou obzvlášť zajímavé práce Otomara Pankraze (1903–1976). Zatímco Karel Rychlík se pravděpodobnosti věnoval zejména kvůli své pedagogické činnosti, pro Pankraze to byl jeden z hlavních předmětů vědeckého zájmu; s pravděpodobností a statistikou souvisela většina jeho odborných publikací i pracovních aktivit před druhou světovou válkou. Otomar Pankraz působil krátce jako pojistný matematik ve Všeobecném penzijním ústavu, v roce 1931 byl jmenován asistentem II. ústavu matematiky na Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství Českého vysokého učení technického v Praze právě u Karla Rychlíka, o čtyři roky později se habilitoval na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy pro obor pojistná matematika a matematická statistika a až do uzavření vysokých škol na začátku 2. světové války zde jako soukromý docent konal přednášky na různá témata, zejména z oblasti statistiky a pravděpodobnosti. V roce 1938 byl Pankraz pověřen, aby konal dvousemestrální přednášky o počtu pravděpodobnosti v rámci cyklu přednášek o pojistné matematice a matematické statistice. Ve stejném roce se habilitoval pro obor matematika na ČVUT a i zde začal působit jako soukromý docent. V polovině třicátých let Pankraz podnikl několik zahraničních studijních cest; pobýval mj. na Institut für Konjukturforschung v Berlíně, na univerzitě v Kodani, na univerzitě ve Stockholmu (u profesora Haralda Craméra) a v tamní Sweriges Riksbank, a konečně na London University College a London School of Economics and Political Science. Pankrazovu akademickou kariéru předčasně ukončilo uzavření českých vysokých škol na začátku druhé světové války a poválečné události – podrobněji viz [Hy2].

Teorie kolektivů

V habilitační práci *Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs* [Pa1] vydané v roce 1933, Pankraz studoval časový vývoj statistických kolektivů a podal řešení následujícího problému:[20] Nechť je dána konečná množina (kolektiv) jedinců, z nichž každému je přiřazeno n znaků. V určitém okamžiku může každý jedinec ztratit či znovu získat jen jeden znak. Ztráta znaku má za následek vystoupení jedince z kolektivu, jeho opětovné

[19] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **67** (1938), s. D301–D303.

[20] Pankraz navázal na výsledky, které ve dvacátých a na počátku třicátých let publikovali René Risser, Emil Schoenbaum a Renato Taucer v pracích [Ri], [Sch] a [Ta].

získání návrat zpět. Pankraz zkoumal závislost počtu členů kolektivu l na čase t, kde $0 \leq t \leq 1$, a to jednak pro tzv. *uzavřený kolektiv*, do něhož v čase $t > 0$ nemůže vstoupit žádný nový jedinec, jednak pro *kolektiv otevřený*, do něhož mohou noví jedinci vstupovat kdykoli. V obou případech předpokládal, že je znám počet členů v čase $t = 0$ a že o tom, zda daný jedinec v daném okamžiku z kolektivu vystoupí či do něj vstoupí, lze rozhodnout jen s určitou známou pravděpodobností. Pro každého jedince pak ještě uvažoval celkový čas τ, který tento jedinec v časovém intervalu $[0, t]$ stráví mimo kolektiv, a hledal vztah pro *počet $l(t, \tau)$ jedinců, kteří se v okamžiku t nacházejí v daném kolektivu a předtím mimo něj strávili čas τ*. Jestliže počet l nezávisí na τ, tj. $l = l(t)$, pak se jedná o tzv. *jednodimenzionální problém*, jinak se problém nazývá *dvoudimenzionální*. V prvním případě Pankraz odvodil základní integrodiferenciální rovnici pro popis rozpadu kolektivu; k jejímu řešení pak využil Stieltjesův integrál, což mu umožnilo uvažovat obecnější předpoklady, než tomu bylo u dřívějších řešení. V případě dvoudimenzionálního problému Pankraz jako první podal úplné řešení parciální integrodiferenciální rovnice, k níž tento problém vede. Vybrané části habilitační práce byly ve stejném roce vydány také v italštině – viz [Pa2], [Pa3] a [Pa4]. Další výsledky obsahuje článek [Pa5], v němž Pankraz studoval situace, kdy je možnost opětovného návratu do kolektivu vyloučena, a podrobně zkoumal případy, kdy ke změnám ve složení kolektivu dochází buď spojitě, anebo v konečném počtu předem daných okamžiků. Témuž druhu rozpadu jsou věnovány také články [Pa6] a [Pa7] publikované v němčině a italštině. S uvedeným tématem souvisí i řada prací z oblasti matematické analýzy, v nichž se Pankraz zabýval integrálními a integrodiferenciálními rovnicemi – jejich přehled je uveden v [Hy2].

Celkem lze říci, že jako pojistný matematik se zájmem o praktické aplikace Pankraz uznával četnostní pojetí pravděpodobnosti. Na rozdíl od Misese, jehož knize [Mi3] věnoval recenzi v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky,[21] ji však považoval skutečně jen za jednu z interpretací, nikoli za vlastní základ teorie pravděpodobnosti. V článku [Pa8] například poznamenal:

> *Jakkoli však frekvenční pr. nám zjednává bezprostřední vztah k empirickému světu, zdaleka nevyčerpává celý obor statistiky a nevystačíme s ní právě v rozhodujících případech exaktní přírodovědy. Kromě toho nelze ji použít často ani na případy pozorované v běžném životě, kde má nám zachytiti a objektivisovati aspoň část onoho subjektivního pocitu jistoty resp. nejistoty, se kterým vyslovujeme výroky o zkoumaných jevech.* ([Pa8], str. 44)

Axiomatická definice pravděpodobnosti

O axiomatické definici pravděpodobnosti Pankraz napsal: *Nebudeme při ní používati žádné předem dané obsahové interpretace pr.-sti, tedy nebudeme se tázati, „co jest pr.“, nýbrž vyjdeme z otázky, „jaké vlastnosti (znaky) má míti pr.“. Vyběřeme její nejdůležitější znaky a prohlásíme, že každý pojem, který má tyto vybrané znaky, jest pr.-stí. Při výběru vlastností budeme přihlížeti jen*

[21] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **61** (1932), s. 362–363.

k vlastnostem formálním, čímž si zaručíme co nejširší rozsah pojmu pr. … V důsledku toho, že axiomy vyjadřují jen a jen formální vlastnosti pojmů, vzniká otázka interpretace toho, co má vlastnosti v axiomech vyslovené. Tu snadno zjistíme, že danému axiomatickému systému vyhovují všechny interpretace, které jsou navzájem isomorfní. ([Pa8], str. 44–45)

V druhé části jsme viděli, že v roce 1938, kdy vyšla Rychlíkova učebnice [Ry3], Pankraz napsal recenzi, v níž ocenil jak tuto knihu, tak i Kolmogorovovu axiomatiku jako takovou. V následujícím roce však byl ke Kolmogorovovým axiomům kritičtější – hlavní námitky jsou citovány v první části této kapitoly. Pankraz se domníval, že z hlediska vnitřní logiky je správné, aby byla pravděpodobnost hned v prvotních axiomech definována jako podmíněná, tedy jako funkce dvou argumentů. To pak také usnadní nejrůznější interpretace a aplikace. Například v tzv. *logické interpretaci* je pravděpodobnost považována za míru racionálního přesvědčení o platnosti určité hypotézy nebo předpovědi při dané evidenci, kdy při stejných znalostech by všechny myslící bytosti vždy dospěly ke shodné hodnotě pravděpodobnosti. V *interpretaci subjektivní* je pravděpodobnost rovněž považována za míru přesvědčení; vychází se však z názoru, že její vyhodnocování je více či méně subjektivní, takže při shodné evidenci mohou různé bytosti dospět k různým hodnotám pravděpodobnosti. V obou případech se ovšem jedná o pravděpodobnost podmíněnou, závisející na dostupné evidenci, popř. navíc i na subjektivním hodnocení. Ostatně i pravděpodobnost 1/6, že při hodu kostkou padne šestka, je podmíněna dokonalou symetrií kostky. V neposlední řadě uvažujme geometrickou pravděpodobnost, kde jsou studovány výhradně podmíněné pravděpodobnosti: kdybychom se například zeptali, jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod v prostoru leží uvnitř zadané koule, pak by pro každou kouli s konečným poloměrem byl výsledek nulový, protože jako míra množiny bodů v prostoru se uvažuje objem této množiny, a ten by byl pro celý prostor nekonečný. V úlohách tohoto typu je proto vždy třeba množinu „všech možných případů“ nějakým způsobem omezit, a tím pravděpodobnost podmínit.

Podívejme se nyní podrobněji na obsah Pankrazových prací věnovaných axiomatické definici pravděpodobnosti. Článek *O axiomech počtu pravděpodobnosti* [Pa8] začíná obecným výkladem o vědeckých teoriích a logické syntaxi, o různých přístupech k teorii pravděpodobnosti a významu její axiomatické definice. Dále připomíná základní pojmy teorie množin a jako motivaci pojetí pravděpodobnosti coby dvouargumentové funkce popisuje logickou interpretaci pravděpodobnosti. Potom uvádí následující definici:[22]

Definice (Pankraz 1). *Nechť $\mathfrak{K}$ jest soustava částečných množin množiny E. Budeme pro soustavu $\mathfrak{K}$ požadovati:*

I. *$\mathfrak{K}$ jest množinové těleso s E jako největší množinou.*

II. *Ke každým dvěma množinám A a B z $\mathfrak{K}$ jest přiřazeno jedno reálné číslo*

$$P(A,B) \geq 0.$$

[22] Viz [Pa8], s. 56–57.

III. $P(A, A) = 1$.

IV. *Axiom součtový:*[23] *Jsou-li množiny B a C disjunktní, platí*

$$P(A, B + C) = P(A, B) + P(A, C).$$

V. *Axiom násobení pravděpodobností:*[24]

$$P(A, BC) = P(A, B) \cdot P(AB, C)$$

za předpokladu $P(A, B) > 0$.

Pankraz poznamenává, že uvedený systém axiomů je bezesporný.[25] Pro $P(A, B)$ používá také Kolmogorovovo označení[26] $P_A(B)$; místo výrazu *podmíněná pravděpodobnost* však dává přednost pojmenování *pravděpodobnost jevu B se zřetelem k jevu A*, které nebudí zdání kauzální souvislosti. Dále podotýká:

> *Toto pojmenování úplně souhlasí s ostatními teoriemi p. pr., jako na př. s Misesovou teorií a s logickými teoriemi p. pr., podle nichž pr. jest vyjádřením vztahu mezi dvěma výroky, to zn. tvrdí se tím, že jeden výrok jest v určitém stupni pravděpodobný ve srovnání s údaji obsaženými v jiném výroku. Z toho plyne, že mluviti o pr. jevu B bez udání jevu A postrádá smyslu. Jestliže tak přesto někdy činíme, jde o pouhou brachylogii, při které dodatek „vzhledem k jevu A“ mlčky předpokládáme jako samozřejmý.* ([Pa8], s. 57)

Pankraz rovněž ukazuje, že součtový axiom IV platí pro libovolný konečný počet sčítanců. Potom definici upravuje tak, aby platila i aditivita spočetná: Od množiny $\mathfrak{K}$ požaduje, aby byla uzavřená také vzhledem ke spočetným sjednocením, tj. aby byla σ-algebrou, a součtový axiom nahrazuje tzv. *axiomem absolutní sčitatelnosti*:[27]

IV'. Jsou-li A, B_1, B_2, $B_3, \ldots$ v konečném nebo nekonečném spočetném počtu množiny z tělesa $\mathfrak{K}$, při čemž B_1, B_2, $B_3, \ldots$ jsou navzájem vesměs disjunktní, potom platí:

$$P(A, B_1 + B_2 + B_3 + \cdots) = P(A, B_1) + P(A, B_2) + P(A, B_3) + \cdots$$

Jako definitivní pak Pankraz podává následující definici.

---

[23] Pankraz značil podobně jako například Kolmogorov průnik a sjednocení množin jako součin a součet. Použijeme-li k tomu pozdější označení podmíněné pravděpodobnosti, můžeme axiom IV přepsat ve tvaru: $P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

[24] Tj. $P(BC|A) = P(B|A) \cdot P(C|AB)$ za předpokladu, že $P(B|A) > 0$.

[25] Teprve v článku [Pa10] však z axiomu III vyloučil případ $A = \emptyset$, který vede ke sporu.

[26] Dnes bychom psali $P(B|A)$.

[27] Pankraz rovněž poznamenává, že axiom IV' lze v duchu Kolmogorovovy definice nahradit axiomem IV spolu s tzv. *axiomem spojitosti* (viz Kolmogorovův axiom VI): Pro každou klesající posloupnost $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$ množin z $\mathfrak{K}$, kde $\Pi_n R_n = \emptyset$, je $\lim P(A, R_n) = 0$. Z axiomu IV totiž plyne: $P(A, \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n-1} P(A, B_\nu) + P(A, R_n)$, kde $R_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} B_\nu$. Posloupnost množin R_n zřejmě splňuje výše uvedené podmínky. Platí-li tedy axiom spojitosti, pak je také $\lim P(A, R_n) = 0$ a platí i axiom IV'.

Definice (Pankraz 2). *Budiž $\mathfrak{K}$ Borelovo množinové těleso s E jakožto největší množinou. Pak nechť v $\mathfrak{K}$ jest definována jednoznačná funkce $P(A, B)$ dvou argumentů A, B vyhovující podmínkám:*

1. $P(A, B) \geq 0$ *pro každé A a B z $\mathfrak{K}$.*
2. $P(A, A) = 1$.
3. *Platí axiom absolutní sčitatelnosti pravděpodobností.*
4. *Platí axiom násobení pravděpodobností.* ([Pa8], str. 58)

Pankraz se podrobně věnoval také logické interpretaci pravděpodobnosti. Připomněl, že každé výrokové formě V_X o jedné proměnné jednoznačně odpovídá množina M_X, která je jejím oborem pravdivosti, a naopak, každé množině M_X jednoznačně (až na ekvivalenci) odpovídá výroková forma V_X (např. „x je prvkem množiny M_X“). Konjunkci, resp. disjunkci, dvou výrokových forem potom odpovídá průnik, resp. sjednocení, jejich oborů pravdivosti. Axiomatická definice pravděpodobnosti je přitom založena na myšlence, že každý náhodný jev X lze popsat jako podmnožinu M_X určité množiny M_Ω elementárních jevů, přičemž současnému výskytu dvou jevů opět odpovídá průnik příslušných množin, a situaci, kdy nastane aspoň jeden ze dvou jevů, odpovídá sjednocení příslušných množin. Konečně libovolný náhodný jev X lze popsat výrokovou formou V_X s oborem pravdivosti M_X („vyskytne-li se x, nastane jev X“). Jak Pankraz zdůrazňuje, z formálního hlediska nezáleží na tom, zda pracujeme s jevem X, výrokovou formou V_X nebo množinou M_X, a všechny proto můžeme značit týmž symbolem X. Nahradíme-li pak v definici pravděpodobnosti libovolnou množinu $X \in \mathfrak{K}$ odpovídající výrokovou formou $X(\xi)$: *ξ má vlastnost X, to jest ξ patří do množiny X*, získáme logickou interpretaci pravděpodobnosti, v níž je pravděpodobnost chápána jako určitá „míra vyplývání“ jedné výrokové formy z jiné.

V souvislosti s definicí Pankraz zdůrazňuje, že požadavek uzavřenosti na průnik, sjednocení a rozdíl daného systému množin plyne z isomorfismu mezi tímto systémem a množinou výrokových forem týkajících se daného *myšlenkového oboru*, protože klasický predikátový kalkul vychází z předpokladu, že výsledkem negace, konjunkce a disjunkce libovolných výrokových forem je opět výroková forma týkající se daného oboru.

Bude-li však uvažovaným myšlenkovým oborem kvantová fyzika, pak je požadavek bezvýhradné spojovatelnosti výrokových forem omezen Heisenbergovým principem neurčitosti. Pro kvantovou teorii proto Pankraz podává obecnější definici, v níž se i nadále požaduje, aby systém množin $\mathfrak{K}$ obsahoval největší množinu, upouští se však od požadavku uzavřenosti na průniku:

Definice (Pankraz 2K).

1. *Definičním oborem jest každá množina isomorfní k množině projektivních operátorů.*
2. *Axiomy 1., … , 4.* [z definice 2] *zůstávají v platnosti.*
3. *Třeba přibrat další axiom t. zv. existenční: Je-li podle axiomů vypočtena hodnota $P(X, Y)$, pak má význam, t. j. existuje, jen tehdy, když X a Y mají význam.* ([Pa8], s. 67)

Axiomatické definici pravděpodobnosti Pankraz věnoval také článek *O pojmu pravděpodobnosti* [Pa9], který vyšel roku 1940 v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky a byl určen mj. posluchačům přednášek o počtu pravděpodobnosti, které Pankraz konal na Univerzitě Karlově před uzavřením vysokých škol.

Pravděpodobnost je zde opět definována jako funkce dvou argumentů, jimiž jsou množiny z určitého *množinového tělesa* $\mathfrak{K}$. Pro tzv. *obyčejné rozdělení pravděpodobnosti P v $\mathfrak{K}$* jsou uvedeny axiomy I až IV z definice 1, poslední axiom je vynechán. Pro tzv. *kvantové rozdělení pravděpodobnosti* pak Pankraz opět upouští od požadavku uzavřenosti dané množiny a k axiomům II až IV přidává existenční axiom uvedený v definici 2K.

Pankraz podotýká, že představený systém axiomů není úplný, a proto mu vyhovuje více různých pojmů, speciálně *absolutní* (*nepodmíněná*) *pravděpodobnost jevu A* jako číslo $P(A) = P(E, A)$, kde A je prvek množinového tělesa $\mathfrak{K}$ s největším prvkem E, a dále *pravděpodobnost podmíněná*, definovaná vztahem

$$P_A(B) = P(A, B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(E, AB)}{P(E, A)}\,.$$

Ve stejném ročníku Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky vyšel ještě dodatek *Poznámka k mému článku „O pojmu pravděpodobnosti“* [Pa10], v němž Pankraz odstranil nedopatření, o nichž poznamenal, že do jeho axiomů *vnikla vlivem Reichenbachových problematických výkladů v jeho knize Wahrscheinlichkeitslehre* [Rei]. Hlavním problémem je skutečnost, že axiom III nevylučuje $A = \emptyset$, což spolu s axiomem IV vede ke sporu. Podle axiomu IV totiž platí:

$$P(A, \emptyset) = P(A, \emptyset) + P(A, \emptyset);$$

pro $P(\emptyset, \emptyset) = 1$ by pak vycházelo $1 = 1 + 1$. Pankraz proto omezuje definiční obor pravděpodobnosti $P(A, B)$ na množinu $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$, kde

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}, \qquad \mathfrak{M} = \{(\emptyset, B), B \in \mathfrak{K}\}.$$

Druhým problémem je skutečnost, že z vlastností nezáporných aditivních funkcí pro $\emptyset \neq A \subseteq B$ plyne: $P(A, B) \geq P(A, A) = 1$. Nerovnost je sice neostrá, Pankraz však axiom III upravuje tak, aby v uvedeném případě platilo definitoricky $P(A, B) = 1$. Systém axiomů tak získává následující tvar.[28]

Definice (Pankraz 3). $(\mathfrak{K}, P)$ se nazývá *obyčejné rozložení pravděpodobnosti P v $\mathfrak{K}$*, jsou-li splněny tyto podmínky:

I. *$\mathfrak{K}$ jest těleso množin A, B, $C, \dots$ s největší množinou E.*
II. *Ke každé dvojici (A, B) elementů $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{K}$ s výjimkou dvojic $(\emptyset, B)$, jest jednoznačně přiřazeno reálné číslo $P(A, B) \geq 0$.*
III. *Pro každou dvojici (A, B) nenulových elementů $A \in \mathfrak{K}$, $B \in \mathfrak{K}$ s podmínkou $B \supseteq A$ platí $P(A, B) = 1$.*

[28] Ponecháváme zde stejné označení jako v článku [Pa8]; Pankraz psal Ω, X, Y, Z místo $\mathfrak{K}, A, B, C$.

IV. *Pro libovolný nenulový element $A \in \mathfrak{K}$ a pro libovolné dva alternativní elementy $B \in \mathfrak{K}$, $C \in \mathfrak{K}$ platí $P(A, B + C) = P(A, B) + P(A, C)$.*

([Pa10], s. D162)

V souvislosti s četnostní interpretací Pankraz poznamenává, že pokud bychom chtěli *funkci $P(A, B)$ na $\mathfrak{G} \backslash \mathfrak{M}$ specialisovati tak, aby byla vždy schopna statistické (t. j. frekvenční) interpretace*, museli bychom jako V. axiom přidat podmínku, že pro každou dvojici $(A, B) \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$ platí

$$P_A(B) = P(A, B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(E, AB)}{P(E, A)} .$$

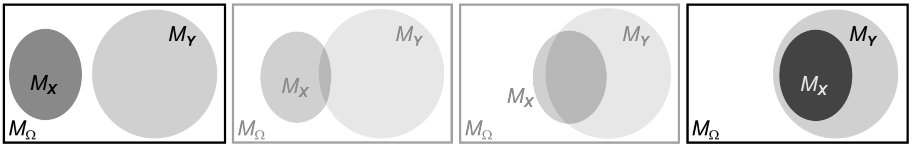
Pankraz poznamenává, že otázka platnosti tohoto axiomu pro kvantovou fyziku zatím zůstává nerozhodnuta, a proto svůj axiomatický systém ponechal v tomto směru otevřený.

Dále Pankraz zmiňuje, že bez přidaného axiomu *jest možno vybudovat počet pravděpodobnosti analogický obvyklému počtu tím, že bychom podmíněné pravděpodobnosti (a tím t. zv. větu o násobení pravděpodobností) zrelativisovali vzhledem k elementu A definicí*

$$P_B(A, C) = \frac{P(A, BC)}{P(A, B)} , \qquad P(A, B) > 0.$$

Význam tohoto počtu pravděpodobnosti dal by se charakterisovati takto: Dosavadní počet pravděpodobnosti určuje čísla $P(A, B)$ vzhledem k největší množině E jakožto k universálnímu oboru diskuse. Zrelativisovaný počet pravděpodobnosti určoval by $P(A, B)$ vzhledem k diskusním oborům A, které jsou podobory universálního oboru E, čímž by se pravděpodobnostní výroky objevily v novém a hlubším světle.[29]

Jak bylo zmíněno výše, Pankraz se v citovaných článcích podrobně věnoval mj. logické interpretaci pravděpodobnosti. V této souvislosti upozornil na to, že popsaná korespondence mezi množinami, výrokovými formami a náhodnými jevy ukazuje, že na rozdíl od teorie pravděpodobnosti postihuje klasická výroková logika jen velmi málo vzájemných vztahů mezi příslušnými množinami. Pro libovolné dvě výrokové formy lze pomocí „klasické“ implikace vyjádřit tyto případy:

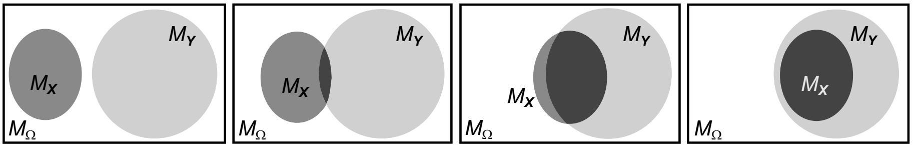


$M_X \cap M_Y = \emptyset$ $\qquad$ $M_X \subseteq M_Y$

$V_X \Rightarrow \neg V_Y$ $\qquad$ $V_X \Rightarrow V_Y$

[29] Viz [Pa10], s. D164. Ve vztahu $P_B(C) = P(BC)/P(B)$ tedy Pankraz všechny pravděpodobnosti podmiňuje jevem A. Povšimněme si, že přepíšeme-li poslední vzorec ve tvaru $P(BC|A) = P(B|A)P(C|AB)$, obdržíme axiom V z Pankrazovy první definice.

Budeme-li však pracovat s náhodnými jevy a vztah mezi nimi vyjádříme pomocí podmíněné pravděpodobnosti, budou si odpovídat:



$M_X \cap M_Y = \emptyset$	$\emptyset \neq M_X \cap M_Y \subsetneq M_X$	$M_X \cap M_Y = M_X$
$P(Y\|X) = 0$	$0 < P(Y\|X) < 1$	$P(Y\|X) = 1$
$V_X \Rightarrow \neg V_Y$		$V_X \Rightarrow V_Y$

Nyní se zdá přirozené vyplnit tuto „mezeru“ ve světě výrokových forem pomocí teorie pravděpodobnosti a „mezistupně“ mezi implikacemi $V_X \Rightarrow \neg V_Y$ a $V_X \Rightarrow V_Y$ vyjádřit slovy: „*V_Y plyne z V_X s pravděpodobností p*,“ popř. symbolicky: $V_X \Rightarrow_p V_Y$, kde pravděpodobnost p je definována jako zlomek

$$p = P(Y|X) = \frac{\mu\,(M_X \cap M_Y)}{\mu\,(M_X)}\,,$$

v němž μ značí vhodnou míru dané množiny. Intuitivně, čím větší je míra průniku $M_X \cap M_Y$ vzhledem k celé množině M_X, tím větší je pravděpodobnost, že náhodně zvolený prvek $x \in M_X$ bude ležet také v množině M_Y, neboli kromě výroku $V_X(x)$ bude pravdivý i výrok $V_Y(x)$.

Dodejme, že myšlenku rozšířit klasickou výrokovou logiku pomocí pravděpodobnosti na logiku induktivní, založenou na pojmu částečného vyplývání, představil již Bernard Bolzano (1781–1848) ve spise *Vědosloví* [Bol] z roku 1837. Mezi další zastánce tohoto směru patřili ve 20. století kromě jiných Ludwig Wittgenstein (1889–1951) a Rudolf Carnap (1891–1970).

Jiné své důležité práce Pankraz publikoval i německy, anglicky či francouzsky. Lze se proto domnívat, že kdyby nebylo druhé světové války a poválečných událostí, představil by v cizím jazyce i popsanou axiomatickou definici pravděpodobnosti. Bohužel k tomu nedošlo. Česky psané práce [Pa8]–[Pa10] zůstaly dlouho téměř zapomenuty a v zahraničí zcela nepovšimnuty. Nezávisle na Pankrazovi pak v padesátých letech 20. století podobnou axiomatiku, vycházející z dvouargumentové funkce, představil Alfréd Rényi (1929–1970). V jeho práci [Rn1] nalezneme (pouze v jiném značení) Pankrazovu definici 2, v níž je definiční obor pravděpodobnosti omezen ve smyslu dodatku [Pa10] na množinu $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{M}$. Podobnou definici nalezneme i v pracích [Rn2]–[Rn5].

Nezávisle na Rényiovi i Pankrazovi představil axiomatickou definici pravděpodobnosti jako dvouargumentové funkce také Karl Popper (1902–1994) v pojednáních [Po1] a [Po2]. K zastáncům axiomatiky založené na podmíněné pravděpodobnosti jako primitivním pojmu patří také například Alan Hájek, Hugues Leblanc, Peter Roeper a Wolfgang Spohn, jejichž práce [Ha], [RL] a [Sp] vyšly na konci 20. a na počátku 21. století.

4. Bohuslav Hostinský

Základní přehled prací týkajících se pravděpodobnosti a spadajících do sledovaného období, lze nalézt v knize [Ma] Karla Mačáka; z hlediska různých filosofických pojetí pravděpodobnosti je téma zpracováno v autorčitě knize [Hy2]. V této kapitole jsme se proto zaměřili na vlastní základy teorie pravděpodobnosti. Přitom je třeba upozornit ještě na jednu osobnost, totiž na Bohuslava Hostinského, který byl v období před druhou světovou válkou nejvýznamnějším českým matematikem zabývajícím se teorií pravděpodobnosti a který v tomto oboru sehrál významnou roli i ve světovém měřítku.

Bohuslav Hostinský (1884–1951) krátce vyučoval na středních školách v Novém Bydžově, Roudnici a Praze, v roce 1912 se habilitoval pro vyšší matematiku na Filosofické fakultě České univerzity v Praze a začal zde přednášet jako soukromý docent. Od roku 1920 až do konce života potom působil jako profesor teoretické fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde zavedl a 31 let řídil Ústav teoretické fyziky.

Světového významu jsou zejména jeho práce týkající se markovských procesů z období 1928–1935, jejichž rozbor lze spolu s přehledem dalších prací nalézt v citované knize [Ma]. Z pohledu této kapitoly jsou zajímavé zejména Hostinského publikace zabývající se geometrickou pravděpodobností. Jak bylo zmíněno již v úvodní části, rozvoj této teorie významně přispěl tomu, že teorie pravděpodobnosti byla nakonec založena na teorii množin a teorii míry. V geometrické pravděpodobnosti je zřejmě využití pojmů a výsledků z těchto oborů zcela nezbytné – již při samotné formulaci problémů je třeba hovořit o množinách určitých geometrických objektů (bodů v rovině či prostoru, přímek apod.); tyto množiny jsou navíc obvykle nekonečné, takže nelze hovořit o *počtu* jejich prvků, ale je nutné využít nějakou vhodnou *míru*.

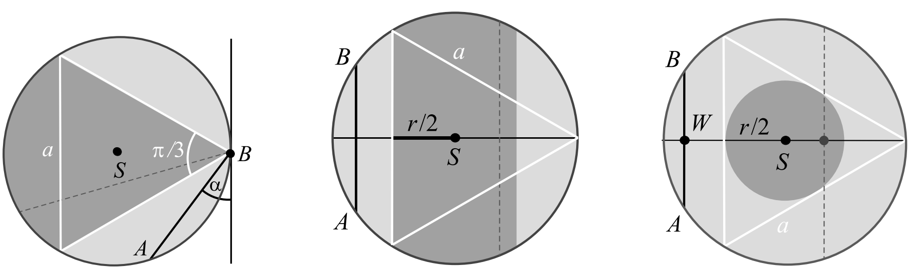
Konkrétní výsledky Bohuslava Hostinského v oblasti geometrické pravděpodobnosti a jejich pozice v historickém vývoji této disciplíny jsou popsány v knize [Hy2]. Zde jen poznamenejme, že i v této oblast se Hostinskému dostalo mezinárodního uznání. Dodnes je například jeho jméno spojováno s tzv. *Crofton-Hostinského formulí*, jejíž prostorovou verzi Hostinský dokázal v knize *Sur les probabilités géométriques* [Ho3] z roku 1925. Tato prostorová verze udává vztah pro střední hodnotu čtvrtých mocnin délky tětivy C dané uzavřené konvexní plochy $\mathcal{S}$ o obsahu S a objemu vnitřní oblasti V:

$$\overline{C^4} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{V^2}{S}$$

O rok později Hostinský vydal knížku *Geometrické pravděpodobnosti* [Ho4], první a na dlouhou dobu jedinou českou knihu věnovanou této teorii. Postupoval zde od množin bodů přes množiny přímek v rovině až po množiny přímek a rovin v prostoru a studoval jejich interakce s různými křivkami a plochami. Míry příslušných množin přitom zavedl explicitně na základě pojmu invariance vzhledem k translaci a rotaci, tedy způsobem, který ve 20. století nahradil původní intuitivní úvahy.[30]

Hostinský se rovněž zapojil do diskuse o tzv. *Bertrandově paradoxu*, který v úvodu ke knize *Calcul des probabilités* [Be] zformuloval francouzský matematik a fyzik Joseph Bertrand (1822–1900) jako jeden z příkladů, jimiž varoval před neopatrným zacházením s nekonečnem a s principem indiference. Bertrand se zde ptá, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná tětiva v kruhu bude delší než strana a vepsaného rovnostranného trojúhelníku, a podává tři různé odpovědi.

V prvním případě je považován za známý jeden z koncových bodů tětivy (bod B na obrázku vlevo; ze symetrie plyne, že tato znalost by neměla změnit výsledek) a náhodně je zvolen směr tětivy, určený úhlem α od tečny ve zvoleném koncovém bodě B; tětiva je delší než a pro $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$, požadovaná pravděpodobnost je proto $P_1 = 1/3$ (stejný výsledek bychom získali i v případě, že by se volily nezávisle na sobě koncové body s rovnoměrným rozdělením na obvodu kruhu). V druhém případě je za známý považován směr tětivy a náhodně se volí její vzdálenost od středu kruhu (na obrázku uprostřed); tětiva je delší než a, je-li uvedená vzdálenost menší než polovina poloměru kruhu r, což vede k pravděpodobnosti $P_2 = 1/2$. Ve třetím případě je pak náhodně zvolen střed tětivy; ta je delší než a právě tehdy, když její střed leží uvnitř soustředného kruhu o poloměru $r/2$ (na obrázku vpravo). Hledaná pravděpodobnost je nyní rovna podílu obsahů uvažovaných kruhů, tedy $P_3 = 1/4$.



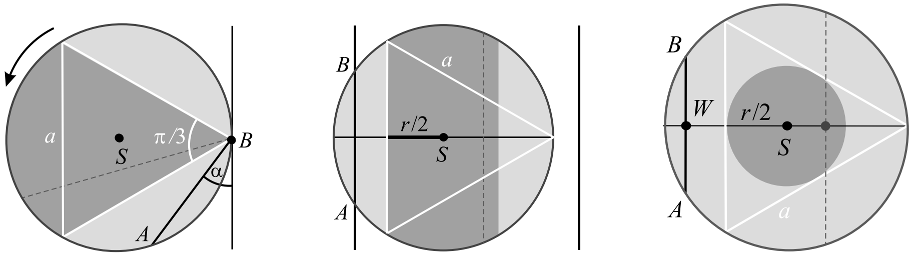
Ilustrace Bertrandova paradoxu

Emanuel Czuber (1851–1925) v knize [Cz] poukázal na to, že pouze druhá z Bertrandových alternativ, která vede k hodnotě $P_2 = 1/2$, odpovídá pojmu náhodně zvolené přímky v rovině tak, jak je zaveden v teorii geometrické pravděpodobnosti. Budeme-li tedy náhodně zvolenou tětivu považovat za část náhodně zvolené přímky protínající daný kruh, obdržíme pravděpodobnost $P_2 = 1/2$. Dnes bychom dodali, že toto řešení rovněž splňuje zmíněný požadavek pohybové invariance. Ani tak však není problém považován za uzavřený. Například Louis Marinoff v článku [Mar] ukazuje, že Bertrandova řešení jsou ve

[30] Požadavek invariance vzhledem k translaci a rotaci zformulovali nezávisle na sobě Henri Poincaré (1854–1912) a Élie Cartan (1869–1951) v pracích a [Poi] a [Ca].

skutečnosti odpověďmi na tři různé otázky: náhodná tětiva je generována buď procesem na obvodu kruhu, vnější procedurou, anebo procedurou uvnitř kruhu. Potom ukazuje, že jasně zformulované variace vedou k různým, ale teoreticky a empiricky konzistentním řešením.

V podobném duchu se vyjádřil i Bohuslav Hostinský, který v knize [Ho4] zdůraznil, že rozumný výpočet pravděpodobnosti může být uskutečněn jen ve vztahu k experimentálním podmínkám, za nichž se volba náhodné tětivy provádí.[31] Upozornil na to, že každá možnost má své opodstatnění a každá z nich odpovídá jinému experimentu. V prvním případě uvažoval pevnou přímku AB a představil si, že se kotouč roztočí kolem bodu B. V druhém případě uvažoval vrh kotouče na rovinu s ekvidistantními rovnoběžkami a ve třetím uvažoval semínko vržené na daný kruh – kam padne, tam bude střed tětivy.



Bertrandův paradox: experimenty B. Hostinského

V každém případě lze říci, že Bertrandův paradox patřil k příkladům, jež matematiky motivovaly k hledání pevných základů teorie pravděpodobnosti.

LITERATURA

[Ber] J. Bernoulli, *Ars conjectandi. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*, Thurnisiorum, Basel, 1713, 239 stran.

[Bet] J. Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Gauthier-Villars, Paris, 1. díl: 1864, 780 stran, 2. díl: 1870, 725 stran.

[Bol] B. Bolzano, *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter*, J. E. v. Seidel, Sulzbach, 1837, 571 stran.

[Bö] P. E. Böhmer, *Über regellose alternierende Folgen*, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig **75** (1923), s. 91–101; **76** (1924), s. 139–148, **77** (1925), s. 36–40.

[31] K tomu ještě dodejme, že experimentální podmínky se Hostinský snažil zohlednit také při řešení Buffonovy úlohy o jehle. Místo neomezené desky s rovnoběžkami uvažoval desku čtvercovou a jehla měla být hozena tak, aby dopadla na tuto desku. Pravděpodobnost, že střed jehly zasáhne čtverec daného obsahu poblíž okraje stolu, je potom menší než pravděpodobnost, že zasáhne stejně velký čtverec poblíž středu. Při řešení tohoto problému Hostinský zobecnil metodu libovolných funkcí, kterou představil H. Poincaré v práci [Poi].

[Ca] É. Cartan, *Le principle de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé*, Bulletin de la Société Mathématique de France **24** (1896), s. 140–177.

[Cr] H. Cramér, *Random Variables and Probability Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1937, 122 stran.

[Cz] E. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*, Teubner, Leipzig, 1903, 594 stran.

[Do1] J. L. Doob, *Probability and Statistics*, Transactions of the American Mathematical Society **36** (1934), s. 759–775.

[Do2] J. L. Doob, *Stochastic Processes and Statistics*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States **20** (1934), s. 376–379.

[Dor] K. Dörge, *Zu der von R. von Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), s. 232–258.

[Gl] V. I. Glivenko, *Kurs teorii verojatnostej*, GONTI, Moskva, 1939, 275 stran.

[Ha] A. Hájek, *What Conditional Probability Could not Be*, Synthese **137** (2003), s. 273–323. ISSN 0039-7857.

[Hi] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1900), s. 253–297.

[Hop] E. Hopf, *On Causality, Statistics, and Probability*, Journal of Mathematics and Physics **13** (1934), s. 51–102.

[Ho1] B. Hostinský, *Nové řešení úlohy o jehle*, Rozpravy České akademie věd a umění, Třída II. Mathematicko-přírodnická **26** (1917), 8 stran.

[Ho2] B. Hostinský, *Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille*, Bulletin des Sciences Mathématiques **44** (1920), s. 126–136.

[Ho3] B. Hostinský, *Sur les probabilités géométriques*, Masarykova univerzita, Brno, 1925, 26 stran.

[Ho4] B. Hostinský, *Geometrické pravděpodobnosti*, JČMF, Praha, 1926, 87 stran.

[Hy1] M. Hykšová, *Karel Rychlík (1885–1968)*, edice Dějiny matematiky, svazek 22, Prometheus, Praha, 2003, 318 stran. ISBN 80-7196-259-7.

[Hy2] M. Hykšová, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*, edice Dějiny matematiky, svazek 51, Matfyzpress, Praha, 2011, 274 stran. ISBN 978-80-7378-192-7.

[Ka] E. Kamke, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, S. Hirzel, Leipzig, 1932, 182 stran.

[Ke] J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, Macmillan, London, 1921, 466 stran.

[Ko] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933, 76 stran.

[Lam] M. van Lambalgen, *Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatisation of random sequences*, in: T. S. Ferguson, L. S. Shapley, J. B. MacQueen (ed.), *Probability, Statistics and Game Theory: Papers in Honour of David Blackwell*, Institute for Mathematical Statistics, Hayward, 2011, s. 347–367.

[Lap] P. S. de Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Imprim. Royale, Paris, 1812, 464 stran.

[LU] Z. Łomnicki, S. Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I. Variables indépendantes*, Fundamenta Mathematicae **23** (1934), s. 237–278.

[Mač] K. Mačák, *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*, edice Dějiny matematiky, svazek 26, Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, Praha, 2005, 165 stran. ISBN 80-7285-052-5.

[Mar] L. Marinoff, *A Resolution of Bertrand's Paradox*, Philosophical Science **61** (1994), s. 1–24. ISSN 0031-8248.

[Mi1] R. von Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift **5** (1919), s. 52–99.

[Mi2] R. von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer, Wien, 1928, 189 stran.

[Mi3] R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, F. Deuticke, Leipzig und Wien, 1931, 574 stran.

[Mi4] R. von Mises, *On the Foundations of Probability and Statistics*, The Annals of Mathematical Statistics **12** (1941), s. 191–205.

[Pa1] O. Pankraz, *Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs*, Aktuárské vědy **4** (1933), s. 32–59.

[Pa2] O. Pankraz, *Sui gruppi statistici*, Giornale dellIstituto Italiano degli Attuari **4** (1933), s. 215–220.

[Pa3] O. Pankraz, *O rozpadu statistických souborů*, Spisy vydávané Přírodovědeckou fakultou Masarykovy university **172** (1933), 10 stran.

[Pa4] O. Pankraz, *Základní rovnice pro časový rozpad statistických kolektivů*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **62** (1933), s. 301–309.

[Pa5] O. Pankraz, *Integrální rovnice pro řád aktivních osob v invalidním pojištění*, Rozpravy České akademie věd a umění, Třída II. Mathematicko-přírodnická **44** (1933), č. 10, 11 stran.

[Pa6] O. Pankraz, *Belastete Integralgleichung für die Aktiven-Ordnung in der Invalidenversicherung*, Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete **3** (1934), s. 60–70.

[Pa7] O. Pankraz, *Sulla tavola degli attivi nell'assicurazione contro l'invalidità*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari **5** (1934), s. 292–303.

[Pa8] O. Pankraz, *O axiomech počtu pravděpodobnosti*, Rozpravy Jednoty pro vědy pojistné **19** (1939), s. 38–69.

[Pa9] O. Pankraz, *O pojmu pravděpodobnosti*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **69** (1940), s. D73–D81.

[Pa10] O. Pankraz, *Poznámka k mému článku O pojmu pravděpodobnosti*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **69** (1940), s. D161–D165.

[Poi] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, G. Carré, Paris, 1896, 274 stran [2. upravené vydání: Gauthier-Villars, Paris, 1912, 333 stran].

[Po1] K. Popper, *A set of Independent Axioms for Probability*, Mind **47** (1938), s. 275–277.

[Po2] K. Popper, *Two Autonomous Axiom Systems for the Calculus of Probabilities*, The British Journal for the Philosophy of Science **6** (1955), s. 51–57.

[Rei] H. Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*, A. W. Sijthoff, Leiden, 1935, 451 stran.

[Rn1] A. Rényi, *On a New Axiomatic Theory of Probability*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **6** (1955), s. 285–335.

[Rn2] A. Rényi, *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, in: B. W. Gnedenko, W. Richter (ed.): *Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik in Berlin vom 19. bis 22. Oktober 1954*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, s. 7–15.

[Rn3] A. Rényi, *On Conditional Probability Spaces Generated by a Dimensionally Ordered Set of Measures*, Teorija verojatnostej i jejo primenenija **1** (1956), s. 61–71.

[Rn4] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Angang über Informationstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962, 547 stran.

[Rn5] A. Rényi, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1972, 511 stran (český překlad knihy [Ren4]).

[Ri] R. Risser, *Applications de la statistique à la démographie et à la biologie*, Gauthier-Villars, Paris, 1932, 255 stran.

[RL] P. Roeper, H. Leblanc, *Probability Theory and Probability Logic*, University of Toronto Press, Toronto, 1999, 240 stran.

[Ry1] K. Rychlík, *Poznámka k Böhmerovým nepravidelným posloupnostem*, Rozpravy České akademie věd a umění, Třída II. Mathematicko-přírodnická **43** (1933, č. 8, 4 strany).

[Ry2] K. Rychlík, *Bemerkung zu regellosen Folgen von Böhmer*, Bulletin international, Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine **34** (1933), s. 15–16.

[Ry3] K. Rychlík, *Úvod do počtu pravděpodobnosti*, JČMF, Praha, 1938, 144 stran.

[Sch] E. Schoenbaum, *Anwendung der Volterra'schen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik*, Skandinavisk Aktuarietidskrift **7** (1924), s. 241–265; **8** (1924), s. 1–22.

[SV] G. Shafer, V. Vovk, *The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe*, Statistical Science **21** (2006), s. 70–98.

[Sp] W. Spohn, *The Representation of Popper Measures*, Topoi **5** (1986), s. 69–74. ISSN 0167-7411.

[Ta] R. Taucer, *Sulla teoria dei gruppi*, in: *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici 5*, N. Zanichelli, Bologna, 1931, s. 413–418.

[To] E. Tornier, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Acta Mathematica **60** (1933), s. 239–380.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz