4 Katarína Janková: Ďalšie vybrané výsledky [4]

Vo viacerých prácach Tibora Neubrunna a jeho žiakov sa využíva metóda, ktorú možno použiť pri dôkazoch viet pre merateľnosť funkcií dvoch premenných, ak sa predpokladajú isté vlastnosti o rezoch. Ukázalo sa, že táto metóda je dobrým prostriedkom aj pre skúmanie konvergencie systémov $\{f_t\}$ merateľných funkcií, kde parameter t sa mení v dosť všeobecnom topologickom priestore. V súvislosti s tým uvádzame výsledky T. Neubrunna týkajúce sa Jegorovovej vety (pozri [7, 8, 6]). O tom, že problémy týkajúce sa tejto vety patrili k prvým oblastiam, ktoré skúmal, svedčí práca [4].

K problematike teórie množín sa T. Neubrunn dostal na viacerých miestach, okrem popularizačých prác, aj v práci [5], ktorej výsledok uvedieme.

Z väčšej skupiny prác, ktoré vznikli v rámci Semináru z reálnych funkcií v spoluautorstve s T. Šalátom, P. Kostyrkom a J. Smítalom uvedieme výsledky prác o množinách vzdialeností [9, 10].

4.1 K Jegorovovej vete

Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor s mierou. Pre postupnosť funkcií z X s hodnotami v metrickom priestore sú známe vzťahy medzi konvergenciou skoro všade a skoro rovnomernou konvergenciou. Ľahko sa dokáže nasledujúci výsledok.

Veta 4.1. *Ak $\{f_n\}$ je postupnosť merateľných funkcií, ktorá konverguje skoro rovnomerne k merateľnej f, tak $\{f_n\}$ konverguje k f skoro všade.*

Obrátene tvrdenie vo všeobecnosti neplatí. Stačí zobrať postupnosť

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ ak } x \in [n, n+1] \\ 0 \text{ inak} \end{cases}$$

[4] Text vznikol s podporou VEGA 2/0047/15.

na priestore $X = R$ s Lebesgueovou mierou. Takáto postupnosť zrejme konverguje k $f(x) = 0$ v každom $x \in R$, avšak nekonverguje skoro rovnomerne. Ak však uvažujeme priestor s konečnou mierou, tvrdenie možno obrátiť, výsledok je známy v teórii miery ako Jegorovova veta ([3]).

Veta 4.2. (Jegorovova). *Ak f_n konverguje ku f skoro všade pre $x \in B$, kde $\mu(B) < \infty$, tak f_n konverguje k f na B skoro rovnomerne.*

Jegorovova veta neplatí automaticky pre spojitý parameter. Ak miesto postupnosti vezmeme systém $\{f_t\}, t \in T$, kde f^t sú t-rezy danej funkcie definovanej na $X \times T$, sú známe viaceré kontrapríklady([15, 14], pozri tiež [11]), z ktorých vidno, že na platnosť podobného tvrdenia sú potrebné dodatočné podmienky na funkciu f. Takéto boli pre dosť všeobecný priestory X a T dané v práci [7]. V práci [7] sa uvažuje nasledujúce zovšeobecnenie pojmu skoro rovnomernej konvergencie.

Definícia 4.1. *Nech $f : X \times T \to R$, T topologický priestor, $t_0 \in T$. Systém $\{f_t\}$, kde $f^t(x) = f(x, t)$, skoro rovnomerne konverguje ku funkcii $\phi : X \to R$, ak pre každé $\epsilon > 0$ existuje $E \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(E) < \epsilon$ a f_t konverguje rovnomerne ku ϕ na $X \setminus E$ pre $t \to t_0$.*

V práci [7] sa predpokladá, že $\mu(X) < \infty$ (inak povedané, μ je úplne konečná) a T je topologický priestor s prvou axiómou spočitateľnosti. T spĺňa 1. axiómu spočitateľnosti, ak každý bod má spočitateľnú bázu okolí. Ukazuje sa, že predpoklad kvázispojitosti (Definícia 2.1 z predošlej časti) je postačujúci pre zovšeobecnenie Jegorovovej vety v nasledujúcom zmysle.

Veta 4.3. *Nech $f : X \times T \to R$, X s úplne konečnou mierou μ a T separabilný topologický priestor s prvou axiómou spočitateľnosti. Nech pre $t_0 \in T$ platí $\lim_{t \to t_0} f(x, t) = \phi(x)$ skoro všade na X a pre každé $x \in X$ je f_x kvázispojitá. Potom pre $t \to t_0$, f^t konverguje k ϕ skoro rovnomerne.*

Iná postačujúca podmienka je v [7] sformulovaná pomocou tzv. $\mathcal{P}$ systému, vzhľadom ku ktorému je f_x regulárna. Nasledujúce definície sú prevzaté z [7], pozri tiež [11]. $\mathcal{P}$ systém je vlastne systém pokrytí možiny X a ukázal sa užitočný napr. pri dokazovaní merateľnosti funkcií dvoch premenných (pozri [1]) alebo pri otázkach merateľnosti grafu funkcií. V tomto smere nadväzujú práce [2] a [1].

Definícia 4.2. *Ak $X \neq \emptyset$, tak systém neprázdnych množín $\mathcal{P} = \{P_k^n\}$, $k = 1, 2, \ldots; n \in N(k)$, kde $N(k)$ je buď konečná množina $\{1, \ldots, n_k\}$ alebo $N(k)$ je množina prirodzených čísel a $\bigcup_n P_k^n = X$ pre $k = 1, 2, \ldots$, budeme nazývať $\mathcal{P}$ systém na X. Ak $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor a $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, tak hovoríme, že $\mathcal{P}$ je merateľný $\mathcal{P}$ systém.*

Definícia 4.3. *Ak $\mathcal{P}$ je $\mathcal{P}$ systém na X, tak funkcia f definovaná na X je regulárna v bode x_0 vzhľadom na $\mathcal{P}$, ak pre každú otvorenú množinu G obsahujúcu $f(x_0)$ existuje k_0 tak, že pre $k > k_0$ platí:*

$$\text{Ak}\, x, x_0 \in P_k^n \text{ pre nejaké}\, n, \text{ tak}\, f(x) \in G.$$

Funkcia f je regulárna na X vzhľadom na $\mathcal{P}$, ak je je regulárna v každom bode $x \in X$ vzhľadom na $\mathcal{P}$.

Definícia 4.4. *Ak X je topologický priestor s topológiou $\mathcal{T}$ a $\mathcal{P}$ je $\mathcal{P}$ systém na X, tak budeme hovoriť, že $\mathcal{P}$ je regulárny vzhľadom na $\mathcal{T}$, ak pre každé $U \in \mathcal{T}$ a pre každé $x \in U$ existuje k_0 tak, že platí:*

$$\text{Pre}\, k > k_0, \text{ ak}\, x \in P_k^n, \text{ tak}\, P_k^n \subset U.$$

Veta 4.4. *Nech $f : X \times T \to R$. Nech existuje $\mathcal{P}$ systém na T taký, že f_x je regulárna na T vzhľadom na $\mathcal{P}$ pre každé $x \in X$ a f^t je merateľná pre každé $t \in T$. Potom, ak $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = \phi(x)$ pre skoro každé x, tak konvergencia $\{f^t\}$ k ϕ je skoro rovnomerná pre $t \to t_0$.*

Pre konvergenciu skoro všade sa môže existova t tzv. kontrolná funkcia, ktorá je v v práci [8] definovaná nasledovne.[5]

Definícia 4.5. *Nech* $f : X \times T \to R$ *je taká, že* f^t *je merateľná pre každé* $t \in T$ *a* $\lim_{t \to t_0} f^t(x) = \phi(x)$ *skoro všade na* X. *Nezápornú skoro všade konečnú merateľnú funkciu* δ *takú, že pre každé* $\epsilon > 0$ *existuje okolie* U *bodu* t_0 *tak, že pre všetky* $t \in U$ *a pre všetky* $x \in X$:

$$|f^t(x) - \phi(x)| \leq \epsilon\delta(x).$$

budeme nazývať kontrolnou funkciou konvergencie skoro všade pre f^t.

Existencia kontrolnej funcie zaručí, že konvergencia bude skoro rovnomerná.

Veta 4.5. ([8]). *Nech* f^t, $t \in T$ *sú merateľné a* $\lim_{t \to t_0} f^t(x) = \phi(x)$ *skoro všade na* X. *Ak pre* f^t *existuje kontrolná funkcia, tak konvergencia je skoro rovnomernápre* $t \to t_0$.

Nie je prekvapivé, že možno dať postačujúcu podmienku pre existenciu kontrolnej funkcie pomocou kvázispojitosti f_x.

Ďalšie možnosti nahradenia kvázispojitosti v uvedených tvrdeniach boli študované v práci [1].

Veta 4.6. ([8]). *Nech* $f : X \times T \to R$ *je ohraničená na* $X \times T$ *a taká, že* f^t *je merateľná pre každé* $t \in T$ *a* f_x *je kvázispojitá na* T *pre každé* $x \in X$. *Nech* $\lim_{t \to t_0} f^t(x) = \phi(x)$ *skoro všade na* X. *Potom existuje kontrolná funkcia pre konvergenciu skoro všade pre* $\{f^t\}$.

[5] Kontrolnou funkciou pre konvergenciu skoro všade pre postupnosti funkcií sa zaoberal Yoneda v [16].

Jegorovova veta sa objavuje v práci T. Neubrunna aj v súvislosti s transfinitnou konvergenciou na priestoroch s mierou. V tomto prípade sa ukazuje, že nie je potrebné zavádzať pojem skoro rovnomernej konvergencie. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.7. *Postupnosť* $\{f_\xi\}_{\xi<\Omega}$ *konverguje skoro rovnomerne ku* f *vtedy a len vtedy, ak konverguje ku* f *rovnomerne skoro všade.*

Konvergencia skoro všade pre transfinitnú postupnosť neimplikuje konvergenciu rovnomernú skoro všade ani v prípade, že uvažujeme konvergencie na množine konečnej miery. (Príklad 1 v [5].)

Veta 4.8. *([6]). Nutnou podmienkou pre platnosť Jegorovovej vety na priestore* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *je: Pre každú množinu* $E \in \mathcal{S}$ *konečnej miery a ľubovoľnú transfinitnú postupnosť* $(E_\xi)_{\xi<\Omega}$ *merateľných množín takých, že* $\bigcup E_\xi = E$ *platí* $\lim_{\xi<\Omega} m(E_\xi) = m(E)$.

V práci [6] je ďalej uvedená charakterizácia konvergencie transfinitných postupností podľa miery.

4.2 Problematika teórie množín

Problematika súvisiaca s axiomatikou teórie množín T. Neubrunna priťahovala, aj keď v nej pracoval len okrajovo. Okrem toho, že súvisela s jeho pedagogickou činnosťou (veľa rokov prednášal teóriu množín), pozri napr. popularizačnú publikáciu [12], veľmi pekným výsledkom je ekvivalencia tzv. exhaustačného princípu používaného v teórii miery s axiómou výberu z práce [5].

Veta 4.9. (Exhaustačný princíp). *Nech* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *je priestor s konečnou mierou. Existuje množina* $E \in \mathcal{S}$ *taká, že ak* $F \in \mathcal{S}, F \subset X \setminus E$, *tak* $\mu(F) = 0$.

4.3 Množiny vzdialeností a podielové množiny

V spoluautorstve s Tiborom Šalátom publikoval Tibor Neubrunn viacero prác. Množinami vzdialeností, resp. podielov množín reálnych čísel sa zaoberajú práce [9, 10]. Pre neprázdnu podmnožinu $A \subset E_1$, kde E_1 je množina reálnych čísel, nech $D(A)$ je množina vzdialeností, teda množina všetkých čísel $|x - y|$, kde $x, y \in A$. Podobne $R(A)$ označuje množinu všetkých podielov (podielovú množinu) $\frac{x}{y}$ pre $x, y \in A$. Pre každé $\omega \in \Omega$, kde Ω je metrický priestor, autori uvažujú transformáciu $T_\omega : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, kde $\mathcal{L}$ je systém všetkých lebesgueovsky merateľných množín v E_1. Nech tieto transformácie spĺňajú podmienky

(i) Existuje $\omega_0 \in \Omega$ tak, že pre každý interval $[a, b]$ a každú postupnosť $\omega_n \to \omega_0$, $\omega_n \in \Omega$:

$$\lim_{n\to\infty} (\inf T_{\omega_n}([a, b])) = a, \ lim_{n\to\infty}(\sup T_{\omega_n}([a, b])) = b,$$

(ii) Ak $E, F \in \mathcal{L}$ a $E \subset F$, tak pre každé $\omega \in \Omega, T_\omega(E) \subset T_\omega(F)$,

(iii) Ak $E \in \mathcal{L}$ a $\omega_n \to \omega_0$, tak

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(T_{\omega_n}(E)) = \lambda(T_{\omega_0})(E) = \lambda(E).$$

Potom platí nasledujúca veta.

Veta 4.10. *Nech* $A \in \mathcal{L}, \lambda(A) > 0$ *a* $\omega_n \to \omega_0$. *Ak* T_{ω_n} *spĺňajú* (i)-(iii)*, tak existuje prirodzené* n_0 *tak, že pre* $n \geq n_0$ *platí* $A \cap T_{\omega_n}(A) \neq \emptyset$.

Ako dôsledok tejto vety autori uvádzajú Steinhausovu vetu ([13]).

Veta 4.11. *Ak* $\lambda(A) > 0$*, tak*

- $D(A)$ *obsahuje interval* $(0, \eta)$*,* $\eta > 0$.
- $R(A)$ *obsahuje interval* $(\eta, 1)$*,* $0 < \eta < 1$.

Literatúra

[1] Dravecký, J., Neubrunn, T.: *Measurability of functions of two variables.* Mat. čas. SAV 23 (1973), 147–157.

[2] Dravecký, J.: *Spaces with measurable diagonal.* Mat. čas. SAV 25 (1975), 3–9.

[3] Egoroff, D. F.: *Sur les suites des fonctions mesurables.* C. R. Acad. Sci. Paris 152, 1911, 244–246.

[4] Neubrunn, T.: *Poznámka k merateľným transformáciám.* Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 4 (1959), 287–290.

[5] Neubrunn, T.: *On the equivalence of an exhaustion principle and the axiom of choice.* Fund. Math. 50 (1967), 209–211.

[6] Neubrunn, T.: *On transfinite convergence in measure spaces.* Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. 35 (1979), 7–16.

[7] Neubrunn, T.: *Almost uniform convergence for continuous parameters.* Math. Slovaca 28 (1978), 321–328.

[8] Neubrunn, T.: *Remarks on control function of a. e. convergence.* AMUC 37 (1980), 165–172.

[9] Neubrunn, T., Šalát, T.: *Distance sets, ratio sets and certain sets of transformations of sets of real numbers.* Čas. pěst. mat. 94 (1969), 381–393.

[10] Neubrunn,T., Šalát, T.: *O množinách vzdialeností množín metrického priestoru.* Mat.-fyz. čas. 9 (1959), 222–235.

[11] Neubrunn, T., Riečan, B.: *Miera a integrál.* Veda, Bratislava, 1981.

[12] Neubrunn, T.: *Praktická metodika alebo Quid temptare nocebit*. Mat. obzory 38 (1992), 5–7.

[13] Steinhaus, H.: *Nova vlasnosc mnogosci G. Cantora*, Wektor 7 (1917), 105–107.

[14] Tolstov, G.: *Zamečanie k teoreme Jegorova.* D. A. N. 22 (1939), 309 – 311.

[15] Weston, J. D.: *A counterexample concerning Egoroff's theorem.* J. London Math. Soc. 31 (1959), 139–140.

[16] Yoneda, K.: *On control function of a. e. convergences.* Math. Japon. 20 (1975), 101–105.