11. Iné úlohy

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 119–130.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404188

11. INÉ ÚLOHY

Úloha 11.1. Dokážte, že existuje 10^{10} po sebe idúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$.

Riešenie I. Pre každé prirodzené číslo x označme $P(x)$ súčin všetkých prvočísel nepresahujúcich x. Uvažujme konečnú postupnosť

$$P(10^{10}) - 10^{10} - 1,\ P(10^{10}) - 10^{10},\ \ldots,$$
$$P(10^{10}) - 3,\ P(10^{10}) - 2.$$

Pretože zrejme $P(10^{10}) > 2.10^{10} + 1$, sú všetky jej členy celé čísla väčšie než 10^{10}. Každý z nich má prvočíselný deliteľ menší než 10^{10} (pre prvý člen môžeme vziať 101 a pre každý ďalší člen $P(10^{10}) - i$ niektorý prvočíselný deliteľ čísla i), sú to teda zložené čísla. Ostáva len ukázať, že sú menšie než $10^{10^{10}}$ a na to stačí dokázať nerovnosť $P(10^{10}) < 10^{10^{10}}$.

Pre každé prirodzené číslo n je číslo $\binom{2n}{n}$ deliteľné všetkými prvočíslami p medzi n a $2n$. Skutočne, ak $n < p < 2n$, tak $p \mid (2n)!$, ale $p \nmid n!$, a preto $p \mid \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Využitím tejto vlastnosti a nerovnosti $\binom{2n}{n} < 2^{2n}$ pre $n = 5.10^9$, 25.10^8 a 125.10^7 postupne dostávame

$$P(10^{10}) \leqq \binom{10^{10}}{5.10^9} . P(5.10^9) < 2^{10^{10}} . P(5.10^9) \leqq$$

$$\leqq 2^{10^{10}} . \binom{5.10^9}{25.10^8} . P(25.10^8) < 2^{10^{10}+5.10^9} . P(25.10^8) \leqq$$

$$\leqq 2^{15.10^9} . \binom{25.10^8}{125.10^7} . P(125.10^7) < 2^{175.10^8} . P(125.10^7).$$

Pre každé $k \geqq 1$ je z 30 po sebe idúcich čísel $30k + i$, $0 \leqq i \leqq 29$ najviac $\varphi(30) = 8$ prvočísel; každé z ostatných 22 čísel totiž je deliteľné dvoma, tromi alebo piatimi. Preto počet prvočísel menších než 125.10^7 nepresahuje

$$30 + \left\lfloor \frac{125.10^7}{30} \right\rfloor . 8 < 30 + 42.10^6 . 8 < 34.10^7,$$

teda platí

$$P(125.10^7) < (125.10^7)^{34.10^7} < (10^{10})^{34.10^7} = 10^{34.10^8}.$$

Spolu potom dostávame

$$P(10^{10}) < 2^{175.10^8} . 10^{34.10^8} < 8^{60.10^8} . 10^{34.10^8} <$$

$$< 10^{60.10^8+34.10^8} < 10^{10^{10}},$$

čo bolo treba dokázať. □

Riešenie by sme mohli podstatne skrátiť využitím vzorca $P(n) \leqq 4^n$ platného pre všetky $n \in \mathbb{P}$; podstatnú ideu z jeho dôkazu sme v riešení vlastne uviedli. Ďalšie riešenie, ktoré uvedieme, bude kratšie a dosiahneme podstatne silnejšie tvrdenie než sa žiada v úlohe. Jeho nevýhodou však je, že sa v ňom používajú podstatne silnejšie matematické vety. Preto napríklad v MO a podobných súťažiach by bolo vhodnejšie prvé riešenie.

Riešenie II. Označme A počet prvočísel menších než $B = 10^{10^{10}}$. Tieto prvočísla rozdelia ostatných $B - A$ prirodzených čísel nepresahujúcich B do A neprázdnych intervalov po sebe idúcich celých čísel (medzi 2, 3 je totiž prázdny interval). Teda aspoň jeden z nich obsahuje aspoň $\left\lfloor \frac{B-A}{A} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{B}{A} \right\rfloor - 1$ čísel. Avšak $A \leq \frac{B}{\ln B - 4}$, a preto

$$\left\lfloor \frac{B}{A} \right\rfloor - 1 \geq \left\lfloor \frac{B}{\frac{B}{\ln B - 4}} \right\rfloor - 1 = |\ln B| - 5 =$$

$$= |10^{10} \ln 10| - 5 \geq 2{,}3 . 10^{10}.$$

Teda existuje aspoň $2{,}3 . 10^{10}$ po sebe idúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$. □

Úloha 11.2. Dokážte, že číslo $B + 1$, kde $B = 10^{10^{10}}$, nemá prvočíselný deliteľ menší než 12 000.

Riešenie. Predpokladajme, že p je prvočíslo, $p | (B + 1)$. Potom platí $10^{10^{10}} \equiv -1 \pmod{p}$, $10^{2 \cdot 10^{10}} \equiv 1 \pmod{p}$. Zrejme $D(10, p) = 1$, a potom z malej Fermatovej vety vyplýva $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Podľa Euklidovho algoritmu existujú celé čísla x, y také, že platí

$$D(3 . 10^{10}, p - 1) = x . 2 . 10^{10} - y . (p - 1);$$

ľahko možno tiež zariadiť x, $y \in \mathbb{N}$.
Potom platí

$$10^{x . 2 . 10^{10}} \equiv 10^{y . (p-1)} \pmod{p},$$

a odtiaľ

$$10^{D(2 . 10^{10}, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Na druhej strane máme

$$10^{D(10^{10}, p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p}, \text{ lebo } 10^{10^{10}} \not\equiv 1 \pmod{p},$$

a preto

$$D(10^{10}, p-1) \neq D(2.10^{10}, p-1).$$

To je možné len tak, že platí $2^{11} | (p-1)$, t. j. p je tvaru $2048k + 1$. Avšak žiadne číslo tohto tvaru menšie než 12 000 (t. j. pre $k \leq 5$) nie je prvočíslo, pretože

$$3 | 2049,\ 17 | 4097,\ 5 | 6145,\ 3 | 8193,\ 7 | 10\,241.$$

Preto $p \geq 2048.6 + 1 > 12\,000$, čo bolo treba ukázať. □

Keby sme chceli odhad 12 000 zvýšiť na 24 000, museli by sme okrem iného dokázať, že 12 289 a 18 433 nie sú delitele čísla $B + 1$. To by sme mohli najľahšie urobiť tak, že by sme vypočítali čísla B MOD 12 289, B MOD 18 433 za predpokladu, že 12 289, 18 433 sú prvočísla. Pri týchto výpočtoch by sme použili malú Fermatovu vetu. Pritom by sme nemuseli overovať, že 12 289, 18 433 sú skutočne prvočísla; ak by totiž boli zložené, určite by nedelili číslo $B + 1$.

Úloha 11.3. Dokážte, že číslo $B + 1$, kde $B = 10^{10^{10}}$, má aspoň jedenásť rôznych prvočíselných deliteľov.

Riešenie. Označme $A_i = 10^{2^{10} \cdot 5^i}$ (teda $B = A_{10}$). Pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí

$$A_{i+1} + 1 = (A_i^4 - A_i^3 + A_i^2 - A_i + 1).(A_i + 1)$$

(my však tento rozklad potrebujeme len pre $i = 9, 8, \ldots, 0$). Označme $C_i = A_i^4 - A_i^3 + A_i^2 - A_i + 1$. Platí

$$C_i - (A_i^3 - 2A_i^2 + 3A_i - 4).(A_i + 1) = 5,$$

teda ak nejaké prvočíslo p delí C_i aj $A_i + 1$, tak $p \mid 5$, teda $p = 5$. Avšak $5 \nmid A_i + 1$, a preto sú čísla $A_i + 1, C_i$ nesúdeliteľné. Potom je C_i nesúdeliteľné aj s každým deliteľom čísla $A_i + 1$. Teda

$$B + 1 = C_9 C_8 C_7 C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1 C_0 . (A_0 + 1)$$

je rozklad čísla $B + 1$ na jedenásť po dvoch nesúdeliteľných činiteľov (zrejme väčších než 1). Každý z nich má prvočíselný deliteľ, pričom tieto delitele sú po dvoch rôzne. Teda $B + 1$ má aspoň jedenásť prvočíselných deliteľov. □

Úloha 11.4. Nech $B = 10^{10^{10}}$ a φ znamená Eulerovu funkciu. Rozhodnite, ktoré z čísel $\varphi(B)$, $\varphi(B + 1)$ je väčšie.

Riešenie. Pre každé $x \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi(x) = x . \prod_{p \mid x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(súčin sa berie cez všetky prvočíselné delitele x). Podľa tohoto vzorca

$$\varphi(B) = B . \left(1 - \frac{1}{2}\right) . \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} B.$$

Odhadneme teraz $\varphi(B + 1)$ zdola. Na to rozložíme množinu $\mathbb{Q}$ všetkých prvočíselných deliteľov čísla $B + 1$ do štyroch množín

$$\mathbb{Q}_1 = \{p \in \mathbb{Q}; p \leqq 10^6\}, \mathbb{Q}_2 = \{p \in \mathbb{Q}; 10^6 < p \leqq 10^8\},$$

$$\mathbb{Q}_3 = \{p \in \mathbb{Q}; 10^8 < p \leqq 10^{10}\}; \mathbb{Q}_4 = \{p \in \mathbb{Q}; 10^{10} < p\}.$$

Potom zrejme platí

$$\varphi(B+1) = (B+1).\prod_{p\in Q_1}\left(1-\frac{1}{p}\right).\prod_{p\in Q_2}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$
$$.\prod_{p\in Q_3}\left(1-\frac{1}{p}\right).\prod_{p\in Q_4}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Odhadneme súčiny na pravej strane; budeme pritom využívať výsledok získaný v úlohe 11.2, že každý prvočíselný deliteľ čísla $B+1$ je tvaru $2048k+1$ a väčší než 10 000. Podľa toho možno každý činiteľ v prvom súčine odhadnúť zdola číslom $1-\frac{1}{10^4}$; činitele v ostatných troch súčinoch možno po rade zdola odhadnúť číslami $1-\frac{1}{10^6}$, $1-\frac{1}{10^8}$, $1-\frac{1}{10^{10}}$. Vzhľadom na vyššieuvedený tvar prvočíselných deliteľov čísla $B+1$ mohutnosti množín Q_1, Q_2, Q_3 po rade neprevýšia 500, 5.10^4, 5.10^6. Mohutnosť n množiny Q_4 odhadneme zo vzťahu $\prod_{p\in Q_4} p \leqq B+1$. Odtiaľ vyplýva $(10^{10})^n \leqq B$, teda $10n \leqq 10^{10}$, teda $n \leqq 10^9$. Preto platí

$$\varphi(B+1) > (B+1).\left(1-\frac{1}{10^4}\right)^{500}.\left(1-\frac{1}{10^6}\right)^{5.10^5}.$$
$$.\left(1-\frac{1}{10^8}\right)^{5.10^6}.\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)^{10^9},$$
$$\varphi(B+1) > (B+1).\left(1-\frac{500}{10^4}\right).\left(1-\frac{5.10^4}{10^6}\right).$$
$$.\left(1-\frac{5.10^6}{10^8}\right).\left(1-\frac{10^9}{10^{10}}\right),$$
$$\varphi(B+1) > (B+1).$$
$$.\left(1-\frac{500}{10^4}-\frac{5.10^4}{10^6}-\frac{5.10^6}{10^8}-\frac{10^9}{10^{10}}\right),$$

$$\varphi(B+1) > \frac{3}{4}(B+1) > \frac{2}{5}B.$$

Teda platí $\varphi(B+1) > \varphi(B)$. □

Úloha 11.5. Pre číslo $B = 10^{10^{10}}$ dokážte nerovnosť

$$\varphi(B+1) > 0{,}98.(B+1).$$

Túto úlohu necháme na vyriešenie čitateľovi. Jedna z možností zlepšovania odhadu z predchádzajúcej úlohy je rozdeliť množinu Q na viac podmnožín. Ďalej možno využiť, že niektoré z čísel tvaru $2048k + 1$ majú deliteľa 3 alebo 5.

Úloha 11.6. Zistite, koľkokrát sa číslo $B = 10^{10^{10}}$ nachádza v Pascalovom trojuholníku.

Riešenie. Máme vlastne zistiť počet usporiadaných dvojíc (x, y) takých, že $0 \leqq y \leqq x$ a

$$\binom{x}{y} = B.$$

Také sú zrejme dvojice $(B, 1)$, $(B, B-1)$. Ukážeme, že ďalšie dvojice (x, y) už nevyhovujú; z dôvodov symetrie Pascalovho trojuholníka sa môžeme obmedziť na prípad $0 \leqq 2y \leqq x$. Prípad $y = 0$ zrejme nevyhovuje a prípad $y = 1$ dáva $x = B$ (čo už máme). Preto stačí skúmať $y \geqq 2$.

Pretože $5^{10^{10}} \Big| \binom{x}{y}$, pri sčítaní čísel $x - y$, y v sústave o základe 5 nastáva aspoň 10^{10} prenosov, a teda číslo x je v tejto sústave aspoň $(10^{10}+1)$-ciferné, t. j. $x \geqq \geqq \left(5^{10^{10}}\right)$. Potom však $y \geqq 2$ dáva

$$\binom{x}{y} \geqq \binom{5^{10^{10}}}{2} = \frac{5^{10^{10}} \cdot \left(5^{10^{10}} - 1\right)}{2} > 10^{10^{10}},$$

teda takto nedostaneme ďalšie výskyty čísla B. Preto sa číslo B nachádza v Pascalovom trojuholníku práve dvakrát, a to ako

$$\binom{B}{1} \text{ a ako } \binom{B}{B-1}. \square$$

Úloha 11.7. Zistite, koľkokrát sa číslo $A = \binom{10\,000}{3\,000}$ nachádza v prvých 50 000 riadkoch Pascalovho trojuholníka.

Riešenie. Máme vlastne zistiť počet usporiadaných dvojíc (x, y) takých, že $x < 50\,000$ a $\binom{x}{y} = A$. Dve také dvojice sú (10 000, 3000) a (10 000, 7000), a pre $x = 10\,000$ už ďalšie také dvojice zrejme neexistujú. Ukážeme sporom, že neexistujú ani pre ostatné $x < 50\,000$. Na to predpokladajme $\binom{x}{y} = A$ a označme $z = x - y$; zrejme smieme predpokladať $y \leqq z$. Teraz rozlíšme dva prípady podľa toho, či je x menšie alebo väčšie než 10 000.

Prípad I. Ak $x < 10\,000$, tak $y > 3000$; inak by bolo $\binom{x}{y} < A$. Uvážme teraz prvočíslo $p = 3001$. Pretože

$$\left\lfloor \frac{10\,000}{p} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{7000}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3000}{p} \right\rfloor,$$

platí $p \mid A$, a teda aj $p \left| \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!z!} \right.$.

Avšak $z \geqq y \geqq p$, a preto $p|y!$, $p|z!$, a teda $p^3|x!$, teda $x \geqq 3p = 9003$.
Teraz uvážme prvočíslo $q = 6997$. Pretože

$$\left\lfloor \frac{10\,000}{q} \right\rfloor = 1 = \left\lfloor \frac{7000}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3000}{q} \right\rfloor$$

(a $q^2 > 10\,000$, teda násobky čísel q^2, q^3, ... sa tu nevyskytnú), platí $q \nmid A$. Avšak $q|x!$, a preto $q|y!$ alebo $q|z!$. Pretože $z \geqq y$, platí $q|z!$, a teda $z \geqq q = 6997$. Teraz znova uvážme $p = 3001$. Platí $z \geqq 2p$, a preto $p^2|z!$. Keďže $p|y!$ a $p \left| \frac{x!}{y!z!} \right.$, musí platiť $p^4|x!$. Teda $x \geqq 4p$, a to je spor s predpokladom $x < 10\,000$.

Prípad II. Nech teraz $x > 10\,000$; potom $y < 3000$. Uvážme teraz prvočíslo $p = 7001$. Platí $p|A$, $p|z!$, a preto $p^2|x!$, teda $x \geqq 2p = 14\,002$. (Opakujú sa úvahy z prípadu I, preto ich už zapisujeme stručnejšie.)

Teraz uvážme prvočíslo $p_1 = 9973$. Pretože $z = x - y > p_1$, platí $p_1|z!$. Avšak $p_1|A$, a preto $p_1^2|x!$, teda $x \geqq 2p_1 = 19\,946$.

Už vieme $z \geqq 19\,946 - 2999 = 16\,947$. Uvážme teraz prvočíslo $p_2 = 8467$. Platí $z \geqq 2p_2$, teda $p_2^2|z!$, a pretože $p_2|A$, platí $p_2^3|x!$, teda $x \geqq 3p_2 = 25\,401$.

Ďalej uvážime prvočíslo $p_3 = 9967$. Platí $z \geqq 25\,401 - 2999 > 2p_3$, teda $p_3^2|z!$, Keďže $p_3|A$, máme $p_3^3|x!$, teda $x \geqq 3p_3 = 29\,901$. Teraz položme $p_4 = 8967$. Znova platí $p_4|A$ a pretože $z = x - y \geqq 26\,902 > 3p_4$, platí $p_4^3|z!$, a potom $p_4^4|x!$, teda $x \geqq 4p_4 = 35\,868$. Úplne obdobne pre $p_5 = 8209$ zistíme $p_5^4|z!$, $p_5^5|x!$, a teda $x \geqq 5p_5 = 41\,045$. Teraz zvolíme $p_6 = 9511$ a zistíme $p_6^4|z!$, $p_6^5|x!$, teda $x \geqq 5p_6 > 47\,555$. Nakoniec zvoľme $p_7 = 8893$. Pretože $z \geqq 5p_7$, platí $p_7^5|z$, a pretože $p_7|A$, platí potom $p_7^6|x!$, teda $x \geqq 6p_7 > 50\,000$. Ani tento

prípad teda nedáva žiadne ďalšie výskyty čísla A v prvých 50 000 riadkoch Pascalovho trojuholníka.

Teda v uvedených riadkoch sa číslo A nachádza práve dvakrát, a to ako $\binom{10\,000}{3000}$ a $\binom{10\,000}{7000}$. □

Nebolo by príliš ťažké ďalej zvyšovať dolný odhad pre x a dokázať napríklad, že číslo A sa už ďalšíkrát nenachádza v prvých 100 000 riadkoch Pascalovho trojuholníka. Vystačili by sme pritom s tabuľkou prvočísel do 10 000 akú doteraz. S využitím istého faktu z odseku 3.3 však možno dôjsť podstatne ďalej.

Úloha 11.8. Dokážte, že číslo $A = \binom{10\,000}{3000}$ sa nachádza v prvých desiatich miliónoch riadkov Pascalovho trojuholníka práve dvakrát.

Riešenie. Nech x, y, z majú rovnaký význam ako v riešení predchádzajúcej úlohy. Z tohto riešenia vieme, že pre $x \leqq 14\,000$ existujú práve dve riešenia rovnice $\binom{x}{y} = A$. (Teda z prípadu II nám stačí len úvaha s $p = 7001$.) Nech odteraz $14\,000 < x \leqq 10^7$. Pretože

$$\binom{x}{154} \leqq \binom{10^7}{154} < (10^7)^{154} = 10^{1078} < 3^{3000} <$$

$$< \frac{10\,000}{3\,000} \cdot \frac{9999}{2999} \cdot \ldots \cdot \frac{7002}{2} \cdot \frac{7001}{1} = \binom{10\,000}{3\,000},$$

musí byť $y > 154$. Podľa vety 3.4, bod b však potom existuje prvočíslo p, $x - y < p \leqq x$. Potom $p \mid \binom{x}{y}$, ale $p \nmid A$ (pretože $p > x - y > 14\,000 - 3000 > 10\,000$), a preto $\binom{x}{y} \neq A$. Teda číslo A sa od 14 000-ho po 10^7-ty

riadok Pascalovho trojuholníka už nenachádza, čo bolo treba dokázať. □

Toto riešenie je kratšie než vyššieuvedené riešenie (ľahšej) úlohy 11.7. ale využívali sme v ňom istý fakt o prvočíslach, ktorého overenie bez počítača by bolo namáhavé, aj keby sme mali k dispozícii tabuľky prvočísel po 10^7.

Pre nasledujúcu úlohu pripomeňme, že mrežové body v rovine (s danou pravouhlou súradnicovou sústavou) sú jej body s celočíselnými súradnicami.

Úloha 11.9. Určte počet mrežových bodov na kružnici s polomerom $B = 10^{10^{10}}$ a stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

Riešenie. Rovnica uvažovanej kružnice je $x^2 + y^2 = B^2$. Ak obvyklým spôsobom priradíme komplexné čísla bodom roviny, tak máme vlastne určiť počet gaussovských celých čísel $a + bi$ takých, že $a^2 + b^2 = B^2$, t. j. $|a + bi| = B$.
Rozklad čísla B^2 na gaussovské prvočísla je

$$B^2 = (1 + \mathrm{i})^{4 \cdot 10^{10}} . (2 + \mathrm{i})^{2 \cdot 10^{10}} . (2 - \mathrm{i})^{2 \cdot 10^{10}}.$$

Ak $a^2 + b^2 = B^2$, tak $(a + bi) | B^2$, preto

$$a + bi = \mathrm{i}^k . (1 + \mathrm{i})^r . (2 + \mathrm{i})^s . (2 - \mathrm{i})^t$$

pre nejaké celé čísla k, r, s, t,

$$0 \leqq k \leqq 3, \quad 0 \leqq r \leqq 4 . 10^{10}, \quad 0 \leqq s \leqq 2 . 10^{10},$$
$$0 \leqq t \leqq 2 . 10^{10}.$$

(Pritom toto vyjadrenie je jednoznačné.)
Ďalšiu podmienku na r, s, t dostaneme zo vzťahu

$$a - bi = (-\mathrm{i})^k . (1 - \mathrm{i})^r . 2 (-\mathrm{i})^s . (2 + \mathrm{i})^t;$$

potom

$$B^2 = (a + bi).(a - bi) = 2^r.5^{s+t}.$$

Odtiaľ vidno $r = 2.10^{10}$, $t = 2.10^{10} - s$. Teda vo vyjadrení pre $a + bi$ možno voliť len k, s; parametre r, zt sú už potom jednoznačne určené. Možností pre voľbu k, s spolu je

$$4.(2.10^{10} + 1) = 8.10^{10} + 4,$$

a ľahko sa preverí, že každá už vyhovuje. Teda na kružnici s polomerom B a stredom v začiatku súradnicovej sústavy leží $8.10^{10} + 4$ mrežových bodov. □