Úlohy o veľkých číslach

10. Algebraické rovnice

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 109–118.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404187

10. ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Úloha 10.1. Zistite, či má kvadratická rovnica

$$7^{8^9}.x^2 + 8^{9^7}.x + 9^{7^8} = 0$$

reálne korene.

Riešenie. Diskriminant tejto rovnice je

$$D = 8^{2\cdot 9^7} - 4\,.\,7^{8^9}.\,9^{7^8}.$$

Ukážeme, že $D < 0$; na to odhadujme

$$8^{2\cdot 9^7} < 49^{2\cdot 9^7} = 7^{4\cdot 3^{14}} < 7^{2\cdot 3^{15}} = 7^{2\cdot (3^3)^5} < 7^{2\cdot (2^5)^5} =$$
$$= 7^{2^{26}} < 7^{2^{27}} = 7^{8^9} < 4\,.\,7^{8^9}.\,9^{7^8},$$

teda $D < 0$ a rovnica nemá reálne korene. □

Úloha 10.2. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$5^{5^5}.x^2 + 6^{6^6}.x + 4^{4^4} = 0$$

má dva rôzne reálne iracionálne korene.

Riešenie. Diskriminant tejto rovnice je

$$D = 6^{2\cdot 6^6} - 4\,.\,5^{5^5}.\,4^{4^4} > 6\,.\,6^{5^5}.\,6^{4^4} - 4\,.\,5^{5^5}.\,4^{4^4} > 0,$$

teda rovnica má reálne korene. Tieto korene sú racionálne práve vtedy, keď $\sqrt{D}$ je racionálne (a teda prirodzené) číslo, t. j. keď D je štvorec. Ukážeme však

$$\left(6^{6^6} - 1\right)^2 < D < \left(6^{6^6}\right)^2.$$

Pravá nerovnosť je zrejmá a na dôkaz ľavej stačí uvážiť

$$\left(6^{6^6} - 1\right)^2 < 6^{2\cdot 6^6} - 6^{6^6} < 6^{2\cdot 6^6} - 6^{1+5^5+4^4} =$$
$$= 6^{2\cdot 6^6} - 6\,.\,6^{5^5}.\,6^{4^4} < 6^{2\cdot 6^6} - 4\,.\,5^{5^5}.\,4^{4^4} = D.$$

Teda D leží medzi dvoma po sebe idúcimi čtvorcami, čiže nemôže byť štvorec. Preto sú korene danej rovnice iracionálne. □

Úloha 10.3. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$6^{9^9}.x^2 + 7^{9^9}.x + 8^{9^9} = 0$$

má dva rôzne reálne iracionálne korene.

Riešenie. Diskriminant tejto rovnice je

$$D = 7^{2\cdot 9^9} - 4\,.\,6^{9^9}.\,8^{9^9} = 49^{9^9} - 4\,.\,48^{9^9}.$$

Aby sme dokázali $D > 0$, musíme dokázať

$$\left(\frac{49}{48}\right)^{9^9} > 4.$$

Na to stačí odhad

$$\left(\frac{49}{48}\right)^{9^9} = \left(1 + \frac{1}{48}\right)^{9^9} > 1 + \frac{9^9}{48} > 4.$$

Teda platí $D > 0$ a rovnica má dva reálne korene. Ešte treba dokázať, že tieto korene nie sú racionálne. Na to stačí ukázať, že $\sqrt{D}$ je iracionálne číslo, teda že D nie je štvorcom. Na to určíme D MOD 5. Pretože $\varphi(5) = 4$, 9^9 MOD $4 = 1$ (a 49, 48 nie sú násobky 5), platí D MOD5 $= (49^1 - 4\,.\,48^1)$ MOD $5 = (4 - 12)$ MOD $5 = 2$.

Avšak 2 je kvadratický nezvyšok modulo 5, preto D nie je štvorec. □

Úloha 10.4. Dokážte, že rovnica

$$7^{7^7}.x^3 + 8^{8^8}.x^2 + 9^{9^9}.x + 10^{10^{10}} = 0 \tag{1}$$

má práve jeden reálny koreň.

Riešenie. Označme $f(x)$ ľavú stranu rovnice (1). Funkcia $f(x)$ reálne premennej x je spojitá, $f\left(-10^{10^{10}}\right) < 0$ a $f(0) > 0$, teda rovnica (1) má reálny koreň (medzi $-10^{10^{10}}$ a 0). Nemôže mať viac reálnych koreňov, pretože funkcia $f(x)$ je rastúca.
Jej derivácia

$$f'(x) = 3.7^{7^7}.x^2 + 2.8^{8^8}.x + 9^{9^9}$$

je totiž kladná, pretože $f(0) > 0$ a rovnica $f'(x) = 0$ má diskriminant

$$\left(2.8^{8^8}\right)^2 - 4.3.7^{7^7}.9^{9^9} < 8^{3.8^8} - 9^{9^9} < 0,$$

teda nemá reálné korene. □
V niekoľkých ďalších úlohách sa budeme zaoberať rovnicou (1) a jej koreňmi. Pokiaľ budeme pracovať s komplexnými číslami, nebudeme vždy terminologicky rozlišovať tieto čísla a ich obrazy v rovine komplexných čísel.

Úloha 10.5. Dokážte, že obrazy koreňov rovnice (1) z predchádzajúcej úlohy nie sú vrcholy rovnostranného trojuholníka.

Riešenie. Odvodíme nutnú podmienku na to, aby korene rovnice

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{2}$$

boli vrcholy rovnostranného trojuholníka a potom ukážeme, že rovnica (1) ju nespĺňa. Nech korene x_1, x_2, x_3 rovnice (2) sú vrcholy rovnostranného trojuholníka a $t = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ je jeho ťažisko. Čísla $x_1 - t$, $x_2 - t$, $x_3 - t$ majú rovnaké absolútne hodnoty a ich amplitúdy sa líšia o násobky 120°. Ich tretie mocniny sa potom navzájom rovnajú, preto x_1, x_2, x_3 sú pre nejaké komplexné číslo u korene rovnice $(x - t)^3 = u$, teda po úprave

$$x^3 - 3tx^2 + 3t^2x - (t^3 + u) = 0.$$

Rovnica (2) je A-násobkom poslednej rovnice (pretože obe tieto kubické rovnice majú rovnaké korene), a teda

$$-A \,.\, 3t = B, \; A \,.\, 3t^2 = C, \; -A \,.\, (t^3 + u) = D.$$

Preto

$$B^2 = (A \,.\, 3t)^2 = 3A \,.\, A \,.\, 3t^2 = 3AC.$$

Nájdená nutná podmienka $B^2 = 3AC$ v prípade rovnice (1) dáva

$$8^{2 \cdot 8^8} = 3 \,.\, 7^{7^7} \,.\, 9^{9^9},$$

čo zrejme neplatí, napríklad preto, že ľavá strana je párna a pravá nepárna. Teda korene rovnice (1) nie sú vrcholy rovnostranného trojuholníka. □

Nutná a postačujúca podmienka na to, aby korene rovnice (2) boli vrcholy rovnostranného trojuholníka, je

$$B^2 = 3AC \quad \text{a} \quad BC \neq 9AD.$$

Pridanie druhého vzťahu zabezpečuje, že (2) je kubická rovnica (t. j. $A \neq 0$), a že nemá trojnásobný koreň.

V nasledujúcej úlohe ukážeme, že trojuholník, ktorým sme sa zaoberali, je „skoro rovnostranný".

Úloha 10.6. Dokážte, že veľkosti uhlov trojuholníka s vrcholmi v koreňoch rovnice (1) z úlohy 10.4 sa líšia od 60° o menej než 1″.

Riešenie. Nech korene rovnice (1) sú a, $b \pm ic$, kde a, b, c sú reálne čísla, $c > 0$. (Tu už využívame riešenie úlohy 10.4.) Označme

$$R = \frac{8^{8^8}}{7^{7^7}}, \; S = \frac{9^{9^9}}{7^{7^7}}, \; T = \frac{10^{10^{10}}}{7^{7^7}}.$$

Zo vzťahov medzi koreňmi a koeficientmi normovanej kubickej rovnice (ktorú dostaneme z (1) predelením číslom 7^{7^7}) máme

$$a + 2b = -R, \quad 2ab + b^2 + c^2 = S,$$
$$a.(b^2 + c^2) = -T.$$

Uvažovaný trojuholník je rovnoramenný, so základňou kolmou na reálnu os a hlavným vrcholom a. Nech veľkosť uhla pri hlavnom vrchole je 2α. Potom $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{|b - a|}$, a preto

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3} = \frac{c^2}{(b - a)^2} - \frac{1}{3} = \frac{3c^2 - (b - a)^2}{3(b - a)^2} =$$
$$= \frac{4.(3c^2 - (b - a)^2)}{3.(2b - 2a)^2}.$$

Avšak $c^2 = S - 2ab - b^2$, $2b - 2a = -R - 3a$, a preto

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{1}{3} = \frac{4.(3S - 6ab - 3b^2 - b^2 + 2ab - a^2)}{3.(-R - 3a)^2} =$$

$$= \frac{4.(3S - 4b^2 - 4ab - a^2)}{3.(R + 3a)^2} = \frac{4.(3S - (2b + a)^2)}{3.(R + 3a)^2} =$$

$$= \frac{12S - 4R^2}{3.(R + 3a)^2}.$$

Platí

$$12S - 4R^2 = \frac{12.9^{9^9}.7^{7^7} - 4.8^{2.8^8}}{7^{2.7^7}} >$$

$$> \frac{9^{9^9} - 8^{2.8^8+1}}{7^{2.7^7}} > 0,$$

a preto $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{1}{3} > 0$. Na odhad z druhej strany najprv odhadneme číslo a; na to označíme $f(x)$ ľavú stranu rovnice (1); z úlohy 10.4 už vieme, že $f(x)$ je rastúca funkcia reálnej premennej x. Platí

$$f(-\sqrt[3]{T}) = 7^{7^7}.(-T + R.\sqrt[3]{T^2} - S.\sqrt[3]{T} + T) =$$

$$= 8^{8^8}.(10^{10^{10}})^{2/3}.(7^{7^7})^{-2/3} - 9^{9^9}.(10^{10^{10}})^{1/3}.(7^{7^7})^{-1/3} >$$

$$> 10^{6.10^9} - 10^{4.10^9} > 0 = f(a),$$

a preto $a < -\sqrt[3]{T}$. Ďalej platí

$$R^3 = 8^{3.8^8}.7^{-3.7^7} < 8^{10^{10}}.7^{-7^7} < 10^{10^{10}}.7^{-7^7} = T,$$

a preto $R < \sqrt[3]{T}$. Z dokázaných vzťahov vyplýva

$$|R + 3a| \geqq 3.|a| - R > 3.\sqrt[3]{T} - R > 2.\sqrt[3]{T}.$$

Preto platí

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3} = \frac{12S - 4R^2}{3.(R + 3a)^2} < \frac{12S}{12\sqrt[3]{T^2}} =$$

$$= \frac{9^{9^9}}{7^{7^7}} \cdot \left(\frac{10^{10^{10}}}{7^{7^7}} \right)^{-2/3} = 9^{9^9}.\left(7^{7^7}\right)^{-1/3}.\left(10^{10^{10}}\right)^{-2/3} <$$

$$< 10^{10^9}.1.10^{-6 \cdot 10^9} < 10^{-10}.$$

Spolu máme

$$\operatorname{tg} \alpha > 0, \ 0 < \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3} < 10^{-10},$$

a z týchto nerovností ľahko zistíme

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}} + 10^{-10}.$$

Pretože $0 < \alpha < 90°$, $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a

$$\operatorname{tg}(30° + 0{,}5'') = \frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 0{,}5''}{1 - \operatorname{tg} 30°.\operatorname{tg} 0{,}5''} > \operatorname{tg} 30° +$$

$$+ \operatorname{tg} 0{,}5'' > \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2.180.60^2} > \frac{1}{\sqrt{3}} + 10^{-10},$$

máme $30° < \alpha < 30° + 0{,}5''$, teda veľkosť 2α uhla pri hlavnom vrchole je medzi $60°$ a $60°0'1''$. Potom veľkosti uhlov pri základni sú medzi $59°59'59{,}5''$ a $60°$, teda tiež sa líšia od $60°$ o menej než $1''$. □

Odhad v úlohe 10.6 sme dosiahli s veľmi veľkou rezervou; na miesto jednej uhlovej sekundy mohla byť v jej texte napríklad trilióntina uhlovej sekundy bez toho, aby sa riešenie muselo podstatne zmeniť.

Nasledujúca úloha sa dá vyriešiť rovnako ako úlohy 10.4 až 10.6, preto ju nechávame na riešenie čitateľovi. (Pritom bod b) vlastne nemusí robiť, ak vyrieši bod c) tak ako bola riešená úloha 10.6.)

Úloha 10.7. Uvažujme rovnicu

$$7!!.x^3 + 8!!.x^2 + 9!!.x + 10!! = 0. \tag{3}$$

a) Dokážte, že rovnica (3) má práve jeden reálny koreň.
b) Dokážte, že obrazy koreňov rovnice (3) v komplexnej rovine nie sú vrcholy rovnostranného trojuholníka.
c) Určte uhly tohoto trojuholníka s presnosťou $\pm 1''$.

Úloha 10.8. Dokážte, že reálny koreň rovnice (1) z úlohy 10.4 je iracionálny.

Riešenie. Predpokladajme obrátene, že rovnica (1) má racionálny koreň a $\frac{r}{s}$ je jeho základný tvar (t. j. $r \in \mathsf{Z}$, $s \in \mathsf{P}$, $D(r, s) = 1$). Po dosadení do (1) a vynásobení s^3 dostávame

$$7^{7^7}.r^3 + 8^{8^8}.r^2s + 9^{9^9}.rs^2 + 10^{10^{10}}.s^3 = 0. \tag{4}$$

Všetky členy okrem prvého sú násobkami čísla s, a preto aj prvý člen je násobkom s, t. j. $s \mid 7^{7^7}.r^3$. Avšak $D(r, s) = 1$, a preto $s \mid 7^{7^7}$. Rovnako možno dokázať aj $r \mid 10^{10^{10}}$. Z týchto vzťahov a z toho, že reálny koreň rovnice (1) je záporný, vyplýva.

$$r = -2^m.5^n, \quad s = 7^p$$

pre nejaké celé čísla m, n, p také, že

$$0 \leqq m \leqq 10^{10}, \quad 0 \leqq n \leqq 10^{10}, \quad 0 \leqq p \leqq 7^7.$$

Ak platí $0 < n < 10^{10}$, tak $n + 1 \leqq 2n$, $n + 1 \leqq 10^{10}$, a preto 5^{n+1} delí každé z čísel $7^{7^7}.r^3$, $8^{8^8}.r^2s$, $10^{10^{10}}.s^3$. Potom aj $5^{n+1} \mid 9^{9^9}.rs^2$, ale $5 \nmid 9^{9^9}$, $5 \nmid s$ (pretože $5 \mid r$), a teda $5^{n+1} \mid r$, čo je spor.
Preto $n = 0$ alebo $n = 10^{10}$.
Úplné obdobne, ak platí $0 < m < 10^{10}$, tak $2^{m+1} \mid 9^{9^9}.rs^2$, ale $2 \nmid 9^{9^9}$, $2 \nmid s$ a teda $2^{m+1} \mid r$, čo je spor. Preto $m = 0$ alebo $m = 10^{10}$.

Teraz počítajme modulo 3. Keďže m, n sú párne a $7 \equiv 1 \pmod 3$, platí

$$r = —2^m.5^n \equiv —1.1 = —1 \pmod 3,\quad s = 7^p \equiv$$
$$\equiv 1 \pmod 3.$$

Z rovnice (4) potom dostávame

$$1.(—1)^3 + 1.(—1)^2.1 + 0.(—1).1^2 + 1.1^3 \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod 3,$$

teda $1 \equiv 0 \pmod 3$, a to je spor. Preto rovnica (1) nemá racionálny koreň. □

Akonáhle sme zistili, že platí $n = 0$ alebo $n = 10^{10}$, mohli sme spor so (4) dostať tiež nasledujúcimi odhadmi:

Ak $n = 0$, tak $r \geqq —2^{10^{10}}$, a potom

$$7^{7^7}.r^3 + 8^{8^8}.r^2s + 9^{9^9}.rs^2 + 10^{10^{10}}.s^3 >$$
$$> — 7^{7^7}.2^{3\cdot 10^{10}} + 0 — 9^{9^9}.2^{10^{10}}.7^{2\cdot 7^7} + 10^{10^{10}}.1 >$$
$$> — 2^{3\cdot 10^{10}} + 3.7^7 — 2^{4\cdot 9^9+10^{10}+6\cdot 7^7} + 10^{10^{10}} >$$
$$> — 2^{13\cdot 24\cdot 10^8} — 2^{3\cdot 5\cdot 10^9} + 10^{10^{10}} >$$
$$> — 10^{4\cdot 24\cdot 10^8} — 10^{5\cdot 10^9} + 10^{10^{10}} > 0.$$

Ak $n = 10^{10}$, tak $— 10^{10^{10}} \leqq r \leqq — 5^{10^{10}}$, a potom

$$7^{7^7} . r^3 + 8^{8^8} . r^2 s + 9^{9^9} . r s^2 + 10^{10^{10}} . s^3 <$$

$$< - 7^{7^7} . 5^{3 \cdot 10^{10}} + 8^{8^8} . 10^{2 \cdot 10^{10}} . 7^{7^7} + 0 + 10^{10^{10}} . 7^{3 \cdot 7^7} <$$

$$< - 10^{0 \cdot 7^7 + 0.698 \cdot 3 \cdot 10^{10}} + 10^{8^8 + 2 \cdot 10^{10} + 7^7} + 0 + 10^{10^{10} + 3 \cdot 7^7} <$$

$$< - 10^{2094 \cdot 10^7} + 10^{2003 \cdot 10^7} + 10^{1001 \cdot 10^7} < 0.$$

Teda (4) neplatí, a preto rovnica (1) nemá racionálny koreň.