Úlohy o veľkých číslach

2. Predpokladané prostriedky a metódy

In: Ivan Korec (author): Úlohy o veľkých číslach. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 5–9.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404179

2. PREDPOKLADANÉ PROSTRIEDKY A METÓDY

Predpokladáme, že čitateľ má k dispozícii bežné matematické tabuľky, a prípadne kalkulačku. Nepredpokladáme však samočinný počítač alebo programovateľnú kalkulačku; k možnosti ich použitia sa vrátime ešte v tejto kapitole, pri analýze pojmu veľkého čísla. Ďalej predpokladáme dobré matematické znalosti na úrovni strednej školy, a o niečo hlbšie znalosti z teórie čísel. Tieto doplňujúce znalosti možno získať napríklad z [2], [3], [10], [13], ale sú zhrnuté aj v nasledujúcej kapitole tejto knižky.

Riešenie úlohy má byť podľa možnosti krátke, elegantné a elementárne. Tieto požiadavky si aspoň čiastočne vzájomne odporujú, a preto nie vždy možno určiť, ktoré z dvoch riešení je lepšie. (Stále máme na mysli len správne riešenia!) Ani krátkosť riešenia nie je celkom jednoduchý pojem. Napríklad jedno riešenie môže byť kratšie než iné jednoducho preto, že sa pri úpravách robí vždy viac krokov naraz, alebo preto, že sa niektorá časť prehlási za triviálnu, a jej dôkaz sa vynechá. To nemusí byť chybou, ale pri hodnotení krátkosti riešenia by sme mali brať do úvahy celú dĺžku myšlienkovej cesty, ktorou sa dospeje k žiadanému výsledku, a nie dĺžku jej zápisu. Aby sme teda dĺžku riešenia hodnotili celkom objektívne, musel by byť presne stanovený požadovaný stupeň podrobnosti zápisu. Nie je to síce principiálne nemožné, ale my sa tým rozhodne nebudeme zaoberať. Ťažkosti pri hodnotení elegantnosti riešenia by boli ešte väčšie, jednak preto, že ide o čiastočne subjektívny pojem, a za druhé preto, že niekedy sa namiesto pôvodnej úlohy rieši všeobecnejšia úloha. Aj elementárnosť riešenia je zložitý (a dokonca niekedy viacvýznamový) pojem, tu však máme pre riešiteľa aspoň takéto odporúčanie: Dávajte v riešeniach úloh prednosť takým vetám a postupom, ktoré sa bežne používajú pri riešení úloh MO. Neobmedzujte sa však násilne na tieto postupy, ak už viete viac, ale nepoužívajte silnejšie metódy a výsledky iba preto, aby ste ukázali, že ich ovládate.

Pokiaľ používate pri riešení matematické tabuľky, tak im „bezvýhradne dôverujte". Tlačové chyby sa síce v tabuľkách môžu vyskytnúť, sú však málo pravdepodobné; pravdepodobnosť chyby vo Vašom výpočte je asi väčšia. Nečítajte však z tabuliek viac, než sa v nich tvrdí. Ak napríklad v štvormiestnych logaritmických tabuľkách vyčítate $\log 2 = 0{,}3010$, tak to znamená len

$$0{,}30095 \leqq \log 2 \leqq 0{,}30105 .$$

Pravda, namiesto neostrých nerovností možno písať ostré, ale to už nevieme z tabuliek, ale z toho, že log 2 je iracionálne číslo. Pomocou štvormiestnych tabuliek však možno log 2 určiť aj presnejšie. Napríklad ak z tabuliek vyčítame

$$\log 2^9 = \log 512 = 2{,}7093, \text{ tak vieme, že}$$

$$2{,}70925 \leqq 9 \log 2 \leqq 2{,}70935 ,$$

a odtiaľ zistíme

$$0{,}301027 \leqq \log 2 \leqq 0{,}301039 .$$

(Všimnite si, že výsledok delenia deviatimi vľavo sme museli zaokrúhliť nadol, a výsledok delenia vpravo nahor, bez ohľadu na ďalšie číslice podielu. Inokedy už na to nebudeme zvlášť upozorňovať.)

Obdobne z $\log 2^8 = \log 256 = 2{,}4082$ vieme

$$2{,}40815 \leqq 8 \log 2 \leqq 2{,}40825$$

$$0{,}301018 \leqq \log 2 \leqq 0{,}301032 .$$

Spolu teda máme

$$0{,}301027 \leqq \log 2 \leqq 0{,}301032 ,$$

čo je presnejší výsledok, než dá bezprostredné použitie päťmiestnych logaritmických tabuliek. Samozrejme, údaje z päťmiestnych tabuliek by sme mohli spresňovať obdobne. Všeobecne však tento postup je len východiskom z núdze; ak máme k dispozícii presnejšie tabuľky, tak sa radšej pozrieme do nich. Pre hľadanie logaritmov prirodzených čísel do 200 je napríklad vhodná tabuľka logaritmov faktoriálov v [1] (ale hodnota log 200! je chybná).

Stupeň oprávnenej dôvery kalkulačke alebo počítaču predstavuje už zložitejší problém. (Nemáme pritom na mysli možnosť, že kalkulačka je pokazená, obdobne ako sme neuvažovali možnosť tlačovej chyby v matematických tabuľkách.) Tu už záleží na type kalkulačky, či počíta na viac miest než nakoniec ukáže na displeji alebo nie. V druhom prípade je aspoň posledné miesto výsledku nespoľahlivé, často je však nespoľahlivé aj v prvom prípade. Záleží aj na zložitosti počítaného výrazu. Napríklad súčin dvoch celých čísel bude spravidla presný, pokiaľ sa dá celý zobraziť na displeji. Výsledok umocňovania (aj v prípade, že základ i exponent sú prirodzené čísla, a presný výsledok by sa dal celý zobraziť) však už môže byť nepresný, pretože kalkulačka ho môže počítať cez logaritmus a exponenciálnu funkciu. Tu je ťažké dať konkrétnu a všeobecne platnú radu. Zistite si presnosť Vašej kalkulačky aspoň pomocou niekoľkých kontrolných príkladov, a potom ju využívajte ešte s istou rezervou voči tato zistenej presnosti. Na túto rezervu bude treba myslieť napríklad pri odčítavaní alebo porovnávaní dvoch skoro rovnakých čísel.

Vrátime sa teraz k pojmu veľkých čísel, o ktorých sme už hovorili v úvode ako o číslach príliš veľkých na to, aby sme s nimi bezprostredne vykonávali aritmetické operácie. Zrejme nejde o presne matematicky definovaný pojem. Dôležitejšie však je, že tento pojem závisí aj od metód a prostriedkov, ktoré máme k dispozícii (a aj od námahy, ktorú sme ochotní pri počítaní podstúpiť). Napríklad pre počítanie spamäti sú už trojciferné čísla veľké, ale pre počítanie na papieri alebo s kalkulačkou ich asi za veľké nebudeme pokladať. Na samočinných počítačoch (a to i na osobných, alebo i na výkonnejších programovateľných kalkulačkách) si možno naprogramovať viacnásobnú aritmetiku, a potom ani stociferné čísla nebudú pre nás príliš veľké. Úlohu o posledných čísliciach čísla 2^{300} bude potom najjednoduchšie riešiť tak, že dáme stroju vypočítať číslo 2^{300}, a potrebný počet posledných číslic si pozrieme. Bude to správny postup, ale rozhodne nebude v intenciách autora tejto knižky; keby autor predpokladal, že čitatelia budú mať k dispozícii samočinné počítače, tak by zväčšil čísla v úlohách tak, aby sa obdobný spôsob nedal použiť.

V niektorých úlohách, napríklad s viacposchodovými mocninami, sú už zvolené čísla také veľké, že ich prakticky vôbec nie je možné obvyklým spôsobom dekadicky zapísať. Ak však abstrahujeme od praktických ohraničení (najmä časových a priestorových), ako je to v matematike bežné, možno hovoriť o ich dekadických zápisoch, a určovať niektoré ich cifry. Dekadické zápisy reálnych čísel (aspoň niektorých) sú nekonečné, a teda ich vlastne nemožno celé napísať ani v princípe. Napriek tomu však možno hovoriť napríklad o ich čísliciach, a (niekedy) niektoré z týchto číslic aj vypočítať. Úlohy o takýchto čísliciach by sme mohli ľahko preformulovať tak, aby sa v nich o nekonečných dekadických rozvojoch nehovorilo, nové formulácie by však boli menej názorné.

V niektorých riešeniach najprv „uhádneme" výsledok, a potom dokážeme jeho správnosť. Niekedy „uhádneme" vhodné prvočíslo a podobne. Samozrejme, že aj schopnosť „uhádnuť", či aspoň odhadnúť výsledok, je výhodná pri riešení úlohy, spôsob „uhádnutia" však nie je logicky nevyhnutnou časťou napísaného riešenia úlohy. Namiesto „uhádnutia" môže v skutočnosti ísť o použitie počítača. Ak je napríklad potrebné uvážiť prvočíslo $p = 5501$, ťažko môže ísť o „uhádnutie" alebo o ručné preskúšanie. K prvočíslu $p = 19$ by sme však takto dospieť mohli. Za riešením úlohy občas uvádzame ešte komentár, ktorý už nie je jeho súčasťou; môže napríklad obsahovať vysvetlenie k nejakému „uhádnutiu", ale môže sa vzťahovať i k nasledujúcej úlohe. Koniec vlastného riešenia úlohy vyznačujeme značkou $\square$.