

Matematické hlavolamy a základy teorie grup

2. kapitola. Patnáctka - neřešitelné pozice

In: Jiří Tůma (author): Matematické hlavolamy a základy teorie grup. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 27–43.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404169>

Terms of use:

© Jiří Tůma, 1988

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Druhá kapitola

PATNÁCTKA — NEŘEŠITELNÉ POZICE

2.1. Reklamní pozice. V dalších kapitolách budeme studovat pozice na nejrůznějších hlavolamech, naučíme se poznávat neřešitelné pozice, vyhledávat postupy ke skládání řešitelných pozic, chápat souvislosti mezi hračkami a používat podobé triky při řešení různých hlavolamů. Začneme tou nejjednodušší hrou — patnáctkou. To je sice hra neúplná, na rozdíl od většiny ostatních, pokud jde ale o pozice, nejsou rozdíly tak podstatné. Metody, které se naučíme používat v této kapitole, budou jen s drobnými úpravami použitelné i u ostatních hlavolamů. Pozice budeme studovat pomocí grafů, proto je důležité zvládnout dobře úvahy z této kapitoly, zejména odstavce 2.3.—2.11.

Stejně jako na Rubikově krychli, také na patnáctce existují neřešitelné pozice. Jedna z mnoha je na obrázku 2.1.

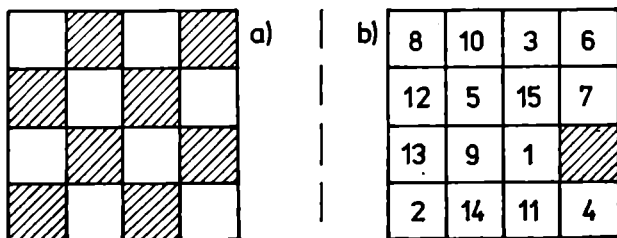
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Obr. 2.1

Neřešitelnost této pozice byla dokonce základem reklamního triku — za její složení byla vypsána odměna 10 000 dolarů. Obchodníci, kteří se snažili zvýšit zájem o hračku tímto způsobem, se nemuseli obávat ani o jediný dolar. Pozice je neřešitelná, žádný postup, který by ji převedl při zachování všech pravidel do pozice základní, neexistuje.

Jak dokážeme neřešitelnost nějaké pozice? Ukážeme, že nemůžeme dostat správnou pozici ani po sudém, ani po lichém počtu tahů.

2.2. Trik se šachovnicí. Jednodušší je ukázat neřešitelnost reklamní pozice z obrázku 2.1. lichým počtem tahů. Na dno krabičky namalujeme šachovnici 4×4 jako na obrázku 2.2.a.



Obr. 2.2

Prázdné místo má nyní v jakékoliv pozici svoji barvu — bílou nebo černou. Barva prázdného pole se po každém tahu změní, každé pole sousedí pouze s políčky opačné barvy. V pozici 2.2.b je prázdné místo černé, po prvním tahu bude bílé, po druhém znovu černé, atd. Odtud ihned plyne *černobílé pravidlo*.

Po sudém počtu tahů bude mít prázdné místo vždy stejnou barvu jako na počátku, po lichém bude mít barvu opačnou.

Prázdné místo v základní pozici má barvu bílou. Má-li nějaká jiná pozice prázdné místo také bílé, můžeme z ní dostat základní pozici jen po sudém počtu tahů, nikdy po lichém. Můžeme také říci, že bílá pole jsou sudá. Naopak černá prázdná políčka jsou lichá, můžeme je přesunout do pravého dolního rohu jenom lichým počtem tahů. Na obrázku 2.2.b je prázdné místo liché.

Reklamní pozice má prázdné místo sudé, nemůžeme ji proto nikdy složit po lichém počtu tahů; pokud to vůbec nějak jde, musí to být sudým počtem tahů.

2.3. Zápis pozice pomocí tabulky. Abychom vyloučili i tuto zbývající možnost, budeme podrobněji zkoumat jednotlivé pozice. Především se je naučíme zapisovat a graficky znázorňovat. Jak se liší například pozice na obrázku 2.2.b od základní pozice 1.11.? Číslo 1 je na místě, na němž má být v základní pozici číslo 11, číslo 2 je na místě čísla 13, číslo 3 je na místě čísla 3, je na správném místě. Číslo 4 je na místě, které má být prázdné. Označíme-li si prázdné místo číslem 16, můžeme zachovat dosavadní styl popisu a napsat, že číslo 4 je na místě čísla 16. Dále pokračujeme: číslo 5 je na místě čísla 6, číslo 6 je na místě čísla 4 atd. Závěrem určíme polohu prázdného místa, číslo 16 je na místě čísla 12.

Tabulka pozice. V uvedeném popisu se mnoho slov

zbytečně opakuje, celou pozici můžeme úsporněji zapsat ve tvaru dvouřádkové tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 11, 13, 3, 16, 6, 4, 8, 1, 10, 2, 15, 5, 9, 14, 7, 12 \end{pmatrix}.$$

Smysl tabulky je jasný, číslo i je na místě čísla j , právě když je pod i v tabulce ve spodním řádku číslo j .

Všimněte si, že každé z čísel $1, 2, 3, \dots, 16$ se v tabulce vyskytuje právě jednou v horním řádku a právě jednou v řádku dolním. Důvod je zřejmý: v pozici je každé číslo (a prázdné místo) právě jednou — horní řádek — a na každém místě se vyskytuje právě jedno číslo (prázdné místo má číslo 16) — dolní řádek. Uvedené vlastnosti nejsou žádnou specialitou pozice z obrázku 2.2.b, má je každá pozice u patnáctky.

Máme-li naopak nějakou tabulku s uvedenými vlastnostmi, můžeme podle ní naskládat čísla do krabičky a dostat pozici, jejímž zápisem tato tabulka je. Tak například tabulce

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 7, 10, 2, 13, 8, 1, 9, 15, 16, 3, 5, 11, 12, 14, 4, 6 \end{pmatrix}$$

odpovídá pozice na obrázku 2.3. Poloha každého čísla je určena druhým řádkem tabulky, číslo 1 je na místě čísla 7, číslo 2 je na místě čísla 10 atd.

6	3	10	15
11		1	5
7	2	12	13
4	14	8	9

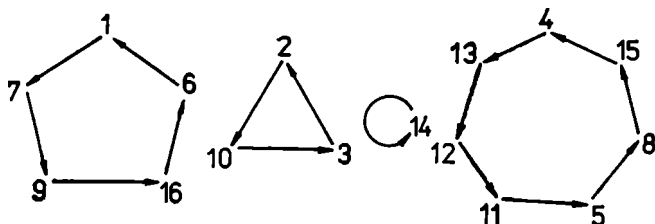
Obr. 2.3

Cvičení 2.1. a) Jak vypadá tabulka reklamní pozice?
 b) Nakreslete pozici, jejíž tabulka je

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 7, & 16, & 2, & 5, & 8, & 11, & 1, & 6, & 15, & 13, & 3, & 10, & 4, & 14, & 12, & 9 \end{pmatrix}.$$

2.4. Graf pozice. Některé pozice jsou hodně, jiné méně rozházené. Například reklamní pozice je málo rozházená, na nesprávných místech jsou pouze čísla 14 a 15. Naproti tomu pozice na obrázku 2.3. je rozházená podstatně více. Jak moc je nějaká pozice vzdálená od pozice základní, můžeme odhadnout přímo nebo pomocí tabulky. Další možností je nakreslit si *graf pozice*. Jak nakreslíme graf pozice na obrázku 2.3.?

Číslo 1 je na místě čísla 7; nakreslíme v rovině bod, který označíme 1, a z něho uděláme šipku do bodu označeného 7. Číslo 7 je na místě čísla 9, pokračujeme proto z bodu 7 další šipkou do nového bodu, který označíme 9. Dále, číslo 9 je na místě 16, nakreslíme tedy šipku z 9 do bodu 16. Další šipka vede z bodu 16 do bodu 6 a z 6 zpět do bodu 1. Z bodu 1 už šipka udávající polohu čísla 1 v pozici 2.3. vede. Zvolíme další číslo, které se zatím v našem grafu nevyskytuje, například 2, a pokračujeme. Z bodu 2 vede šipka do bodu 10, z 10 do 3 a z bodu 3 zpět do bodu 2. Stále jsme ještě neprobrali



Obr. 2.4

všechna čísla. Vezmeme číslo 4, z něho vede šipka do 13, atd. Nakonec zbývá už jenom číslo 14, které je na správném místě, v grafu to vyznačíme šipkou, která vede z bodu 14 zpět do 14. Na obrázku 2.4. je nakreslený celý graf.

Tento graf zcela nahradí tabulku ze závěru předchozího odstavce. Z bodu i vede šipka do bodu j , právě když je v tabulce pod číslem i číslo j . Z grafu nějaké pozice můžeme tedy zrekonstruovat zpět tabulku této pozice a tím i pozici samotnou. Místo pozic můžeme proto zkoumat jejich grafy.

Cvičení 2.2. a) Jak vypadá graf základní a reklamní pozice?

b) Nakreslete graf pozice, jejíž tabulka je ve cvičení 2.1.b.

Jaké grafy odpovídají pozicím? Především musí mít šestnáct bodů. Z každého bodu musí vycházet jedna šipka, neboť každé číslo se ve hře vyskytuje právě jednou. Také do každého bodu vede jedna šipka, na každém místě je právě jedno číslo.

2.5. Cykly. Vztah mezi tabulkou a grafem pozice je bezprostřední, jedno z druhého můžeme snadno odvodit. Přesto má graf oproti tabulce nebo pozici samotné jednu velkou přednost. Na první pohled vidíme, že je tvořen několika *cykly*. To je důsledkem faktu, že z každého bodu a do každého bodu vede právě jedna šipka. Zvolíme-li nějaký bod, můžeme z něho pokračovat ve směru šipek tak dlouho, dokud se nevrátíme zpět. Z grafu také ihned zjistíme, kolik má cyklů a jaké jsou jejich délky. Tak například graf na obrázku 2.4. má čtyři cykly, nejdelší má délku 7, další dva mají délky 5 a 3 a zbývající má délku 1.

Každá pozice je jednoznačně popsána svým grafem, můžeme proto mluvit o počtu a délkách cyklů v pozici podle toho, kolik cyklů a jak dlouhých má její graf. Základní pozice má tedy šestnáct cyklů délky 1, reklamní pozice má čtrnáct cyklů délky 1 a jeden cyklus délky 2 tvořený čísly 14 a 15, atd.

Počet cyklů a jejich délky jsou důležité charakteristiky pozic u všech hraček, a proto ze všech možných popisů pozic (obrázkem, tabulkou, grafem) budeme používat především grafy, které roli cyklů nejvíce zdůrazňují.

Cvičení 2.3. Vysvětlete, proč je součet délek všech cyklů v každé pozici šestnáct.

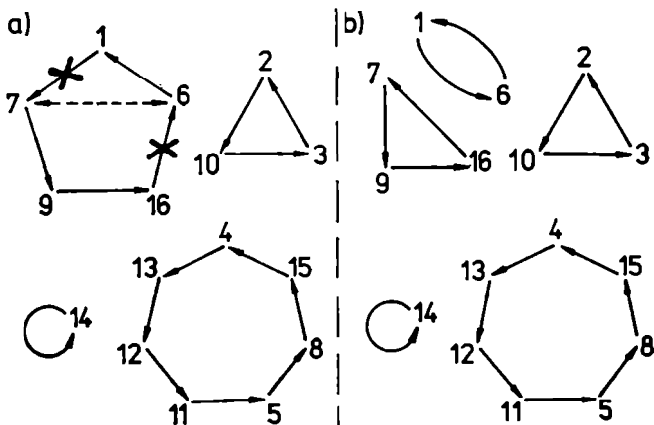
Cvičení 2.4. Kolik cyklů má pozice ze cvičení 2.1.b a jaké jsou jejich délky?

2.6. Jak se změní pozice po jednom tahu. Vraťme se opět k pozici na obrázku 2.3., jejíž graf je na obrázku 2.4. V této pozici můžeme udělat čtyři tahy, posunout na prázdné místo jakékoliv z čísel 1, 2, 3 a 11.

Jaký bude graf nové pozice, posuneme-li například číslo 1? Můžeme jej nakreslit podle nové pozice, nás však bude více zajímat, jak jej dostat přímo z grafu pozice původní. Číslo 1 bylo původně na místě 7, nyní bude tam, kde bylo prázdné místo, tedy na místě čísla 6. Prázdné místo se naopak z políčka 6 přesune na místo 7. Všechna ostatní čísla zůstanou na původních místech. Jakkoliv se posunuje číslo 1, podstatné je především to, že se tah odehrává na místech 6 a 7, a nikde jinde. Kde se tah odehrává, můžeme vyznačit v grafu pozice pomocnými čárkovanými šipkami, které jdou mezi místy, na nichž se čísla posunují — obrázek 2.5.a.

Nyní můžeme stanovit, jak dostat graf nové pozice přímo z grafu původního. Všechna čísla, která nejsou

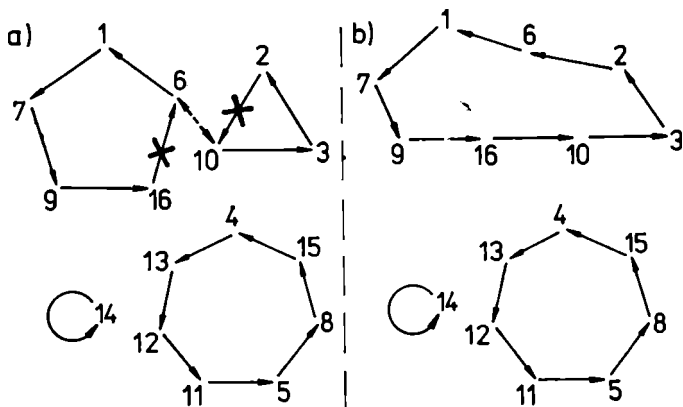
na místech, mezi nimiž vedou čárkované šipky, zůstane, kde byla. Změní se pouze šipky vedoucí do 7 a 6. Do 7 povede šipka, která původně vedla do 6, a do 6 povede šipka, která původně vedla do 7. Můžeme také říci, že koncové body šipek vedoucích do 6 a 7 se zamění podle čárkovaných šipek. Nový graf je na obrázku 2.5.b.



Obr. 2.5

Podobně najdeme graf nové pozice, posuneme-li na prázdné místo číslo 2, nikoliv 1. Nyní přehazujeme čísla na místech, na nichž má být 6 a 10, čárkované šipky povedou tedy mezi 6 a 10 — obrázek 2.6.a. Graf nové pozice je potom na obrázku 2.6.b.

Obecně můžeme konstrukci nového grafu z grafu pozice původní shrnout takto. Mezi dvěma body odpovídajícími místům, na nichž se tah odehrává, uděláme v původním grafu pomocné čárkované šipky. Graf nové pozice dostaneme tak, že zaměníme koncové body šipek



Obr. 2.6

vedoucích do těchto dvou bodů. Ostatní šipky zůstávají beze změny.

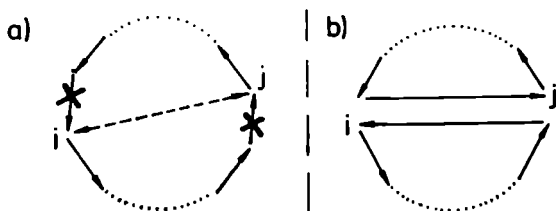
Cvičení 2.5. Nakreslete grafy všech tří možných pozic, které dostaneme po jednom tahu z pozice cvičení 2.1.b.

***Cvičení 2.6.** Jaké podmínky musí splňovat dvojice pomocných čárkovaných šipek v grafu nějaké pozice, aby odpovídala povolenému tahu ?

2.7. Jak se změní počet cyklů po jednom tahu. Čárkované šipky v grafu původní pozice jednoznačně určují nový graf. Mohou vést buď mezi dvěma body ve stejném cyklu — jako na obrázku 2.5.a, nebo mezi body v různých cyklech — jako na obrázku 2.6.a.

Oba body ve stejném cyklu. Pozice na obrázku 2.5.a má čtyři cykly, po provedení naznačeného tahu dostaneme pozici 2.5.b, která má pět cyklů. To není náhoda.

Jestliže tah vede mezi dvěma body v témže cyklu, zvětší se celkový počet cyklů vždy o jeden. Dokážeme si to pomocí obrázku 2.7.



Obr. 2.7

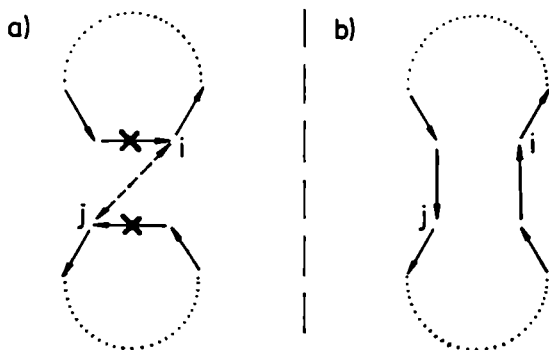
Uvažujme jeden z cyklů v nějaké pozici a v něm dva libovolné body i, j . Čárkované šipky mezi i a j označují, že tah děláme na dvou místech ve stejném cyklu. Jak bude vypadat graf nové pozice? Záměnou koncových bodů šipek do i a j se tento cyklus rozpadne do dvou menších cyklů, v jednom z nich bude i a ve druhém j — obrázek 2.7.b. Ostatní cykly zůstanou beze změny, jejich celkový počet se tedy zvětší o jeden.

Body v různých cyklech. Zcela stejně si ukážeme, že počet cyklů se zmenší o jeden, vedou-li čárkované šipky mezi body v různých cyklech (jako na obrázku 2.6.). Budeme opět předpokládat, že tah vede mezi dvěma body i, j a že tyto body leží tentokrát v různých cyklech.

Na obrázku 2.8.a jsou z celé pozice nakresleny pouze tyto dva cykly. V novém grafu šipka, která původně vedla do i , povede do j , a šipka, která vedla do j , povede do i . Oba cykly se tak propojí do jednoho velkého — obrázek 2.8.b. Ostatní cykly se opět nezmění, nová pozice bude mít o jeden cyklus méně.

Tím jsme si dokázali důležité *pravidlo o počtu cyklů* v pozici.

Celkový počet cyklů v pozici se po jednom tahu změni o jeden. Vede-li tah mezi body v témže cyklu, počet cyklů se zvětší, vede-li mezi body v různých cyklech, počet se zmenší.



Obr. 2.8

2.8. Sudé a liché pozice. Ukážeme si jeden důsledek tohoto pravidla. Každým tahem se počet cyklů v libovolné pozici změni o jeden. Uděláme-li více tahů, po každém z nich se rozdíl mezi počtem cyklů v počáteční a koncové pozici změni o jeden, střídavě se tedy měni ze sudého na lichý a naopak. Po jednom tahu bude tento rozdíl vždy lichý (rovný jedné), po dvou tazích vždy sudý, po třech lichý atd.

Po sudém počtu tahů bude rozdíl mezi počtem cyklů v počáteční a koncové pozici vždy sudý, po lichém počtu tahů vždy lichý.

Odtud ihned vyplývá, že je-li rozdíl mezi počtem cyklů v nějakých dvou pozicích sudý, nemůžeme jednu z druhé nikdy dostat lichým počtem tahů, a je-li tento rozdíl lichý, nemůže to jít po sudém počtu tahů.

Nás především zajímá, kdy můžeme nějakou pozici převést do pozice základní. V případě, že je rozdíl mezi počtem cyklů v pozici a počtem cyklů v pozici základní (ta má šestnáct cyklů) sudý, nemůžeme ji složit lichým počtem tahů, pokud to vůbec nějak půjde, tak jedině po sudém počtu tahů. Takovým pozicím budeme proto říkat *sudé pozice*. Pozice, u nichž je tento rozdíl lichý, můžeme naopak složit jedině lichým počtem tahů, a budeme jim proto říkat *liché pozice*.

V základní pozici je šestnáct cyklů, nějaká pozice u patnáctky je tedy sudá, právě když má sudý počet cyklů. Sudost nebo lichost pozice zjistíme tedy také podle celkového počtu jejích cyklů. Musíme si ale uvědomit, že to tak vychází pouze proto, že základní pozice má sudý počet cyklů. U hraček, které mají základní pozice s lichým počtem cyklů, to vychází přesně naopak, sudé jsou pozice s lichým počtem cyklů. Taková je například varianta 3×5 v odstavci 2.12.

Cvičení 2.7. Které z následujících pozic jsou sudé?

a) základní, b) reklamní, c) pozice ze cvičení 2.1.b.

Cvičení 2.8. Která z pozic je sudá a která lichá?

a) $\left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \end{array} \right)$

$$b) \left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \end{array} \right).$$

2.9. Neřešitelnost reklamní pozice. V odstavci 2.2. jsme pomocí triku se šachovnicí vyloučili možnost složení reklamní pozice po lichém počtu tahů. Zbývá dosud možnost dosáhnout cíle sudým počtem tahů. Počet cyklů v reklamní pozici je 15 a liší se od počtu cyklů v základní pozici o jeden. Reklamní pozice je tedy lichá. Nepomůže nám proto ani žádný sudý počet tahů. Pozice je opravu neřešitelná.

2.10. Další neřešitelné pozice. V reklamní pozici je ve sporu lichý počet cyklů a sudé prázdné místo. Protože je pozice lichá, nemůžeme ji složit po sudém počtu tahů, a protože je prázdné místo sudé, nejde to ani po lichém. Kdykoliv jsou v nějaké pozici obě charakteristiky — počet cyklů a poloha prázdného místa — v rozporu, pozice je neřešitelná ze stejného důvodu jako pozice reklamní. Tak například obě pozice na obrázku 2.9. jsou neřešitelné. První z nich je lichá a prázdné místo má sudé, zatímco druhá je sudá, ale zkazí to zase liché prázdné místo.

a)

4	3		15
2	9	1	5
14	10	7	8
13	6	11	12

b)

2	9	7	15
14	4	6	1
8		12	5
11	13	3	6

Obr. 2.9

Našli jsme mnoho neřešitelných pozic.

Všechny sudé pozice s lichým prázdným místem a všechny liché pozice se sudým prázdným místem jsou neřešitelné.

Zbývá rozhodnout o řešitelnosti ostatních. Ty jsou řešitelné, důkaz ale odložíme do jedné z příštích kapitol, až budeme umět několik nových triků.

Všechny sudé pozice se sudým prázdným místem a všechny liché pozice s lichým prázdným místem jsou řešitelné.

Cvičení 2.9. Kolik cyklů mají pozice na obrázku 2.9.?

Cvičení 2.10. a) Lze převést pozici ze cvičení 2.8.a do pozice b) z téhož cvičení?

b) Mohou být obě současně řešitelné?

c) Která z nich je neřešitelná?

2.11. Počet sudých cyklů v pozici. Ukážeme si ještě jeden způsob, jak zjistit, je-li pozice sudá nebo lichá. Součet délek všech cyklů v každé pozici je šestnáct (cvičení 2.3.). Těch, které mají lichou délku, musí být proto sudý počet. Počet všech cyklů je potom sudý nebo lichý, podle toho, je-li sudý nebo lichý počet cyklů sudé délky. Z odstavce 2.8. víme, že pozice u patnáctky je sudá, právě když má sudý počet cyklů. Je tedy sudá, právě když má sudý počet cyklů sudé délky. A tak základní

pozice je sudá také proto, že nemá žádný sudý cyklus, reklamní je lichá, protože má jeden sudý cyklus, atd.

Cvičení 2.11. Určete počty sudých cyklů v pozicích na obrázku 2.9. a ze cvičení 2.8.

***2.12. Jiné varianty.** Metodu, kterou jsme ukázali neřešitelnost reklamní pozice, můžeme použít u mnoha dalších variant patnáctky. Především nemusíme hrát na ploše 4×4 , jde to na jakékoliv obdélníkové ploše $m \times n$. Varianty 2×2 , $1 \times n$, $m \times 1$ jsou nezajímavé, nedávají žádnou možnost prohazovat čísla. Popisy všech řešitelných pozic a postupy k jejich řešení jsou snadné.

U ostatních obdélníkových variant můžeme zkoumat stejné otázky jako u patnáctky: které pozice jsou neřešitelné, a jak skládat ty řešitelné. Dosud jsme se naučili dokazovat neřešitelnost některých pozic u patnáctky, podobně ale můžeme postupovat i u dalších variant. Tak například pozici na obrázku 2.10.a — varianta 3×5 — nelze bez porušení pravidel převést do základní pozice 2.10.b.

a)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	14	13	

b)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	

Obr. 2.10

Důkaz je zcela stejný jako důkaz neřešitelnosti reklamní pozice.

1. Pomocí šachovnicového triku ukážeme, že to nejde lichým počtem tahů — odstavec 2.2.

2. Grafy pozic, počty cyklů a jejich délky najdeme stejně jako u patnáctky — odstavce 2.4. a 2.5.

3. Po jednom tahu se počet cyklů v každé pozici změní vždy o jeden — odstavce 2.6. a 2.7.

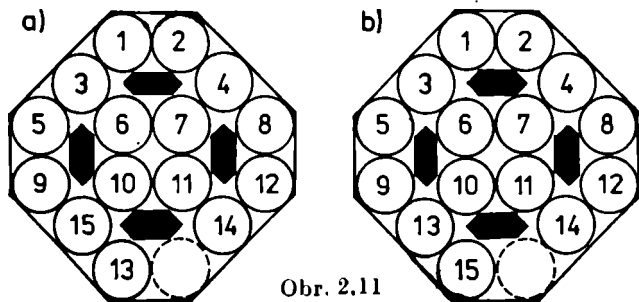
4. Pozice na obrázku 2.10.a má čtrnáct cyklů, zatímco pozice na obrázku 2.10.b jich má patnáct. Jednu z druhé proto v důsledku bodu 3. nemůžeme dostat po sudém počtu tahů, pozice 2.10.a je neřešitelná — odstavec 2.8.

V souladu s definicí z odstavce 2.8. můžeme říct, že pozice 2.10.a je lichá — má počet cyklů, který se od počtu cyklů v základní pozici liší o liché číslo 1.

Cvičení 2.12. Dokažte, že počet cyklů v libovolné pozici varianty 3×5 se od počtu cyklů v základní pozici 2.10.a liší o sudé číslo, právě když má tato pozice sudý počet sudých cyklů, což je, právě když má lichý počet všech cyklů.

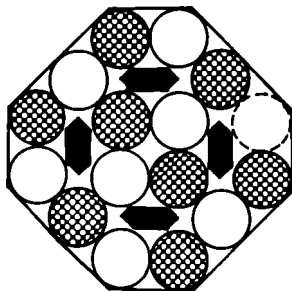
Jiná varianta patnáctky je na obrázku 2.11. Také zde můžeme posunout číslo na sousední prázdné místo.

Zajímá nás, je-li možné převést pozici a) do základní pozice b).



Obr. 2.11

Chceme-li postupovat podle bodů 1.—4., jsme chvíli na rozpacích, jak modifikovat trik se šachovnicí. Hrací plocha přece nemá tvar šachovnice! Chvíle přemýšlení ale ukáže, že prázdné místo v pravém dolním rohu můžeme nějakým postupem dostat zpět zase jenom po sudém počtu tahů. Podstatné totiž je, že také zde lze hrací plochu obarvit bílou a černou barvou tak, že každá dvě sousední pole mají vždy opačné barvy.



Obr. 2.12

Opět vidíme, že každý tah změni barvu prázdného místa, pozici a) tedy nelze převést do pozice b) lichým počtem tahů. Dále už můžeme postupovat podle bodů 2., 3. a 4. prakticky beze změn. Každý tah změni počet cyklů v pozici o jeden. pozice a) jich má patnáct, zatímco základní pozice b) šestnáct. Jednu z druhé proto nemůžeme dostat ani sudým počtem tahů. Pozici a) nelze převést do b) bez porušení pravidel, je neřešitelná.