Oddělitelnost množin

3. kapitola. Některá užití věty o oddělitelnosti

In: Jaroslav Morávek (author); Milan Vlach (author): Oddělitelnost množin. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1987. pp. 36–78.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404159

3. kapitola

NĚKTERÁ UŽITÍ VĚTY O ODDĚLITELNOSTI

3.1. O řešitelnosti soustav lineárních nerovnic

V 1. kapitole jsme ve speciálních případech zjistili, že spolu se soustavou lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{19}$$

je užitečné uvažovat ještě soustavu lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &\geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &\geqq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Platí totiž tato věta (sr. konec odstavce 1.1):

Věta 4. *Soustava lineárních nerovnic* (19) *má nezáporné* *řešení právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m \geqq 0 .$$

Důkaz. **1.** Předpokládejme, že soustava (19) má nezáporné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a nechť $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je libovolné nezáporné řešení soustavy (20). Za těchto předpokladů je zřejmé, že $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je také řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) &\leqq y_1 b_1 , \\ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) &\leqq y_2 b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) &\leqq y_m b_m \end{aligned} \tag{21}$$

a tudíž také nerovnice, která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (21). Avšak po provedení naznačeného násobení čísly $y_1, y_2, \ldots, y_m$ a po vytknutí čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zjistíme, že tato poslední nerovnice má tvar

$$\begin{aligned} &(y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \ldots + y_m a_{m1})\, x_1 + \\ &+ (y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \ldots + y_m a_{m2})\, x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \ldots + y_m a_{mn})\, x_n \leqq \\ &\leqq y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m . \end{aligned} \tag{22}$$

Z tohoto tvaru je patrné, že platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m \geqq 0 ,$$

neboť podle předpokladů na levé straně nerovnice (22) jde o součet součinů nezáporných čísel.

2. Zbývá dokázat, že podmínka věty je postačující podmínkou existence nezáporného řešení soustavy (19). K tomu však stačí dokázat, že neexistuje-li nezáporné řešení soustavy (19), není splněna zmíněná podmínka. Předpokládejme tedy, že neexistuje nezáporné řešení soustavy (19). Označme symbolem K_1 množinu těch bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ prostoru R^m, pro jejichž souřadnice platí

$$\xi_1 \leqq b_1, \xi_2 \leqq b_2, \ldots, \xi_m \leqq b_m.$$

Dále symbolem K_2 označme množinu bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ prostoru R^m, jejichž souřadnice mají tyto vlastnosti: existuje takový bod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, že

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \xi_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \xi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \xi_m, \\
x_1 &\geqq 0, \\
x_2 &\geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
x_n &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Jinými slovy: množina K_2 je množina bodů prostoru R^m tvaru

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots,$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n),$$

kde $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$.

Množiny K_1 a K_2 jsou neprázdné konvexní mnohostěny. V případě množiny K_1 je to zřejmé, v případě množiny K_2

je to jednoduchý důsledek věty 1. Protože neexistuje nezáporné řešení soustavy (19), nemají množiny K_1 a K_2 společné body a jsou v důsledku věty 3 oddělitelné. Existují tedy taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ je různé od nuly, že pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny K_1 je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m < b$$

a pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny K_2 je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m > b\,.$$

Odtud však plyne, že číslo b je záporné, neboť bod (0,0, ..., 0) patří do množiny K_2, takže platí

$$a_1 0 + a_2 0 + \ldots + a_m 0 > b\,.$$

Dále dokážeme, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou nezáporná: Je-li $a_{i_0} < 0$ pro nějaké i_0 a položíme-li

$\xi_1 = b_1, \quad \xi_2 = b_2, \quad \ldots, \quad \xi_{i_0-1} = b_{i_0-1}, \xi_{i_0+1} = b_{i_0+1}, \quad \ldots,$
$\xi_m = b_m,$

$$\xi_{i_0} = \min\left[b_{i_0}, \frac{b - a_1b_1 - \ldots - a_{i_0-1}b_{i_0-1} - a_{i_0+1}b_{i_0+1} - \ldots - a_mb_m}{a_{i_0}}\right],$$

patří bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ do množiny K_1 (viz zavedení množiny K_1), a musí tedy platit

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m < b\,.$$

Přímým výpočtem však zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m = \\ = a_{i_0}\xi_{i_0} + (a_1\xi_1 \ldots + a_{i_0-1}\xi_{i_0-1} + a_{i_0+1}\xi_{i_0+1} + \ldots + \\ + a_m\xi_m) \geqq \\ \geqq b - a_1b_1 - \ldots - a_{i_0-1}b_{i_0-1} - a_{i_0+1}b_{i_0+1} - \ldots - \\ - a_mb_m + \\ + (a_1b_1 + \ldots + a_{i_0-1}b_{i_0-1} + a_{i_0+1}b_{i_0+1} + \ldots + \\ + a_mb_m) = b, \end{aligned}$$

takže předpoklad $a_{i_0} < 0$ vede ke sporu.

Dokážeme nyní, že

$$y_1 = a_1,\ y_2 = a_2, \ldots, y_m = a_m$$

je takové nezáporné řešení soustavy (20), že platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m < 0,$$

tj. že není splněna podmínka věty 4. Poslední nerovnost však plyne z toho, že číslo b je záporné a že bod $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ patří do množiny K_1. Zbývá tedy dokázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je řešením soustavy (20).

Předpokládejme, že existuje index j_0 tak, že platí

$$y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0} < 0,$$

a položme $x_j = 0$ pro $j \neq j_0$,

$$x_{j_0} = \frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0}}.$$

Potom bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, kde

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

patří do množiny K_2, takže platí

$$y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_m\xi_m > b.$$

Avšak přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že platí

$$\begin{aligned}
&y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_m\xi_m = \\
&= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) = \\
&= y_1a_{1j_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0}} + \\
&+ y_2a_{2j_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0}} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_ma_{mj_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0}} = b.
\end{aligned}$$

Tento spor nám říká, že index j_0 s uvedenou vlastností neexistuje, takže $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je řešením soustavy (20) a důkaz věty 4 je dokončen.

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil dokázat jako cvičení tyto věty:

Věta 5. *Soustava* (19) *má řešení (nejedná se tedy pouze o nezáporné řešení) právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0.$$

Věta 6. *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má nezáporné řešení právě tehdy, platí-li pro každé (nikoliv jen nezáporné) řešení $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0.$$

Věta 7. *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má řešení právě tehdy, jestliže pro každé řešení $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

platí

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m = 0.$$

3.2. O úlohách lineární optimalizace

Úlohou *lineární optimalizace* nazýváme tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (pokud vůbec existují) soustavy lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{23}$$

nalézt takové, pro které nabývá daná funkce n proměnných

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{24}$$

kde ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou daná čísla) své největší hodnoty; stručně to zapisujeme symbolem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max^{1)}. \tag{25}$$

[1]) Funkci f nazýváme někdy *účelovou* funkcí; kromě toho i v případě, že hledáme nejmenší hodnotu funkce f, hovoříme o *úloze optimalizace*.

Pro nezáporná řešení soustavy (23) se vžil název *přípustná řešení* úlohy lineární optimalizace a pro přípustná řešení dávající největší hodnotu funkce (24) se vžil název *optimální řešení* úlohy lineární optimalizace.

Uveďme na tomto místě alespoň jeden příklad úlohy z praxe, která vede na úlohu lineární optimalizace. K výrobě různých druhů produkce je potřeba užít jistých technologických postupů a určitých surovin a úlohou je rozhodnout, jaká množství jednotlivých druhů produkce máme vyrobit, abychom při použití daných technologických postupů nepřekročili dané zásoby potřebných surovin a abychom přitom dosáhli co největšího zisku.

Předpokládejme, že se jedná o n druhů produkce a že k výrobě je třeba m druhů surovin. Označme symbolem c_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) zisk z výroby každého jednotkového množství produkce j-tého druhu a symbolem b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) zásobu i-té suroviny. Jsou-li technologické postupy takové, že k výrobě jednotkového množství j-té produkce je potřeba množství a_{ij} i-té suroviny, a označíme-li x_j hledané množství produkce j-tého druhu, pak

podmínky nepřekročení zásob jednotlivých surovin lze vyjádřit soustavou (23);
zisk z výroby lze vyjádřit vzorcem (24);
podmínku největšího zisku lze vyjádřit podmínkou (25).

Jak jsme už zjistili v 1. kapitole, soustava lineárních nerovnic nemusí mít žádné řešení, nemusí tedy existovat ani přípustné řešení úlohy lineární optimalizace. Jako cvičení by si měl čtenář ukázat, že i v případě, kdy soustava (23) má řešení, nemusí mít nezáporné řešení. Ukážeme si, že i v případě, kdy úloha lineární optimalizace má přípustné řešení, nemusí mít optimální řešení.

Můžeme k tomu užít soustavy (2) z 1. kapitoly, tj. soustavy

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 &\leqq -2,\\
-x_1 + 2x_2 &\leqq -4,
\end{aligned}
$$

jejíž množina řešení je znázorněna na obr. 3, ze kterého je patrné, že tato množina není omezená. Je také zřejmé, že zvolíme-li pevně hodnotu neznámé $x_2 = \hat{x}_2$ tak, že je $\hat{x}_2 > 0$, bude existovat taková hodnota neznámé, $x_1 = \hat{x}_1$, že kromě dvojice čísel $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ bude řešením uvažované soustavy i každá dvojice čísel $(\bar{x}_1, \hat{x}_2)$, pro kterou platí $\bar{x}_1 > \hat{x}_1$. Odtud však plyne, že bude-li funkce $f(x_1, x_2)$ mít např. tvar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

můžeme vhodnou volbou hodnot proměnných dosáhnout toho, aby funkce $f(x_1, x_2)$ nabývala hodnoty větší než jakékoliv předem zadané číslo, a nemůže tedy funkce f nabývat na množině přípustných řešení své největší hodnoty.

Platí však tato věta.

Věta 8. *Existuje-li přípustné řešení úlohy* (23), (24),

(25) *a existuje-li takové číslo M, že pro všechna přípustná řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq M,$$

potom existuje i optimální řešení.

Důkaz. Množina všech nezáporných řešení $(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ soustavy (23) je konvexním mnohostěnem K v prostoru R^n. Podle věty 1 je množina $\tilde{K}$ všech bodů $Z = (z_1)$ prostoru R^1, pro které existuje takový bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu K, že platí

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

konvexním mnohostěnem v R^1. Podle příkladu 3 kapitoly 2 je tedy $\tilde{K}$ buď (a) prázdná množina, nebo (b) prostor R^1, nebo (c) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde a, b jsou čísla, pro která je $a \leqq b$ nebo (d) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde b je jisté číslo nebo (e) množina bodů (x_1) prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1$, kde a je jisté číslo. Protože však podle předpokladu existuje přípustné řešení, nemůže nastat případ (a), protože kromě toho existuje číslo M tak, že pro všechny body (z_1) množiny $\tilde{K}$ platí $z_1 \leqq M$, nemohou nastat ani případy (b) a (e). Ať už nastává kterýkoliv ze zbývajících případů, optimální řešení existuje; je jím každé řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro které platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b,$$

a takové řešení existuje, neboť funkce

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

zobrazuje množinu K na množinu $\tilde{K}$.

Výhodné je studovat spolu s úlohou (23), (24), (25) i tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustavy lineárních nerovnic

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &\geqq c_1, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &\geqq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &\geqq c_n \end{aligned} \tag{23'}$$

nalézt takové, pro které nabývá funkce m proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m, \tag{24'}$$

své nejmenší hodnoty; stručně píšeme

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) \to \min. \tag{25'}$$

Úlohu (23'), (24'), (25') nazýváme úlohou *duální* k úloze (23), (24), (25).

Všimněme si toho, že obě úlohy jsou zadány systémem čísel

$$\begin{aligned} &a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, \\ &a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, b_m, \\ &c_1, c_2, \ldots, c_n, \end{aligned}$$

a toho, že duální úloha je úlohou lineární optimalizace stejného typu jako úloha (23), (24), (25), neboť soustavu (23') můžeme převést na soustavu

$$\begin{aligned}
-a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m &\leqq -c_1, \\
-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m &\leqq -c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\
-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m &\leqq -c_n
\end{aligned}$$

a podmínku (25') na tvar

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max.$$

Kromě toho čtenář snadno nahlédne, že vytvoříme-li k duální úloze úlohu duální, dostaneme úlohu původní; proto často hovoříme o dvojici *vzájemně duálních* úloh.

Věta 9. *Je-li* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *přípustné řešení úlohy* (23), (24), (25) *a je-li* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *přípustné řešení duální úlohy, pak platí nerovnost*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Důkaz. Užijeme-li postupně nerovností (23') a (23) a nezápornosti přípustných řešení, dostaneme

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + \ldots + c_nx_n \leqq \\
&\leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})x_1 + \\
&+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})x_n = \\
&= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m.
\end{aligned}$$

Věta 10. *Přípustná řešení* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \ldots, \hat{y}_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pro která platí*

$$c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n = b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

jsou optimální.

Důkaz. Ukážeme např., že $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ je optimální řešení úlohy (23) — (25); to, že $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$ je optimální řešení úlohy (23′) — (25′), si čtenář zcela analogicky dokáže sám. Máme dokázat, že pro libovolné přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23) — (25) platí nerovnost

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

Avšak podle věty 9 platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

a podle předpokladu věty 10 platí

$$b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

Věta 11. *Existují-li přípustná řešení vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pak existují i optimální řešení těchto úloh, a je-li* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *optimální řešení úlohy* (23) — (25) *a* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *optimální řešení úlohy* (23′) — (25′), *pak platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Důkaz. Je zřejmé, že stačí dokázat existenci takových nezáporných řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m &\leqq -c_1, \\ -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m &\leqq -c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m &\leqq -c_n, \end{aligned} \tag{27}$$

že platí

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + \\ + c_nx_n. \tag{28}$$

Protože však pro každé přípustné řešení platí podle věty 9 nerovnost

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \geqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

stačí místo (28) požadovat splnění podmínky

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \leqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

a ta je ekvivalentní s podmínkou

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - \\ - c_nx_n \leqq 0. \tag{29}$$

Máme tedy dokázat, že soustava $m + n + 1$ nerovnic (26), (27), (29) o $m + n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ má nezáporné řešení.

Předpokládejme, že tato soustava nemá nezáporné řešení, potom podle věty 4 existují taková nezáporná čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \lambda$, že platí

$$
\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m - c_1\lambda &\geqq 0,\\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m - c_2\lambda &\geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m - c_n\lambda &\geqq 0,\\
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n + b_1\lambda &\geqq 0,\\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n + b_2\lambda &\geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n + b_m\lambda &\geqq 0,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

a zároveň

$$
\begin{aligned}
b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - {}&\\
- \ldots - c_n\eta_n < 0.&
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Ukážeme nejdříve, že nemůže být $\lambda = 0$. Je-li totiž $\lambda = 0$, dostaneme, na základě (30), soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m &\geqq 0,\\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m &\geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m &\geqq 0,
\end{aligned}
\tag{32a}
$$

$$
\begin{aligned}
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n &\geqq 0,\\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n &\geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n &\geqq 0.
\end{aligned}
\tag{32b}
$$

Podle předpokladu věty existuje přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23)—(25) a přípustné řešení $(y_1, y_2, \ldots,$

y_m) úlohy (23')—(25'). Vynásobíme-li j-tou nerovnici soustavy (32a) číslem x_j a vzniklé nerovnice sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \leqq\ & x_1(a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m) + \\
&+ x_2(a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x_n(a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m) = \\
&= \xi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ \xi_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \xi_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_m b_m.
\end{aligned}$$

Vynásobíme-li i-tou nerovnici soustavy (32b) číslem y_i a vzniklé nerovnice sečteme, dostaneme obdobně

$$\begin{aligned}
0 \leqq\ & y_1(-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n) + \\
&+ y_2(-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n) = \\
&= \eta_1(-a_{11}y_1 - a_{21}y_1 - \ldots - a_{m1}y_m) + \\
&+ \eta_2(-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \eta_n(-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m) \leqq \\
&\leqq -\eta_1 c_1 - \eta_2 c_2 - \ldots - \eta_n c_n.
\end{aligned}$$

Sečtením takto získaných dvou nerovnic dostaneme nerovnici

$$b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \ldots - c_n\eta_n \geqq 0,$$

která je ve sporu s nerovnicí (31); musí tedy být $\lambda > 0$. Potom však můžeme každou nerovnici soustavy (30) dělit číslem λ a získat tak soustavu

$$a_{11}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{21}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m1}\frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_1,$$

$$a_{12}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m2}\frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{1n}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{2n}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\xi_m}{\lambda} \geqq c_n,$$

$$a_{11}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{12}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{1n}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_1,$$

$$a_{21}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{2n}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{m1}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{m2}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_m.$$

To však znamená, že $\left(\frac{\eta_1}{\lambda}, \frac{\eta_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\eta_n}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy (23)—(25) a že $\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\xi_m}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy duální, tj. úlohy (23')—(25'). Pak ovšem podle věty 9 musí platit nerovnost

$$c_1 \frac{\eta_1}{\lambda} + c_2 \frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + c_n \frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_1 \frac{\xi_1}{\lambda} + b_2 \frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots$$
$$\ldots + b_m \frac{\xi_m}{\lambda}.$$

Násobíme-li poslední nerovnost číslem λ, dostaneme nerovnost

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_n\eta_n \leqq b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m,$$

která je ve sporu s nerovnicí (31). Odtud však plyne, že předpoklad o tom, že soustava nerovnic (26), (27), (29) nemá nezáporné řešení, je nesprávný, čímž je věta dokázána.

Věta 11 umožňuje dokázat snadno tuto větu:

Věta 12. *Přípustná řešení* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23)—(25), (23')—(25') *jsou optimálními právě tehdy, jestliže jsou splněny tyto podmínky:*

je-li $x_j > 0$, *je* $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j$;
je-li $y_i > 0$, *je* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$.

Důkaz. Při důkazu věty 9 jsme ukázali, že platí nerovnice

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq \\
&\leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})\, x_1 + \\
&+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})\, x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})\, x_n = \\
&= y_1\, (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ y_2\, (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.
\end{aligned}
$$

Přitom však podle vět 10 a 11 jsou přípustná řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ optimální právě tehdy, platí-li

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

tj. právě tehdy, platí-li

$$
\begin{aligned}
&[c_1 - (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})]\, x_1 + \\
&+[c_2 - (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})]\, x_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+[c_n - (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{nm})]x_n = 0
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
&[b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)]\, y_1 + \\
&+[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)]\, y_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+[b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)]y_m = 0.
\end{aligned}
$$

Protože každý ze sčítanců na levé straně první rovnosti je nekladný a každý ze sčítanců na levé straně druhé rovnosti je nezáporný, musí být pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$[c_j - (y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \ldots + y_m a_{mj})]\, x_j = 0$$

a pro $i = 1, 2, \ldots, m$

$$[b_j - (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n)]\, y_i = 0.$$

Odtud už snadno plyne tvrzení věty.

Příklad 5. Vyšetřujme tyto vzájemně duální úlohy:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} + x_4 &\leqq 4, \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 3, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &\leqq 3, \\ x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_4 &\geqq 0, \end{aligned} \tag{33}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max. \tag{34}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geqq 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &\geqq 4, \\ 4y_3 &\geqq 1, \\ y_1 + y_3 &\geqq 1, \\ y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 &\geqq 0, \end{aligned} \tag{33'}$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \to \min. \tag{34'}$$

Snadno se lze přesvědčit, že $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ je přípustné řešení úlohy (33), (34). Věty 10 a 12 umožňují rozhodnout, zda toto řešení je optimální. Je-li $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$

optimální, musí podle věty 12 platit pro libovolné optimální řešení (y_1, y_2, y_3) úlohy (33'), (34')

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \phantom{{}+y_3} &= 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= 4, \\ 4y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení, a to $y_1 = \frac{11}{10}$, $y_2 = \frac{9}{20}$, $y_3 = \frac{1}{4}$.

Avšak snadno zjistíme, že pro přípustná řešení $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}\right)$ úloh (33), (34) a (33') (34') platí

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13}{2} = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3,$$

takže podle věty 10 jsou tato přípustná řešení i optimální.

3.3. O prahových funkcích

V tomto odstavci uvedeme jednu aplikaci pojmů z teorie lineárních nerovnic a pojmu oddělitelnosti množin, přičemž tato aplikace se vztahuje k teoretické i k technické kybernetice.

Představme si následující situaci. Určitá skupina sestávající z n osob se sešla proto, aby rozhodla hlasováním o přijetí nějakého návrhu. Předpokládáme kvůli jednoduchosti, že se nikdo nemůže zdržet hlasování, tedy každý musí hlasovat buď pro návrh, nebo proti němu.

Přitom hlasy jednotlivých účastníků mohou mít různou „váhu“ (např. v závislosti na autoritě, kterou mají podle své odborné způsobilosti, nebo v závislosti na mocenském postavení, které zaujímají v uvažované skupině). Dále budeme předpokládat, že hlasující osoby jsou očíslovány v nějakém pevně zvoleném pořadí a že váhu j-tého člena lze vyjádřit nezáporným číslem A_j. Jeden z používaných způsobů pro zhodnocení výsledku provedeného hlasování spočívá v následujícím: Jestliže j-tý člen skupiny (s vahou hlasu A_j) hlasuje pro návrh, představujeme si, že jeho příspěvek pro přijetí návrhu je A_j; v opačném případě pokládáme jeho příspěvek pro přijetí návrhu za nulový. Po skončeném hlasování sečteme příspěvky jednotlivých členů a získaný součet porovnáme s jistou hodnotou B, kterou považujeme za „celkový počet hlasů“, jenž je nutný a postačující pro přijetí daného návrhu. Jestliže součet příspěvků (hlasů) jednotlivých členů není menší než B, považujeme návrh za přijatý, v opačném případě konstatujeme, že návrh přijat nebyl.[1])

Není těžké si rozmyslet, že lze tuto situaci popsat zavedením jisté funkce f n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, přičemž každá proměnná x_j nabývá pouze dvou hodnot

---

[1]) Speciálně v případě $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ můžeme mluvit o „demokratickém“ hlasování. Na druhé straně, situaci, kdy některý ze členů skupiny by chtěl prosazovat svůj názor namířeným samopalem, bychom naším lineárním modelem nepopsali.

0 a 1. Přitom položíme $x_j = 1$ v tom případě, jestliže j-tá osoba hlasuje pro návrh a $x_j = 0$ jestliže j-tá osoba hlasuje proti návrhu. Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ může nabývat dvou hodnot, a sice hodnoty 1, jestliže návrh byl přijat, a hodnoty 0, jestliže návrh přijat nebyl. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definována tímto předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1, \quad \text{jestliže} \quad A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B$$

a

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \text{jestliže} \quad A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B.$$

Příklad 6. Položíme $n = 4$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$ a $B = 3$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována předpisem:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= 1, \text{jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \geqq 3 \\ f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= 0, \text{jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 < 3. \end{aligned} \quad (*)$$

Sestrojíme nyní tabulku hodnot této funkce.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$	$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$
0 0 0 0	0	1 0 0 0	0
0 0 0 1	1	1 0 0 1	1
0 0 1 0	1	1 0 1 0	1
0 0 1 1	1	1 0 1 1	1
0 1 0 0	0	1 1 0 0	1
0 1 0 1	1	1 1 0 1	1
0 1 1 0	1	1 1 1 0	1
0 1 1 1	1	1 1 1 1	1

Popíšeme konstrukci tabulky. V levém sloupci jsou zapsány všechny uspořádané čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, 3$ a 4. Snadno zjistíme, že počet těchto čtveřic je $2^4 = 16$. (Každé ξ_j nabývá dvou hodnot, a tedy celkový počet čtveřic je $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.) Celkový počet čtveřic v naší tabulce je 16, přičemž žádná čtveřice se nevyskytuje dvakrát. Z toho tedy vyplývá, že v tabulce se vyskytují všechny čtveřice, každá právě jednou. Na pořadí, ve kterém vypisujeme čtveřice, sice nezáleží (pokud ovšem odpovídajícím způsobem uspořádáme hodnoty funkce), poznamenejme však pro úplnost, že při konstrukci tabulky jsme použili tzv. *lexikografického uspořádání*. Lexikografické uspořádání je v našem případě definováno takto: Nechť $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ a $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ jsou dvě libovolné čtveřice z nul a jedniček. Čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *je před čtveřicí* $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, jestliže nastává alespoň jeden z těchto případů:

1. $\xi_1 = 0$, $\tau_1 = 1$ (ostatní ξ_j a v_j mohou být libovolná),
2. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = 0$, $\tau_2 = 1$ (ξ_3, ξ_4, τ_3 a τ_4 mohou být libovolná),
3. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$, $\xi_3 = 0$, $\tau_3 = 1$ (ξ_4 a τ_4 mohou být libovolná) nebo
4. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$, $\xi_3 = \tau_3$, $\xi_4 = 0$ a $\tau_4 = 1$.

Čtenář snadno ověří, že pořádí čtveřic v tabulce skutečně odpovídá lexikografickému uspořádání 1—4.

Při konstrukci lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic lze použít následujícího mechanického postupu:

Každé čtveřici $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ přiřadíme ohodnocení

$$w(\xi) = \xi_1 . 2^3 + \xi_2 . 2^2 + \xi_3 . 2^1 + \xi_4 . 2^0$$

a čtveřice uspořádáme vzestupně podle rostoucích $w(\xi)$.

Po této krátké exkurzi do čistě kombinatorických otázek se vrátíme k funkci $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována vztahy (*) a její hodnoty lze přečíst z tabulky. Ze vztahů (*) nebo z tabulky se lze přesvědčit o tom, že v uvažovaném příkladě je návrh přijat při všech možných hlasováních s výjimkou těchto tří případů:

1. Nikdo nehlasuje pro návrh; 2. pro návrh hlasuje pouze první účastník; 3. pro návrh hlasuje pouze druhý účastník. Idealizovaná situace s hlasováním nás přivádí k pojmu tzv. prahové funkce. Zatím jsme předpokládali, že čísla A_1, A_2, ..., A_n jsou nezáporná; tento předpoklad souvisel s konkrétní povahou naší „hlasovací" situace. Obecně však tento předpoklad nemá opodstatnění, neboť prahové funkce se vyskytují i v jiných aplikacích matematiky, jako např. v neurofyziologii, v slaboproudé elektrotechnice, při konstrukci počítačů, v psychologii, sociologii, toxikologii, teorii baletu aj.

Definice. *Prahovou funkcí n proměnných* budeme rozumět funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovanou na množině všech uspořádaných n-tic z jedniček a nul a zobrazující tuto množinu do množiny $\{0, 1\}$, přičemž musí být splněna tato podmínka: Existují reálná čísla $A_1, \ldots, A_n$ a B tak, že platí:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B, \\ 0, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{cases} \tag{35}$$

Čísla $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají *vahami* a číslo B *prahem*.

Z definice prahové funkce je patrné, že je to funkce dosti speciální struktury. V matematické logice a jejích aplikacích se definují tzv. logické funkce. Uvedeme tuto definici.

Definice. *Logickou funkcí n proměnných* (označení $F(x_1, \ldots, x_n)$), budeme rozumět zobrazení množiny všech uspořádaných n-tic z nul a jedniček do množiny $\{0, 1\}$.

Poznámka. Termín logická funkce pochází od toho, že proměnné x_j i hodnotu funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ lze interpretovat jako logické výroky; přitom 1 interpretujeme jako pravdivý výrok „ano“ a 0 jako nepravdivý výrok „ne“. K ilustraci pojmu logické funkce viz cvičení 8 na konci kapitoly. Srovnáním obou dvou definic dostáváme tuto zřejmou větu:

Věta 13. *Každá prahová funkce je logickou funkcí.*

Obrácené tvrzení však neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad 7. Mějme logickou funkci $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, definovanou takto: $\varphi(0, 0, 0) = \varphi(1, 1, 1) = 1$, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, jestliže $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ a $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (1, 1, 1)$. Dokážeme, že funkce $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ není prahová, tj. že neexistují čísla A_1, A_2, A_3 a B tak, aby platilo

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{cases} 1, \text{jestliže } A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 \geqq B, \\ 0, \text{jestliže } A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 < B. \end{cases}$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby totiž taková čísla existovala, musela by splňovat nerovnosti

$$\begin{array}{rlr} A_1 + A_2 + A_3 & \geqq B, & (\varphi\,(1, 1, 1) = 1), \\ 0 & \geqq B, & (\varphi\,(0, 0, 0) = 1), \\ -A_1 \qquad\qquad & > -B, & (\varphi\,(1, 0, 0) = 0), \\ -A_2 \qquad & > -B, & (\varphi\,(0, 1, 0) = 0), \\ -A_3 & > -B, & (\varphi\,(0, 0, 1) = 0). \end{array}$$

Nyní druhou nerovnost vynásobíme dvěma a všechny nerovnosti takto vzniklého systému sečteme. Tím dostáváme nerovnost $0 > 0$, která však znamená spor.

Z příkladu 7 tedy vyplývá, že ne každá logická funkce je prahová. Na druhé straně, jestliže nějaká logická funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová, nejsou koeficienty a pravá strana ve vztazích (35) určeny jednoznačně. Ukážeme si tuto skutečnost na prahové funkci tří proměnných v následujícím příkladu. Důkaz v obecném případě si čtenář lehce provede samostatně.

Příklad 8. Vyšetřujme prahovou funkci tří proměnných $\psi(x_1, x_2, x_3)$ definovanou takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \geqq 2, \\ 0, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 2. \end{cases}$$

Není těžké ověřit, že funkce $\psi(x_1, x_2, x_3)$ je definována též např. takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } 10\xi_1 + 11\xi_2 + 12\xi_3 \geqq 20, \\ 0, \text{ jestliže } 10\xi_1 + 11\xi_2 + 12\xi_3 < 20. \end{cases}$$

Poslední dva příklady nás přivádějí k myšlence, že jedna z nejdůležitějších otázek, který vznikají v teorii prahových funkcí, je následující: Je dána logická funkce F n proměnných. Máme rozhodnout, zda tato funkce je prahová, a v kladném případě nalézt alespoň jedno vyjádření ve tvaru (35). Tato otázka je v celé své šíři značně složitá a lze říci, že doposud nebyla ani zdaleka uspokojivě dořešena. V našem výkladu se omezíme na to, že ukážeme, jak poslední otázka souvisí s pojmem oddělitelnosti, a jako důsledek vyslovíme jedno kritérium. Logická funkce je podle definice definována na množině všech uspořádaných n-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Každá taková n-tice je bodem n-rozměrného prostoru R^n. Všecky tyto body tvoří jistou konečnou množinu v R^n. Označme poslední množinu symbolem B^n [1]). Označme dále symbolem

[1]) Množina B^n je množinou vrcholů n-rozměrné jednotkové krychle (viz [1] str. 69—70).

$F^{-1}(0)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z B^n, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, a symbolem $F^{-1}(1)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, tj. symbolicky (tohoto typu symboliky bylo už použito v odst. 2.2):

$$F^{-1}(0) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0\}$$
$$F^{-1}(1) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1\}.$$

(Množiny $F^{-1}(0)$ resp. $F^{-1}(1)$ se obvykle nazývají vzory 0, resp. 1 při zobrazení pomocí funkce F.)

Nyní je jasné, že zadáním funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ jsou jednoznačně určeny množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$, a obráceně, ze znalosti množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ lze jednoznačně určit funkci F. (K určení funkce F stačí ovšem znát jednu z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$).

Předpokládejme nyní, že $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová funkce, a nechť platí

$$\begin{aligned} &F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B,\\ &F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{aligned} \tag{35}$$

Poslední vztahy lze přepsat ekvivalentním způsobem takto:

$$\begin{aligned} &(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^{-1}(1), \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B,\\ &(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^{-1}(0), \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{aligned} \tag{35'}$$

Tím je však dokázána následující

Věta 14. *Funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová právě tehdy, jestliže nastává alespoň jeden z těchto dvou případů:*
a) *alespoň jedna z množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ je prázdná,*
b) *množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou neprázdné a oddělitelné.*

Abychom mohli vyslovit zajímavější kritérium pro to, že funkce F je prahová, zavedeme pojem konvexního obalu konečné množiny bodů prostoru R^n. V dalším textu používáme často pro součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ symbolického zápisu $\sum_{j=1}^{r} a_j$.

Definice. Nechť A je konečná neprázdná množina bodů prostoru R^n. Nechť množina A obsahuje body

$$\begin{array}{l}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),\\ (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).\end{array}$$

Konvexním obalem množiny A (označení $K(A)$) budeme rozumět množinu definovanou takto: $K(A)$ obsahuje každý takový bod $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, pro který existuje k-tice čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tak, že $\lambda_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, $x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_j^{(\varkappa)}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1$.

Příklad 8. Nechť body $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_k, y_k)$ jsou vrcholy konvexního mnohoúhelníka M. Položme $P =$

$=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$, takže P je jistá konečná množina. Snadno lze ukázat, že platí

$$K(P) = M.$$

Dále platí zřejmé

Lemma. *Platí* $K(A) \supset A$.

Důkaz přenecháváme čtenáři. (Návod: Položte $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{\varkappa-1} = 0, \lambda_\varkappa = 1, \lambda_{\varkappa+1} = 0, \ldots, \lambda_k = 0$ postupně pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$).

Věta 15. *Konvexní obal* $K(A)$ *je konvexním mnohostěnem v* R^n.

Důkaz. Uvažujme množinu S těch bodů $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$, pro jejichž souřadnice platí $\lambda_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ a $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1$. S je zřejmě konvexním mnohostěnem v R^k.

Zobrazení definované vzorci

$$x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_j^{(\varkappa)}$$

je lineární zobrazení R^k do R^n, které zobrazuje S na $K(A)$. K zakončení důkazu nyní zbývá použít věty 1.

Nyní jsme schopni zformulovat a dokázat větu:

Věta 16. *Logická funkce* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je prahovou funkcí právě tehdy, jestliže je splněna následující podmín-*

ka: Buď platí $F^{-1}(0) = \emptyset$, nebo $F^{-1}(1) = \emptyset$, nebo množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou obě neprázdné a platí

$$K(F^{-1}(0)) \cap K(F^{-1}(1)) = \emptyset. \tag{36}$$

Důkaz. A. *Postačitelnost podmínky.* Nechť je splněna podmínka věty. Rozlišíme tyto dvě možnosti:
1. Platí buď $F^{-1}(0) = \emptyset$, nebo $F^{-1}(1) = \emptyset$. V tomto případě je funkce F prahová na základě věty 14.
2. Platí $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ a $F^{-1}(1) \neq \emptyset$, a tedy též vtah (35'). Konvexní mnohostěny $K(F^{-1}(0))$, a $K(F^{-1}(1))$ jsou tedy na základě věty 3 oddělitelné, tj. existují čísla A_1, A_2, $\ldots$, A_n a B tak, že platí:

$$\begin{aligned} A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n &< B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(0)) \\ A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n &\geqq B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(1)) \end{aligned} \tag{37}$$

Jestliže si však uvědomíme, že platí (viz lemma) $K(F^{-1}(0)) \supset F^{-1}(0)$ a $K(F^{-1}(1)) \supset F^{-1}(1)$, přicházíme k závěru, že množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou také oddělitelné, což bylo třeba dokázat.

B. *Nutnost podmínky.* Nechť funkce F je prahová, tj. nechť existují čísla $A_1, \ldots, A_n$ a B tak, že platí vztahy (35). Jestliže jedna z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$ je prázdná, není už co dokazovat. Předpokládejme tedy, že platí $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ a $F^{-1}(1) \neq \emptyset$. Dokážeme, že platí nerovnice (37), čímž bude důkaz dokončen. Dokážeme, že platí první ze vztahů (37). Druhý se dokáže zcela analogicky. Nechť množina $F^{-1}(1)$ obsahuje body

$$(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, (x_1^{(\varkappa)}, \ldots, x_n^{(\varkappa)}), \ldots, (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

Podle předpokladu platí

$$A_1 x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n x_n^{(\varkappa)} \geqq B \tag{38}$$

pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$. Budiž nyní $(x_1, \ldots, x_n) \in K(F^{-1}(1))$. Z nerovností (38) dostáváme

$$A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = A_1 \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_1^{(\varkappa)} + \ldots +$$
$$+ A_n \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_n^{(\varkappa)} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa (A_1 x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n x_n^{(\varkappa)}) \geqq$$
$$\geqq \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa B = B \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = B,$$

což bylo třeba dokázat.

Z podaného důkazu však vyplývá následující věta, která má daleko obecnější platnost než pouze v teorii prahových funkcí.

Věta 17. *Nechť* A a B *jsou dvě neprázdné konečné množiny bodů v prostoru* R^n. *Potom jsou množiny* A *a* B *oddělitelné právě tehdy, jestliže platí*

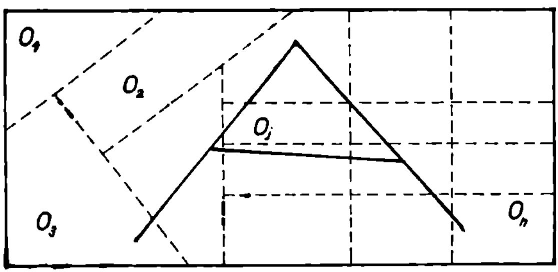
$$K(A) \cap K(B) = \emptyset.$$

3.4. O rozlišování objektů

Téma tohoto odstavce se úzce přimyká k tématu předcházejícího odstavce. Povíme si něco o klasifikaci údajů. V procesu současné vědeckotechnické revoluce se velká pozornost věnuje výzkumům souvisejícím s perspektivou automatického řešení tzv. intelektuálních úloh, jejichž řešení mohl podle tradičních názorů provádět pouze člověk. Tak např. počítače hrají šachy, užívají se při předpovídání počasí, k rozlišování zvuků řeči, k automatickému čtení rukopisů, k nalézání diagnóz v medicíně aj.

Mnohé z těchto úloh vyžadují schopnost klasifikovat (rozlišovat) velké množství údajů, popisujících zkoumané objekty, popřípadě celé situace. Všimněme si např. principu, na kterém pracují smyslové orgány člověka a živočichů. Jestliže pozorujeme nějaký předmět, probíhá v podstatě tento proces: Jednotlivé světelné signály přicházejí na sítnici oka a přinášejí informaci o rozměrech, tvaru, velikosti, vzdálenosti, barvě a prostorovém umístění objektu. Tato informace se přenáší prostřednictvím nervové soustavy do příslušných center a tam se vytváří obraz pozorovaného objektu. Tento mechanismus zrakového vnímání nám umožňuje rozlišovat velmi mnoho navzájem různých objektů (rozlišíme stůl, knihu, člověka atd.). Jako ilustraci matematických metod a problémů, které vznikají v souvislosti s problematikou rozlišování objektů, popíšeme jistý jednoduchý matematický model, který budeme nazývat *klasifikátorem objektů.*

Představme si, že máme k dispozici jistou obdélníkovou destičku a kousek křídy. Křídou můžeme na destičku kreslit různé obrazce — objekty, např. písmena latinské abecedy. Člověk držící křídu napíše nějaké písmeno, potom toto písmeno smaže a napíše nějaké jiné písmeno atd. Naším úkolem je diskutovat existenci zařízení, které by umožňovalo automaticky rozhodovat, které písmeno je na destičce vyobrazeno. Situace je zde totiž komplikována tím, že různí lidé píší např. písmeno *A* různě a dokonce ani týž člověk nenapíše dvakrát za sebou dvě stejná písmena *A*. Zařízení, které chceme navrhnout, musí především „umět číst" napsaná písmena. Každé písmeno na destičce je zobrazeno vlastně tím, že některé body na destičce jsou bílé (leží na nich vrstva křídy), ostatní jsou černé. Dokonalé zařízení by tedy muselo reagovat na jednotlivé body destičky, což je



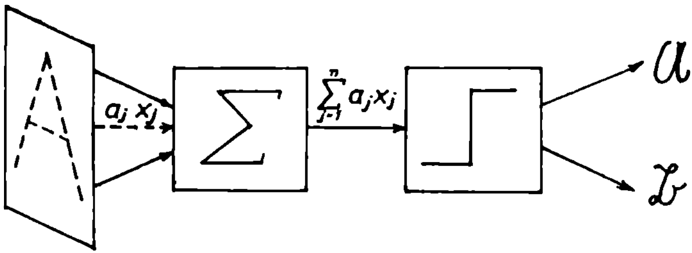
Obr. 7.

ovšem neuskutečnitelný požadavek, odporující základním fyzikálním faktům.

Abychom nalezli východisko z této situace, rozdělíme obdélníkovou tabulku na konečný počet oblastí, označených řekněme $O_1, O_2, \ldots, O_n$ (viz obr. 7.). Nyní každému objektu na destičce přiřadíme jistou podmnožinu množiny $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$, a sice množinu těch oblastí, jejichž vnitřkem prochází čára objektu. Dále předpokládáme, že oblasti O_j odpovídá jisté zařízení, které vytváří signál hodnoty a_j, jestliže vnitřkem oblasti prochází čára písmene, a vytváří signál nula v opačném případě. Jestliže je tedy na destičce jistý objekt, vznikne jistá množina signálů. Tyto signály, pomocí nichž je objekt zakódován, přicházejí dále do centrálního zařízení, jehož úkolem je provést klasifikaci objektu.

Protože nám jde o pouhé vysvětlení principů, přijmeme dále ještě tento zjednodušující předpoklad: Zařízení bude rozlišovat navzájem pouze dvě třídy objektů, např. typ A od typu B. Nakonec nám tedy zbývá popsat schéma práce centrálního zařízení. Toto zařízení bude sestávat ze dvou „sériově zapojených" částí: *zařízení na sčítání signálů* a *klasifikující zařízení*. Zařízení na sčítání signálů přijímá jednotlivé signály z destičky a na jeho výstupu se objevuje signál, jehož hodnota je rovna součtu hodnot jednotlivých signálů. Klasifikující zařízení srovnává hodnotu signálu-součtu s jistou danou hodnotou a, nazývanou *prahem:* Jestliže hodnota signálu není menší než práh, pak patří objekt do jedné třídy, v opačném případě patří objekt do druhé třídy. Schematicky je popsaný klasifikátor znázorněn na obr. 8.

Nyní napíšeme nerovnosti, popisující funkci klasifikátoru. Za tím účelem oblasti O_j přiřadíme dvouhodnotovou proměnnou x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), přičemž položíme $x_j = 1$, jestliže objekt prochází vnitřkem O_j a $x_j = 0$ v opačném případě. Tímto způsobem je tedy objekt



Obr. 8.

na destičce popsán n-ticí ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Protože zařízení není schopno rozlišit jemnější rozdíly mezi objekty, můžeme jednoduše ztotožnit objekty na destičce s n-ticemi ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Z tohoto důvodu budeme místo „objekt popsaný n-ticí ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)" říkat prostě „objekt ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)". Objekt nyní patří do první třídy, jestliže platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqq a, \tag{39}$$

a patří do druhé třídy, jestliže

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j < a. \tag{40}$$

Popsaný klasifikátor tedy rozdělí danou množinu objektů na dvě třídy.

Nyní budeme zkoumat množinu klasifikátorů popsaného typu při pevně zvoleném rozkladu na systém oblastí $\{O_j\}$, avšak při libovolně volitelných hodnotách vah a_j a prahu a.

Zformulujeme *problém syntézy klasifikátoru*. Je dána jistá množina objektů $\mathfrak{C} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \subset B^n$ (viz str. 64) a její rozklad na dvě podmnožiny:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset.$$

Problém záleží v nalezení vah a_j a prahu a tak, aby odpovídající klasifikátor rozlišoval množinu $\mathfrak{A}$ od $\mathfrak{B}$. (Množina $\mathfrak{C}$ je obvykle vlastní podmnožinou[1]) B^n.)

Je zřejmé, že k řešení posledního problému je nutno řešit soustavu lineárních nerovností (39), (40). My se však — podobně jako v předcházejícím odstavci — omezíme na otázku existence. Z věty 17 předchozího odstavce vyplývá nsáledující

Věta 18. *Klasifikátor (tj. koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ a a) rozlišující dvě třídy objektů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ existuje právě tehdy, jestliže je splněna jedna z těchto dvou podmínek:*

a) alespoň jedna z množin $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ je prázdná,

b) obě dvě množiny jsou neprázdné a platí

$$K(\mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{B}) = \emptyset.$$

---

[1]) Říkáme, že M je vlastní podmnožinou množiny N, jestliže $M \subset N$ a $M \neq N$.

Doufáme, že se nám v tomto odstavci alespoň částečně podařilo ukázat, v čem spočívá problematika rozlišování objektů. Poznamenejme, že celá problematika i metody řešení jsou podstatně složitější. Tak především obvykle jde o rozlišení několika tříd objektů, jak jsme ostatně uváděli na začátku tohoto odstavce. Za druhé v uvažovaném nejjednodušším případě se vytváří prostý součet signálů $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, zatímco v obecném případě se používá i složitějších (nelineárních) závislostí na proměnných x_j, což přirozeně má za následek zvětšení rozlišovacích schopností klasifikátoru.

Nakonec nejdůležitější poznámka. Množina rozlišovaných objektů nebývá zpravidla a priori známa, nebo obsahuje „příliš mnoho" prvků, nebo je složitá apod. V takových případech se k syntéze klasifikátorů obvykle používá metod adaptace (učení). Tyto metody spočívají v tom, že na klasifikátor přichází v nějaké posloupnosti pouze jistá podmnožina „typických" objektů, u nichž je známo předem, do které třídy příslušný objekt patří. Na základě učící posloupnosti objektů se určí parametry klasifikátoru.

Cvičení

Ve cvičeních 1—5 je $x_j \geqq 0$.

1. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqq 3, \\ -3x_1 + 8x_2 &\leqq -5, \\ 3x_1 - 2x_2 &\to \max. \end{aligned}$$

nemá přípustné řešení.

2. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leqq -1, \\ x_1 - x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + x_2 &\to \max \end{aligned}$$

má přípustná řešení a nemá optimální řešení.

3. Bez přímých výpočtů dokažte, že úloha duální k úloze ze cvičení 2 nemá přípustné řešení.

4. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 4, \\ x_3 + x_4 &\leqq 1, \\ x_2 + x_3 &\leqq 1, \\ x_1 + x_3 &\leqq 1, \\ x_3 + x_4 &\leqq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max \end{aligned}$$

má optimální řešení $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

5. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + x_2 &\leqq 5, \\ x_1 - x_2 &\to \max \end{aligned}$$

má optimální řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

6. V odstavci 1.3 jsme definovali pojem konvexní množiny. Nechť K je libovolná konvexní množina obsahující konečnou a neprázdnou množinu bodů M prostoru R^n. Potom platí $K \supset K(M)$ (tento fakt se též někdy vyjadřuje slovně: Konvexní obal je „nejmenší" konvexní množina obsahující danou množinu).

7. a) Určete počet prvků množiny B^n — viz str. 64. (Odpověď: 2^n.) b) Určete počet všech logických funkcí n proměnných. (Odpověď: 2^{2^n}.) (Návod: Všimněte si, že tento počet se rovná počtu prvků množiny B^{2^n}.)

8. (Ilustrace pojmu logické funkce.) Nechť **A, B, C** označují libovolné výroky. Těmto výrokům přiřadíme dvouhodnotové proměnné x_A, x_B, x_C definované takto: $x_A = 1$, jestliže je výrok **A** pravdivý, $x_A = 0$, jestliže je nepravdivý; zcela analogický je význam proměnných x_B a x_C. Nechť nyní výrok **C** vznikne operací disjunkce (logického součtu), symbolicky to zapisujeme **C** = **A** $\vee$ $\vee$ **B**, tj. **C** = **A** $\vee$ **B** je pravdivý právě tehdy, jestliže je pravdivý alespoň jeden z výroků **A** nebo **B**. V tomto

případě je x_C logickou funkcí proměnných x_A a x_B, položme

$$x_C = f_{A \vee B}(x_A, x_B).$$

a) Sestrojte tabulku hodnot funkce $f_{A \vee B}(x_A, x_B)$.
b) Ukažte, že platí

$$x_C = \max(x_A, x_B) = x_A + x_B - x_A x_B.$$

9. Přiřaďme každé uspořádané čtveřici z nul a jedniček $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 2^3 + \xi_2 2^2 + \xi_3 2^1 + \xi_4.$$

Ukažte, že lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic odpovídá rostoucí posloupnosti čísel $d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

10. Uvažujme množinu všech uspořádaných n-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z nul a jedniček. Každé n-tici $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ přiřadíme číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 2^{n-1} + \xi_2 2^{n-2} + \ldots + \xi_n.$$

Na množině všech n-tic definujeme vztah lexikografického uspořádání: Budeme říkat, že n-tice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je před n-ticí $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ a zapíšeme to symbolicky $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, jestliže

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Ukažte způsob konstrukce lexikograficky uspořádané posloupnosti n-tic, analogický popsanému způsobu uspořádání čtveřic.