Algebra, každý začátek je lehký

2. Relace

In: Herbert Kästner (author); Peter Göthner (author); Karel Horák (translator): Algebra, každý začátek je lehký. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 53–88.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404146

2. RELACE

VZTAHY JSOU VŠÍM

2.1 POJEM RELACE

Mnohé příklady seznámí čtenáře s pojmem relace a možnostmi jejího popisu

Objekty, jevy a pojmy se často snažíme pochopit tak, že odhalujeme jejich vztahy k jiným objektům, jevům nebo pojmům; např. „Romeo je zamilován do Julie". Tyto vztahy neboli relace mezi objekty často tvoří v našich znalostech právě to podstatné. Tak např. při axiomatické výstavbě geometrie podle Davida Hilberta[8]) se musíme zříci definice základních pojmů jako bod, přímka, rovina; axiómy, z nichž lze odvodit všechny ostatní pojmy a věty euklidovské geometrie, spočívají spíše ve vztazích mezi těmito základními pojmy.

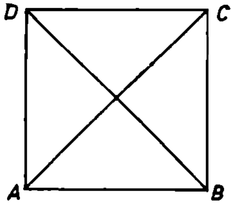
Uveďme teď rozličné příklady:

— Max a Mořic jsou bratři.
— Železo má menší měrnou hustotu než rtuť.
— 4 je dělitel 256, tj. $4|256$.
— Erfurt je od Gothy vzdálen nejvýše 100 km.
— Množina prvočísel je obsažena v množině celých čísel.
— 6 je nesoudělné se 49, tj. $D(6, 49) = 1$.

---

[8]) David Hilbert (1862—1943), německý matematik; přispěl k mnoha oblastem matematiky, např. k teorii čísel, teorii invariantů, teorii algebraických variet, teorii integrálních rovnic, variačnímu počtu, k základům matematiky, ale i k teoretické fyzice. Přesná axiomatická výstavba geometrie je obsahem jeho práce „Die Grundlagen der Geometrie", která vyšla v r. 1899 v nakladatelství Teubner-Verlag.
Rovněž významně přispěl k dalšímu rozvoji matematiky svými slavnými 23 problémy. (Pozn. překl.)

— Z „$ABCD$ je čtverec“ plyne „úhlopříčky $ABCD$ se navzájem půlí“; tj. $ABCD$ čtverec $\Rightarrow$ úhlopříčky $ABCD$ se navzájem půlí (obr. 10).



Obr. 10

— Xantipa je spřízněna se Sokratem.
— 36 je násobek 9.
— „Škola“ stojí v abecedě před „šupinou“.
— 18 má právě tolik dělitelů jako 50.
— 623 dává při dělení třemi stejný zbytek jako 263, tj. $623 \equiv 263 \pmod 3$.
— 623 má stejný ciferný součet jako 263.
— 4 je menší než 256, tj. $4 < 256$.
— Gotthelf, Erich a Herbert Abraham mají stejné příjmení.
— Zlomek $\frac{2}{3}$ dává stejný podíl jako $\frac{18}{27}$, tj. $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$.
— Přímka AB na obr. 10 je rovnoběžná s přímkou CD, tj. $AB \parallel CD$.
— Přímka AC na obr. 10 je kolmá k přímce BD, tj. $AC \perp BD$.
— 2 je prvkem množiny prvočísel.

Pokusme se z těchto příkladů odvodit obecný pojem relace. Nejprve si všimněme, že obecně jsou ve vzájem ném vztahu (např. je dělitel, má menší měrnou hustotu. je vzdálen nejvýše 100 km, stojí v abecedě před, je obsažen v, z ... plyne) vždy dva prvky množiny M (např. množiny přirozených čísel, množiny chemických prvků, množiny měst jedné země, množiny slov českého jazyka, množiny podmnožin reálných čísel, množiny výroků). Říkáme, že prvky množiny M jsou v relaci; tak např. prvky 4 a 256 jsou v relaci „je dělitel". Obecně zřejmě záleží na pořadí prvků; prvky 256 a 4 nejsou v relaci „je dělitel". Dají se tedy prvky $x, y \in M$ v nějaké dané relaci R chápat jako uspořádané dvojice (x, y) (srov. odstavec 1.5) a relaci R v M můžeme charakterizovat jako tu podmnožinu kartézského součinu $M \times M$, jež obsahuje právě všechny uspořádané dvojice (x, y) takové, že x je v relaci R s y. Je-li x s y v relaci R, píšeme $(x, y) \in R$, nebo stručněji xRy. Obráceně určuje každá podmnožina $T \subset M \times M$ relaci R v M předpisem: xRy, právě když $(x, y) \in T$.

Definice 2.1. *Relací R v množině M* rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times M$.

Příklady. Je-li R relace „menší než" v množině M celých čísel od 0 do 5, můžeme R vyjádřit jako podmnožinu $M \times M$:

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

Relace $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ v množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se dá popsat také takto: xRy, právě když $x < y$ a $x|y$. (Srov. popis množiny výčtem jejích prvků, příp. udáním charakteristické vlastnosti!)

Každá podmnožina R součinu $M \times M$ definuje relaci v M, tedy také množiny $R_0 = \emptyset$, $R_t = M \times M$ a $R_i = \{(x, x): x \in M\}$. Relace $R_0 = \emptyset$ se nazývá *nulová relace v M*; v této relaci nejsou žádné dva prvky. $R_t =$

$= M \times M$ se nazývá *totální relace v M*. A konečně relaci R_i říkáme *identita v M* (nebo také *diagonála*), neboť xR_iy platí, právě když $x = y$.

Pohled zpět na odstavec 1.7 ukazuje, že relaci v M můžeme také chápat jako přiřazení z M do M; v tomto smyslu mluvíme pak také o definičním oboru a oboru hodnot relace R ($\mathscr{D}(R)$, resp. $\mathscr{H}(R)$).

Zrovna tak je možné skládat dvě relace jako přiřazení.

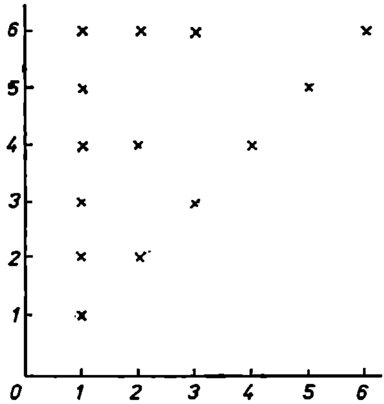
Mnohý čtenář si už jistě všiml, že definice relace D(2.1) se nedá použít na příklad „2 je prvek množiny prvočísel", ačkoli bychom přece jen asi chtěli „je prvek" za relaci považovat. Tato relace ale dává do vztahu prvky množiny A (zde množiny N_0 celých nezáporných čísel) s prvky jiné množiny B (zde potenční množiny množiny N_0, ze které je vzata jako jeden z jejích prvků množina prvočísel). Proto abychom zahrnuli i takové případy, rozšíříme definici relace následovně:

Definice 2.2. *Relace R* mezi množinami A a B je podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Pro takové relace můžeme jako příklad uvést ještě relaci „leží na" mezi množinou A všech bodů v rovině a množinou B všech přímek této roviny.

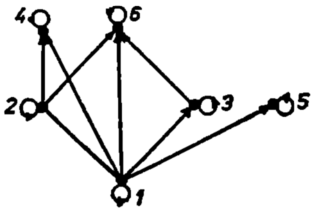
V následujícím ale přece jen zůstaneme u relací v množině M; takové relace můžeme popsat různými způsoby. Je-li množina M konečná, může být relace v M (v principu) dána výčtem uspořádaných dvojic $(x, y) \in M \times M$ patřících do R, např. relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ v množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Uvědomme si však, že relace R v M je množina, totiž podmnožina $M \times M$, takže ji můžeme jako každou množinu také popsat nějakou charakteristickou vlastností, která je splněna právě pro ty uspořádané dvojice ze základní množiny $M \times M$, jež patří do R. Předchozí relace R může být takto charakterizována jako $R = \{(x, y): x, y \in M \text{ a } x|y\}$, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Obr. 11

Protože každou (binární) relaci R v M můžeme také chápat jako přiřazení, můžeme pro znázornění R stejně jako u přiřazení nakreslit graf relace, jak je vidět na obr. 11 opět pro relaci „je dělitel" v množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Stejně dospějeme i k uzlovému grafu relace; je ovšem běžné pro relace v M nekreslit oba exempláře oblasti roviny odpovídající množině M, nýbrž jen jeden, jak vidíme na obr. 12 opět pro shora uvedenou relaci. Pro každé x takové, že xRx, se pak musí namalovat šipka z P_x do P_x, což naznačíme malou „kruhovou" šipkou okolo P_x. Zřejmě závisí na relaci a na účelu, jakému znázornění dáme přednost; v našem příkladu uzlový graf jistě dává názornější představu o uvedené relaci. Naopak dříve zavedené relace R_0 (nulová relace), R_t (totální relace) a R_i (identita na M) mají zvlášť přehledný kartézský graf. Jak vypadají? Např. graf relace R_i objasňuje, proč se této relaci také říká „diagonála M".



Obr. 12

V našich úvahách jsme relací vždy rozuměli množinu uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in M$ v případě relace v M, resp. $x \in A$, $y \in B$ v případě relace mezi A a B. Chceme-li ale např. relaci „býti mezi" (reálné číslo x leží mezi reálnými čísly y a z) podřídit tomuto množinově teoretickému nazírání, musíme — vzhledem ke třem proměnným x, y, z — přejít k uspořádaným trojicím (x, y, z), tedy k podmnožinám kartézského součinu $M \times M \times M$. Takovým relacím říkáme *ternární relace.* Obecně rozumíme k-nární relací v M podmnožinu kartézského součinu $M \times M \times \ldots \times M$. V této kapitole jsme se tedy zabývali jen binárními relacemi. Ani zde uvedený k-násobný kartézský součin nemusí mít samozřejmě všechny činitele vesměs rovné M. Bez tohoto omezení pak dalším zobecněním dojdeme k pojmu k-nární relace v $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$. Platí-li $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R$, říkáme, že k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je v k-nární relaci R.

2.2 VLASTNOSTI RELACÍ

Tato kapitola se zabývá vlastnostmi relací, jako je např. reflexivita, symetrie, tranzitivita; položíme si otázku, zda z některých těchto vlastností neplynou ostatní

Skutečnost, že Max je bratr Mořice, jsme vyjádřili jako „Max a Mořic jsou bratři". V této formulaci se už ale skrývá další informace o relaci „je bratr". To je nejlépe patrné, pokusíme-li se přejít od výroku „4 je dělitel 256" k formulaci „4 a 256 jsou dělitelé". Poslední výrok je podle toho, jaký máme vztah k jazyku, nesmyslný anebo polopravdivý. Pokus o přeformulování nemohl být úspěšný proto, že v uvedeném příkladu záleží na pořadí prvků 4 a 256, zatímco v prvním příkladu pořadí nehraje žádnou roli: je-li Max bratr Mořice, je také Mořic bratr Maxe. Relace s touto vlastností se nazývají *symetrické*. Přitom mlčky předpokládáme, že M je neprázdná.

Definice 2.3. Relace R v M se nazývá *symetrická*, právě když pro všechna $x, y \in M$, pro něž platí xRy, je také yRx; jinak řečeno: xRy a yRx platí vždy současně.

Příklady. (1) Relace „je rovnoběžný s" v množině přímek nějaké roviny je symetrická, neboť je-li $g \parallel h$, je také $h \parallel g$. Můžeme tedy také říci, že obě přímky g a h jsou navzájem rovnoběžné.

(2) Relace „dává při dělení třemi stejný zbytek" je symetrická, neboť $a \equiv b \pmod 3$ znamená $a = b + 3c$, c celé, odkud ihned plyne $b = a + 3(-c)$, tedy $b \equiv a \pmod 3$, neboť $(-c)$ je stejně jako c celé číslo.

(3) Relace „je zamilován(a) do" uvažovaná v dostatečně velké množině lidí je zjevně nesymetrická, protože

xRy ne vždy znamená *yRx*; právě to bývá příčinou nešťastné lásky.

(4) Relace „z ... plyne" definovaná v množině výroků, v řeči jinak formulovaná jako „jestliže ..., pak", kterou budeme v dalším nazývat vždy implikace, není symetrická, jak poznáme z následujícího protipříkladu: Výrok „*ABCD* je čtverec $\Rightarrow$ úhlopříčky *ABCD* se navzájem půlí" je správný. Naproti tomu jeho obrácení „úhlopříčky *ABCD* se půlí $\Rightarrow$ *ABCD* je čtverec" správné není, neboť i v obdélníku se úhlopříčky půlí.

Tento příklad obrací naši pozornost ještě jednou na ono místo v definici symetrie, na kterém se říká, že spolu s *xRy* má zároveň platit *yRx*. Je-li tento požadavek jen jednou porušen, není *R* symetrická. Tato poznámka je důležitá v souvislosti s implikací, protože bychom přirozeně mohli najít dostatečně mnoho příkladů výroků zaměnitelných vzhledem k implikaci, např. „celé číslo *c* je dělitelné třemi $\Rightarrow$ ciferný součet čísla *c* je dělitelný třemi", přičemž je správná i obrácená implikace. V takových případech místo „$\Rightarrow$" píšeme oboustrannou šipku „$\Leftrightarrow$", kterou čteme jako „je logicky ekvivalentní" nebo „tehdy a jen tehdy, když", anebo „právě když". *Logická ekvivalence* je tudíž symetrická relace a mohli bychom — vrátíme-li se k předchozímu příkladu —, říci: „Dělitelnost čísla třemi je ekvivalentní dělitelnosti jeho ciferného součtu třemi". Zřejmě je pro použití matematické věty velmi důležité vědět, zda má logickou strukturu implikace nebo ekvivalence.

(5) Zatímco implikace se ukázala jako nesymetrická relace, tj. jako taková, v níž existují jak dvojice (x, y), pro něž zároveň platí *xRy* i *yRx*, tak i dvojice, pro něž je sice splněno *xRy*, ale ne *yRx*, poskytuje relace „menší než" příklad relace tzv. *asymetrické*, v níž *xRy* a *yRx* není nikdy splněno současně. Přejdeme-li od relace „$<$" k relaci „$\leqq$", pak existují dvojice prvků (x, y), pro

něž platí jak $x \leqq y$, tak i $y \leqq x$, totiž právě ty dvojice, kde $x = y$. Relace R s vlastností, že z xRy a yRx plyne vždy $x = y$, se nazývají *antisymetrické*, taková je např. relace „je dělitel“ v množině celých kladných čísel. Rozmyslete si, jak se symetrická relace pozná podle svého grafu, resp. uzlového grafu.

V našem úvodním příkladu se také vyskytla formulace „Gotthelf, Erich a Herbert Abraham mají stejné příjmení“, která — to už teď víme —, může být správná, jen když je relace „má stejné příjmení jako“ symetrická. Tak tomu vskutku je. Ale to, že tu spolu stojí víc než dva prvky se společným příznakem, v tom hraje roli ještě další vlastnost relace. Uvažujme rovněž symetrickou relaci „je vzdálen nejvýše 100 km od“. Ačkoli jsou teď oba výroky „Gotha je vzdálena nejvýše 100 km od Erfurtu“ a „Erfurt je vzdálen nejvýše 100 km od Merseburgu“ správné, nemůžeme říci, že „Erfurt, Gotha a Merseburg jsou od sebe navzájem vzdáleny nejvýše 100 km“, neboť vzdálenost Gotha — Merseburg je větší než 100 km. Uvedená relace R se tedy nedá „přenášet“, nemá vlastnost, která se nazývá *tranzitivita:* Jestliže xRy a yRz, pak také xRz.

Definice 2.4. Relace R v M se nazývá *tranzitivní*, právě když pro všechna $x, y, z \in M$, pro něž platí xRy a yRz, je také xRz; jinak řečeno: Z xRy a yRz vždy plyne xRz.

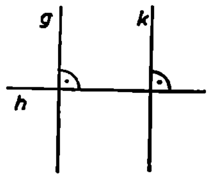
Příklady. (1) Relace „je menší než“ v Z je tranzitivní, neboť z $x < y$ a $y < z$ plyne ihned $x < z$. To je zároveň příkladem relace, která je asymetrická, ale tranzitivní.

(2) Relace „je dělitel“ v $\mathsf{N}_0 \setminus \{0\}$ je tranzitivní. Platí-li totiž $a \mid b$ a $b \mid c$, takže podle definice relace dělitelnosti existují přirozená čísla s a t taková, že $b = sa$ a $c = tb$, odkud plyne $c = t(sa) = (ts)\,a$. Protože ts je celé kladné číslo, dostáváme odtud $a \mid c$. Tato relace tedy poskytuje příklad antisymetrické a tranzitivní relace.

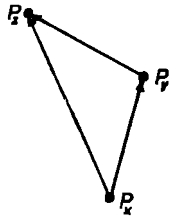
(3) Důležitým příkladem nesymetrické, ale tranzitivní relace je implikace. Vždyť na tranzitivitě této relace podstatně závisí matematický úsudek.

(4) Symetrická relace „dává při dělení třemi stejný zbytek“ je také tranzitivní: Z $a \equiv b$ (mod 3) a $b \equiv c$ (mod 3), tj. $a = b + 3g$ a $b = c + 3h$ pro g, h celá, plyne $a = (c + 3h) + 3g = c + 3(h + g)$, tedy $a \equiv c$ (mod 3), neboť spolu s g a h je i $h + g$ celé číslo.

(5) Relace „je kolmý na“ v množině přímek jedné roviny je symetrická, jak ihned zjistíme, ale není tranzitivní (obr. 13).



Obr. 13



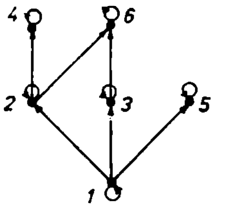
Obr. 14

(6) Příklad relace, jež není ani symetrická, ani tranzitivní, najdeme třeba v relaci „je první derivací“ v množině libovolněkrát derivovatelných funkcí nebo v relaci „je strýc“, o relaci „je zamilován do“ ani nemluvě.

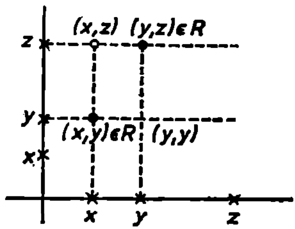
Velmi zřetelně se tranzitivita odráží v uzlovém grafu relace: S libovolnými dvěma na sebe „navazujícími“ šipkami z P_x do P_y a z P_y do P_z patří do grafu také „přemosťující“ šipka z P_x do P_z (obr. 14). Můžeme se tedy dohodnout na zjednodušení uzlového grafu tranzitivní relace, při němž odstraníme šipku z P_x do P_z, jestliže graf už obsahuje dvě šipky (z P_x do P_y a z P_y do P_z), jejichž přemostěním je šipka z P_x do P_z. Uzlový graf tranzitivní relace „je dělitel“ v $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

na obr. 12 se podle této úmluvy zjednoduší na graf znázorněný na obr. 15.

Obr. 16 ilustruje, jak lze tranzitivitu poznat na kartézském grafu relace R: Leží-li jeden ze čtyř vrcholů obdélníku se stranami rovnoběžnými s osami na diagonále a oba jeho sousední vrcholy jsou body grafu relace R, pak do grafu R musí vždy patřit i čtvrtý vrchol. Podle obr. 16 pro to snadno najdete odůvodnění.



Obr. 15



Obr. 16

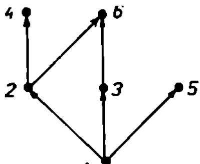
V matematice se často užívají relace k tomu, abychom rozdělili prvky nějaké množiny M do tříd rovnocenných prvků (srov. odstavec 2.3). Tak např. v euklidovské geometrii rozlišujeme shodné útvary, ale díváme se na ně jako na „rovnocenné"; právě tak jako na zlomky, které se dají na sebe převést krácením nebo rozšířením. Přirozeně, taková relace rovnocennosti v sobě zahrnuje i obvyklou rovnost, tj. každý prvek množiny M je sám sobě rovnocenný. Relace R v M, která má být relací rovnocennosti, proto musí mít vlastnost xRx pro všechna $x \in M$. Tato vlastnost se nazývá *reflexivita.*

Definice 2.5. Relace R v M se nazývá *reflexívní*, právě když pro všechna $x \in M$ platí xRx. Není-li naopak xRx splněno pro žádné $x \in M$, nazývá se R *ireflexívní.*

Okamžitě zjistíme, že relace „je dělitel“, „je vzdálen nejvýše 100 km od“, „má právě tolik dělitelů jako“, „dává při dělení třemi stejný zbytek jako“, „dávají stejný podíl“, „je rovnoběžný s“ stejně jako implikace jsou reflexívní. Ireflexívní jsou naproti tomu relace „je lehčí než“, „stojí v abecedě před“, „je menší než“, „je kolmý k“. Relace $R = \{(x, y): xy$ je liché$\}$ v množině celých čísel není reflexívní, neboť xRx zřejmě platí jen pro lichá x. Tento příklad mimo jiné ukazuje, že je třeba rozlišovat „ireflexívní“ a „nereflexívní“. Podobně relace „je zamilován do“ není reflexívní, ale ani ireflexívní, neboť vztah xRx sice obecně neplatí, ale je správný pro $x =$ Narcis[9]).

Do grafu reflexívní relace patří všechny body (x, x) diagonály, a obráceně, graf s touto vlastností je grafem reflexívní relace.

U uzlového grafu jsme se už dohodli, že platnost vztahu xRx budeme vyjadřovat malou kruhovou šipkou okolo bodu P_x přiřazeného x. Je-li R reflexívní, pak každému bodu z M přísluší kruhová šipka, a tak můžeme graf dále zjednodušit smluveným odstraněním těchto kruhových šipek. Pro relaci „je dělitel“ v $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak dospějeme od grafu na obr. 15 ke grafu na obr. 17.



Obr. 17

[9]) Narcis: v řecké báji krásný jinoch, který za to, že pohrdl láskou nymfy Échy, byl potrestán tím, že se zamiloval do svého vlastního obrazu.

Budeme nyní zkoumat, zda dosud uvažované vlastnosti relací jsou navzájem nezávislé, anebo z některé z těchto vlastností nutně plyne jiná.

Nejdříve ukažme, že tři „základní vlastnosti“, reflexivita, symetrie a tranzitivita, jsou navzájem nezávislé, neboť z libovolných dvou těchto vlastností nemusí nutně plynout ta třetí. Mezi našimi příklady snadno najdete relace, jež jsou

— reflexívní a symetrické, ale ne tranzitivní;
— reflexívní a tranzitivní, ale ne symetrické;
— symetrické a tranzitivní, ale ne reflexívní.

Tady se také vyplatí důkladněji si rozmyslet logickou strukturu důkazu: Abychom dokázali tvrzení A (nezávislost tří základních vlastností), ukážeme, že není správný výrok „ne A“. Tento nepřímý důkaz bude proveden, jestliže ke každému možnému případu závislosti oněch tří vlastností udáme protipříklad.

Naproti tomu jiné vlastnosti relace mohou být navzájem zcela závislé, jak ukazuje následující věta.

Věta 2.1. *Pro libovolnou relaci R v M platí:*
a) R je *asymetrická* $\Rightarrow$ *R je ireflexívní;*
b) *R je ireflexívní a tranzitivní* $\Rightarrow$ *R je asymetrická.*

Důkaz. (a) Protože R je asymetrická, neplatí xRy a yRx zároveň, neplatí tedy zároveň ani pro $x = y$, to ale znamená, že xRx není splněno pro žádné $x \in M$. Je tedy R ireflexívní.

(b) K důkazu asymetrie R je potřeba ukázat, že vztahy xRy a yRx nenastanou současně. Důkaz provedeme nepřímo tak, že z předpokladu existence dvojice (x_0, y_0), pro niž je zároveň x_0Ry_0 i y_0Rx_0, dojdeme ke sporu s jedním z předpokladů tvrzení. Z platnosti vztahů x_0Ry_0 a y_0Rx_0 však plyne díky předpokládané tranzitivitě x_0Rx_0, a to je spor s předpokladem ireflexivity, podle níž nemůže být xRx pro žádný prvek z M. Je tedy náš předpoklad nesprávný, a platí tudíž jeho opak, tj. tvrzení věty, c. b. d.

V matematice se často využívá věty o rovnosti třetímu: „Jsou-li dvě velikosti rovny třetí, tak jsou rovny také navzájem." Ptáme se: Na základě které vlastnosti relace R můžeme tento úsudek použít i na R?

Věta 2.2. *Pro symetrickou a tranzitivní relaci R v M platí: Z xRz a yRz vždy plyne xRy (rovnost třetímu).*

Důkaz. Nechť x, y, z jsou libovolné prvky M takové, že xRz a yRz. Díky symetrii R můžeme od (xRz a yRz) přejít k výroku (xRz a zRy), odkud díky tranzitivitě R hned plyne xRy, c. b. d.

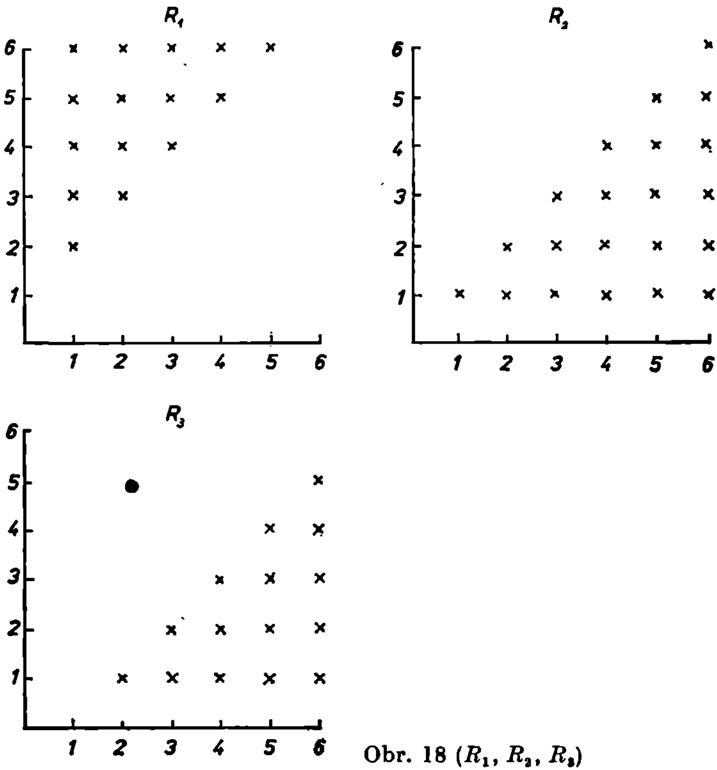
Obráceně plyne také symetrie a tranzitivita z rovnosti třetímu, ovšem jen pro reflexívní relace. To nahlédneme takto: Předpokládejme, že (xRz a yRz) $\Rightarrow xRy$. Pro $z = x$ odtud dostaneme (xRx a yRx) $\Rightarrow xRy$. A protože díky předpokládané reflexivitě platí xRx pro všechna $x \in M$, uvedená implikace se zjednoduší na $yRx \Rightarrow xRy$, to ale znamená, že R je symetrická. R je rovněž tranzitivní, neboť z (xRy a yRz) plyne díky shora dokázané symetrii (xRy a zRy), takže na základě předpokládané rovnosti třetímu odtud plyne xRz.

Nakonec se ještě vyplatí podívat se trochu na zřejmou příbuznost relací „je menší než", „není menší než", „je větší než", případně relací „$=$" a „$\neq$" nebo relací „je dělitel" a „je násobek".

Znázorněme relace

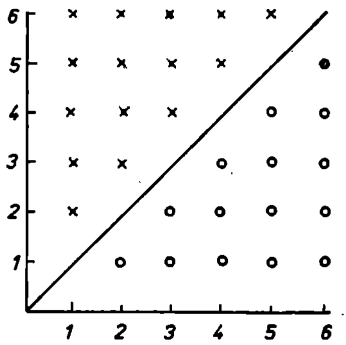
$R_1 = \{(x, y)$: x je menší než $y\} = \{(x, y): x < y\}$,
$R_2 = \{(x, y)$: x není menší než $y\} = \{(x, y): x \geqq y\}$,
$R_3 = \{(x, y)$: x je větší než $y\} = \{(x, y): x > y\}$

v množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kartézským grafem (obr. 18). Zjistíme, že z 36 prvků $M \times M$ patří do R_2 právě ty, které nepatří do R_1, a naopak do R_1 patří právě ty, jež nepatří do R_2, což lze zjistit už ze slovního vyjádření relací. Z hlediska teorie množin je tedy R_2 doplňkem množiny R_1 vzhledem k základní množině $M \times M$ (srov. kapitolu 1). Analogicky k tomuto ozna-



Obr. 18 (R_1, R_2, R_3)

čení se relace $R' = \{(x, y): (x, y) \in M \times M$ a $(x, y) \notin R\}$ příslušná k relaci R (v M) nazývá *doplňková relace k R*. Z této definice hned plyne, že doplňková relace k relaci doplňkové k R je zase relace R; píšeme $(R')' = R$. Zobrazení, které každé relaci přiřazuje její doplňkovou relaci, je tudíž involutorní, takže relace R a R' můžeme nazývat *navzájem doplňkové*.



Obr. 19

Na obr. 19 jsou sestrojeny grafy relací R_1 a R_3 ve stejné soustavě souřadnic; body patřící do R_1 jsou označeny křížky, body patřící do R_3 kroužky. Je vidět, že grafy R_1 a R_3 leží souměrně podle diagonály: bod (x, y) patří do grafu R_3, právě když bod (y, x) patří do grafu R_1. Podíváme-li se na relaci v M jako na přiřazení z M do M, je R_3 právě inverzní přiřazení k R_1, a naopak. Můžeme proto zavést pojem relace R^{-1} inverzní k relaci R v M prostřednictvím definice:

$$R^{-1} = \{(x, y): (x, y) \in M \times M \text{ a } (y, x) \in R\}.$$

Stejně jako pro přiřazení, platí také zde přirozeně

$(R^{-1})^{-1} = R$; můžeme tudíž R a R^{-1} označovat jako *navzájem inverzní*. Další příklad dvou navzájem inverzních relací najdeme v relaci „je dělitel" a „je násobek", neboť $x \mid y$ znamená $y = cx$, c celé, to ale znamená, že y je násobek x, a obráceně.

Zodpovězení zajímavé otázky, jaké relace mají vlastnost $R = R^{-1}$, přenecháváme čtenáři; dostane se tak námi už studovaná třída relací, které se tudíž dají charakterizovat i rovností $R = R^{-1}$.

Na závěr ještě uvážíme, které vlastnosti relace R se přenášejí na R^{-1}, případně R'.

Věta 2.3. (1) *Reflexivita, ireflexivita, symetrie, asymetrie, antisymetrie a tranzitivita se přenášejí z R na R^{-1}.*
(2) *Při přechodu od R k R' se přenáší symetrie, zatímco reflexivita přechází v ireflexivitu, a naopak.*

Důkaz. Tvrzení spojuje dohromady devět jednotlivých výroků (které?) Všechny důkazy probíhají podle stejného schématu, takže se zde spokojíme s jedním vzorem. Ostatní si rozmyslete jako cvičení.

Nechť R je tranzitivní, ukážeme tranzitivitu R^{-1}. Je-li (x, y), $(y, z) \in R^{-1}$, je (y, x), $(z, y) \in R$. Protože R je tranzitivní, plyne odtud $(z, x) \in R$, takže $(x, z) \in R^{-1}$, c. b. d.

Přenesení symetrie z R na R' ukážeme nepřímo. Kdyby R' nebyla symetrická, existovala by alespoň jedna dvojice (x_0, y_0) taková, že $(x_0, y_0) \in R'$, ale $(y_0, x_0) \notin$ $\notin R'$. Z definice doplňkové relace plyne, že pak $(y_0, x_0) \in R$, ale díky symetrii R odtud dostáváme $(x_0, y_0) \in R$, což je ve sporu s předpokladem, že $(x_0, y_0) \in R'$. Je tedy R' spolu s R také symetrická, c. b. d.

2.3 RELACE EKVIVALENCE

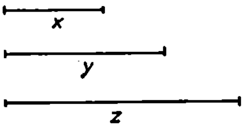
Čtenář se seznámí s jedním ze základních pojmů matematiky, s pojmem ekvivalence v M a s jeho souvislostí s rozklady M

„Rovný rovného si hledá", říkává nesouhlasně teta Herma, když chuligán Mike odvádí svého kumpána Freda ke každovečerním toulkám. Přitom Mike a Fred byli všechno možné, jen ne stejní; Mike byl malý a rezavý, Fred zas kudrnatý černovlasý atlet, a o dva roky mladší než Mike. Je přirozeně jasné, že teta mínila své úsloví docela jinak. Použije-li někdo toto úsloví, užívá slovo „rovný" ne ve smyslu absolutní identity, podle níž je věc rovna jen sama sobě, nýbrž v rozšířeném smyslu „rovnocennosti" neboli „rovnosti vzhledem k jednomu či více daným příznakům". Dvě věci, které se vzhledem k nějakému příznaku rovnají, i když jinak mohou být zcela rozdílné, nazýváme často ekvivalentní vzhledem k tomuto příznaku.

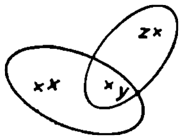
Při rozdávání učebnic na nový školní rok se na všechny žáky hledí jako na „rovné", patří-li do téhož ročníku, neboť dostávají stejné knihy. V tomto smyslu existuje jen 10, resp. 12 různých skupin žáků.

Pro upevnění pojmu „barva" dostávají děti v mateřské škole úlohu rozdělit různé předměty podle barev. Přitom se musí naučit nebrat zřetel na tvar, funkci a materiál předmětu a jako klasifikačního příznaku používat jen jeho barvu. Tak bude množina tříděných předmětů rozložena do tříd objektů stejné barvy (srov. odstavec 1.7). Jiný klasifikační princip může přirozeně vést ke zcela jinému rozkladu téže základní množiny. Máme-li např. dřevěné tyčky různých barev, délek a tvarů průřezu, je zpočátku pro děti obtížné přejít od jednoho rozkladu k jinému. Aby mohlo takový rozklad provést, musí mít dítě schopnost zjistit u každých dvou objektů, zda jsou v relaci „rovný vzhledem k uvedenému příznaku“, nebo ne.

Zřejmě existuje užší souvislost mezi rozkladem množiny M a „klasifikačním principem“, který takový rozklad vyvolává. Příklad relace „je nejvýše o 1 cm delší než“ v množině dřevěných tyček ale ukazuje, že ne každou relaci můžeme použít jako klasifikační princip.



Obr. 20



Obr. 21

Obr. 20 ukazuje, že vzhledem k této relaci jak x a y, tak i y a z leží ve stejné třídě, ne ale x a z; tj. třídy K_x a K_z nejsou ani identické (neboť $x \in K_x$, ale $x \notin K_z$), ani disjunktní (neboť $y \in K_x \cap K_z$). To nás přivádí k tomu, abychom se zabývali otázkou položenou už v závěru odstavce 1.7, totiž jaké vlastnosti musí mít relace R v M, aby vznikl rozklad M. Uvažujme proto nějaký rozklad $\mathfrak{Z}$ množiny M a relaci R v M takovou, že xRy, právě když x leží v téže třídě rozkladu jako y. Zřejmě je R reflexívní, neboť především leží každé $x \in M$ alespoň v jedné třídě rozkladu, a pak — triviálně — v téže třídě jako x. Leží-li x v téže třídě jako y, leží také y v téže třídě jako x, tj. spolu s xRy platí i yRx. Je tedy R symetrická. Konečně je R tranzitivní, neboť leží-li x v téže třídě jako y a y v téže třídě jako z, musí také x a z ležet v této třídě. Přitom jsme podstatně použili disjunktnost tříd; jinak by také mohl nastat případ zachycený na obr. 21, který nedovoluje závěr „x leží v téže třídě jako z“.

Naše úvahy ukázaly, že každý rozklad M vede k definici reflexívní, symetrické a tranzitivní relace R v M. Než ukážeme, že také obráceně každá taková relace v M dává rozklad M, relaci s těmito vlastnostmi pojmenujeme.

Definice 2.6. Relace R v množině M se nazývá relace *ekvivalence v M*, právě když je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Nyní se budeme věnovat hlavní větě o relacích ekvivalence, která popisuje souvislost mezi rozklady množiny M a v M definovanými relacemi ekvivalence.

Věta 2.4. (1) *Každá relace ekvivalence R v M dává rozklad M.*
(2) *Každý rozklad $\mathfrak{Z}$ množiny M můžeme dostat z relace ekvivalence v M.*

Než přistoupíme k důkazu této věty, chtěli bychom zjistit spojitost mezi relací ekvivalence a rozkladem. Nechť $M = \mathsf{N}$ je množina přirozených čísel a relace R v N nechť je definována takto: xRy, právě když se x a y liší nejvýše poslední číslicí. R je relace ekvivalence, jak hned zjistíme ověřením všech tří vlastností — reflexivity, symetrie a tranzitivity. Abychom viděli, na jaké třídy vzhledem k R se N rozloží, určíme ke každému $x \in \mathsf{N}$ množinu K_x všech přirozených čísel, která jsou s x v relaci R. Vezmeme-li např. $x = 561$, sestává K_{561} ze všech těch přirozených čísel, která se liší od 561 nejvýše poslední číslicí, tj. $K_{561} = \{560, 561, 562, \ldots, 569\}$. Na tomto příkladě hned zjistíme, že relace ekvivalence R rozděluje N na „desítky". Je také zřejmé, že je to rozklad N ve smyslu odstavce 1.7, neboť díky $x \in K_x$ patří každé přirozené číslo x do nějaké třídy a žádná třída není prázdná. Musíme tedy ještě uvážit, že dvě třídy K_x a K_y mohou být jen totožné nebo disjunktní. První případ pak nastane určitě tehdy, když se x a y liší pouze poslední číslicí; např. je zřejmé $K_{561} = K_{568}$. Předpokládejme, že K_x a K_y nejsou disjunktní, mají tedy alespoň jeden prvek z společný. Pak by se lišilo jak z od x, tak i z od y nejvýše na posledním místě, tj. xRz a yRz. Protože R je relace ekvivalence, plyne odtud xRy, tj. také x a y se liší nejvýše na posledním místě. Je tedy $K_x = K_y$, což je zde díky jednoduchosti uvažované relace vidět hned, obecně to ale musíme dokazovat. Ukázali jsme tak, že nedisjunktní třídy jsou totožné, musí tedy být různé třídy disjunktní.

Relace ekvivalence R nás tedy vskutku přivedla k rozkladu N na třídy. Vyjdeme-li naopak z rozkladu N, třeba z rozkladu na „desítky", a definujeme-li relaci R v N tak, že xRy, právě když x a y leží v téže třídě rozkladu (tj. v téže „desítce"), zjistíme, že R je relace ekvivalence. Nyní se můžeme opět nechat přivést k rozkladu N, jak jsme vysvětlili předtím, a v našem příkladu je jisté, že zas dostaneme výchozí rozklad N. Po těchto přípravách nebude nyní těžké sledovat důkaz V(2.4).

Důkaz (1). Ke každému $x \in M$ určíme množinu K_x všech prvků $y \in M$, které jsou s x v relaci R, přesněji $K_x = \{y: y \in M \text{ a } xRy\}$, a nazveme ji — poněkud předčasně — třída určená x. Přirozeně se lze domnívat, že souhrn všech těchto tříd dává rozklad M. Na důkaz ověřme tři vlastnosti rozkladu (srov. odstavec 1.7), vždy za předpokladu, že R je relace ekvivalence.

(a) Každé $x \in M$ patří do jedné třídy: protože R jako relace ekvivalence je speciálně reflexívní, platí xRx pro všechna $x \in M$, tj. $x \in K_x$ pro každé $x \in M$.

(b) Dvě různé třídy jsou disjunktní: Ukážeme, že dvě třídy, které nejsou disjunktní, musí být totožné.

1. krok: Nejsou-li K_x a K_y disjunktní, tak existuje alespoň jeden prvek $u \in K_x \cap K_y$. Pak platí $u \in K_x$ a $u \in K_y$, tedy podle definice tříd xRu a yRu. Díky symetrii R můžeme z (xRu a yRu) odvodit (xRu a uRy) a vzhledem k tranzitivitě R plyne odtud ihned xRy. Výsledek: nejsou-li K_x a K_y disjunktní, platí xRy,
2. krok: Abychom nyní ukázali $K_x = K_y$, dokažme, že každý prvek x' z K_x je také prvek z K_y, a obráceně, každý prvek y' z K_y je také prvek z K_x. Nechť nejdříve $x' \in K_x$, tj. xRx'. Podle 1. kroku platí xRy nebo, protože R je symetrická, také yRx, což spolu s xRx' dává yRx', tedy $x' \in K_y$. Je tudíž $K_x \subset K_y$. Je-li $y' \in K_y$, tj. yRy', můžeme z xRy (1. krok) díky tranzitivnosti R odvodit xRy', tj. $y' \in K_x$; je tedy také $K_y \subset K_x$, c. b. d.
(c) Žádná ze tříd není prázdná, protože $x \in K_x$ pro všechna $x \in M$.

Dokázali jsme tak, že každá relace ekvivalence R v M dává rozklad M, jehož třídami jsou podmnožiny $K_x = \{y: y \in M \text{ a } xRy\}$. K_x se proto nazývá třídou ekvivalence, resp. zbytkovou třídou x vzhledem k R, a množině $\{K_x\}_{x \in M}$ všech tříd ekvivalence říkáme *podílová množina M podle R*, stručně *podíl M podle R*, nebo *faktorová množina M podle R*; píšeme M/R. Protože každá třída ekvivalence je už jednoznačně určena svým libovolným prvkem, může každý prvek jako reprezentant zastupovat celou třídu. Vezmeme-li z každé třídy ekvivalence právě jednoho reprezentanta, dostaneme systém reprerentantů M/R.

Důkaz (2). Už prve jsme si rozmysleli, že každý rozklad M poskytuje příležitost definovat relaci ekvivalence R. Přitom platí xRy, právě když x patří do stejné třídy rozkladu jako y. Nyní se dá očekávat, že rozklad M, který dostaneme z R podle (1), bude opět počáteční rozklad $\mathfrak{Z}$ (a ne nějaký jiný rozklad $\mathfrak{Z}'$ množiny M).

Máme tedy ukázat, že $M/R = \mathfrak{Z}$, přičemž M/R sestává z tříd $K_x = \{y: y \in M \text{ a } xRy\}$. Označíme-li ty $\mathfrak{Z}$-třídy, které obsahují prvek $x \in M$, jako $K_{\mathfrak{Z}}(x)$, platí:

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{Z}}(x) &= \{y: y \in M \text{ a } y \text{ patří do stejné } \mathfrak{Z}\text{-třídy jako } x\} \\ &= \{y: y \in M \text{ a } x \text{ patří do stejné } \mathfrak{Z}\text{-třídy jako } y\} \\ &= \{y: y \in M \text{ a } xRy\} \text{ podle předchozí definice } R \\ &= K_x. \end{aligned}$$

$\mathfrak{Z}$-třída obsahující x tedy splývá pro každé $x \in M$ s M/R — třídou obsahující x, tj. rozklady $\mathfrak{Z}$ a M/R se skládají z týchž tříd. Platí tudíž, jak tvrdí věta, $\mathfrak{Z} = M/R$ a tím je náš důkaz dokončen.

Větu (2.4) můžeme také interpretovat takto: Mezi relacemi ekvivalence v množině M a rozklady M je vzájemně jednoznačné zobrazení; pro každou relaci ekvivalence R v M je množina tříd ekvivalence rozklad M a ke každému rozkladu M existuje relace ekvivalence v M, jejíž třídy ekvivalence jsou třídami tohoto rozkladu.

Relace ekvivalence jsou proto tak důležité, že tvoří základ každého (matematického) procesu abstrakce: Množina se vzhledem k relaci ekvivalence rozpadá na třídy prvků, jež jsou totožné vzhledem k jistému příznaku, a abstrahuje se od všech ostatních vlastností prvků, které pro existenci či neexistenci relace mezi libovolnými dvěma z nich nemají význam. Pak se na samotné třídy díváme jako na nové objekty, tj. přejdeme k podílové množině M/R. Podívejme se na několik příkladů:

(1) Obvyklá rovnost, třeba v množině celých čísel, je přirozeně relace ekvivalence, totiž už dříve zmíněná identita R_i, neboť je reflexívní, symetrická a tranzitivní. Není ostatně příliš zajímavá, protože každá třída ekvivalence sestává jen z jednoho prvku a podílová množina je totožná s výchozí množinou. Identita je jaksi „nej-

jemnější“ relace ekvivalence, při ní žádné dva různé prvky nepadnou do téže třídy; neexistuje jemnější rozdělení M na třídy. „Nejhrubší“ relace ekvivalence je naproti tomu zřejmě ta, při níž všechny prvky z M padnou do téže třídy, jestliže tedy existuje pouze jedna třída ekvivalence. Takto musí být každý prvek M ekvivalentní s každým prvkem M, tj. jedná se o totální relaci R_t. V tomto smyslu leží každá jiná relace ekvivalence „mezi“ totální relací a identitou.

(2) V 7. třídě se zavádějí zlomky $\frac{a}{b}$ (a, b nezáporná celá čísla, $b \neq 0$) a mezi nimi se definuje podílová rovnost $=_Q$ vztahem

$$\frac{a}{b} =_Q \frac{c}{d}\,, \text{ právě když } ad = cb\,.$$

Ve škole se proto také říká: „Dva zlomky se rovnají, právě když se mohou převést na sebe krácením nebo rozšířením.“ Tato podílová rovnost je relací ekvivalence, neboť platí:

(a) $\frac{a}{b} =_Q \frac{a}{b}$, protože $ab = ab$; tj. $=_Q$ je reflexívní.

(b) $\frac{a}{b} =_Q \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb \Rightarrow cb = ad$ (neboť rovnost v N_0 je symetrická) $\Rightarrow \frac{c}{d} =_Q \frac{a}{b}$; tj. $=_Q$ je symetrická.

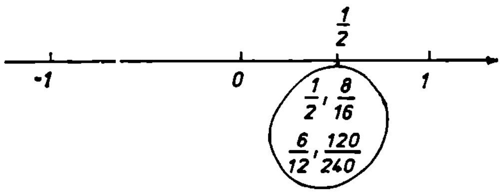
(c) $$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} =_Q \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb \Rightarrow adf = cbf \\ \frac{c}{d} =_Q \frac{e}{f} \Rightarrow cf = ed \Rightarrow cfb = edb \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow adf = edb \Rightarrow af = eb \Rightarrow \frac{a}{b} =_Q \frac{e}{f}\,;$$

tj. $=_Q$ je tranzitivní.

Na kterém místě důkazu používáme tranzitivitu rovnosti v N_0; kde se používá $d \neq 0$?

Množina M všech nezáporných zlomků se tudíž rozpadá vzhledem k relaci $=_Q$ na třídy zlomků s navzájem rovným podílem; podílová množina $M/=_Q$ je známa jako množina nezáporných racionálních čísel. Jako reprezentanta třídy ekvivalence z $M/=_Q$ vezmeme nejlépe zlomek, který se nedá dále krátit. Pro ilustraci tohoto rozkladu na třídy slouží obr. 22.



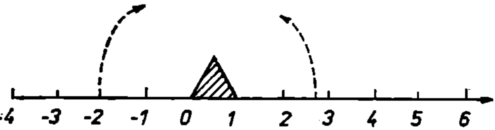
Obr. 22

(3) Další důležitá relace ekvivalence v množině Z celých čísel je kongruence modulo m (rovnost zbytků při dělení číslem m; píšeme $\equiv$ (mod m)). V odstavci 2.2 jsme už ukázali, že relace „dává při dělení třemi týž zbytek" je symetrická, tranzitivní a reflexívní, a na jednotlivých krocích důkazu se zřejmě nic nezmění, když místo s „3" pracujeme s „m". Přesto byste si zde měli tuto úvahu provést ještě jednou. Protože je tedy „$\equiv$" relace ekvivalence, rozpadá se množina Z celých čísel na třídy čísel s navzájem rovnými zbytky a třídy ekvivalence jsou třídy „stejných zbytků", z čehož vzniklo shora uvedené a na obecný případ přenesené označení „zbytková třída". Vezmeme-li $m = 3$, rozpadne se Z na tři třídy, totiž

$K_0 = \{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$
se zbytkem 0,

$$K_1 = \{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$$
se zbytkem 1,

$$K_2 = \{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$$
se zbytkem 2.



Obr. 23

Vytváření zbytkových tříd modulo 3 můžeme znázornit takto (obr. 23): Představme si číselnou osu jako nekonečné vlákno, které budeme „navíjet“ kolem rovnostranného trojúhelníka o straně 1. Ve výchozí pozici zvolme za nulový bod číselné přímky jeden z vrcholů trojúhelníka a navíjejme „kladnou“ a „zápornou“ polopřímku kolem trojúhelníka proti sobě. Pak se ve vrcholech trojúhelníka sejdou právě všechny prvky patřící do téže třídy ekvivalence. Tento názorný výklad se dá přirozeně udělat i pro vytváření zbytkových tříd modulo 4, 5 atd.; stačí místo trojúhelníka vzít pravidelný čtyř- nebo pětiúhelník se stranou délky 1, atd.

(4) Je snadné, zjistit, že relace „rovnoběžný s“ v množině přímek roviny je relací ekvivalence. Množina všech přímek roviny se tedy rozpadá na třídy navzájem rovnoběžných přímek a každé takové třídě říkáme směr. Na tomto příkladu je vidět, jak relace ekvivalence tvoří základ procesu abstrakce, zde pro vznik pojmu směr. Pokuste se naproti tomu objasnit pojem směru popisem!

(5) O soustavě dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými (stejně dobře to ale může být m rovnic s n neznámými) říkáme, že je ekvivalentní s jinou soustavou

lineárních rovnic, právě když souhlasí jejich množiny řešení. Přitom mlčky předpokládáme, že obě soustavy uvažujeme ve stejném definičním oboru — třeba R. Ekvivalence soustav lineárních rovnic je zřejmě relace ekvivalence. Úlohu řešit soustavu lineárních rovnic můžeme také interpretovat takto: Utvořme, vycházejíce z dané soustavy, řetěz soustav lineárních rovnic, v němž je každá soustava ekvivalentní s předchozí, tak, abychom na konci tohoto řetězu dostali co nejjednodušší soustavu, jejíž řešení už můžeme bezprostředně určit. Tranzitivnost ekvivalence pak zaručuje, že také první soustava je s poslední ekvivalentní. Nalezli jsme tedy řešením poslední soustavy i řešení dané soustavy. Předvedeme to na jednoduché soustavě:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 20x + 4y &= 12 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 23x \qquad &= 23 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ 3.1 - 4y &= 11 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ -4y &= 8 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Z poslední soustavy rovnic bezprostředně čteme $L = \{(1; -2)\}$. Našli jsme tak i množinu řešení dané soustavy.

Jediný problém při řešení soustavy lineárních rovnic spočívá zřejmě v tom, že potřebujeme zjistit, které úpravy převádějí soustavu lineárních rovnic na soustavu s ní ekvivalentní, a ukázat, že prostřednictvím takových úprav můžeme libovolnou soustavu převést na jednoduchou konečným počtem kroků. Ve škole se takové ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic probírají: změna pořadí rovnic; násobení jedné rovnice nenulovým číslem; přechod od jedné rovnice k součtu této rovnice s jinou rovnicí soustavy.

Ve větě (2.2) a v připojené poznámce o jejím obrácení jsme viděli, že pro reflexívní relaci platí:

R je symetrická a tranzitivní $\Leftrightarrow$ R splňuje rovnost třetímu. Podle toho můžeme relaci ekvivalence charakterizovat také jako reflexívní relaci, pro niž platí rovnost třetímu.

Doplňující úvahu, jak vypadá graf a uzlový graf relace ekvivalence, přenecháváme čtenáři.

U KUŘAT NEVLÁDNE ŘÁD

2.4 RELACE USPOŘÁDÁNÍ

Čtenář se dozví něco o relacích uspořádání a o jejich snášenlivosti s relacemi ekvivalence

Stejně jako je elementární potřeba člověka třídit objekty bytí a myšlení a prostřednictvím příznaků „rovnocennosti“ je rozdělovat do tříd (relace ekvivalence), je elementární i jeho potřeba uspořádávat okolní svět, udávat stupnici hodnot. K tomu slouží takové relace jako „je větší než“, „není těžší než“, „je podmnožina“, „je potomek“, „stojí v abecedě před“, „stal se dříve než“; tzv. relace uspořádání. Jakými vlastnostmi jsou tyto relace charakterizovány?

Čistě intuitivně bychom mluvili o uspořádání hodnot jen tehdy, je-li tranzitivní, tj. když platí: Stojí-li x v uvedeném uspořádání před y a y zase před z, tak musí také x stát před z. „Klovací seznam“ u kuřat nemůžeme tedy považovat za uspořádání, neboť klove-li kuře Berta kuře Hertu, ale kuře Herta zas kuře Martu, není ještě jisté, že také kuře Berta klove kuře Martu. Mezi kuřaty tedy nevládne řád!

Relace „$\leqq$“, resp. „$<$“, které známým způsobem poskytují uspořádání hodnot v množině R reálných čísel, jsou příkladem toho, že relace uspořádání může být jak reflexívní, tak i ireflexívní (jako „$<$“). Podle toho nazýváme relaci uspořádání reflexívní, resp. ireflexívní. Od uspořádání hodnot budeme ale muset požadovat ještě další vlastnost: Stojí-li v daném uspořádání x před y, nemůže zřejmě stát zároveň y před x; tento případ může nastat nejvýše tehdy, je-li $x = y$ a uvažovaná relace je reflexívní. Musíme tedy od reflexívní relace uspořádání požadovat, aby byla antisymetrická, a od ireflexívní relace uspořádání, aby byla asymetrická.

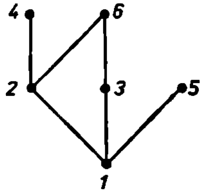
Při zběžném zkoumání jsme snadno ochotni ještě vyžadovat, aby pro dva různé prvky x, y vždy bylo x před y nebo y před x, což např. platí pro čísla vzhledem k relaci uspořádání „je větší než“ nebo pro lidi vzhledem k relaci uspořádání „není starší než“. Ale už pohled na relaci „je potomek“ ukazuje, že takové uspořádání nemusí nutně být „lineární“, nýbrž že se dané uspořádání může také rozvětvit do „rodokmenu“. Shrňme tyto předběžné úvahy v následující definici:

Definice 2.7. Relace R v M se nazývá *reflexívní relace uspořádání v M*, právě když je reflexívní, antisymetrická a tranzitivní; *ireflexívní relace uspořádání v M*, právě když je ireflexívní, asymetrická a tranzitivní.

Protože podle V(2.1) ireflexívní a tranzitivní relace je také nutně asymetrická, stačilo by v definici D(2.7) říci: R je ireflexívní relace uspořádání, právě když R je ireflexívní a tranzitivní.

Pro znázornění relace uspořádání je jistě výhodnější uzlový graf než graf kartézský, což je zřetelné už na našem standardním příkladu „je dělitel“ v množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Po prozkoumání vlastností relace uspořádání jej můžeme ještě dále zjednodušit: R je buď reflexívní, nebo ireflexívní. V prvém případě neobsahuje žádný bod grafu relace R „kruhovou šipku", v druhém případě ji obsahuje každý jeho bod, tu bychom však chtěli na základě úmluvy odstranit. Reflexivitu či ireflexivitu relace R už proto na jejím grafu nepoznáme, a musíme ji uvést zvlášť.

Stejně jako z antisymetrie pro reflexívní relaci uspořádání, tak i pro ireflexívní relaci uspořádání R z asymetrie plyne, že pro různé prvky $x, y \in M$ nemůže nikdy současně platit xRy a yRx. Platí-li např. xRy a neexistuje žádné z, pro něž xRz a zRy, tj. y je „výše" než x a neexistuje žádný prvek z „mezi", můžeme vskutku názorně nazvat y horním sousedem x a x dolním sousedem y. Položíme-li pak také podle toho bod P_y uzlového grafu nad P_x, může ještě odpadnout šipka a postačí spojit P_x a P_y navzájem úsečkou. Dostaneme tak, např. pro relaci „je dělitel" v $M = \{1, \ldots, 6\}$, dále zjednodušený graf na obr. 24, kterému se říká *Hasseho graf*.



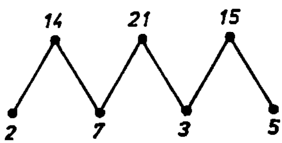
Obr. 24

Shrňme ještě jednou, jak nakreslíme Hasseho graf relace uspořádání v konečné množině M: Začneme nejníže postavenými prvky, tj. těmi, které nejsou horním sousedem jiného prvku; v našem příkladu tedy 1. Na následujícím stupni budou stát všechny ty prvky M, které jsou horními sousedy nejníže položených prvků; v příkladu 2, 3, 5. Na n-tém stupni tohoto uspořádání budou stát ty prvky M, které jsou horními sousedy prvků ($n - 1$)-ního stupně. Úsečkami budou spojeny jen prvky sousedních stupňů, a sice x bude spojeno s y, právě když y je horním sousedem x. Pro různé prvky x a y na témže stupni neplatí ani xRy, ani yRx (proč?), nazývají se *nesrovnatelné*. Nesrovnatelné ale mohou být i dvojice prvků z různých stupňů, v příkladu třeba 5 a 6.

Neexistují-li v relaci uspořádání R v M nesrovnatelné prvky, tj. pro každé dva různé prvky nastane vždy jeden z případů xRy nebo yRx, nazývá se množina M *lineárně uspořádaná relací* R. Protože Hasseho graf takové lineárně uspořádané množiny leží na přímce, mluvíme také o *řetězci*. Řetězcem je např. množina R reálných čísel uspořádaných relací „$<$“ a obvyklá číselná osa je jejím Hasseho grafem, jen je zvykem ji kreslit vodorovně místo svisle.

Podíváme se nyní na několik příkladů relací uspořádání:

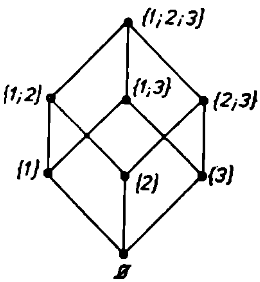
(1) Relace „je menší než“ v množině R reálných čísel je ireflexívní relace uspořádání, jak hned ověříme podle D(2.7). Přejdeme-li od relace „$<$“ k relaci „$\leqq$“, dostaneme reflexívní relaci uspořádání v R; přidáním identity můžeme takto vždy získat z ireflexívní relace uspořádání reflexívní relaci uspořádání. Stejně jako vzhledem k „$<$“, je R lineárně uspořádaná množina i vzhledem k „$\leqq$“.



Obr. 25

(2) Dělitelnost je reflexívní relace uspořádání v $\mathsf{N}_0 \setminus \{0\}$. Její reflexívnost, antisymetričnost a tranzitivnost jsme zjistili už v odstavci 2.2, a protože existují nesrovnatelné prvky (např. 2 a 3), není $\mathsf{N}_0 \setminus \{0\}$ lineárně uspořádaná. Obr. 25 ukazuje Hasseho graf relace dělitelnosti v množině $M = \{2, 3, 5, 7, 14, 15, 21\}$.

(3) Inkluze $\subset$ uvažovaná v potenční množině $\mathscr{P}(M)$ neprázdné množiny M je rovněž reflexívní relace uspořádání. Na obr. 26 je nakreslen Hasseho graf inkluze v $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$.



Obr. 26

(4) Množina slov německého jazyka je lineárně uspořádaná relací „stojí v abecedě před“. Jak známo, stojí slovo I v abecedě před slovem II, jestliže ve slově I první písmeno zleva, v němž se obě slova liší, stojí v abecedě před odpovídajícím písmenem slova II. Přitom je ještě nutná úmluva týkající se přehlásek; často se s ö nakládá jako s oe, někdy však jednoduše jako s o. Jsou-li slova ve slovníku uspořádaná touto relací, říkáme, že jsou uspořádána *lexikograficky*.

(5) Na identitu R_i, o které už víme, že je relací ekvivalence, se můžeme také dívat jako na relaci uspořádání, neboť je reflexívní, tranzitivní a antisymetrická. Každé

dva různé prvky jsou vzhledem k R_i nesrovnatelné, tj. její Hasseho graf se skládá ze samých „izolovaných“ bodů. Je znázorněn na obr. 27 pro množinu $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Obr. 27

Nakonec ještě chceme prozkoumat spojitost mezi relací ekvivalence a relací uspořádání definovaných v téže množině — pro ilustraci sáhneme zpět pro příklad dřevěných tyček různých barev, délek a tvarů průřezu, zvolený v odstavci 2.3. Relace „má stejnou barvu jako“ je relace ekvivalence a vede k rozdělení na třídy tyček stejné barvy. Relace „je delší než“ vede k uspořádání tyček podle jejich délky. Platí-li pro dvě tyčky x a y „x je delší než y“ a zaměníme-li x tyčkou x' stejné barvy (a y tyčkou y' téže barvy), nemůžeme tvrdit, že platí také „x' je delší než y'“. Zde není žádná spojitost mezi oběma relacemi v tom smyslu, že by existence relace uspořádání mezi dvěma prvky dávala stejnou relaci mezi dvěma prvky s nimi ekvivalentními.

Vezměme naproti tomu relaci ekvivalence „dává stejný podíl“ v množině nezáporných zlomků a tu relaci uspořádání, která je definována vztahem

$$\frac{a}{b} <_Q \frac{c}{d}\text{, právě když } ad < cb$$

(přesvědčte se sami, že se opravdu jedná o uspořádání), a zkoumejme, zda relace uspořádání zůstane zachována mezi dvěma zlomky se stejnými podíly. Je-li tedy $\frac{a'}{b'} =_Q \frac{a}{b}$, tj. $a'b = ab'$, a $\frac{c'}{d'} =_Q \frac{c}{d}$, tj. $c'd = cd'$, pak vzhledem k $ad < cb$ platí taky $adb'd' < cbb'd'$. Je tedy $(ab')(dd') < (cd')(bb')$, takže $(a'b)(dd') < (c'd)(bb')$, a odtud dále plyne $a'd' < c'b'$, tj. $\frac{a'}{b'} <_Q \frac{c'}{d'}$.

Uspořádání dvou prvků z M zde tedy dává stejné uspořádání mezi všemi prvky jim ekvivalentními. Proto dává relace uspořádání v M zároveň i uspořádání v podílové množině M/R. V takovém případě říkáme, že relace uspořádání a ekvivalence jsou slučitelné.

Definice 2.8. Relace ekvivalence R v M a relace uspořádání S v M se nazývají *slučitelné*, právě když pro všechna $x, y, x', y' \in M$ platí:

$$(xSy \text{ a } xRx' \text{ a } yRy') \Rightarrow x'Sy'.$$

Píšeme-li místo R znak $\sim$ a místo S znak $<$, bude D(2.8) v dobře zapamatovatelné podobě znít takto:

$$(x < y \text{ a } x \sim x' \text{ a } y \sim y') \Rightarrow x' < y'.$$

2.5 CVIČENÍ

1. Následující relace v M zapište jako podmnožiny $M \times M$:
a) „následuje bezprostředně za“ v $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) „je vlastní podmnožinou“ v $M = \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$;
c) „je dělitelem“ v $M = \{2, 4, 5, 8, 45, 60\}$.

2. Udejte všechny binární relace v $M = \{1; 2\}$ jako podmnožiny $M \times M$. Jaký je podle vás počet všech binárních relací v n-prvkové množině?

3. Nakreslete uzlový a kartézský graf následujících relací v $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
a) $R_1 = \{(x, y): xy$ je liché$\}$;
b) $R_2 = \{(x, y): y = x + 2\}$.

4. Udejte příklad
   a) tranzitivní relace, která není ani reflexívní, ani symetrická;
   b) symetrické a tranzitivní relace, která není reflexívní;
   c) dvou relací R, S, pro něž $R \subset S$ a $R \neq S$;
   d) dvou navzájem inverzních relací.

5. a) Jaký je vztah mezi symetrickou relací a relací, která je sama k sobě inverzní?
   b) Jakou vlastnost má relace R v M, pro niž platí $R_i \subset R$ (R_i je identita v M)?
   c) Které relace jsou charakterizovány vztahem $R \circ R \subset R$?

6. Kdosi tvrdí, že symetrická a tranzitivní relace je vždycky také reflexívní, a odůvodňuje to takto: „Je-li R symetrická, platí spolu s xRy i yRx, odkud díky tranzitivitě hned plyne xRx. Takže R je také reflexívní". Cvičení 4b) už ukázalo, že tvrzení neplatí. Kde se ale v předchozím „odůvodnění" skrývá chyba?

7. Které z následujících relací jsou relace ekvivalence?
   a) $R_1 = \{(x, y): x - y$ je celočíselný násobek tří$\}$ v $\mathbb{N}_0$;
   b) $R_2 = \{(a, a)\}$ v $M = \{a\}$;
   c) relace „je dělitel" v $\mathbb{N}_0$;
   d) relace „je shodný s" v množině obrazců v rovině;
   e) relace „má stejnou limitu jako" v množině konvergentních posloupností reálných čísel;
   f) relace R v $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, kde $(a, b)R(c, d)$, právě když $a + d = c + b$;
   g) relace R_f v $\mathbb{R}$, kde $R_f = \{(x, y): f(x) = f(y)\}$, přičemž f je libovolná funkce $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

   Pro relaci f) určete třídu ekvivalence obsahující (2; 5).

8. Ukažte:
   a) Je-li R reflexívní a tranzitivní relace v M, je $R \cap R^{-1}$ relace ekvivalence v M.

b) Pro relace ekvivalence R a S je i $R \cap S$ relace ekvivalence. Platí to i pro $R \cup S$?

9. a) Nakreslete Hasseho graf relace „je dělitel" v $M = \{2, 4, 5, 8, 45, 60\}$.
   b) Ukažte na konkrétních příkladech, že výroky „všechny prvky $y \neq x$ z M leží nad x" (v daném uspořádání) a „v M neexistuje prvek, který by ležel pod x", nevyjadřují totéž.

10. Ukažte:
   a) Je-li R (reflexívní, resp. ireflexívní) relace uspořádání v M, je také R^{-1} (reflexívní, resp. ireflexívní) relace uspořádání v M.
   b) Je-li R, resp. S reflexívní relace uspořádání v M, resp. v N, je také relace T v $M \times N$, kde $(x_1, y_1)T(x_2, y_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1Rx_2$ a y_1Sy_2, reflexívní relace uspořádání.

11. a) Nechť M je neprázdná konečná množina, $\mathscr{P}(M)$ její potenční množina. Zjistěte, zda relace ekvivalence „má právě tolik prvků jako" je v $\mathscr{P}(M)$ slučitelná s inkluzí.
   b) Za jakých předpokladů na funkci f je relace ekvivalence zkoumaná ve cvičení 7g) slučitelná s relací uspořádání „$\leqq$" v $\mathbb{R}$?