# Algebra, každý začátek je lehký

1. Množiny

In: Herbert Kästner (author); Peter Göthner (author); Karel Horák (translator): Algebra, každý začátek je lehký. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 7–52.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404145

# I. MNOŽINY

## MNOŽINA TRAMPOT S MATEMATIKOU

### 1.1 POJEM MNOŽINY

**Čtenář se dozví, jak se v matematice používá pojem „množina"**

Představa, že s matematikou jsou nějaké trampoty, se nám nelíbí — doufáme naopak, že naše knížka přinese čtenáři množinu příjemných chvil a on sám učiní množství zajímavých objevů.

Nikdo z nás teď zřejmě nemá jasnou představu o tom, co se míní množinou příjemných chvil či množinou trampot, stejně jako nevíme, co to je množství[1]) peněz.

Než přikročíme k přesnějšímu objasnění pojmu množiny, uveďme raději ještě několik příkladů:

$M_1$: množina čísel 1, 2, 3, 7;
$M_2$: množina všech prvočísel;
$M_3$: množina všech racionálních čísel, která jsou řešením rovnice $5x + 3 = -0{,}5$;
$M_4$: množina všech reálných čísel, která jsou řešením rovnice $x^2 + 9 = 0$;
$M_5$: množina všech tříd základní školy ve Štěpánské ulici v Praze;
$M_6$: množina, která obsahuje pouze slovo „množina";
$M_7$: množina všech dělitelů čísla 24;
$M_8$: množina všech přímek v rovině, které jsou navzájem kolmé.

---

[1]) Připomeňme zde, že pojem množiny zavedl do matematiky německý matematik Georg Cantor (1845—1918). Ten k označení nového pojmu zvolil německé slovo „Menge", které má význam „množství", v češtině se však toto slovo neujalo, a bylo později nahrazeno novým slovem „množina". (Pozn. překl.)

Na rozdíl od předchozích slovních spojení, ve kterých jsme použili slova „množina" místo obvyklého slova „množství", můžeme v příkladech $M_1$ až $M_8$ rozhodnout, zda nějaký objekt našeho hmotného či myšlenkového světa v dané množině leží či nikoliv. Objektům ležícím v nějaké množině budeme říkat prvky množiny.

Naše příklady objasňují, jakými způsoby můžeme množinu popsat. V některých případech toho dosáhneme přímým výčtem všech prvků množiny: $M_1 = \{1, 2, 3, 7\}$, $M_3 = \{-0{,}7\}$, $M_6 = \{\text{množina}\}$. Při výčtu prvků množiny $M_5$ nesmíme přehlédnout, že jejími prvky nejsou žáci, nýbrž třídy, tj. množiny žáků. Popis množiny výčtem jejích prvků by však selhal u takových množin, které mají prvků nekonečně mnoho (např. množina $M_2$). Takové množiny se nazývají nekonečné, na rozdíl od konečných množin, které mají jen konečně mnoho prvků. Jiný, univerzálnější způsob popisu množiny $M$ spočívá v nalezení takové vlastnosti, kterou mají právě jen všechny prvky dané množiny $M$. Množinu $M$ tedy popíšeme pomocí výrokové formy $H(x)$, což je, zhruba řečeno, slovní spojení obsahující proměnnou, po jejímž nahrazení objektem z definičního oboru $E$ výrokové formy dostaneme pravdivý či nepravdivý výrok.

Právě ty objekty $x$ definičního oboru $E$, pro které se $H(x)$ stane pravdivým výrokem, budou prvky množiny $M$. Píšeme pak $M = \{x: H(x)\}$. Tak můžeme psát $M_3 = \{x: x \in \mathsf{Q} \text{ a } 5x + 3 = -0{,}5\}$, $M_2 = \{x: x \in \mathsf{N}_0 \text{ a } x \text{ je prvočíslo}\}$, $M_4 = \{x: x \in \mathsf{R} \text{ a } x^2 + 9 = 0\}$. Výrokovou formou $H(x)$ můžeme charakterizovat nějakou množinu dokonce i tehdy, když (ještě) nevíme, pro které objekty $x$ definičního oboru je výrok $H(x)$ pravdivý. Tak můžeme např. mluvit o množině $M_9 = \{x: x \text{ je prvočíslo a } 10^{1000} < x < 10^{100\,000}\}$.

Chceme-li charakterizovat množinu $M_4$ výčtem jejích prvků, zjistíme, že neexistuje žádné reálné číslo, které by bylo řešením rovnice $x^2 + 9 = 0$, tj. množina $M_4$ je „prázdná". Množinu, která žádný prvek neobsahuje, nazýváme prázdnou množinou a označujeme ji symbolem $\emptyset$. Vyskytují se mezi množinami $M_1$ až $M_8$ ještě další prázdné množiny?

Leží-li prvek $x$ v množině $M$, píšeme $x \in M$, v opačném případě pak $x \notin M$, např. $3 \in M_1$, $11 \in M_2$, množina $\in$ {množina}, $7 \notin M_7$. Pro označování množin budeme používat velká písmena latinské abecedy $A$, $B$, ..., $M$, ..., $X$, $Y$, která budeme případně doplňovat indexem ($M_7$, $B_2$). Prvky množin budeme obvykle označovat malými písmeny $a$, $b$, ..., $x$, $y$, ... (případně též s indexy).

Bez ohledu na uvedené příklady učiníme následující důležitou úmluvu spojenou s pojmem množiny: Každá množina musí být jednoznačně určena svými prvky, tj. svým „obsahem". Množina trampot nemůže tedy být množinou v matematickém smyslu.

Nyní by se mohlo zdát, že se nám už podařilo získat pro další úvahy dostatečně přesnou představu pojmu množina. A přece ne každá vlastnost skutečně jednoznačně určuje množinu. Uvažujme např. vojáka, jenž má holit všechny příslušníky své jednotky, kteří se neholí sami; jak se pak má takový voják zachovat k vlastnímu vousu? Nebo zkusme sestavit „množinu" $M$ všech množin, které nejsou svými vlastními prvky. Lze utvořit takovou množinu?

Obtíže, které vznikají při rozhodování, zda jednotlivé objekty do uvažované množiny patří či nikoliv, spočívají v oblasti logiky. Případ, kdy je množina $M$ zároveň svým vlastním prvkem, musíme vyloučit. My se ale napříště budeme zabývat jen takovými množinami, u kterých se shora uvedené paradoxy nevyskytnou.

Přestože jsme probrali pojem množiny a objasnili ho na příkladech, vyhnuli jsme se tomu podat její přesnou definici. To u takových základních pojmů, jako je množina nebo bod, také ani nejde; vždyť k tomu bychom potřebovali nějaké ještě jednodušší (a v tomto smyslu základnější) pojmy.

## STEJNÉ, NEBO RŮZNÉ?

### 1.2 ROVNOST MNOŽIN

**Podrobněji o rovnosti počtu prvků množin**

Uvažujme množiny $A = \{x: x \in \mathbf{R}$ a $2x^2 - 2x - 12 = 0\}$, $B = \{-2; 3\}$ a $C = \{3; -2\}$. Především můžeme zjistit, že každý prvek jedné z množin $A$, $B$, $C$ je zároveň prvkem i ostatních dvou (ověřte to!). Množiny $A$, $B$, $C$ se tedy liší jen ve svém popisu; mají stejné prvky, stejný obsah. Protože každá množina je jednoznačně určena svými prvky, můžeme definovat:

**Definice 1.1.** Nechť $M_1$ a $M_2$ jsou dvě neprázdné množiny. $M_1$ a $M_2$ se nazývají sobě *rovné*, právě když každý prvek množiny $M_1$ je zároveň prvkem množiny $M_2$, a naopak — každý prvek $M_2$ prvkem množiny $M_1$, tj.

$M_1 = M_2$, právě když pro všechna $x$ platí $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$.

Prázdné množiny se navzájem rovnají.

Pro implikaci „jestliže ... pak“ užíváme symbolu $\Rightarrow$, znamená tedy „$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$“ výrok „když $x \in M_1$, pak (také) $x \in M_2$“ nebo, jinak řečeno, „z $x \in M_1$ vyplývá $x \in M_2$“. Platí-li zároveň $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$ a také $x \in M_2 \Rightarrow x \in M_1$, píšeme obvykle $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$ (viz také odstavec 2.2).

Nejsou-li množiny $M_1$ a $M_2$ sobě rovné, píšeme $M_1 \neq M_2$. Vztah rovnosti, definovaný v D(1.1), má zřejmě pro libovolné tři množiny $M_1$, $M_2$, $M_3$ následující tři vlastnosti:

(1) Každá množina je rovna sama sobě, tj. platí $M_1 = M_1$.

(2) Z rovnosti $M_1 = M_2$ plyne $M_2 = M_1$.

(3) Z rovnosti $M_1 = M_2$ a $M_2 = M_3$ plyne $M_1 = M_3$.

Při zjišťování, jsou-li dvě množiny $A$ a $B$ sobě rovné, můžeme použít D(1.1) takto: přesvědčíme se, zda pro každý prvek $a \in A$ je také $a \in B$, a obráceně, zda také každý prvek $b \in B$ patří do $A$.

Množina, která obsahuje pouze jeden prvek, se nazývá jednoprvková; taková je množina $M_3$ v našem příkladě v odstavci 1.1. Existuje nekonečně mnoho různých jednoprvkových množin, naproti tomu existuje právě jedna prázdná množina. Pro množiny označené v odstavci 1.1 jako $M_4$ a $M_8$ platí tedy $M_4 = M_8 = \emptyset$. Také množina $L = \{x: x \neq x\}$ je jen jinak zapsaná prázdná množina, protože neexistuje objekt, který by nebyl sám se sebou identický.

## UČITEL JE TAKÉ JENOM ČLOVĚK

### 1.3 PODMNOŽINY

**O vlastních a nevlastních podmnožinách, o potenční množině a o množinách, které nemají žádný společný prvek**

Každý ví, co rčení „Učitel je také jenom člověk" vyjadřuje: sotva od něj můžeme čekat něco nadlidského, třeba že by byl vševědoucí nebo neunavitelný. Pro střízlivého matematika vyjadřuje uvedené rčení pouze vztah mezi množinou učitelů a množinou všech lidí. Skutečnost, že každý učitel je člověk, vyjádří takto: Množina učitelů je podmnožinou množiny všech lidí.

Takovýto vztah „podmnožina — množina“ se objevuje často:

— Množina všech sudých čísel je podmnožinou množiny Z všech celých čísel.

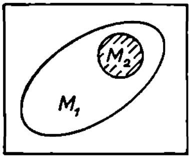
— Množina všech prvočísel je podmnožinou množiny všech přirozených čísel.

— Množina řešení rovnice $4x + 7 = -1$ je podmnožinou řešení nerovnice $2 - 3x > -1$.

**Definice 1.2.** Nechť $M_1$ a $M_2$ jsou množiny. Pak se $M_1$ nazývá *podmnožinou* $M_2$ (symbolicky: $M_1 \subset M_2$), právě když každý prvek $M_1$ patří také do $M_2$, tj.

$M_1 \subset M_2$, právě když pro každé $x$ platí: $x \in M_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in M_2$.

Speciálně se $M_1$ nazývá *vlastní podmnožinou* $M_2$, právě když platí: $M_1 \subset M_2$ a $M_1 \neq M_2$.




Obr. 1

Vztah být podmnožinou se také nazývá *inkluze.* Na obr. 1 je znázorněno $M_2 \subset M_1$. Všimněte si že symbol $\in$ může stát jen mezi prvkem a množinou, zatímco $\subset$ jen mezi dvěma množinami.

Z D(1.2) získáme několik důsledků:

— Prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny $M$, neboť neexistuje žádné $x$ v $\emptyset$, které by nepatřilo také do $M$.

— Každá množina je svou podmnožinou.

— Ze vztahu $M_1 \subset M_2$ a $M_2 \subset M_3$ plyne $M_1 \subset M_3$.

Následující věta V(1.1) vyjadřuje vztah mezi rovností a inkluzí.

**Věta 1.1.** *Pro libovolné dvě množiny* $M_1$ *a* $M_2$ *platí:* $M_1 = M_2$, *právě když platí zároveň* $M_1 \subset M_2$ *i* $M_2 \subset \subset M_1$.

*Důkaz* věty plyne z D(1.1) a D(1.2).

V následujícím příkladu ukážeme, jak lze využít V(1.1) k důkazu rovnosti dvou množin: chceme dokázat, že množina $A$ všech nezáporných sudých čísel je rovna množině $Q$ všech těch celých nezáporných čísel, jejichž druhá mocnina je sudé číslo.

V prvém kroku ukážeme, že $A \subset Q$: každý prvek $x \in A$ se dá psát ve tvaru $x = 2n$ pro $n \in \mathsf{N}_0$. Z rovnosti $x^2 = (2n)^2 = 2 . 2n^2$ plyne $x \in Q$, takže $A \subset Q$.

Druhý krok: Nechť $y \in Q$ je libovolné a $y = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots \dots p_n^{\lambda_n}$ $(\lambda_i > 0)$ je jeho rozklad na prvočinitele; ten je až na pořadí určen jednoznačně. Protože podle předpokladu je $y^2 = p_1^{2\lambda_1} p_2^{2\lambda_1} \dots p_n^{2\lambda_n}$ sudé, musí být jeden z prvočinitelů $p_i$ čísla $y^2$ roven 2. Je tedy 2 také jeden z prvočinitelů čísla $y$, a to je tedy sudé. Je tudíž $Q \subset A$. Z obou kroků plyne $A = Q$.

Uvažujme množinu všech podmnožin množiny $B = = \{a, b, c\}$ a označme ji $\mathscr{P}(B)$. Je tedy $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

**Definice 1.3.** Budiž $M$ libovolná množina. Množina všech podmnožin množiny $M$ se nazývá *potenční množina množiny* $M$; budeme ji značit $\mathscr{P}(M)$: $\mathscr{P}(M) = \{X : X \subset M\}$.

Pro libovolnou množinu $M$ jsou $\emptyset$ a $M$ prvky $\mathscr{P}(M)$, je tedy potenční množina množiny $M$ neprázdná.

V shora uvedeném příkladě má $B$ tři prvky, její potenční množina má $2^3 = 8$ prvků. Je-li $M$ jednoprvková, pak zřejmě potenční množina $\mathscr{P}(M)$ obsahuje právě dva prvky $\emptyset$ a $M$. Potenční množina dvouprvkové množiny $\{a, b\}$ sestává z $2^2 = 4$ prvků $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

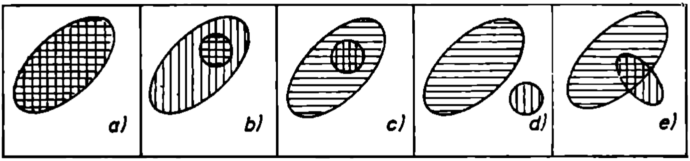
Analýza dosud získaných výsledků nás přivádí k domněnce, že potenční množina $n$-prvkové množiny má právě $2^n$ prvků.

K důkazu správnosti naší domněnky použijeme metodu, která bývá označována jako matematická indukce. Tento postup umožňuje dokazovat platnost obecných výroků $H(n)$, které závisejí na parametru $n \in \mathsf{N}_0$: Ukážeme-li v 1. kroku, že dokazovaný výrok $H$ platí pro nějaké počáteční $n_0 \in \mathsf{N}_0$ (často pro 0, 1 nebo 2), a v 2. kroku, že z platnosti $H(k)$ vyplývá platnost $H(k + 1)$, pak platí $H(n)$ pro všechna celá čísla $n \geqq n_0$.

Náš výrok o počtu prvků $\mathscr{P}(M)$ je pro $n = 1$ pravdivý, zbývá tedy provést ještě 2. krok matematické indukce: Předpokládejme, že potenční množina $k$-prvkové množiny $M$ má $2^k$ prvků. Přidáme-li k množině $M$ další prvek $a_{k+1}$, počet prvků $\mathscr{P}(M)$ se zdvojnásobí, neboť ke každé původní podmnožině množiny $M$ přibude ještě odpovídající podmnožina, která z ní vznikne přidáním prvku $a_{k+1}$. A takto taky dostaneme všechny podmnožiny, protože taková podmnožina buď neobsahuje $a_{k+1}$, a pak byla podmnožinou i „původní" množiny, nebo obsahuje $a_{k+1}$, a pak se dá utvořit z jedné z podmnožin „původní" množiny přidáním prvku $a_{k+1}$. Má tedy potenční množina $(k + 1)$-prvkové množiny $2 . 2^k = 2^{k+1}$ prvků.

Nemají-li dvě množiny $A$ a $B$ společný prvek, nazývají se *disjunktní*. Mají-li $A$ a $B$ aspoň jeden společný prvek a přitom každá z nich obsahuje aspoň jeden další prvek, který v druhé množině neleží, můžeme říci, že se obě množiny navzájem *částečně překrývají*. Jsou-li $A$, $B$

dvě neprázdné podmnožiny nějaké množiny $M$, pak zřejmě nastane vždy právě jedna z následujících pěti možností:
a) $A = B$, b) $A \subset B$ a $A \neq B$, c) $B \subset A$ a $A \neq B$, d) $A$ a $B$ jsou disjunktní, e) $A$ a $B$ se navzájem částečně překrývají (obr. 2).




Obr. 2

## PETROVY ŠANCE U HEZKÉ KRISTÝNY — POUHÉ NEDOROZUMĚNÍ?

### 1.4 MNOŽINOVÉ OPERACE

**Čtenář se seznámí s operacemi průniku, sjednocení a rozdílu množin, jakož i s jejich vlastnostmi**

Petr vítězoslavně oznamuje svému příteli Wolfgangovi, že má dobré šance u hezké Kristýny, protože podle jejích vlastních slov má obzvlášť ráda sportovní mladíky a kučeravé blonďáky. Wolfgang však ohromeně namítá: „Ale ty máš přece černé vlasy." Tato námitka zas udivuje Petra, který se brání: „Ale zato jsem přece velice sportovní, vždyť na poslední školní tělovýchovné slavnosti jsem získal tři první ceny."

Bohužel nemůžeme rozhodnout, kdo z nich měl více důvodů se divit, protože Kristýna se nevyjádřila jasně.

Následující formulace jsou podobně nepřesné:

(1) Rovnoramenné a pravoúhlé trojúhelníky mají dva úhly velikosti 45°.
(2) Rovnoramenné a pravoúhlé trojúhelníky mají součet úhlů 180°.
(3) Čísla dělitelná čtyřmi a šesti jsou sudá.
(4) Čísla dělitelná čtyřmi a šesti jsou rovněž dělitelná 12.
(5) Monotónní a ohraničené posloupnosti jsou konvergentní.
(6) Monotónní a ohraničené posloupnosti mohou mít nejvýše jednu limitu.

Formulace (1) je výrok o trojúhelnících, které jsou zároveň rovnoramenné a pravoúhlé, zatímco výrok (2) platí pro všechny trojúhelníky, které jsou rovnoramenné nebo pravoúhlé; platí dokonce pro každý trojúhelník. Označuje-li $P$ množinu pravoúhlých a $R$ množinu rovnoramenných trojúhelníků, pak oborem pravdivosti výroku (1) je množina všech prvků, které přísluší jak $P$, tak $R$; takovou množinu nazýváme *průnik* $P$ *a* $R$ a píšeme $P \cap R$. Naproti tomu, máme-li na mysli množinu všech těch prvků, které leží aspoň v jedné z množin $P$ nebo $R$, pak mluvíme o *sjednocení* $P$ *a* $R$, symbolicky $P \cup R$. Sjednocení $P \cup R$ se tedy skládá z těch prvků, které leží v $P$, ale neleží v $R$, z těch, jež leží v $R$, ale neleží v $P$, a z těch, které leží v obou množinách $P$, $R$. Označíme-li ještě množinu všech prvků, které leží v $P$, ale neleží v $R$, jako *rozdíl* $P \setminus R$, pak můžeme psát $P \cup R = (P \setminus R) \cup (R \setminus P) \cup (P \cap R)$, což znázorňuje obr. 3.

Rozeberte výroky (3) až (6) stejným způsobem.

To, co jsme právě probrali, shrneme v následujících definicích: Nechť $M_1 = \{x: x \in E \text{ a } H_1(x)\}$ a $M_2 = \{x: x \in E \text{ a } H_2(x)\}$ jsou dvě množiny s definičním oborem $E$.

**Definice 1.4.** *Průnik množin* $M_1$ a $M_2$ je množina

$$M_1 \cap M_2 = \{x: x \in E \text{ a } (H_1(x) \text{ a zároveň } H_2(x))\};$$

tj. $$x \in M_1 \cap M_2 \Leftrightarrow (x \in M_1 \text{ a } x \in M_2).$$

**Definice 1.5.** *Sjednocení množin* $M_1$ a $M_2$ je množina

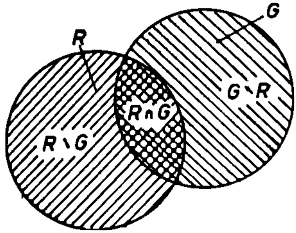
$$M_1 \cup M_2 = \{x: x \in E \text{ a } (H_1(x) \text{ nebo } H_2(x))\};$$

tj. $$x \in M_1 \cup M_2 \Leftrightarrow (x \in M_1 \text{ nebo } x \in M_2).$$

**Definice 1.6.** *Rozdíl množin* $M_1$ a $M_2$ je množina

$$M_1 \setminus M_2 = \{x: x \in E \text{ a } (H_1(x) \text{ a ne } H_2(x))\};$$

tj. $$x \in M_1 \setminus M_2 \Leftrightarrow (x \in M_1 \text{ a } x \notin M_2).$$




Obr. 3

Průnik, sjednocení a rozdíl dvou množin $M_1$ a $M_2$ jsou těmito množinami určeny jednoznačně, což je zřejmé také tehdy, jsou-li jedna nebo obě množiny prázdné. Ještě si všimněte, že slovo „nebo“ se v definici sjednocení (a v matematice běžně) používá v nevylučujícím smyslu. Na rozdíl od $M_1 \cup M_2$ můžeme množinu těch prvků, které patří buď do $M_1$, anebo do $M_2$, popsat jako $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$[2]).

---

[2]) Tato operace se někdy nazývá *symetrický rozdíl množin* $M_1$ a $M_2$ a označuje se jako $M_1 \triangle M_2$. Přitom je také $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.
Na tomto místě navíc překladatel vypustil jednu větu, která v češtině ztrácí smysl. Německý výraz pro průnik (Durchschnitt) má totiž ještě další významy (průřez, průměr), a tak je dobře si aspoň uvědomit, jak je slovo průnik výstižné a jedinečné, oč je v tomto směru náš jazyk bohatší (viz též pozn. na str. 7). (Pozn. překl.)

Uvažujme rozdíl $E \setminus M$ základní množiny $E$ a množiny $M$, tato množina se často nazývá *doplněk množiny $M$ vzhledem k $E$* a značí se $M'_E$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme také tento doplněk označovat stručně $M'$. Podle D(1.6) je tedy $M'_E = \{x : x \in E \text{ a } x \notin M\}$. Položíme-li ještě $M''_E = (M'_E)'_E$, platí zřejmě $M''_E = M$.

Při popisu matematických souvislostí budeme často používat následující množinové vyjadřování:

— Označuje-li $\mathsf{N}_0$ množinu všech celých nezáporných čísel, $M_1$, $M_2$ a $M_3$ množiny celých nezáporných čísel po řadě dělitelných 2, 3 a 6 a $M_4$ množinu všech lichých nezáporných čísel, pak je např. $M_1 \cup M_4 = \mathsf{N}_0$, $M_1 \cap M_2 = M_3$, $(M_4)'_{\mathsf{N}_0} = M_1$, $M_2 \cup M_3 = M_2$, $M_2 \cap M_3 = M_3$.

— Průnik dvou různých přímek roviny je buď prázdný, anebo množina, která obsahuje právě jeden bod.

— Množinou řešení soustavy rovnic

$$x + 4y = 3, \tag{1}$$
$$x + y = 0 \tag{2}$$

je průnik množin řešení rovnice (1) a rovnice (2).

— Množinou řešení nerovnice $|x - 1| > 2$ je sjednocení množin řešení nerovnic $x - 1 > 2$ a $x - 1 < -2$.

Z množství vlastností množinových operací shrnujeme v následující větě některé důležité.

**Věta 1.2.** *Nechť $A$, $B$, $C$ jsou libovolné podmnožiny základní množiny $E$, pak platí následující tvrzení:*

(1) *Vlastnosti průniku a sjednocení*

(1a) $A \cap B = B \cap A$,
(1a′) $A \cup B = B \cup A$,
(1b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
(1b′) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
(1c) $A \cap A = A$,
(1c′) $A \cup A = A$.

(2) *Souvislost průniku a sjednocení*

(2a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(2a′) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(2b) $A \cap (A \cup B) = A$,
(2b′) $A \cup (A \cap B) = A$.

(3) *Souvislost průniku a sjednocení s rozdílem*

(3a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
(3a′) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
(3b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$,
(3b′) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

(4) *Souvislost množinových operací s inkluzí*

(4a) $A \cap B \subset A$,
(4a′) $A \subset A \cup B$,
(4b) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$,
(4b′) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$,
(4c) $C \subset A$ a $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$,
(4c′) $A \subset C$ a $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$,
(4d) $A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$ a $C \setminus B \subset C \setminus A$.

(5) *Úloha množin $\emptyset$ a $E$*

(5a) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(5a′) $A \cup E = E$,
(5b) $A \cap E = A$,
(5b′) $A \cup \emptyset = A$,
(5c) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A'$,
(5c′) $A \cup B = E \Leftrightarrow A' \subset B$.

Věta zahrnuje některé speciální případy: dosadíme-li do (3b) a (3b′) $C = E$, dostaneme tzv. *de Morganova*[3]) *pravidla*

---

[3]) Augustus de Morgan (1806—1871), anglický matematik; zabýval se zejména infinitezimálním počtem, algebrou a pravděpodobností.

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

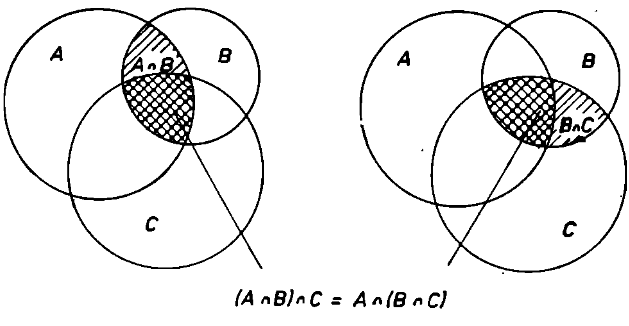
Podobně dostaneme ze (4d) pro $C = E$ implikaci $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$ a tvrzení (5c) a (5c′) dávají speciálně pro $B = A'$ vztahy $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = E$. Čtenář si při pozorném sledování uvedené věty snadno uvědomí zprvu zarážející analogii mezi operacemi „$\cap$" a „$\cup$". Ke každému tvrzení je tu také uveden jeho jaksi „zrcadlový obraz", vyjma ovšem tvrzení (4d), kde se vyskytuje jen rozdíl množin. Tvrzení přejde ve svůj „zrcadlový obraz", jestliže navzájem zaměníme symboly „$\cap$" a „$\cup$" a zároveň množiny $\emptyset$ a $E$. Přitom se také obrátí případné inkluze, neboť $A \subset B$ je podle (4b) ekvivalentní $A \cap B = A$, a k tomu je „symetrický" vztah $A \cup B = A$, což je podle (4b′) ekvivalentní $B \subset A$. Matematici tuto dalekosáhlou analogii prozkoumali a obecně dokázali, že s každým tvrzením V(1.2) platí také jeho „zrcadlový obraz" — říkáme *duální tvrzení*. Kdybychom nechtěli této znalosti využít, museli bychom dokazovat každé z 27 tvrzení V(1.2), zatímco takhle plyne platnost tvrzení (1a′) až (5c′) už z důkazu (1a) až (5c). Ale protože všechny tyto důkazy probíhají podle téhož vzoru, nebudeme zde provádět ani jedno, ani druhé, a místo toho se omezíme na několik příkladů, které dostatečně objasní možné metody důkazu.

Nejprve však poukažme ještě na to, že tvoření průniku a sjednocení lze rozšířit na systémy $\mathfrak{M}$ více, či dokonce nekonečně mnoha množin: do průniku množin z $\mathfrak{M}$ budou patřit právě ty prvky, které leží v každé množině z $\mathfrak{M}$, a do sjednocení množin z $\mathfrak{M}$ právě ty prvky, které patří alespoň do jedné množiny z $\mathfrak{M}$. Také tvrzení věty (1.2) pak mají smysluplná zobecnění; (1b) můžeme např. vyjádřit ve tvaru „V průniku můžeme libovolně rozmístit či odstranit závorky" a (3a) pro čtyři množiny $A$, $B$, $C$, $D$ dostane tvar $(A \cap B \cap C) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D) \cap (C \setminus D)$.

K důkazu tvrzení (1b) si nejprve uvědomme, že uvedenou rovnost množin $(A \cap B) \cap C = M$ a $A \cap (B \cap C) = N$ dostaneme, potvrdíme-li, že je jak $M \subset N$, tak i $N \subset M$ (srov. odstavec 1.3). Je-li tedy $x \in M$, tj. $x \in (A \cap B) \cap C$, pak platí jak $x \in A \cap B$, tak $x \in C$, odkud dále plyne $x \in A$ a $x \in B$ a $x \in C$. Leží-li $x$ v každé ze tří množin $A$, $B$, $C$, pak je také $x \in A$ a $x \in B \cap C$, tedy $x \in A \cap (B \cap C) = N$. Je tudíž $M \subset N$.

Je-li $x \in N$, tj. $x \in A \cap (B \cap C)$, tak je $x \in A$ a $x \in B \cap C$, odkud opět plyne, že $x$ leží v každé z množin $A$, $B$, $C$. Proto platí $x \in A \cap B$ a $x \in C$, a proto $x \in (A \cap B) \cap C = M$. Je tedy také $N \subset M$, což spolu s $M \subset N$ dává rovnost $M = N$, c. b. d.

Tímto postupem můžeme v zásadě dokázat všechna tvrzení V(1.2); jde v podstatě jen o použití odpovídajících definic. Ať se čtenář sám pocvičí na některém z dalších tvrzení uvedených v bodě (1)! Dejte však pozor na to, že množinové diagramy, které se často používají




$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Obr. 4

k znázornění tvrzení V(1.2), jako např. diagram na obr. 4 pro tvrzení (1b), rozhodně nejsou matematickým důkazem, vždyť znázorňují jen jednu z mnoha možných konstelací mezi množinami $A$, $B$, $C$. Shora uvedená metoda důkazu předpokládá ovšem správné zacházení s logickými operacemi „a“ a „nebo“.

Jinou možnost nabízí tzv. tabulková metoda, kterou objasníme na důkazu (3a):

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \cap B$ | $(A \cap B) \setminus C$ | $A \setminus C$ | $B \setminus C$ | $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabulku chápeme takto: Leží-li prvek $x$ v některé z množin, pak zapíšeme symbol „1“, jinak „0“. V prvních třech sloupcích jsou probrány všechny možnosti pro příslušnost prvku $x$ ke každé ze tří množin $A$, $B$, $C$. S použitím definic D(1.4) až D(1.6) pak zapisujeme do ostatních sloupců „1“ nebo „0“. Srovnání pátého a osmého sloupce ukazuje: $x \in (A \cap B) \setminus C$, právě když $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, c. b. d.

Jako cvičení dokažte pomocí tabulkové metody další dílčí tvrzení V(1.2)!

Někdy lze doporučit metodu nepřímého důkazu, zejména ale u tvrzení uvedených v části (4) V(1.2), ve kterých vstupuje do hry také inkluze: V důkazu (4c′) dejme tomu, že existuje prvek $x \in A \cup B$, který neleží v $C$. Z $x \in A \cup B$ ale plyne, že $x$ patří alespoň do jedné z obou množin $A$ nebo $B$. Protože podle předpokladu jsou obě množiny podmnožinou $C$, plyne odtud také $x \in C$, což je ve sporu s naším předpokladem. Ten je tedy třeba zavrhnout, a platí tedy $A \cup B \subset C$, c. b. d.

Na závěr se vraťme k de Morganovým pravidlům, která bychom pro jejich důležitost měli dokázat, třeba tabulkovou metodou:

| $A$ | $B$ | $A'$ | $B'$ | $A \cap B$ | $A \cup B$ | $(A \cap B)'$ | $(A \cup B)'$ | $A' \cap B'$ | $A' \cup B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ·0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Rovnost sloupců $(A \cap B)'$ a $A' \cup B'$ a sloupců $(A \cup B)'$ a $A' \cap B'$ dává tvrzení, která se měla dokázat.

# TVOŘENÍ DVOJIC

## 1.5 KARTÉZSKÝ SOUČIN

**Čtenář se důvěrně seznámí s kartézským součinem množin a jeho vlastnostmi**

Petr pozval na oslavu svých narozenin Wolfganga, Rolfa, Uweho a Holgera a také Conny, Ingrid a Aňu. Připravil rychlou taneční hudbu na nejméně pět kol, aby mohl každý chlapec s každou dívkou jednou tančit. Je jeho plán správný?

Napíšeme-li taneční páry ve tvaru (Wolfgang, Aňa), na prvním místě tedy stojí vždy chlapec a na druhém jeho taneční partnerka, utvoříme, matematicky řečeno, *uspořádanou dvojici*. Její *první složka* je prvek množiny $A$ chlapců a její *druhá složka* prvek množiny $B$ děvčat.

Napíšeme-li všechny možné uspořádané dvojice prvků neprázdných množin $A$ a $B$, dostaneme tak novou množinu $A \times B$ (čti „$A$ krát $B$"), která se nazývá kartézský součin.

**Definice 1.7.** Nechť $A$ a $B$ jsou neprázdné množiny.

(1) Každá dvojice $(x, y)$, kde $x \in A$ a $y \in B$, se nazývá *uspořádaná dvojice prvků množin $A$ a $B$*. Dvě uspořádané dvojice $(x_1, y_1)$ a $(x_2, y_2)$ se rovnají, právě když $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$.

(2) Množina všech uspořádaných dvojic $(x, y)$, kde $x \in A$ a $y \in B$, se nazývá *kartézský součin $A \times B$ množin $A$ a $B$*: $A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ a } y \in B\}$.

V této definici je rovněž zahrnut často se vyskytující zvláštní případ, když jsou obě množiny $A$, $B$ stejné ($A = B$). O tento případ se jedná, když např. tvoříme kartézský součin $\mathsf{R} \times \mathsf{R}$, tedy uvažujeme-li množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Zavedením souřadnicového systému v rovině můžeme, jak známo, každému bodu této roviny vzájemně jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici $(x, y)$ jeho souřadnic. Teprve toto vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body roviny a množinou $\mathsf{R} \times \mathsf{R}$ umožňuje početní řešení geometrických otázek. Tato „analytická geometrie" byla vytvořena René Descartesem (lat. Cartesius[4]); odtud také označení „kartézský součin" pro $A \times B$. Kdybychom se chtěli zabývat analytickou geometrií v trojrozměrném prostoru, tak bychom museli k jednoznačnému označení bodů prostoru použít *uspořádaných trojic* $(x_1, x_2, x_3)$, přičemž $x_1, x_2, x_3 \in \mathsf{R}$. Nehledě na tento speciální pří-

[4]) René Descartes (1596—1650), francouzský filozof a matematik; jeho hlavní matematickou zásluhou je položení základů analytické geometrie.

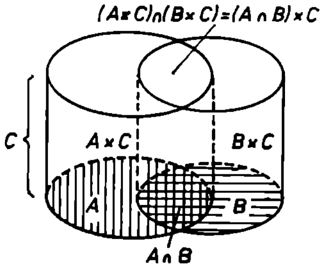
pad, můžeme se přirozeně zabývat pojmem uspořádané trojice $(x, y, z)$ pro libovolné množiny $A$, $B$, $C$, jejichž prvky budou tvořit složky trojice: $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Také zde je důležité jen to, že dvě takové uspořádané trojice se rovnají, právě když se rovnají po složkách. Množina všech uspořádaných trojic $(x, y, z)$, kde $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$, se nazývá *kartézský součin* $A \times B \times C$ *množin* $A$, $B$, $C$.

Analogicky mluvíme o *uspořádané n-tici* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prvků množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, když $x_i \in A_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a když platí, že dvě $n$-tice se rovnají, právě když se rovnají po složkách. Množina všech uspořádaných $n$-tic se nazývá *kartézský součin* $A_1 \times A_2 \times \times \ldots \times A_n$ *množin* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Je-li speciálně $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, nazývá se $A \times A \times \ldots \times \times A$ často také *n-tá mocnina množiny* $A$ a označuje se $A^n$. Položíme-li ještě $A^1 = A$, bude symbol $A^n$ definován pro všechny celé kladné exponenty. Protože u uspořádané dvojice podstatně záleží na pořadí prvků, odlišujeme ji od množiny $\{x, y\}$: zatímco je $\{x, y\} = \{y, x\}$, platí $(x, y) \neq (y, x)$, pokud $x \neq y$.

O všech množinách vyskytujících se v našich úvahách se zatím předpokládalo, že jsou neprázdné. Toto omezení můžeme odstranit dodatečnou úmluvou, že $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset$ pro každou množinu $M$.

Kartézský součin hraje v matematice důležitou úlohu jednak při zavádění tak základních pojmů, jako je relace (srov. kapitolu 2) a zobrazení (srov. odstavec 1.6), jednak při konstrukci nových matematických útvarů. Tak můžeme konstruovat zlomky jako uspořádané dvojice $(a, b)$ celých nezáporných čísel $a$, $b$ $(b \neq 0)$ tedy prostřednictvím kartézského součinu $\mathsf{N}_0 \times (\mathsf{N}_0 \setminus \setminus \{0\})$; jenom píšeme uspořádanou dvojici $(a, b)$ ve tvaru $\frac{a}{b}$ a říkáme jí zlomek.

Nakonec ještě prozkoumáme, jaká pravidla kartézský součin splňuje. Zřejmě záleží na pořadí činitelů v součinu, neboť obecně je $A \times B \neq B \times A$; vždyť přece uspořádaná dvojice, jejíž první složka je z $A$ a druhá z $B$, se zpravidla liší od dvojice s první složkou z $B$ a druhou z $A$. Kromě toho se vícenásobný kartézský součin nedá libovolně uzávorkovat; je $A \times (B \times C) \neq$ $\neq (A \times B) \times C$. Naproti tomu s operacemi průniku, sjednocení a rozdílu snáší se kartézský součin vcelku dobře ve smyslu následující věty V(1.3), kterou je také možno snadno znázornit (obr. 5).




Obr. 5

**Věta 1.3.** *Pro množiny $A$, $B$, $C$ platí:*

(1a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
(1b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
(2a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
(2b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
(3a) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

*Důkaz* plyne bezprostředně z definic odpovídajících množinových operací; jako příklad dokažme (2a), podle tohoto vzoru probíhají také ostatní důkazy. Rovnost (2a) dvou množin ukážeme jako obvykle:

(1) $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ a $y \in B \cup C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A$ a ($y \in B$ nebo $y \in C$) $\Rightarrow (x, y) \in A \times B$ nebo $(x, y) \in A \times C \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Je tedy $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$.

(2) $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ nebo $(x, y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$ a ($y \in B$ nebo $y \in C$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A$ a $y \in B \cup C \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$.
Je tedy také $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$ a z (1) a (2) nyní plyne podle V(1.1) ihned tvrzení (2a), c. b. d.

Další důkazy si proveďte sami.

Stejně snadno se přesvědčíte o správnosti tvrzení

$$A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$$

pro libovolné množiny $A, B, C$, které můžeme pro $C \neq \emptyset$ obrátit. Dvojnásobné užití tohoto obrácení dává

$$A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$$

pro $C \neq \emptyset$. Naše úvahy zůstanou správné, zaměníme-li v uvažovaných kartézských součinech vždy levý a pravý činitel; jen proto, že $C \times A \neq A \times C$, nevyžadují ještě odpovídající pravidla nový důkaz.

# KAŽDÝ HRNEC NAJDE SVOU POKLIČKU

## 1.6 PŘIŘAZENÍ A ZOBRAZENÍ

**Čtenář si zopakuje a rozšíří svoje znalosti o binárních relacích, zobrazeních, o prostých zobrazeních stejně jako o inverzních binárních relacích a o skládání binárních relací**

V odstavci 1.5 jsme poznali kartézský součin dvou množin. Je-li např. $O$ množina všech obyvatel Lipska a $U$ množina všech vyučujících na lipských středních školách, skládá se $O \times U$ ze všech uspořádaných dvojic $(x, y)$, kde $x \in O$, $y \in U$. Všeobecně nás však zajímá jen podmnožina tohoto kartézského součinu, a to každá uspořádaná dvojice, pro kterou v určitém okamžiku platí „$x$ je žákem $y$“.

Vyberme z kartézského součinu $L \times L$, kde $L$ označuje množinu všech lidí žijících v určitém daném dnu, podmnožinu všech těch dvojic $(x, y)$, pro něž „$x$ si píše s $y$“, přiřadíme tak každé osobě její partnery při dopisování.

Mezi prvky kartézského součinu $H \times P$ ($H$ je množina všech hrnců, $P$ množina všech pokliček v nějaké kuchyni) kuchařku zajímají jen dvojice $(h, p)$ s vlastností „$p$ se hodí k $h$“. Takové hrnce a pokličky dává dohromady jako „pasující“.

Každou podmnožinu $F$ kartézského součinu $M \times N$ nazveme *přiřazení z $M$ do $N$*[5]; je-li $(x, y) \in F$, nazývá se *$y$ obraz $x$ v přiřazení $F$* a *$x$ vzor $y$ v přiřazení $F$*. Nebude-li hrozit nedorozumění, můžeme říkat stručně obraz, resp. vzor.

Při takto zavedeném pojmu přiřazení těžko můžeme čekat, že prvek $x \in M$ bude mít nejvýše jeden obraz, a podobně, že prvek $y \in N$ bude mít nejvýše jeden vzor. Kupříkladu, každý lipský školák má více učitelů a každý lipský učitel více žáků. Má proto smysl uvažovat množinu všech obrazů prvku $x \in Mv$ přiřazení $F$; budeme jí říkat *úplný obraz* v přiřazení $F$. Analogicky nazveme množinu všech vzorů prvku $y \in N$ v přiřazení $F$ jako *úplný vzor v přiřazení $F$*. Úplný obraz v přiřazení $F$

[5]) V české odborné literatuře se téměř výhradně používá termín *binární relace* v množině $M \times N$. Abychom dodrželi posloupnost výkladu a také některé zvláštnosti autorova přístupu, budeme v této kapitole používat místo binární relace termín přiřazení. (Pozn. překl.)

lipského obyvatele $x$ je tedy prázdný, jestliže není žákem, jinak je to množina všech jeho učitelů. Úplný vzor v přiřazení $F$ lipského učitele $y$ je množina jeho žáků. Tento příklad o učitelích a žácích nás upozornil mimo jiné na to, že v přiřazení $F \subset M \times N$ se mohou případně vyskytnout jisté prvky množiny $M$, které vůbec nejsou vzory v přiřazení $F$, a zrovna tak je možné, že jisté prvky z $N$ nejsou obrazy v přiřazení $F$. V našem příkladu vystupují jako vzory jen ti lipští občané, kteří jsou školou povinní; a kojenec zas nemůže být obrazem v přiřazení „$x$ si píše s $y$“.

Proto nazýváme tu podmnožinu množiny $M$, jež sestává ze všech vzorů v přiřazení $F$, *definičním oborem* $F$. Analogicky rozumíme *oborem hodnot* $F$ podmnožinu množiny $N$ všech obrazů v přiřazení $F$ (symbolicky $\mathscr{D}(F)$, $\mathscr{H}(F)$). Je-li $F$ naše přiřazení žák — učitel, zjistíme okamžitě, že $\mathscr{D}(F)$ je množina všech lipských obyvatel školou povinných, $\mathscr{H}(F) = U$. Pro kuchařku je důležitá rovnost $\mathscr{D}(F) = H$, tj. že se ke každému hrnci najde vhodná poklička.

V následující definici jsou shrnuty všechny právě zavedené pojmy.

**Definice 1.8.** (1) *Přiřazení $F$ z množiny $M$ do množiny $N$* je podmnožina kartézského součinu $M \times N$:
$F$ je přiřazení z $M$ do $N \Leftrightarrow F \subset M \times N$.
Místo „$F$ je přiřazení z $M$ do $N$“ píšeme stručně $F$: $M \to N$.

(2) Je-li $(x, y) \in F$, nazývá se $y$ *obraz prvku $x$ v přiřazení $F$*, $x$ se nazývá *vzor prvku $y$ v přiřazení $F$*. Říkáme, že $F$ přiřazuje prvku $x$ prvek $y$ a píšeme též $x \overset{F}{\mapsto} y$.

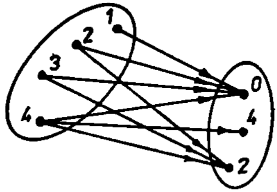
(3) Množina všech obrazů při $F$ prvku $x \in M$ se nazývá *úplný obraz $x$ v přiřazení $F$*; množina všech vzorů v přiřazení $F$ prvku $y \in N$ se nazývá *úplný vzor $y$ v přiřazení $F$*.

(4) Množina všech vzorů v přiřazení $F$ se nazývá *definiční obor* $\mathscr{D}(F)$ *přiřazení* $F$; množina všech obrazů v přiřazení $F$ se nazývá *obor hodnot* $\mathscr{H}(F)$ *přiřazení* $F$.

Protože přiřazení jsou podle D(1.8) množiny, je také jasné, kdy se dvě přiřazení $F$ a $G$ z $M$ do $N$ rovnají:

$F = G$, právě když pro všechna $x \in M$, $y \in N$ platí: $(x, y) \in F \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

Z tohoto množinově teoretického přístupu také hned vyplývají možnosti, jak přiřazení $F$: $M \to N$ popsat; buď provedeme výčet všech dvojic $(x, y) \in M \times N$ příslušných k $F$, nebo udáme charakteristickou vlastnost, kterou mají právě jen dvojice kartézského součinu $M \times N$ patřící do $F$.

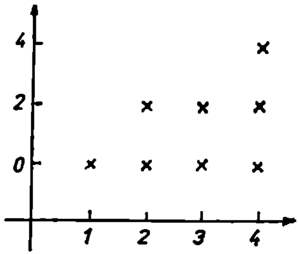



Obr. 6

Pro znázornění přiřazení $F$: $M \to N$ přiřaďme každému prvku $x \in M$ a každému $y \in N$ právě jeden bod $P_x$, resp. $P_y$, v rovině. Různým prvkům přiřadíme různé body, nejpřehledněji tak, že všechny body přiřazené prvkům z $M$ budou ležet v jedné oblasti roviny a body přiřazené prvkům z $N$ v jiné, s prvou disjunktní oblasti téže roviny, jak je patrné z obr. 6. Pak nakreslíme šipku z bodu $P_x$ do bodu $P_y$, právě když platí $(x, y) \in F$. Vznikne tak uzlový graf přiřazení $F$. Přirozeně se dá takto přiřazení $F$ plně zobrazit, jen když jsou $\mathscr{D}(F)$ a $\mathscr{H}(F)$ konečné množiny. Např. pro $M = \{1, 2, 3, 4\}$,

$N = \{0, 2, 4\}$ a $F = \{(1; 0), (2; 0), (2; 2), (3; 0), (3; 2), (4; 0), (4; 2), (4; 4)\}$ ukazuje uzlový graf přiřazení $F$ obr. 6.

K další možnosti znázornění se necháme inspirovat známým zobrazováním funkcí v souřadnicovém systému: Nakreslíme dvě (pro jednoduchost navzájem kolmé) souřadnicové osy, na jedné z os zvolíme body odpovídající prvkům z $M$ (různým prvkům odpovídají různé body, a obráceně), na druhé ose body odpovídající prvkům z $N$ a v souřadnicové rovině označíme právě ty body se souřadnicemi $x$, $y$, pro něž platí $(x, y) \in F$. Tak dostaneme graf přiřazení. Graf předchozího příkladu je na obr. 7.




Obr. 7

Pro každé přiřazení $F$ z $M$ do $N$ je $\mathscr{D}(F) \subset M$, $\mathscr{H}(F) \subset \subset N$. Speciální případy $\mathscr{D}(F) = M$, resp. $\mathscr{H}(F) = N$ budeme odlišovat i slovně: V případě $\mathscr{D}(F) = M$ budeme mluvit o *přiřazení $M$ do $N$*, v případě $\mathscr{H}(F) = N$ o *přiřazení z $M$ na $N$*. Dostáváme tak pro přiřazení $F$: $M \to N$ čtyři případy, které shrnuje následující tabulka.

| | $\mathscr{H}(F) \subset N$, $\mathscr{H}(F) \neq N$ | $\mathscr{H}(F) = N$ |
|---|---|---|
| $\mathscr{D}(F) \subset M$ $\mathscr{D}(F) \neq M$ | $F$ je přiřazení z $M$ do $N$ | $F$ je přiřazení z $M$ na $N$ |
| $\mathscr{D}(F) = M$ | $F$ je přiřazení $M$ do $N$ | $F$ je přiřazení $M$ na $N$ |

Proberme ještě několik příkladů přiřazení:

(1) Je-li $K$ daná kružnice, nechť je každému bodu $P$ roviny, který neleží uvnitř kružnice, přiřazen bod $P'$ dotyku tečny sestrojené z bodu $P$ ke kružnici $K$. Označíme-li $M$ množinu všech bodů roviny, dostáváme tak přiřazení $F$ z $M$ do $M$ a platí: $(P, P') \in F$, právě když $PP'$ je tečna ke $K$ s bodem dotyku $P'$. Je tedy $\mathscr{D}(F)$ množina všech bodů neležících uvnitř kružnice $K$, $\mathscr{H}(F)$ je množina všech bodů kružnice. Úplný obraz v přiřazení $F$ bodu $P$ sestává ze dvou bodů (právě z jednoho bodu), leží-li $P$ vně $K$ (na $K$). Úplný vzor v přiřazení $F$ bodu $P'$ kružnice $K$ je množina všech bodů tečny sestrojené ke $K$ v bodě $P'$.

(2) Nechť přiřazení $F$ přiřadí každému reálnému číslu $x$ jeho druhou mocninu $x^2$. Pak je $F$ přiřazení $\mathsf{R}$ do $\mathsf{R}$, přesněji $\mathsf{R}$ na $\mathsf{R}_0^+$, kde $\mathsf{R}_0^+$ označuje množinu všech nezáporných reálných čísel. Úplný obraz v přiřazení $F$ každého prvku $x \in \mathsf{R}$ obsahuje právě jeden prvek. Úplný vzor v přiřazení $F$ prvku $y \in \mathsf{R}$ je prázdný, jestliže $y < 0$, obsahuje právě jeden prvek, je-li $y = 0$, a obsahuje právě dva prvky, jestliže $y > 0$.

(3) Přiřazení $F\colon M \to M$, pro něž $(x, y) \in F$, právě když $x = y$, tj. které zobrazuje každý prvek množiny $M$ na sebe, se nazývá *identické přiřazení* $I_M$.

(4) Přiřazení $F\colon M \to N$, pro něž $(x, c) \in F$ pro všechna $x \in M$ a pro pevné $c \in N$, které každému prvku

$x \in M$ přiřazuje tentýž prvek $c \in N$, se nazývá *konstantní přiřazení.*

(5) Přiřazení $P_x$: $M \times N \to M$, které každé uspořádané dvojici $(x, y) \in M \times N$ přiřazuje její první složku $x$, se nazývá *projekce $M \times N$ na $M$*. Toto označení bude hned srozumitelné, jestliže toto přiřazení znázorníme geometricky v souřadnicovém systému. Zde je $\mathscr{D}(F) = M \times N, \mathscr{H}(F) = M$, $P_x$ je tedy přiřazení $M \times N$ na $M$. Analogicky se nazývá přiřazení $P_y$: $M \times N \to N$, kde $P_y = \{((x, y), y): x \in M, y \in N\}$, *projekce $M \times N$ na $N$*, neboť přiřazuje každé uspořádané dvojici $(x, y)$ její druhou složku $y$.

Je-li $F$: $M \to N$ přiřazení z $M$ do $N$, můžeme se ptát po přiřazení, které přiřazení $F$ „obrací", jež tedy každému obrazu $y \in N$ v přiřazení $F$ přiřadí opět jeho vzory z $M$, jeho úplný vzor v přiřazení $F$. Toto přiřazení z $N$ do $M$ se bude nazývat *inverzní přiřazení k $F$* a budeme ho značit $F^{-1}$.

**Definice 1.9.** *Inverzním přiřazením $F^{-1}$ k přiřazení $F$: $M \to N$* budeme rozumět přiřazení $F^{-1}$: $N \to M$, kde $F^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in F\}$, tj. $F^{-1}$ obsahuje uspořádanou dvojici $(y, x)$, právě když je $(x, y) \in F$.

Z této definice okamžitě plyne:

— Jestliže $(x, y) \in F$, je úplný obraz prvku $x$ v přiřazení $F$ roven úplnému vzoru $x$ v přiřazení $F^{-1}$ a úplný vzor v přiřazení $F$ je roven úplnému obrazu $y$ v přiřazení $F^{-1}$.

— $\mathscr{D}(F^{-1}) = \mathscr{H}(F); \mathscr{H}(F^{-1}) = \mathscr{D}(F)$.

— Přiřazení $(F^{-1})^{-1}$ inverzní k $F^{-1}$ je rovno původnímu přiřazení $F$, neboť
$(F^{-1})^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in F^{-1}\} = \{(x, y): (x, y) \in F\} = F$.

Inverzní přiřazení k přiřazení z příkladu 2 je tedy to, které každému nezápornému reálnému číslu $y$ přiřazuje obě čísla $+\sqrt{y}$ a $-\sqrt{y}$.

Pro aplikace jsou zvlášť důležitá taková přiřazení $F$, která každému prvku $x \in \mathscr{D}(F)$ přiřazují právě jeden obraz $y \in \mathscr{H}(F)$. Taková přiřazení, jako např. přiřazení z příkladu 2, se nazývají *zobrazení* nebo *funkce*[6]) a obraz $x$ v přiřazení $F$ se označuje jako $F(x)$.

Je zvykem označovat funkce malými písmeny latinské nebo řecké abecedy pro lepší odlišení od obecných přiřazení — zejména písmeny $f$, $g$, $h$, $\varphi$, $\psi$, $\varrho$, $\sigma$, $\tau$, $\pi$; např. $i$ se používá pro identické zobrazení. Příklad 2 ukazuje, že inverzní přiřazení k zobrazení $F$ už nemusí být zobrazením. Zobrazením je tehdy a jen tehdy, jestliže také pro každé $y \in \mathscr{H}(F)$ úplný vzor $y$ obsahuje právě jeden prvek $x \in \mathscr{D}(F)$, tj. když nejen vzor jednoznačně určuje svůj obraz, ale také obraz dovoluje jednoznačně určit svůj vzor. Taková přiřazení se nazývají *vzájemně jednoznačná zobrazení* (někdy také jednojednoznačná). Právě zdvojení slova „jedno“ má naznačit, že přiřazení je „jednoznačné v obou směrech“. Příkladem pro to je zobrazení $f\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, $f = \{(x, x^3)\colon x \in \mathsf{R}\}$. Místo toho obvykle píšeme stručně $f(x) = x^3$, neboť předpis, který každému $x \in \mathscr{D}(f)$ jednoznačně přiřazuje jeho obraz $y = x^3 \in \mathscr{H}(f)$, může být zprostředkován pomocí početního výrazu nazývaného také funkční předpis. Přesto ale musíme navzájem přísně rozlišovat funkci $f$ a její funkční předpis, např. $y = f(x)$; je

$$f = \{(x, y)\colon x \in \mathscr{D}(f) \text{ a } y = f(x)\}.$$

Kromě toho bychom mohli tutéž funkci charakterizovat různými početními výrazy, např. $f = \{(x, y)\colon x \in \mathsf{N}_0$ a $y = (-1)^x\} = \left\{(x, y)\colon x \in \mathsf{N}_0 \text{ a } y = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

[6]) Funkcemi nazýváme ta zobrazení, jejichž obor hodnot je číselná množina. (Pozn. překl.)

Také musíme přísně rozlišovat mezi obrazem $f(x)$ prvku $x$ — zde je $x$ libovolný pevný prvek z $\mathscr{D}(f)$ — a pravou stranou $f(x)$ funkčního předpisu, ve kterém $x$ značí proměnnou s definičním oborem $\mathscr{D}(f)$. Upozorňujeme na to hlavně proto, že pro oboje používáme stejný symbol. Je-li $f$ vzájemně jednoznačné zobrazení, je také $f^{-1}$ vzájemně jednoznačné, což okamžitě odvodíte ze vztahu $(F^{-1})^{-1} = F$, který je správný pro libovolné přiřazení $F$.

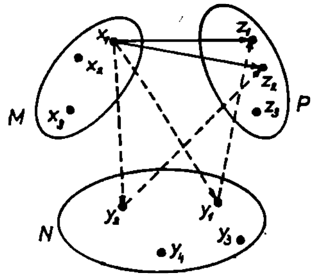
**Definice 1.10.** (1) Přiřazení $F\colon M \to N$ se nazývá *zobrazení* nebo *funkce*, právě když pro všechna $x \in \mathscr{D}(F)$, $y_1, y_2 \in \mathscr{H}(F)$ platí:
$[(x, y_1) \in F$ a $(x, y_2) \in F] \Rightarrow y_1 = y_2$;
jinak řečeno: různé obrazy mají také různé vzory.

(2) Přiřazení $F\colon M \to N$ se nazývá *vzájemně jednoznačné zobrazení*, právě když je to zobrazení a pro všechna $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(F)$, $y \in \mathscr{H}(F)$ platí:
$[(x_1, y) \in F$ a $(x_2, y) \in F] \Rightarrow x_1 = x_2$;
jinak řečeno: různé obrazy mají různé vzory a různé vzory mají také různé obrazy.

Na závěr se ještě podívejme na skládání přiřazení, operaci nám už dobře známou pro funkce.

**Definice 1.11.** Jsou-li $F\colon M \to N$ a $G\colon N \to P$ dvě přiřazení, pak jejich *součinem* nebo *složením* $F \circ G$ (čteme „$F$ složeno s $G$“) rozumíme takové přiřazení z $M$ do $P$, pro něž je $F \circ G = \{(x, z)$: existuje $y$, že $(x, y) \in F$ a $(y, z) \in G\}$.

Zvlášť názornou představu o skládání dvou přiřazení nám zprostředkovává uzlový graf (obr. 8). Ten vznikne „přemostěním“ všech na sebe navazujících dvojic šipek patřících do $F$ a do $G$, bezprostředně tak spojíme prvek z $M$ s prvkem z $P$. Nakonec je také prospěšné si rozmyslet, jak se pozná zobrazení (resp. vzájemně jednoznačné zobrazení) podle uzlového nebo kartézského grafu.




Obr. 8

Jsou-li funkce $f$ a $g$ dány funkčními předpisy $y = f(x)$, resp. $y = g(x)$, přísluší funkci $f \circ g$ funkční předpis $y = g(f(x))$; platí tedy: $[f \circ g]\,(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathscr{D}(f \circ g) \subset \mathscr{D}(f)$. Může se ovšem také stát, že je $f \circ g = \emptyset$, je-li totiž $\mathscr{H}(f) \cap \mathscr{D}(g) = \emptyset$.

Je-li $F$ přiřazení z $M$ do $M$, pak můžeme také utvořit $F \circ F$. Např. pro $F = \left\{(x, y) \colon x \in \mathsf{R} \setminus \{0\} \text{ a } y = \dfrac{1}{x}\right\}$ je součin $F \circ F = I_{\mathscr{D}(F)}$ (identita na $\mathscr{D}(F)$.) Přiřazení $F \neq I$ s vlastností $F \circ F = I_{\mathscr{D}(F)}$ se nazývají *involuce*; dvojnásobné užití involuce $F$ na prvek $x \in \mathscr{D}(F)$ dává tedy opět tento prvek $x$. Také osová souměrnost podle přímky v rovině je involuce.

O postupném skládání přiřazení můžeme vyslovit následující větu:

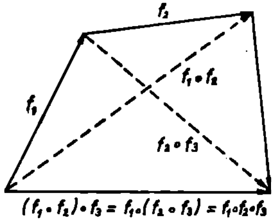
**Věta 1.4.** (1) *Vícenásobné složení přiřazení je možno* *libovolně uzávorkovat:* $F_1 \circ (F_2 \circ F_3) = (F_1 \circ F_2) \circ$ $\circ F_3$.

(2) *Pořadí jednotlivých činitelů v součinu přiřazení je podstatné; obecně platí* $F \circ G \neq G \circ F$.

(3) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$ *pro libovolná přiřazení* $F, G$.

(4) $F$, $G$ *jsou (vzájemně jednoznačná) zobrazení* $\Rightarrow F \circ G$ *je (vzájemně jednoznačné) zobrazení.*

*Důkaz.* (1) Je-li $(x, u) \in F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$, existuje podle definice D(1.11) $y$, pro něž $(x, y) \in F_1$ a $(y, u) \in F_2 \circ F_3$; z posledního vztahu plyne opět existence $z$, že $(y, z) \in F_2$ a $(z, u) \in F_3$. Pak je ale $(x, z) \in F_1 \circ F_2$ a $(z, u) \in F_3$, tedy $(x, u) \in (F_1 \circ F_2) \circ F_3$. Platí tedy $F_1 \circ (F_2 \circ F_3) \subset$ $\subset (F_1 \circ F_2) \circ F_3$ a stejně se ukáže i obrácená inkluze (obr. 9 to ilustruje pro tři funkce $f_1, f_2, f_3$).




Obr. 9

(2) Je-li $F: M \to N$, $G: N \to P$, je sice $F \circ G$ přiřazení z $M$ do $P$, ale $G \circ F$ nelze obecně vůbec utvořit (když $M \cap P = \emptyset$). Ale i když existují obě přiřazení $F \circ G$ i $G \circ F$, jsou zpravidla navzájem různá, jak je vidět už na reálných funkcích s předpisy $f(x) = x^2$ a $g(x) =$ $= \sin x$: $[f \circ g](x) = \sin x^2$, ale $[g \circ f](x) = (\sin x)^2 =$ $= \sin^2 x$.

(3) Je-li $(z, x) \in (F \circ G)^{-1}$, je podle definice inverzního přiřazení $(x, z) \in F \circ G$; existuje tudíž $y$, pro které

$(x, y) \in F$ a $(y, z) \in G$. Pak je ale $(y, x) \in F^{-1}$ a $(z, y) \in G^{-1}$, a tedy $(z, x) \in G^{-1} \circ F^{-1}$. Máme tudíž $(F \circ G)^{-1} \subset G^{-1} \circ F^{-1}$, a stejně se ukáže obrácená inkluze.

(4) Pro jednoznačnost $F \circ G$ je potřeba ukázat: Z $(x, z_1) \in F \circ G$ a $(x, z_2) \in F \circ G$ plyne $z_1 = z_2$. Protože $(x, z_1) \in F \circ G$, existuje prvek $y_1$, pro který $(x, y_1) \in F$ a $(y_1, z_1) \in G$, a protože $(x, z_2) \in F \circ G$, existuje prvek $y_2$, pro který $(x, y_2) \in F$ a $(y_2, z_2) \in G$. Ze vztahů $(x, y_1) \in F$ a $(x, y_2) \in F$ však vzhledem k jednoznačnosti $F$ plyne, že je $y_1 = y_2 = y$. Pak ale máme $(y, z_1) \in G$ a $(y, z_2) \in G$ a z jednoznačnosti $G$ dostáváme $z_1 = z_2$. Je tedy $F \circ G$ jednoznačné. Jsou-li $F$ a $G$ dokonce vzájemně jednoznačná, jsou zejména $F$, $G$, $F^{-1}$, $G^{-1}$ vesměs jednoznačná. Podle toho, co jsme právě dokázali, jsou pak také součiny $F \circ G$ a $G^{-1} \circ F^{-1} = (F \circ G)^{-1}$ jednoznačná přiřazení. A proto je tedy $F \circ G$ vzájemně jednoznačné zobrazení.

## STRÝC TEODOR POŘIZUJE ZÁVĚŤ

### 1.7 ROZKLAD MNOŽINY NA TŘÍDY

**Zde objasníme, kdy se rozdělení množiny na podmnožiny nazývá rozkladem této množiny na třídy**

Klaus referuje svému příteli Petrovi: ,,Nedávno chtěl Werner při vyučování rozdělit všechny trojúhelníky na pravoúhlé a rovnoramenné. Náš učitel byl sice rád, že Werner vůbec pochopil dva matematické pojmy, my jsme však zas jednou měli zábavu.“

Čtenář jistě chápe Klausovu veselost, a my se proto zdržíme komentáře. Tak jako chtěl Werner disjunktně rozdělit trojúhelníky, tak strýc Teodor pečlivě postupuje při psaní své závěti, neboť chce zabránit zbytečným dědickým sporům. Chtěl by proto rozdělit veškeré své jmění tak, aby při podělení dědiců žádná věc nezůstala opomenuta, ale aby také nic nepřipadlo více dědicům. Krom toho nemá být vynechán žádný zákonitý dědic. Budou-li pak dědicové respektovat jeho poslední vůli, nevzniknou žádné rozmíšky kvůli rozdělení majetku.

To nás vede ke zkoumání podmínek, které musí splňovat *rozklad množiny M na podmnožiny*, jež se pak nazývají *třídy*. Nejprve přirozeně musíme dbát na to, aby každý prvek množiny $M$ příslušel některé třídě, tj. aby rozklad množiny $M$ na třídy zahrnoval všechny prvky. To si ovšem strýc Teodor uvědomoval. Naproti tomu rozdělení celých čísel Z na celá kladná a celá záporná čísla nemůžeme akceptovat jako rozklad množiny Z, neboť číslo 0 by zůstalo opomenuto.

Také rozdělení čtyřúhelníků na rovnoběžníky, kosočtverce, deltoidy a na čtyřúhelníky se čtyřmi různě dlouhými stranami je vskutku pochybené, neboť kupříkladu nevíme, zda čtverce počítat mezi rovnoběžníky nebo kosočtverce, anebo mezi deltoidy. Chtěli bychom samozřejmě o každém prvku rozkládané množiny přece přesně vědět, do které třídy rozkladu padne; tak jako se strýc Teodor stará o to, aby žádná část pozůstalosti nepřipadla více dědicům. Tento požadavek zřejmě splníme pochopitelnou podmínkou, aby každé dvě různé třídy byly vždy disjunktní.

A konečně asi nikoho nenapadne utvořit více navzájem disjunktních tříd, než je k sestrojení rozkladu nezbytně nutné; nebudeme tedy dělit množinu modrých, červených, zelených a žlutých předmětů podle barvy do pěti nebo více tříd, když by pak přirozeně zůstala nejméně jedna třída prázdná. Budeme tedy celkem rozumně požadovat, aby žádná ze tříd rozkladu množiny $M$ nebyla prázdná.

Vzhledem k tomu, že třídy rozkladu $M$ jsou podmnožiny $M$, čili množina všech tříd rozkladu je tudíž podmnožinou potenční množiny $\mathcal{P}(M)$ množiny $M$, můžeme nyní definovat pojem „rozkladu $M$“.

**Definice 1.12.** Jsou-li $K_i$ podmnožiny množiny $M$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$ ; případně i nekonečně mnoho), nazývá se množina $\mathfrak{Z} = \{K_i\}$ všech těchto podmnožin *rozklad množiny $M$ na třídy*, právě když současně platí:

(1) Každé $x \in M$ náleží jen do jedné z množin $K_i$.

(2) Libovolné dvě z těchto podmnožin jsou si buď rovny, nebo jsou disjunktní:
$K_i \neq K_j \Rightarrow K_i \cap K_j = \emptyset$.

(3) Žádná z podmnožin není prázdná: $K_i \neq \emptyset$ pro všechna $i$.

Podmnožiny $K_i$ ze $\mathfrak{Z}$ se pak nazývají *třídy rozkladu $\mathfrak{Z}$ množiny $M$.*

Podívejme se teď na několik příkladů takových rozkladů:

(1) Při konstrukci zlomků vyjdeme z množiny všech uspořádaných dvojic $(a, b)$ celých nezáporných čísel $a, b, b \neq 0$, místo $(a, b)$ píšeme ovšem obvykle $\frac{a}{b}$. Nyní zařadíme každý zlomek $\frac{a}{b}$ do třídy $K\left(\frac{a}{b}\right)$ takovýchto zlomků předpisem: $\frac{c}{d} \in K\left(\frac{a}{b}\right)$, právě když $ad = bc$. Např. třída $K\left(\frac{3}{9}\right)$ kromě jiných obsahuje zlomky
$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{15}{45}, \frac{113}{339}$.
Přesvědčme se, že takto dostaneme rozklad množiny všech nezáporných zlomků na třídy.

(a) Libovolný zlomek $\frac{a}{b}$ padne alespoň do jedné z uvažovaných tříd, totiž do třídy $K\left(\frac{a}{b}\right)$, neboť $\frac{a}{b} \in K\left(\frac{a}{b}\right)$ díky rovnosti $ab = ab$.

(b) Jsou-li $K\left(\frac{a}{b}\right)$ a $K\left(\frac{c}{d}\right)$ různé třídy, pak jsou disjunktní, což nejsnáze ukážeme nepřímo: Kdyby zlomek $\frac{x}{y}$ ležel v obou třídách, a tedy i v jejich průniku, plynulo by z $\frac{x}{y} \in K\left(\frac{a}{b}\right)$, že $ay = bx$, a analogicky bychom dostali $cy = dx$ ze vztahu $\frac{x}{y} \in K\left(\frac{c}{d}\right)$.

Implikace

$$\left.\begin{aligned} ay = bx &\Rightarrow ayd = bxd \\ cy = dx &\Rightarrow cyb = dxb \end{aligned}\right\} \Rightarrow ayd = cyb \Rightarrow ad = bc$$

dávají $ad = bc$, odkud, jak hned uvidíme, plyne naopak rovnost obou tříd. Je-li totiž $\frac{a'}{b'}$ nějaký prvek $K\left(\frac{a}{b}\right)$, tj. $ab' = a'b$, pak také platí $a'bd = ab'd = b'(ad) = b'(bc)$, odkud vzhledem k tomu, že $b \neq 0$, plyne $a'd = b'c$, což ale znamená, že $\frac{a'}{b'} \in K\left(\frac{c}{d}\right)$. Je tedy $K\left(\frac{a}{b}\right) \subset K\left(\frac{c}{d}\right)$, a stejným způsobem se ukáže, že $K\left(\frac{c}{d}\right) \subset K\left(\frac{a}{b}\right)$; napište si tuto část důkazu! Je tudíž $K\left(\frac{a}{b}\right) = K\left(\frac{c}{d}\right)$.

(c) Žádná ze tříd není prázdná, neboť $K\left(\frac{a}{b}\right)$ obsahuje, jak jsme už ukázali v (a), přinejmenším zlomek $\frac{a}{b}$.

Dostali jsme tak rozklad množiny všech (nezáporných) zlomků na „třídy zlomků se stejným podílem", což už jistě znáte. Každá taková třída se nazývá *racionální číslo.*

(2) Rozložíme množinu Z celých čísel na tři třídy $K_0$, $K_1$ a $K_2$ podle následujícího principu: Třída $K_0$ bude obsahovat právě čísla dělitelná třemi, $K_1$ (resp. $K_2$) bude obsahovat každé celé číslo, které při dělení třemi dá zbytek 1 (resp. 2). Dvě celá čísla, která dají při dělení třemi tentýž zbytek, se nazývají *kongruentní modulo* 3 a píšeme $a \equiv b \pmod 3$. Např. je $623 \equiv 263 \pmod 3$, ale $624 \not\equiv 263 \pmod 3$, přičemž $\not\equiv$ chápeme a čteme jako „není kongruentní modulo 3". Jak vypadají třídy uvedeného rozkladu?

$$\begin{aligned} K_0 &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} = \\ &= \{3n : n \in \mathsf{Z}\}, \\ K_1 &= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} = \\ &= \{3n + 1 : n \in \mathsf{Z}\}, \\ K_2 &= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} = \\ &= \{3n + 2 : n \in \mathsf{Z}\}. \end{aligned}$$

Vlastně nejsme ještě vůbec oprávněni mluvit o třídách, i když se to zdá být zřejmé. Ověřme to tedy ještě:
(a) Každé celé číslo patří do jedné třídy, totiž do třídy $K_i$, jestliže dává při dělení třemi zbytek $i$. Protože jsou možné jenom zbytky 0, 1 nebo 2, leží v $K_0$, $K_1$ nebo $K_2$.
(b) Dvě různé třídy $K_i$ a $K_j$ jsou disjunktní, protože nezáporný zbytek (menší než 3), který dostaneme při dělení třemi, je určen jednoznačně, neexistuje celé číslo, které by při dělení třemi dávalo jak zbytek $i$, tak také zbytek $j \neq i$.
(c) Žádná třída není prázdná; např. je $0 \in K_0$, $1 \in K_1$, $2 \in K_2$. Třídy tohoto rozkladu se celkem pochopitelně nazývají *zbytkové třídy modulo* 3; přirozeně můžeme Z

rozložit také na 6 zbytkových tříd modulo 6, na 529 zbytkových tříd modulo 529, obecně na $m$ tříd modulo $m$ ($m \geqq 2$). Zbytkové třídy hrají v matematice důležitou úlohu např. v teorii čísel. V následujícím textu budeme obecné souvislosti také často vysvětlovat na příkladu zbytkových tříd.

(3) Rozložení definičního oboru funkce $f$ na třídy prvků se stejným obrazem, tj. na úplné vzory prvků z oboru hodnot, je rozklad; třídy tohoto rozkladu se nazývají *řezy funkce* a definují se jako $K_y = \{z \in \mathscr{D}(f): (z, y) \in f\}$.
(a) Každý prvek $x \in \mathscr{D}(f)$ přísluší alespoň jedné třídě, neboť vzhledem k tomu, že $x \in \mathscr{D}(f)$, obsahuje $f$ alespoň jednu dvojici s první složkou $x$: $(x, y) \in f$. Je tedy $x \in K_y$.
(b) Libovolné dvě třídy $K_y \neq K_z$ jsou disjunktní, protože kdyby bylo $x \in K_y$ a $x \in K_z$, tak by bylo $(x, y) \in f$ a $(x, z) \in f$, odkud díky jednoznačnosti $f$ okamžitě plyne $y = z$, tedy $K_y = K_z$, což je spor s předpokladem $K_y \neq$ $\neq K_z$.
(c) Žádná třída není prázdná, neboť každý obraz při $f$ obsahuje alespoň jeden vzor.
Tak funkci s funkčním předpisem $y = \sin x$ přísluší obrazu $y = 0$ řez $K_0 = \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\} =$ $= \{k\pi: k \in \mathsf{Z}\}$; obrazu $y = s$ ($-1 \leqq s \leqq 1$) přísluší jako řez $K_s$ množina prvních souřadnic všech průsečíků přímky $y = s$ s grafem funkce sinus. Máme-li při řešení goniometrické nebo trigonometrické úlohy vyčíslit hledaný úhel z hodnoty goniometrické funkce, máme-li jej tedy „přečíst“ z tabulky této funkce, vezmeme podle našeho způsobu vyjadřování z tabulky prvek řezu. Všechna řešení goniometrické rovnice pak dostaneme, přihlédneme-li ke vztahům mezi kvadranty a k periodicitě funkce.

(4) Podíváme se ještě na jeden zajímavý příklad rozkladu množiny, jejíž prvky jsou opět množiny: V po-

tenční množině $\mathscr{P}(\mathsf{R})$ množiny R reálných čísel zařadíme množiny $A$, $B \in \mathscr{P}(\mathsf{R})$ do téže třídy, právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $A$ na $B$. Jsou-li množiny $A$ a $B$ konečné, pak je k tomu zřejmě nutné a stačí, aby obě měly stejný počet prvků. V oboru konečných podmnožin potenční množiny tento předpis tedy vede k rozdělení množin podle počtu jejich prvků, a to je jistě rozklad podle naší definice. Jestliže ale vstoupí do hry také nekonečné množiny, je třeba ještě ukázat, zda i pak dostaneme rozklad. Jaké třídy vzhledem k uvedenému rozkladu pak ještě vzniknou, prozradíme v odstavci 1.8.

Spolu s těmito příklady vznikají takovéto otázky: Je možné každý rozklad množiny $M$ vytvořit nějakým takovým předpisem, tj. vztahem, který určuje, kdy dva prvky z $M$ patří do téže třídy a kdy ne?

Jaké má mít takový vztah mezi prvky množiny $M$ vlastnosti, aby vznikl rozklad $M$?

Těmto otázkám se budeme věnovat v odstavci 2.3.

## JE ČÁST MENŠÍ NEŽ CELEK?

### 1.8 POJEM MOHUTNOSTI
**Zajímavě o nekonečných množinách**

Jsou-li hosté pozváni na oslavu narozenin, je takřka samozřejmé, že každý dostane díl slavnostního dortu a že každý díl je menší než celý dort.

Při výrocích o množinách chtěli bychom „část celku“ přeložit jako „vlastní podmnožina množiny“. Učiníme nyní zajímavý objev, že tvrzení „část je menší než celek“ musí sice vždy platit pro konečné množiny, ale ne nutně pro nekonečné množiny.

Je-li v kině každé sedadlo obsazené, má množina diváků právě tolik prvků jako množina v kině se vyskytujících sedadel. To víme, aniž bychom museli sedadla a diváky počítat. Každému sedadlu můžeme přiřadit právě jednoho diváka (totiž uživatele sedadla) a každému diváku právě jedno sedadlo (totiž jeho místo k sezení). Existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny sedadel na množinu diváků.

U konečných množin se zřejmě vyskytuje právě charakterizovaná souvislost vždy: mají-li $A$ a $B$ stejný počet prvků, existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $A$ na $B$. Můžeme dokonce prvky množin $A$ a $B$ „očíslovat" a přiřadit sobě prvky se stejným číslem. Obráceně, z existence takového zobrazení plyne, že $A$ má právě tolik prvků jako $B$.

Shrneme-li teď do jedné třídy ty množiny, které mají stejný počet prvků, vznikne tak rozklad všech konečných množin na třídy. Každou třídu můžeme pojmenovat. Třída všech jednoprvkových množin se nazývá „1", třída všech dvouprvkových množin „2", atd. Třídu, která obsahuje jen množinu $\emptyset$, nazveme „0".

Zakladatel teorie množin Georg Cantor[7]) použil ideu vzájemně jednoznačného zobrazení i na nekonečné množiny. To umožnilo zobecnit vztah „$A$ má stejný počet prvků jako $B$", který byl pro konečné množiny jasný. Do jaké míry to je prospěšné, budeme muset ovšem ještě ukázat.

**Definice 1.13.** Množiny $M_1$ a $M_2$ se nazývají *stejně mohutné* nebo *ekvivalentní*, právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $M_1$ na $M_2$; píšeme $M_1 \sim M_2$.

---

[7]) Georg Cantor (1845—1918), německý matematik; zabýval se zejména analýzou a topologií; jeho hlavními výsledky jsou aritmetická definice iracionálních čísel a především vytvoření základů teorie množin. Cantor byl také jedním ze zakladatelů německých a mezinárodních matematických kongresů.

Prázdná množina je ekvivalentní pouze sama sobě. Také pojem stejné mohutnosti množin má vlastnosti uvedené v odstavci 1.2 za D(1.1).

Konečné množiny jsou tedy ekvivalentní, právě když obsahují stejný počet prvků. Jak se D(1.13) projeví u nekonečných množin, vyšetříme nejprve na příkladech.

Přiřaďme každému prvku z $N_0$ jeho dvojnásobek.

| | |
|---|---|
| $0 \leftrightarrow 0$ | $157 \leftrightarrow 314$ |
| $1 \leftrightarrow 2$ | $158 \leftrightarrow 316$ |
| $2 \leftrightarrow 4$ | . . . . . . . . . |
| . . . . . | $n \leftrightarrow 2n$ |
| $156 \leftrightarrow 312$ | . . . . . . . . . |

Tak dostaneme ke každému celému nezápornému číslu právě jedno sudé nezáporné číslo a ke každému sudému nezápornému číslu právě jedno celé nezáporné číslo, jak je znázorněno na připojeném schématu; dvojité šipky spojují prvky tímto zobrazením vzájemně přiřazené. $N_0$ je ekvivalentní množině všech sudých nezáporných čísel. Následující význam této skutečnosti je zpočátku zarážející:

Plně obsazený hotel s nekonečně mnoha jednolůžkovými pokoji, které jsou značeny čísly 1, 2, ..., $n$, ..., může přijmout ještě další hosty, jestliže se přemístí host z pokoje 1 do pokoje 2, host z pokoje 2 do pokoje 4, host z pokoje 3 do pokoje 6 ... Po tomto přemístění jsou všichni dosavadní hosté ubytováni a všechny pokoje s lichými čísly se uvolnily pro umístění dalších (dokonce nekonečně mnoha) hostů. Zřejmě má $N_0$ stejnou mohutnost i jako množina $Q$ všech druhých mocnin přirozených čísel, případně i jako množina $D$ všech přirozených čísel dělitelných $10^{10}$. Najděte odpovídající vzájemně jednoznačná zobrazení!

$\mathsf{N}_0$ je nekonečná množina. Všechny množiny, které jsou ekvivalentní množině $\mathsf{N}_0$ — mezi něž samozřejmě patří i množina $\mathsf{N}_0$ sama —, se nazývají *spočetně nekonečné množiny*. Toto označení je zvoleno smysluplně, protože je-li $M$ množina ekvivalentní $\mathsf{N}_0$, můžeme každému prvku z $M$ vzájemně jednoznačně přiřadit přirozené číslo. Tímto způsobem budou prvky z $M$ „očíslovány". Předcházející příklady ukazují, že také množina všech sudých čísel a množina všech druhých mocnin přirozených čísel jsou spočetně nekonečné množiny. Cvičení 18 vyžaduje důkaz, že i množina $\mathsf{Q}^*$ patří mezi spočetně nekonečné množiny. Tento výsledek udivuje o to víc, že zlomky leží všude „hustě", tj. mezi dvěma libovolně blízkými zlomky z $\mathsf{Q}^*$ leží vždy ještě alespoň jeden zlomek.

Jak jsme už zjistili, nemůže se u konečných množin nikdy stát, aby vlastní podmnožina $T$ množiny $M$ byla $M$ ekvivalentní, zatímco u nekonečných množin to je docela dobře možné. Dokonce jsme ukázali, že množina $S$ sudých (nezáporných) čísel, $\mathsf{N}_0$ a $\mathsf{Q}^*$ mají stejnou mohutnost, ačkoli platí $S \subset \mathsf{N}_0 \subset \mathsf{Q}^*$ a $S \neq \mathsf{N}_0 \neq \mathsf{Q}^*$.

Zajímavá otázka je, zda existují také *nespočetně nekonečné množiny*, nebo je bohatství nekonečných množin spočetnými množinami už vyčerpáno. Ukážeme, že množina $I = \{x\colon x \in \mathsf{R} \text{ a } 0 < x < 1\}$ je nejen nekonečná, ale dokonce není ani spočetná. Dokážeme to nepřímo tak, že budeme předpokládat, že $I$ je jen spočetně nekonečná.

Každý prvek z $I$ se dá napsat právě jedním způsobem pomocí svého nekonečného dekadického rozvoje, ve kterém se periodicky neopakuje 9, ve tvaru $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$ (např. je $\frac{1}{4} = 0,25\overline{0}\ldots$; $\frac{2}{11} = 0,\overline{18}\ldots$; $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}\ldots$). Kdyby $I$ byla spočetná, existovalo by alespoň jedno vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathsf{N}_0$ na $I$. Nechť je to následující zobrazení:

$$\begin{array}{l}
0 \leftrightarrow 0, a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}\ldots = x_0, \\
1 \leftrightarrow 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots = x_1, \\
2 \leftrightarrow 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots = x_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n \leftrightarrow 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots = x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Na základě našeho předpokladu musí být v tomto zobrazení zahrnuty všechny prvky $x \in I$. Přesto můžeme určit prvky z $I$, které se v tomto seznamu nevyskytují. Utvořme $x' = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ tak, že $b_i = 1$, jestliže $a_{ii} \neq 1$, a $b_i = 2$, jestliže $a_{ii} = 1$. Takto sestrojené číslo $x'$ nemůže být žádné z čísel $x_i \in I$, i když $x' \in I$, neboť $0 < x' < 1$ a $x' \in \mathsf{R}$. Nemůže tedy existovat žádné vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathsf{N}_0$ na $I$; množina $I$ není spočetná. Takováto množina $I$ reálných čísel se nazývá *interval*. Každý interval reálných čísel má stejnou mohutnost jako množina všech reálných čísel. Říkáme, že tyto množiny mají *mohutnost kontinua*. Existují dokonce množiny, které nejsou ani spočetné, ani nepatří k těm, jež mají mohutnost kontinua. Množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu $I$ patří mezi ně.

Otevřená ale zůstala ještě úvodní otázka, kdy je jedna množina „menší" než druhá. U konečných množin se pro porovnání velikosti nabízí počet prvků. Pro libovolné množiny můžeme vyslovit následující pravidlo: Množina $M_1$ má menší mohutnost než množina $M_2$, právě když $M_1$ nemá stejnou mohutnost jako $M_2$, a přitom existuje vlastní podmnožina množiny $M_2$, která je ekvivalentní $M_1$.

Co se týče konečných množin, dává tato definice stejný výsledek, jako když porovnáme počet prvků daných množin.

Je zajímavé, že tato definice také dovoluje „odstupňovat" mohutnosti i nekonečných množin. Poznali jsme tři třídy nekonečných množin:

1. Spočetně nekonečné množiny,
2. množiny mohutnosti kontinua,
3. množiny, které nejsou ani spočetné, ani nemají mohutnost kontinua.

Zřejmě každá spočetná množina může být chápána jako vlastní podmnožina nějaké vhodné množiny mohutnosti kontinua, ale ne obráceně. Jsou tedy spočetně nekonečné množiny „menší" než ty, jež mají mohutnost kontinua. Množiny zahrnuté do bodu 3 mají ještě větší mohutnost, než je mohutnost kontinua.

Dodnes ještě zůstává otevřená otázka, zda existuje nekonečná množina, která obsahuje spočetnou množinu jako vlastní podmnožinu, je vlastní podmnožinou množiny mohutnosti kontinua, ale sama nepatří ani k množinám uvedeným v bodě 1, ani k množinám z bodu 2. Mohutnost takové množiny by tedy ležela „mezi" spočetným nekonečnem a kontinuem. Tzv. *hypotéza kontinua* vylučuje existenci takových množin.

## 1.9 CVIČENÍ

1. Následující množiny zapište ve tvaru $M = \{x : x \in E$ a $H(x)\}$.
   a) $M_1$: množina všech racionálních čísel, jež jsou větší než 2 nebo menší než $-2$.
   b) $M_2$: $\{+1; -1\}$.
   c) $M_3$: množina všech racionálních čísel, jež jsou menší než $\pi$ a zároveň větší než $\frac{22}{7}$.

2. Tři přímky $p_1$, $p_2$, $p_3$ v rovině jsou popsány následujícími rovnicemi:
$x + 2y = 4$, $x - 2y = 0$, $3x - 2y = 4$.
Určete $p_1 \cap p_2 \cap p_3$ a odůvodněte výsledek.

3. Dokažte, že pro libovolné množiny $A$, $B$ platí:
a) $A \cup (A \cap B) = A$, b) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

4. Dokažte: $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

5. Dokažte: Jsou-li alespoň dvě z množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjunktní, pak platí $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$. Platí také obrácené tvrzení?

6. Nechť $A$ a $B$ jsou libovolné množiny. Která z následujících tvrzení jsou logicky ekvivalentní?
(1) $A \subset B$, (2) $A \cap B = A$, (3) $A \cup B = B$,
(4)$A \setminus B = \emptyset$.

7. Dokažte následující výrok: Pro libovolnou množinu $Z$ platí (při daných množinách $A$ a $B$)
$[A \subset Z$ a $B \subset Z] \Rightarrow A \cup B \subset Z$.
Tento výrok se dá vyložit takto: Ze všech nadmnožin množin $A$ a $B$ je $A \cup B$ „nejmenší" ve smyslu inkluze. Zformulujte odpovídající výrok pro průnik.

8. Pravdivý, či ne? Vyšetřete následující výroky:
a) Z $A \subset B$ a $B \not\subset C$ plyne $A \not\subset C$.
b) Z $A \not\subset B$ plyne $B \not\subset A$.
c) Z $A \subset B$, $A \neq B$ plyne $B \not\subset A$.
d) Z $A \subset B$ a $A \not\subset C$ plyne $B \not\subset C$.

9. Popište množinu $A \cap (B \cup C)$, jestliže nastane jeden z následujících případů:
a) $A \cap B = \emptyset$, b) $B = C$, c) $A \subset C$, d) $C = \emptyset$, e) $A = \emptyset$.

10. Určete $A \times B \times C$ pro $A = \{0; 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2; 4\}$.
Z kolika prvků se skládá $A \times B$, jestliže $A$ je $r$=prvková a $B$ $s$-prvková množina?

11. Dokažte, že $A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$ platí pro libovolné množiny $A$, $B$ a $C \neq \emptyset$.

12. Která z následujících přiřazení jsou zobrazení?
$F_1 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5,3)\}$ z $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ do $M$,
$F_2 = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0$ a $y = x$, jestliže $x$ je sudé; $y = x + 1$, jestliže $x$ je liché$\}$ z $\mathsf{N}_0$ do $\mathsf{N}_0$,
$F_3 = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0$ a $1 + x < y\}$ z $\mathsf{N}_0$ do $\mathsf{N}_0$,
$F_4 = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0$ a $x^2 = y^2\}$ z $\mathsf{N}_0$ na $\mathsf{N}_0$,
$F_5 = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{Z} \times \mathsf{Z}$ a $x^2 = y^2\}$ ze $\mathsf{Z}$ na $\mathsf{Z}$.
Která z těchto přiřazení jsou dokonce vzájemně jednoznačná? Jak se vzájemná jednoznačnost funkce odráží v jejím kartézském grafu, resp. v jejím uzlovém grafu?

13. Pro funkce
$f = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0$ a $y = x^2 + 1\}$
a
$g = \{(x, y): (x, y) \in \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0$ a $y = 3x + 2\}$
určete $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f^{-1}$ a $g^{-1}$.

14. Nechť $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Které z následujících podmnožin $\mathcal{P}(M)$ tvoří rozklad $M$?
a) $\{\{a, b, c\}, \{c\}, \{d, g\}\}$,
b) $\{\{a, e, g\}, \{c, a\}, \{b, e, f\}\}$,
c) $\{\{a, b, e, g\}, \{c\}, \{d, f\}\}$,
d) $\{\{a, b, c, d, e, f, g\}\}$.

15. Uvažujme všechny trojúhelníky v rovině. Je-li $T$ libovolný trojúhelník, třídu $K(T)$ tvoří všechny trojúhelníky podobné $T$. Zjistěte, zda toto rozdělení je rozklad.

16. Které z následujících množin jsou konečné, které nekonečné?
a) $M_1 = \{x: x \in \mathsf{N}_0$ a $x > 5\}$,
b) $M_2 = \{x: x \in \mathsf{N}_0$ a $x < 100^{100}\}$,
c) $M_3 = \{x: x \in \mathsf{N}_0$ a $x^2 > 100\}$,
d) $M_4 = \{x: x \in \mathsf{N}_0$ a $10^{10} | x\}$,
e) $M_5 = \{x: x \in \mathsf{Q}$ a $0{,}001 < x < 0{,}002\}$,
f) $M_6 = \{x: x \in \mathsf{Z}$ a $x < 1\,000\}$.

**17.** Ukažte, že množina všech zlomků tvaru $\frac{1}{n}$, kde $n \in N_0 \setminus \{0\}$ (kmenové zlomky), a také množina všech uspořádaných dvojic přirozených čísel jsou spočetně nekonečné množiny.

**18.** Dokažte: Množina $Q^*$ všech zlomků je spočetná.