Nerovnosti v trojúhelníku

Cvičení

In: Stanislav Horák (author): Nerovnosti v trojúhelníku. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 106–110.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404135

CVIČENÍ

1. Dokažte, že v ostroúhlém trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 2\pi.$$

2. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí:

a) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqq \dfrac{\pi^2}{3}$;

b) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leqq \dfrac{\pi^2}{3}$.

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

3. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{9}{8}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Dokažte.

4. O úhlech trojúhelníku platí

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2} \geqq 9;$$

rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Dokažte.

5. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma \leqq \frac{3}{2},$$

kde rovnost nastane, právě když $\alpha = \beta = \frac{1}{6}\pi$, $\gamma = \frac{2}{3}\pi$.

6. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma.$$

7. (Vztahuje se k úloze 2.) Pro které hodnoty čísla k má trojúhelník při vrcholu C a) ostrý úhel, b) tupý úhel?

8. (Týká se úlohy 4.) Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\sqrt{\frac{1}{r}} < \sqrt{\frac{1}{r_a}} + \sqrt{\frac{1}{r_b}} + \sqrt{\frac{1}{r_c}} \leqq \sqrt{\frac{3}{r}}.$$

Rovnost v nerovnosti napravo platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

9. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\sqrt{a\sin\alpha} + \sqrt{b\sin\beta} + \sqrt{c\sin\gamma} \leqq \sqrt{3s\sqrt{3}}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

10. Pro každý pravoúhlý trojúhelník platí

$$c \geqq \frac{a+b}{\sqrt{2}};$$

rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

11. O výškách trojúhelníku platí

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \geqq \frac{2}{R}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

12. O výškách trojúhelníku platí

$$\sqrt{v_a} + \sqrt{v_b} + \sqrt{v_c} \geqq \frac{3}{2}\sqrt{6R}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

13. Trojúhelníku je vepsána kružnice $k = (O; r)$. Kolmice sestrojená v bodě O k přímce AO (BO; CO) protne stranu AB (BC; CA) v bodě C' (A'; B'). Dokažte, že platí

$$|OA'|^2 + |OB'|^2 + |OC'|^2 \geqq 4r^2.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

14. Důkazů věty Hadwigerovy—Finslerovy je několik. Velmi stručně tu uvedeme jeden z nich.
V nerovnosti **F**

$$xy + yz + zx \geqq \sqrt{3xyz(x+y+z)},$$
$$x, y, z \geqq 0,$$

kde rovnost platí, právě když $x = y = z$, položme

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c \quad \text{atd.}$$

15. K Hadwigerově—Finslerově větě: Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$a \sin\alpha + \beta \sin\beta + c \sin\gamma \geqq 2S\sqrt{3} : R.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

16. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 32RS.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

17. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí

$$\sin^{-1}\alpha + \sin^{-1}\beta + \sin^{-1}\gamma \geqq 2\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

18. Na základě výsledku předešlého cvičení dokažte, že

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Přitom rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

19. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Kdy platí znaménko rovnosti?

20. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqq 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Dokažte.

21. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$v_a v_b v_c \leqq r_a r_b r_c .$$

Kdy platí rovnost?

22. Dokažte, že o úhlech každého trojúl.elníka platí

$$\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqq 1,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

23. Na základě výsledku předchozího cvičení dokažte:

a) $Z = \left(\frac{r_a - r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_b - r}{b}\right)^2 + \left(\frac{r_c - r}{c}\right)^2 \geqq 1\,;$

b) $U = \frac{r_a - r}{r_b + r_c} + \frac{r_b - r}{r_c + r_a} + \frac{r_c - r}{r_a + r_b} \geqq 1 .$

Rovnost v obou případech nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

24. O prvcích trojúhelníku platí

$$a w_a + b w_b + c w_c \geqq 6 s r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.