Faktoriály a kombinační čísla

Výsledky úloh

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 108–122.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404121

VÝSLEDKY ÚLOH

1. a) Levou stranu postupně upravíme takto:

$$7!.1.2.3.1.2.3.1.2 = 7!.8.9 = 9!.$$

Podobně ověříme i další rovnosti.

2. První z čísel je větší.

3. a) Kdyby pro některé n platilo

$$n!.(n + 3)! \leqq (n + 1)!.(n + 2)!,$$

pak by po zkrácení vyšlo

$$n + 3 \leqq n + 1,$$

což je spor.

b) Kdyby pro některé n bylo

$$n! + (n + 3)! \leqq (n + 1)! + (n + 2)!,$$

pak bychom po zkrácení a malé úpravě měli tento spor:

$$n^3 + 5n^2 + 7n + 4 \leqq 0.$$

4. Oba vzorce se dokazují matematickou indukcí.

5. Počet možností je $7!.5!$.

6. Je to možné $(n - 1)!$ způsoby.

7. Nemůžeme, jak vyplývá z této úvahy:

Každému vrcholu krychle se dá přiřadit jedno z čísel 1 a 2 tak, že koncové body každé hrany jsou vždycky označeny různými čísly. Dá se to zařídit např. tak, že body

$$A, B, C, D, A', B', C', D'$$

dostanou po řadě čísla

$$1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1.$$

Kdyby bylo možné projít po krychli podle požadovaných podmínek, čísla 1 a 2 by se přitom pravidelně střídala. Protože krychle má sudý počet vrcholů, vrcholy A a C by musely mít různá čísla (spor).

8. Pro přirozené číslo n větší než 2 položíme

$$x = n, y = n! - 1, z = (n!)! - 1,$$
$$t = [(n!)!]! - 1.$$

Potom vychází

$$u = [(n!)!]!.$$

9. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $x \leqq y$. Pak zřejmě $z > y$. Kdyby bylo $x < y$, dělíme obě strany dané rovnice číslem $x!$ a po malé úpravě máme

$$1 = \frac{z!}{x!} - \frac{y!}{x!}.$$

Číslo $x + 1$ dělí pravou stranu (proč?), ale nedělí stranu levou (spor).

V případě $x = y$ docházíme k rovnici

$$2 = \frac{z!}{x!}$$

čili

$$2 = z(z - 1) \ldots (x + 1).$$

Odtud plyne, že

$$z = x + 1 = 2,$$

a nacházíme tak jediné řešení

$$x = 1, y = 1, z = 2.$$

10. Nejmenší je $x = 12$, jak se můžeme přesvědčit z tabulek faktoriálů.

11. Výpočet přenecháváme čtenáři.

12. Levou stranu vyjádříme ve tvaru

$$2\,\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

a zlomek rozšíříme číslem n. Tím dostáváme kombinační číslo na pravé straně dokazovaného vztahu (vyjádřené pomocí faktoriálů).

13. Tvrzení dokážeme, přesvědčíme-li se, že číslo

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

je celé. To však je pravda, neboť c_n se dá vyjádřit jako rozdíl dvou kombinačních čísel, totiž

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

jak se přesvědčíme po malé úpravě.

Poznámka. Čísla c_n se jmenují *Catalanova* (podle matematika žijícího v 19. století). Dá se dokázat, že c_n (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$) vyjadřuje počet rozkladů konvexního $(n + 2)$-úhelníku na trojúhelníky. Přitom jeden rozklad mnohoúhelníka dostaneme, sestrojíme-li v něm $n - 1$ úhlopříček, z nichž žádné dvě se neprotínají.

14. Dolní odhad kombinačního čísla dokážeme takto: Součin kombinačního čísla a čísla $2n$ se dá psát jako

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-2}{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n}{n},$$

což je zřejmě větší než 2^{2n}.

Horní odhad se dokáže matematickou indukcí. Pro $n = 5$ máme

$$\binom{2n}{n} = 252 < 256 = \frac{1}{4} \cdot 2^{10}.$$

Ve druhém indukčním kroku použijeme vztahu

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n)!\,.\,(2n+1)\,(2n+2)}{(n!)^2(n+1)\,(n+1)} < 4 \cdot \binom{2n}{n}.$$

15. Nerovnost můžeme upravit na tvar

$$3n^2 + 15n - 164 < 0,$$

čemuž vyhovují přirozená čísla $n \leqq 5$.

16. Ekvivalentními úpravami se nerovnost převede na tvar $mn \geqq 4$. Z toho je rovněž patrné, že rovnost nastane právě pro $m = n = 2$.

17. Vyjdeme ze vztahu

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k},$$

z něhož plyne

$$k\,.\,\binom{n}{k} = (k-1)\,.\,\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k-1}.$$

Nyní vyšetříme, kdy je zlomek $\frac{n-k+1}{k-1}$ větší než 1, kdy se rovná číslu 1 a kdy je menší než toto číslo. Je-li n liché, pak z uvažovaných čísel dostaneme největší pro $k = \frac{n+1}{2}$. Je-li n sudé, pak největší dostaneme pro $k = \frac{n}{2}$ a $k = \frac{n+2}{2}$.

18. Tři.

19. Identitu si ověříme tím, že za kombinační čísla dosadíme podle definice. Abychom určili součet druhých mocnin, dosadíme za jednotlivé sčítance podle dokázané identity a pak dvakrát užijeme upraveného vzorce z příkladu 15 (pro $k = 1$ a pro $k = 2$). Součet druhých mocnin vychází

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

20. Za m dosadíme do daného vztahu po řadě čísla 1, 2 a 3, čímž dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= c, \\ 8 &= b + 2c, \\ 27 &= a + 3b + 3c, \end{aligned}$$

která má řešení

$$a = 6, b = 6, c = 1.$$

Za kombinační čísla dosadíme podle jejich definice a ověříme si, že vztah

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

skutečně platí pro všechna přirozená čísla m, a pak postupujeme jako v předcházející úloze (užíváme vzorce z příkladu 15). Pro součet třetích mocnin vychází po úpravě

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

21. Je zřejmé, že se můžeme omezit jen na celá nezáporná čísla c. Nejprve dokážeme matematickou indukcí toto pomocné tvrzení:

Každé celé nezáporné číslo c lze vyjádřit aspoň jedním způsobem ve tvaru (3) uvedeném v textu úlohy.

Pro $c = 0$ a $c = 1$ je to zřejmé, neboť

$$0 = -\binom{2}{2} - \binom{3}{2} - \binom{4}{2} + \binom{5}{2},$$

$$1 = \binom{2}{2}.$$

Předpokládejme, že pomocné tvrzení platí pro všechna celá nezáporná čísla až do čísla $c_0 \geqq 1$. Číslo $c_0 + 1$ vyjádříme v žádaném tvaru, vyjádříme-li nejprve číslo $c_0 - 1$ podle dokazovaného vzorce (3) a pak si všimneme, že platí

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m+2}{2} - \binom{m+3}{2} + \binom{m+4}{2} = 2$$

pro každé přirozené číslo m. Stačí tedy k vyjádření čísla $c_0 - 1$ připojit další čtyři členy, čímž se součet zvětší o 2. Dostáváme tak vyjádření čísla $c_0 + 1$. Pomocné tvrzení jsme tím dokázali.

Máme-li už jedno vyjádření čísla c ve tvaru (3), pak stačí součet na pravé straně „prodloužit“ tím, že připojíme osm dalších členů

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m+2}{2} - \binom{m+3}{2} + \binom{m+4}{2} - \binom{m+5}{2} + \\ + \binom{m+6}{2} + \binom{m+7}{2} - \binom{m+8}{2},$$

jejichž součet je 0. Tím dostaneme další přípustné vyjádření, a je tedy vidět, že každé celé číslo c lze ve tvaru (3) napsat nekonečně mnoha způsoby.

22. Počet všech možných způsobů je

$$\binom{64}{3} - 8\binom{8}{3}.$$

23. Vznikne $\binom{n}{4}$ průsečíků.

24. Počet všech zkoumaných čtyřúhelníků s pevně zvoleným vrcholem A_i (a zbývajícími vrcholy proměnnými) je

$$s(A_i) = \binom{n-5}{3}.$$

Tři proměnné vrcholy vybíráme totiž z množiny o $n - 3$ prvcích. To je celkem

$$\binom{n-3}{3}$$

možností. Z těchto případů musíme ovšem vyloučit ty, v nichž dva proměnné vrcholy jsou koncové pro tutéž hranu mnohoúhelníka a zbývající proměnný vrchol je vybrán z $n - 5$ vrcholů, jež ještě přicházejí v úvahu. Odečteme-li číslo

$$\binom{n-4}{1}\binom{n-5}{1},$$

nedostaneme ještě $s(A_i)$, neboť některé případy jsme při odčítání započetli dvakrát. Musíme proto ještě přičíst počet způsobů, jimiž se trojice proměnných vrcholů dá vybrat tak, že jeden vrchol sousedí v mnohoúhelníku s oběma zbývajícími. Přičítáme tudíž číslo

$$\binom{n-5}{1}.$$

Celkem tedy máme

$$s(A_i) = \binom{n-3}{3} - \binom{n-4}{1} \cdot \binom{n-5}{1} + \binom{n-5}{1},$$

což po malé úpravě vede ke kombinačnímu číslu výše uvedenému.

Dále je to už snadné. Sečteme-li

$$s(A_1) + s(A_2) + \ldots + s(A_n),$$

započítáváme každý čtyřúhelník čtyřikrát. Hledaný počet čtyřúhelníků je proto

$$\frac{n}{4}\binom{n-5}{3} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}.$$

25. Rovin je celkem $\binom{20}{3}$, z toho

$$\binom{20}{3} - 12$$

prochází vnitřkem.

26. Čtyřstěnů je celkem

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2}.$$

27. Podle příkladu 24, v němž klademe $n = 4$, $r = 3$, jich má být

$$\binom{4+3-1}{3-1} = 15;$$

zde jsou:

(A, A, A, A), (A, A, A, B), (A, A, A, C),
(A, A, B, B), (A, A, B, C), (A, A, C, C),
(A, B, B, B), (A, B, B, C), (A, B, C, C),
(A, C, C, C), (B, B, B, B), (B, B, B, C),
(B, B, C, C), (B, C, C, C), (C, C, C, C).

Každou kombinaci s opakováním jsme tu reprezentovali jednou uspořádanou čtveřicí a písmena ve čtveřici jsme uspořádali podle abecedy.

28. a) $208 + 120\sqrt{3}$; b) $8 - 8i$.

29. Dvakrát použijte Bernoulliho nerovnost.

30. Lze počítat např. logaritmicky. Se čtyřmístnými tabulkami nemůžeme dosáhnout žádané přesnosti, proto použijeme tabulek pětimístných. Podle nich najdeme $0{,}43150 < \log e_{100} < 0{,}43250$, a proto $2{,}700 < e_{100} < 2{,}708$. Máme tedy zaručena dvě desetinná místa — totiž 2,70. Poznamenejme, že úlohu lze řešit též pomocí binomické věty.

31. Důkaz matematickou indukcí.

32. Čtyřmístné logaritmické tabulky a Stirlingův vzorec dávají $\log 300! \doteq 614{,}48$. Z toho lze soudit, že číslo $300!$ má v desítkové soustavě 615 míst.

33. Představme si, že výraz na levé straně vyjádříme podle binomické věty. Je-li n číslo sudé, platí

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = A + B\sqrt{m(m-1)},$$

kde A, B jsou vhodná přirozená čísla. Podle binomické věty za uvedených předpokladů také platí

$$(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = A - B\sqrt{m(m-1)}.$$

Vynásobíme-li spolu oba výrazy na levých stranách těchto dvou rovnic a naložíme-li podobně i s pravými stranami, máme

$$1 = A^2 - m(m - 1)\,B^2.$$

Nyní stačí položit $p = A^2$, takže

$$B\sqrt{m\,(m-1)} = \sqrt{p-1}.$$

Dosadíme-li do prvního vztahu, v němž se čísla A, B vyskytují, dostaneme už žádané vyjádření.

Je-li n liché, pak podle binomické věty máme

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\,)^n = C\sqrt{m} + D\sqrt{m-1},$$

kde C, D jsou opět vhodná přirozená čísla. Podobným obratem jako při sudém n odvodíme

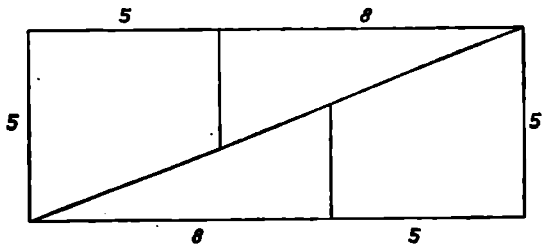
$$1 = mC^2 - (m - 1)\,D^2.$$

Požadovaný výsledek dostaneme, položíme-li $p = mC^2$.

34. Vztah dokážeme matematickou indukcí.

Poznámka. Zmíněné rovnosti se dá využít i v jedné hříčce, jak ukážeme na případu $n = 5$. Pro tuto hodnotu zní dokazovaný vztah

$$F_5F_7 = F_6^2 + 1,$$

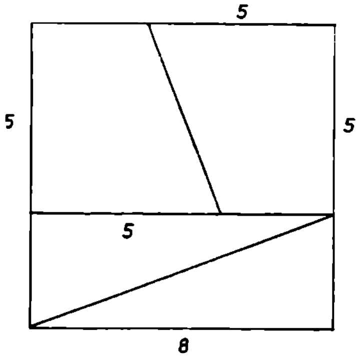


Obr. 12a

čili

$$5.13 = 8^2 + 1.$$

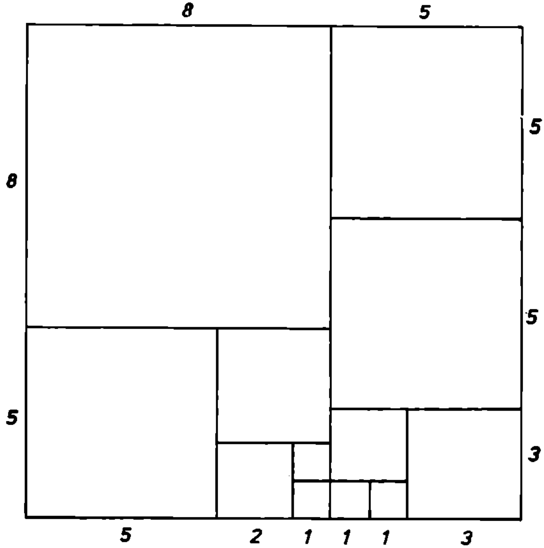
Na obr. 12a vidíme obdélník o stranách velikosti 5 a 13, který rozstřihneme podle jedné úhlopříčky a dvou dalších úseček, jak je v obrázku znázorněno. Přemístíme-li čtyři takto vzniklé části obdélníka, dají se zdánlivě složit ve čtverec o straně velikosti 8, jak to ukazuje obr. 12b. Sami si jistě vysvětlíte, v čem nás názor klame a kam se ztratila jedna jednotka obsahu.



Obr. 12b

Tuto hříčku, jež v rozličných obměnách koluje různými časopisy, vymyslil prý kdysi anglický matematik Charles Lutwidge Dodgson (1832—1898), který psal i beletrii a proslul zvláště svou nematematickou knížkou *Alenka v říši divů* (uveřejnil ji pod pseudonymem Lewis Carroll). Snad tomuto údaji o původu hříčky můžeme věřit, zaznamenal jej před lety matematikův synovec Stuart Dodgson Collingwood.

35. Správnost ověříme numerickým výpočtem a můžeme ji sledovat i v tomto grafickém znázornění. Na obr. 13 vidíme rozklad čtverce o straně velikosti 13 na menší čtverce. Velikost strany každého z nich je také vyjádřena některým Fibonacciho číslem. Obsah velkého čtverce se rovná součtu obsahů jednotlivých menších čtverců.



Obr. 13

Poznámka. Dá se dokázat i toto obecnější tvrzení:

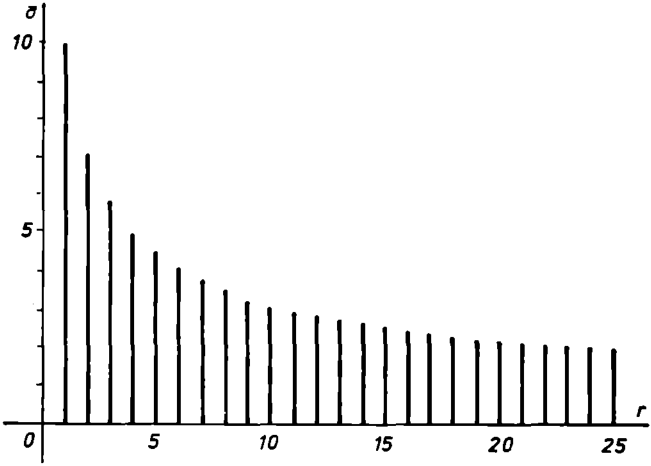
Je-li n libovolné přirozené číslo větší než 2, potom platí

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 + \\ + \dots + F_1^2).$$

Dokažte sami.

36. Matematickou indukcí podle k, přičemž oba vzorce dokazujeme současně.

37. Odpověď je na obr. 14.



Obr. 14

38. Všechny členy jsou čísla trojúhelníková.

39. Nacházíme vyjádření $60 = 6 . 10$.

40. Vyhovují např. všechna prvočísla větší než 3.

41. Číslo 630 má dvě taková vyjádření, neboť

$$630 = 3 . 10 . 21 = 6 . 105 ,$$

42. Z nerovnosti

$$3 + 2\sqrt{2} > 1$$

plyne

$$(3 + 2\sqrt{2})^m < (3 + 2\sqrt{2})^n$$

a z odhadu

$$0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$$

máme

$$(3 - 2\sqrt{2})^m > (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

Odtud už snadno vychází $a_m < a_n$.

43. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, jak plyne např. ze vztahu

$$\binom{3k+1}{2} + \binom{4k+2}{2} = \binom{5k+2}{2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo k.

44. Je-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{6}(3n - 7)$,

v každém jiném případě máme $\frac{n}{2}(n - 1)$ možností.

45. Celkem 125 způsoby.

46. Vítězství si může vynutit ten, kdo upraví počet zápalek na obou hromádkách na tvar uvedený v některé z těchto dvojic:

(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (11, 18), (12, 20), (14, 23), ...

Přitom první člen v i-té dvojici ($i \geqq 2$) je nejmenší přirozené číslo a_i, které se nevyskytuje v žádné předcházející dvojici. Druhý člen b_i je dán vztahem

$$b_i = a_i + i.$$

Poznámka. Tuto hru popsal r. 1907 W. A. Wythoff.*)

47. Vyhovují posloupnosti

(2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4), (4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2).

(Všimněte si, že druhou posloupnost získáme z první, čteme-li ji „pozpátku“.)

48. Vyhovují posloupnosti

(1, 1, 3, 4, 2, 3, 2, 4), (1, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 3),
(2, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 4)

a ovšem také další tři posloupnosti, které získáme, čteme-li každou z těch právě uvedených „pozpátku“.

49. Nechť (a_j, b_j) je j-tá dvojice, kterou jsme uvedli v řešení Wythoffovy hry (úloha 46). Požadovanou posloupnost sestrojíme, jestliže číslo j umístíme právě na dvě místa, totiž na místo a_j-té a na místo b_j-té (pro $j = 1, 2, 3, \ldots$).

Poznámka. Úlohy 47, 48 a 49 jsou jednoduchými variantami tzv. Langfordova problému [C. D. Langford: *The Mathematical Gazette* 42 (1958), str. 228].

---

*) Wythoffovu hru, která patří mezi hry zvané Nim, zařazujeme do této závěrečné kapitoly, protože má kombinatorický charakter a souvisí s problematikou dalších tří úloh. Kdo se zajímá o hry Nim, jistě najde mnoho zajímavého materiálu v knížce *Hry takmer matematické*, kterou napsali J. Gatial, T. Hecht a M. Hejný. Publikace vyšla r. 1982 v edici Škola mladých matematiků jako sv. 53.