Funkcionální rovnice

Kapitola první: Substituční metoda

In: Ljubomir Davidov (author); Zlata Kufnerová (translator); Alois Kufner (translator): Funkcionální rovnice. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1984. pp. 7–[40].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404104

Kapitola první

SUBSTITUČNÍ METODA

1. FORMULACE A PODSTATA METODY

Substituční metoda řešení funkcionálních rovnic spočívá — řečeno co „nejobecněji" — v následujícím postupu: Předpokládáme, že daná funkcionální rovnice už nějaké řešení má, a vhodnými záměnami proměnných a dosazováním konkrétních hodnot se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici také skutečně vyhovuje.

Objasníme to na jednom konkrétním příkladu: Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2, \tag{1}$$

přičemž se budeme zajímat jen o taková její řešení $f(x)$, jež jsou definována na celé číselné ose (tj. pro všechna x).

Předpokládejme tedy nejprve, že $f(x)$ je jedno takové řešení, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (1) $y = 0$, dostáváme

$$-f(x) + cx = -x^2$$

neboli

$$f(x) = x^2 + cx. \tag{2}$$

Dosadíme-li nyní funkci (2) do rovnice (1), dostaneme vztah

$$-c(x + y) + cxy = 0.$$

Tato rovnost má být splněna pro libovolné reálné hodnoty x a y; to však znamená, že funkce (2) bude funkcionální rovnici (1) řešit tehdy a jen tehdy, bude-li $c = 0$. Rovnice (1) má tedy jediné řešení

$$f(x) = x^2.$$

2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ

Než se budeme zabývat některými obecnými třídami funkcionálních rovnic, jež lze řešit substituční metodou, zastavíme se ještě u několika konkrétních příkladů.

a) Budiž $a > 0$, $a \neq 1$ reálné číslo. Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(y) . a^x, \tag{3}$$

přičemž i zde budeme hledat jen taková její řešení, jež jsou definována na celé číselné ose.

Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno řešení funkcionální rovnice (3). Označíme-li $f(0) = c$ a položíme-li v (3) $y = 0$, dostáváme vztah

$$f(x) = c . a^x.$$

Z rovnosti

$$c . a^{x+y} = (c . a^y) . a^x,$$

která je splněna pro libovolná reálná čísla x a y, naopak plyne, že každá funkce tvaru $f(x) = c . a^x$, kde c je libovolné pevné reálné číslo, je řešením rovnice (3). To tedy ukazuje, že rovnice má nekonečně mnoho řešení, jež jsou dána formulí

$$f(x) = c\,.\,a^x$$

s libovolnou reálnou konstantou c.

Zde je třeba poznamenat, že takto určená řešení rovnice (3) „pokrývají celou rovinu". Tato slova mají následující význam: Nechť je v rovině zadána pravoúhlá souřadnicová soustava $O(x, y)$ a nechť je M libovolný bod roviny o souřadnicích α a β. Pak tvrdíme, že existuje právě jedno řešení rovnice (3), jehož graf prochází bodem M.

Než budeme toto tvrzení dokazovat, poznamenejme, že graf nějaké funkce $f(x)$ prochází bodem $M[\alpha, \beta]$ tehdy a jen tehdy, je-li $\beta = f(\alpha)$. Protože však rovnice

$$ca^\alpha = \beta$$

má pro libovolná α a β jediné řešení vzhledem k c: $c = \beta\,.\,a^{-\alpha}$, existuje jen jediná funkce

$$f(x) = \beta\,.\,a^{-\alpha}\,.\,a^x = \beta\,.\,a^{x-\alpha},$$

která je řešením funkcionální rovnice (3) a jejíž graf prochází bodem $M[\alpha, \beta]$.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(4) \quad f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2\,.$$

Připusťme, že $f(x)$ je jedno její řešení, a položme $c = f(0)$. (Opět zde předpokládáme, že funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in R$.) Položíme-li pak v (4) nejprve $x = 0, y = t$ a potom $x = 0, y = -t$, dostáváme vztahy

$$f(t) - 2f(-t) + c - 2f(t) = t - 2$$

a

$$f(-t) - 2f(t) + c - 2f(-t) = -t - 2\,;$$

po úpravách odtud plyne

$$-f(t) - 2f(-t) = t - 2 - c\,,$$
$$-2f(t) - f(-t) = -t - 2 - c\,.$$

Jestliže druhou z těchto rovností vynásobíme číslem -2 a výsledek přičteme k první rovnosti, dostáváme

$$f(t) = \frac{3t + 2 + c}{3}\,.$$

Jestliže naproti tomu položíme v (4) $y = 0$, $x = t$, dostaneme vztah

$$f(t) - 2f(t) + f(t) - 2c = -2\,,$$

z kterého plyne, že $c = 1$.

Vše, co jsme dosud řekli, nás přesvědčuje o tom, že pokud je $f(x)$ nějaké řešení dané funkcionální rovnice, musí být $f(x) = x + 1$. Bezprostředním ověřením se také přesvědčíme o tom, že tato funkce $f(x)$ je skutečně řešením rovnice (4).

A tak má funkcionální rovnice (4) jediné řešení

$$f(x) = x + 1\,.$$

c) Řešme funkcionální rovnici

$$(5)\qquad f(x + y) + f(x - y) - f(x) = f(y) + x - y^2\,.$$

Připusťme, že $f(x)$ je jedno její řešení, a označme stejně jako v předcházejících příkladech $f(0) = c$. Položíme-li pak v (5) $y = 0$, dostaneme $f(x) = c + x$; je-li tedy $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (5), je $f(x) = c + x$. Dosadíme-li takto určený výraz pro $f(x)$ do rovnice (5), dostaneme rovnost

$$c + (x + y) + c + (x - y) - (c + x) = \\ = c + y + x - y^2,$$

která je zřejmě ekvivalentní s rovností

$$y - y^2 = 0.$$

Tato rovnost musí být splněna pro libovolné reálné hodnoty y. Toto poslední tvrzení je však nepravdivé, a proto funkcionální rovnice (5) nemá řešení.

3. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $f(x + y) = F(f(y), x)$

Podívejme se nyní poněkud podrobněji na řešení funkcionální rovnice (3). Je zřejmé, že se jedná o speciální případ obecnější funkcionální rovnice

$$f(x + y) = F(f(y), x), \tag{6}$$

kde $F(u, v)$ značí libovolnou funkci dvou proměnných. (V případě (3) je $F(u, v) = u \cdot a^v$.) Nyní určíme, za jakých podmínek na funkci $F(u, v)$ má rovnice (6) řešení a jak lze toto řešení najít.

Abychom takto formulovanou úlohu vyřešili, začneme hledat řešení rovnice (6); přitom použijeme postupu, jímž jsme řešili funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(y) \cdot a^x.$$

Připusťme tedy, že $f(x)$ je nějaké řešení funkcionální rovnice (6), a označme $f(0) = c$. Položíme-li v (6) $y = 0$, máme

$$f(x) = F(c, x),$$

a odtud dostáváme pro $x = 0$ vztah

$$f(0) = c = F(c, 0).$$

Jinými slovy: Ukázali jsme si, že pokud má funkcionální rovnice (6) řešení, musí funkce $F(u, v)$ splňovat následující podmínku: existuje reálné číslo c, pro něž je

$$F(c, 0) = c. \tag{7}$$

Z rovnosti $f(x) = F(c, x)$ však plyne, že je

$$f(x + y) = F(c, x + y) = F(f(y), x) = \\ = F(F(c, y), x),$$

neboli

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x).$$

To zase ukazuje, že funkce $F(u, v)$ musí splňovat i podmínku

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x). \tag{8}$$

Má-li tedy funkcionální rovnice (6) mít řešení, je nutné, aby funkce $F(u, v)$ vyhovovala rovnostem (7) a (8).

Předpokládáme-li naopak, že funkce dvou proměnných $F(u, v)$ vyhovuje rovnostem (7) a (8), pak je z rovnosti (8) zřejmé, že funkce $f(x) = F(c, x)$ je řešením rovnice (6). Tím jsme však dokázali následující tvrzení:

Věta. *Funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(y), x)$$

má řešení tehdy a jen tehdy, splňuje-li funkce dvou proměnných $F(u, v)$ tyto dvě podmínky:

a) *existuje reálné číslo c, pro něž je*

$$F(c, 0) = c\,;$$

b) *pro každé reálné číslo c, pro něž platí* a), *platí také*

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x)\,.$$

Všechna řešení výše uvedené funkcionální rovnice jsou dána formulí

$$f(x) = F(c, x)\,,$$

kde c je reálné číslo, pro něž jsou splněny podmínky a) *a* b).

Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ řešením funkcionální rovnice* (6), *je jejím řešením i funkce*

$$g(x) = f(x + a)\,,$$

kde a je libovolné reálné číslo.

Důkaz. Je zřejmě

$$g(x) = f(x + a) = F(c, x + a) = F(F(c, a), x)\,,$$

a odtud dostáváme

$$g(x + y) = F(c, x + y + a) = F(F(c, y + a), x) = \\ = F(g(y), x)\,;$$

to však znamená, že $g(x)$ je řešením dané funkcionální rovnice, a důkaz důsledku je proveden.

Budiž nyní M takový bod v rovině, který má vzhledem k nějaké pravoúhlé soustavě souřadnice α a β.

Zajímá nás, zda funkcionální rovnice (6) má řešení, které „prochází“ bodem M, tj. pro něž je splněn vztah $\beta = f(\alpha)$. Protože však všechna řešení rovnice (6) mají tvar $f(x) = F(c, x)$, kde pro reálné číslo c platí rovnosti (7) a (8), musí zřejmě platit: Má-li mít funkcionální rovnice (6) řešení, které prochází bodem $M[\alpha, \beta]$, musí existovat reálné číslo c, pro něž funkce $F(u, v)$ splňuje rovnosti (7) a (8), a kromě toho takové, že platí

$$F(c, \alpha) = \beta.$$

Věta. *Funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(y), x)$$

má řešení $f(x)$, vyhovující navíc podmínce $\beta = f(\alpha)$, tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla c a x_0, pro něž je

$$F(c, x_0) = \beta,$$

$$F(c, 0) = c,$$

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x).$$

Důkaz. Z úvah, které jsme provedli výše, vyplývá, že pokud má rovnice (6) řešení $f(x)$, pro něž je $f(\alpha) = \beta$, jsou podmínky věty splněny. (Za číslo x_0 můžeme volit číslo α.)

Nechť tedy naopak existují reálná čísla c a x_0, pro něž platí výše uvedené vztahy. Podle předcházející věty je pak funkce $f(x) = F(c, x)$ řešením dané funkcionální rovnice. Podle důsledku této věty je pak řešením i funkce $g(x) = F(c, x + x_0 - \alpha)$, pro niž dále platí

$$g(\alpha) = F(c, \alpha + x_0 - \alpha) = F(c, x_0) = \beta.$$

Věta je tím dokázána.

Podívejme se na závěr na dva příklady, které ilustrují naše obecné poznámky.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$(9) \qquad f(x + y) = [f(y)]^x.$$

To je zřejmě rovnice tvaru (6), neboť zde je $F(u, v) = u^v$. Ale

$$F(1, 0) = 1^0 = 1,$$

$$F(1, x + y) = 1^{x+y} = 1 = (1^y)^x = F(F(1, y), x),$$

a kromě toho je jednotka zřejmě jediným reálným číslem, pro něž naše funkce $F(u, v)$ vyhovuje podmínkám (7) a (8).

Funkcionální rovnice (9) má tedy jediné řešení, a tím je konstanta jedna: $f(x) = 1$ pro všechna reálná x.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(10) \qquad f(x + y) = x + f(y).$$

Také tato rovnice je tvaru (6), kde $F(u, v) = u + v$. Kromě toho jsou pro každé reálné číslo c splněny rovnosti

$$F(c, 0) = c + 0 = c,$$

$$F(F(c, y), x) = (c + y) + x = c + (x + y) = F(c, x + y)$$

a odtud vyplývá, že všechna řešení funkcionální rovnice (10) jsou dána vzorcem $f(x) = c + x$.

Ponecháváme na čtenáři, aby rozhodl, jak je možno určit řešení rovnice (10), které prochází např. bodem o souřadnicích [1, 2].

4. JEDNO ZOBECNĚNÍ

Zobecněním funkcionální rovnice (6) je funkcionální rovnice

$$(11) \qquad f(G(x, y)) = F(f(y), x),$$

kde $G(x, y)$ a $F(u, v)$ jsou dvě dané funkce dvou proměnných. (Rovnici (6) dostaneme z rovnice (11), zvolíme-li za $G(x, y)$ funkci $G(x, y) = x + y$.)

Věta. *Nechť funkce dvou proměnných $G(x, y)$ a $F(u, v)$ splňují tyto podmínky:*

a) *existuje reálné číslo a, pro něž je rovnice*

$$G(x, a) = t$$

řešitelná vzhledem k x, tj. existuje taková funkce $x = g(t)$, pro niž je rovnost

$$G(g(t), a) = t$$

splněna pro všechna t;

b) *existuje reálné číslo b, pro něž platí*

$$F(b, g(a)) = b,$$
$$F(b, g(G(x, y))) = F(F(b, g(y)), x).$$

Pak má funkcionální rovnice

$$F(G(x, y)) = F(f(y), x)$$

řešení $f(x)$, jež je dáno formulí

$$f(x) = F(b, g(x)).$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne bezprostředně z rovností

$$f(G(x, y)) = F(b, g(G(x, y))) = F(F(b, g(y)), x) = \\ = F(f(y), x).$$

Ponecháváme na čtenáři, aby prověřil, že pokud funkce $G(x, y)$ splňuje podmínku a) a funkcionální rovnice (11) má řešení, splňuje funkce $F(u, v)$ nutně podmínku b) výše uvedené věty.

Aniž bychom se zaměřili na podrobnosti, ilustrujme to, co jsme uvedli výše, na dvou příkladech; první z těchto příkladů budeme řešit přímo (bez využití právě dokázané věty).

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = [f(y)]^{1/x}. \tag{12}$$

Tato rovnice je rovnicí tvaru (11), kde klademe

$$G(x,y) = \frac{y}{x} \text{ a } F(u,v) = u^{1/v}.$$

Je zřejmé, že pokud je $a \neq 0$ libovolné reálné číslo, má rovnice $a/x = t$ řešení vzhledem k $x : x = a/t$. Předpokládejme tedy, že rovnice (12) má řešení $f(x)$, a položme $y = a$, $x = a/t$. Dostáváme pak

$$f(t) = [f(a)]^{t/a} = ([f(a)]^{1/a})^t.$$

Na druhé straně je už z tvaru funkcionální rovnice (12) vidět, že pro všechna x musí být $f(x) > 0$, neboť by v opačném případě neměl výraz $[f(y)]^{1/x}$ smysl pro každé x. Označíme-li tedy $c = [f(a)]^{1/a}$, bude c kladné reálné číslo.

Je-li tedy $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (12), je $f(x) = c^x$, kde c je kladné reálné číslo. A obráceně se můžeme bezprostředně přesvědčit o tom, že každá taková funkce také výše uvedenou funkcionální rovnici splňuje.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(y^x) = xf(y), \tag{13}$$

kde je $y > 0$.

Tato rovnice je rovnicí tvaru (11), kde klademe

$$G(x, y) = y^x \quad \text{a} \quad F(u, v) = uv.$$

Je známo, že pro každé reálné číslo $a > 0$, $a \neq 1$ má rovnice $a^x = t$ řešení $x = \log_a t$. Dále jsou zřejmě pro každé reálné číslo b splněny rovnosti

$$F(b, \log_a a) = F(b, 1) = b\,.\,1 = b,$$

$$F(b, \log_a y^x) = b \log_a y^x = x(b \log_a y) =$$
$$= F(b \log_a y, x) = F(F(b, \log_a y), x).$$

Pak však z výše dokázané věty plyne, že všechna řešení funkcionální rovnice (13) jsou dána formulí

$$f(x) = b \log_a x,$$

kde a, b jsou reálná čísla, $a > 0$, $a \neq 1$, b libovolné.

5. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0$

Všimneme si nyní podrobněji ještě jedné třídy funkcionálních rovnic, které lze řešit pomocí substituční metody. Jedná se o funkcionální rovnice tvaru

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0, \tag{14}$$

kde $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ je daná funkce šesti proměnných. (K rovnicím tohoto typu patří rovnice, které jsme vyšetřovali v odstavcích 1, 2b a 2c.) Zde nejsme schopni vyšetřit tyto rovnice podrobně a ve vší úplnosti a odpovědět na otázku, jaké jsou nutné a postačující podmínky, za nichž má takto zapsaná funkcionální rovnice řešení — tak, jak jsme to učinili v případě rovnice $f(x + y) = F(f(y), x)$. Přesto zde pojednáme o dvou cestách, jimiž lze funkcionální rovnici (14) řešit — za jistých dalších předpokladů o funkci $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.

I. Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení funkcionální rovnice (14), přičemž je funkce $f(x)$ definována pro $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (14) $y = 0$ a $f(0) = c$, dostáváme vztah

$$F(f(x), f(x), f(x), c, x, 0) = 0,$$

a odtud lze případně určit tvar funkce $f(x)$.

A tak vidíme, že *pokud funkce* $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ *má tuto vlastnost: existuje reálné číslo c, pro něž má rovnice*

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(x)$, *pak tato funkce* $f(x)$ *— a jen ona — může být řešením funkcionální rovnice* (14). Pochopitelně zde netvrdíme, že pokud funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ tuto vlastnost má, má už také rovnice (14) nutně řešení, a netvrdíme ani to, že pokud řešení rovnice (14) existuje, má už funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ výše uvedenou vlastnost.

Podívejme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

(15) $$f(x + y) + f(x - y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3.$$

Funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ zde má tvar

$$F = u_1 + u_2 - u_3 - 6u_5u_6 \sqrt[3]{u_4} - u_5^3 .$$

Pak je

$$F(z, z, z, c, x, 0) = z - x^3$$

a odtud plyne, že pokud je $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (15), je $f(x) = x^3$. Na druhé straně platí

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2 = x^3 + \\ + 6xy \sqrt[3]{y^3} + x^3$$

a to ukazuje, že funkce $f(x) = x^3$ je skutečně řešením funkcionální rovnice (15) a že tato rovnice jiná řešení nemá.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(16) \qquad f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = \\ = 4x + y .$$

V tomto případě má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ tvar

$$F = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 4u_5 - u_6$$

a je

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 4z + 2c - 4x .$$

Rovnice

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 4z + 2c - 4x = 0$$

má tedy jediné řešení vzhledem k z:

$$z = - \frac{c}{2} + x$$

pro libovolnou reálnou hodnotu c.

Na druhé straně by rovnost

$$-\frac{c}{2}+(x+y)+2\left(-\frac{c}{2}+(x-y)\right)+\left(-\frac{c}{2}+x\right)$$
$$+2\left(-\frac{c}{2}+y\right)=4x+y,$$

tj. rovnost $4x + y - 3c = 4x + y$, měla být splněna pro libovolné hodnoty proměnných x a y. Je tedy $c = 0$, a to nakonec ukazuje, že funkcionální rovnice (16) má jen jedno řešení, a tím je funkce

$$f(x) = x.$$

Příklad z odstavce 2c ukazuje, že se může stát, že rovnice

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 0$$

má jediné řešení vzhledem k z, ale přesto nemá funkcionální rovnice (14) řešení.

II. Vraťme se znovu k obecné funkcionální rovnici

$$F(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y) = 0$$

a předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, přičemž je funkce $f(x)$ definována v bodě $x = 0$. Označíme-li $f(0) = c$ a položíme-li v naší rovnici jednak $x = 0$, $y = t$, jednak $x = 0$, $y = -t$ (viz příklad z odstavce 2b), dostaneme vztahy

$$F(f(t), f(-t), c, f(t), 0, t) = 0$$

a

$$F(f(-t), f(t), c, f(-t), 0, -t) = 0,$$

z nichž bychom mohli případně odvodit explicitní výraz pro funkci $f(t)$.

Tyto úvahy nám umožňují vyslovit toto tvrzení: *Nechť má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ následující vlastnost: Existuje reálné číslo c, pro něž má soustava rovnic*

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$
$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(t)$. Pak tato funkce $f(t)$ — a jen ona — může být řešením funkcionální rovnice (14).

Nebudeme tento obecný případ už dále rozebírat a podíváme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$(17) \quad f(x + y) - 3f(x - y) = x^2 \left[f(y) + 1 - \frac{1}{2} y^2\right] - $$
$$- 2f(x) + y(4x - y).$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, přičemž je funkce $f(x)$ definována v bodě $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Za těchto předpokladů položíme v (17) $x = 0$, $y = t$ a poté $x = 0$, $y = -t$. Dostaneme soustavu

$$f(t) - 3f(-t) = -2c - t^2,$$
$$f(-t) - 3f(t) = -2c - t^2.$$

Vynásobíme-li druhou rovnici třemi a výsledek přičteme k první rovnici, dostáváme

$$-8f(t) = -8c - 4t^2$$

neboli

$$f(t) = c + \frac{1}{2} t^2.$$

Položíme-li naproti tomu v (17) $y = 0$, vidíme, že musí být

$$f(x) - 3f(x) = x^2(c + 1) - 2f(x),$$

tj. musí platit $c = -1$. Jedině funkce $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2$ tedy může být řešením naší funkcionální rovnice (17). Z rovnosti

$$\frac{1}{2}(x + y)^2 - 1 - \frac{3}{2}(x - y)^2 + 3 = x^2\left(\frac{1}{2}y^2 - 1 + \right.$$
$$\left. + 1 - \frac{1}{2}y^2\right) - 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + y(4x - y),$$

která zřejmě platí pro libovolné reálné hodnoty x a y, plyne, že funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ tím řešením také skutečně je.

Na závěr tedy můžeme říci, že funkcionální rovnice (17) má jediné řešení

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2.$$

b) Řešme funkcionální rovnici

(18) $$f(x) . f(x + y) = [f(y)]^2 [f(x - y)]^2 a^{y+4},$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$ je pevné, jinak libovolné reálné číslo. Je zřejmé, že tato rovnice patří k rovnicím typu (14); v našem případě má soustava

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$

$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

tvar

$$cz = u^2 z^2 a^{t+4},$$

$$cu = u^2 z^2 a^{-t+4}.$$

Tuto soustavu můžeme řešit vzhledem k z při $c \neq 0$ např. tak, že první rovnici vydělíme čtvercem druhé rovnice. Dostáváme pak

$$\frac{cz}{c^2u^2} = \frac{u^2z^2a^{t+4}}{u^4z^4a^{-2t+8}}$$

a odtud plyne

$$z = \sqrt[3]{c} \, . \, a^{t-4/3},$$

pokud je c libovolné nenulové reálné číslo. Je-li $c = 0$, má výše uvedená soustava zřejmě řešení $z = 0$.

Z toho, co dosud bylo řečeno, plyne, že pokud je $f(x)$ nenulová funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici (18) (konstantní nulová funkce tuto rovnici zřejmě řeší), platí

$$f(x) = \sqrt[3]{c} \, . \, a^{x-4/3},$$

a kromě toho je $f(0) = c$. Pak však platí

$$c = \sqrt[3]{c} \, . \, a^{-4/3},$$

čili nakonec $c = \pm a^{-2}$. Řešeními funkcionální rovnice (18) tedy mohou být pouze funkce

$$f(x) = a^{x-2}, f(x) = -a^{x-2}, f(x) = 0.$$

Bezprostředním dosazením do rovnice (18) se přesvědčíme o tom, že tyto funkce danou rovnici také skutečně řeší.

Nakonec ještě poznamenejme, že stejně jako v případě I, i zde může mít soustava

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$

$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

jediné řešení vzhledem k z při některé reálné hodnotě c, ale funkcionální rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0$$

přesto nemusí mít řešení.

Skutečně: podívejme se na rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) + f(y) = x^2 - y + f(x).$$

To je zřejmě rovnice tvaru (14), přičemž je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \\ - u_5^2 + u_6.$$

Odpovídající soustava má tvar

$$2z + u + t - c = 0,$$

$$2u + z - t - c = 0,$$

a jak je vidět, má pro každé reálné c jediné řešení vzhledem k z:

$$z = \frac{c}{3} - t.$$

Má-li tedy daná funkcionální rovnice řešení $f(x)$, pak je

$$f(x) = \frac{c}{3} - x \quad \text{a} \quad f(0) = c = \frac{c}{3},$$

tj. $c = 0$ a $f(x) = -x$. Na druhé straně ovšem rovnice

$$-(x+y) - (x-y) - y = x^2 - y - x,$$

jež je ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 + x = 0,$$

zřejmě neplatí pro libovolné reálné hodnoty x a y. Daná funkcionální rovnice tedy nemá řešení.

6. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $F(f(x+y), f(x-y), f(x), x, y) = 0$

Často se můžeme setkat s funkcionálními rovnicemi tvaru (14),

$$F(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y) = 0,$$

v nichž se však nevyskytuje výraz $f(y)$. Zastavíme se nyní podrobněji u této třídy funkcionálních rovnic. Jinými slovy: budeme vyšetřovat funkcionální rovnice tvaru

$$F(f(x+y), f(x-y), f(x), x, y) = 0, \tag{19}$$

kde $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ je daná funkce pěti proměnných. Každou takovou rovnici lze pochopitelně řešit metodami, které jsme popsali výše; zde se však budeme věnovat dvěma novým metodám řešení rovnic tvaru (19), které lze použít i v případě, kdy metody popsané před chvílí nevedou ke konkrétnímu výsledku.

I. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je řešením rovnice

$$F(f(x+y), f(x-y), f(x), x, y) = 0,$$

přičemž funkce $f(x)$ je definována v bodě $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (19) postupně $x = 0$, $y = t$; $x = t$, $y = 2t$ a $x = t$, $y = —2t$, dostaneme soustavu

$$F(f(t), f(-t), c, 0, t) = 0,$$
$$F(f(3t), f(-t), f(t), t, 2t) = 0,$$
$$F(f(-t), f(3t), f(t), t, -2t) = 0,$$

z níž lze případně určit funkci $f(t)$.

Vidíme tedy, že ***pokud funkce*** $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ ***splňuje následující podmínku***: *existuje reálné číslo* c, *pro něž má soustava tří rovnic*

$$F(z, u, c, 0, t) = 0,$$
$$F(v, u, z, t, 2t) = 0,$$
$$F(u, v, z, t, -2t) = 0$$

o třech neznámých u, z, v *jediné řešení vzhledem k* $z : z = f(t)$, *pak tato funkce* $f(x)$ — *a jen ona* — *může být řešením dané funkcionální rovnice*

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0.$$

Pochopitelně stejně jako v předcházejícím odstavci, ani zde není tato podmínka ani nutná, ani postačující k tomu, aby funkcionální rovnice (19) měla řešení. Nicméně však toto tvrzení ukazuje jednu z možných cest k řešení této rovnice.

Podívejme se na dva příklady:

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y. \tag{20}$$

To je zřejmě rovnice vyšetřovaného tvaru, přičemž je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + 2u_2 - 3u_3 + u_5 .$$

Odpovídající soustava má tvar

$$z + 2u - 3c + t = 0,$$

$$v + 2u - 3z + 2t = 0,$$

$$u + 2v - 3z - 2t = 0.$$

Snadno se můžeme přesvědčit o tom, že tato soustava má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = c + t .$$

To ukazuje na to, že pokud má funkcionální rovnice (20) řešení $f(x)$, musí být

$$f(x) = c + x ,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Z rovnosti

$$c + (x + y) + 2(c + (x - y)) = 3c + 3x - y ,$$

která platí pro libovolné reálné hodnoty c, x, y, pak naopak plyne, že takto určená funkce $f(x) = c + x$ (s libovolným reálným číslem c) skutečně vyhovuje dané funkcionální rovnici (20).

b) Řešme funkcionální rovnici

(21) $$2f(x + y) + f(x - y) = f(x)\,(2a^{y} + a^{-y}) ,$$

kde a je pevné reálné číslo, $a > 0$, $a \neq 1$.

V tomto případě je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = 2u_1 + u_2 - u_3(2a^{u_5} + a^{-u_5}) .$$

Odpovídající soustava má tvar

$$F(z, u, c, 0, t) = 2z + u - c(2a^t + a^{-t}) = 0,$$

$$F(v, u, z, t, 2t) = 2v + u - z(2a^{2t} + a^{-2t}) = 0,$$

$$F(u, v, z, t, -2t) = 2u + v - z(2a^{-2t} + a^{2t}) = 0.$$

Tato soustava však má pro libovolné reálné c jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = ca^t.$$

Proto může být každá z funkcí

$$f(x) = ca^x$$

(c je reálné číslo) řešením rovnice (21). Bezprostředním ověřením se přesvědčíme o tom, že tomu skutečně tak je.

II. Někdy můžeme rovnici (19) řešit i následujícím způsobem: Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno řešení této rovnice, a nechť je funkce $f(x)$ definována pro $x = 0$. Nechť dále existuje takové reálné číslo α, pro něž výraz

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha)$$

nezávisí na $f(t + \alpha)$ ani na α, tj. nechť existuje taková funkce tří proměnných $G(v_1, v_2, v_3)$, že je

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha) =$$
$$= G(f(t + 2\alpha), f(t), t + \alpha).$$

Označíme-li pak $f(0) = a$, $f(\alpha) = b$ a položíme-li ve vztahu

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0$$

postupně $x = 0$, $y = t$; $x = t + \alpha$, $y = \alpha$; $x = \alpha$, $y = = t + \alpha$, dostaneme soustavu

$$F(f(t), f(-t), a, 0, t) = 0,$$

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha) = \\ = G(f(t + 2\alpha), f(t), t + \alpha) = 0,$$

$$F(f(t + 2\alpha), f(-t), b, \alpha, t + \alpha) = 0,$$

z níž lze případně odvodit explicitní vyjádření pro funkci $f(x)$.

Lze tedy vyslovit toto tvrzení: *Nechť má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ tyto vlastnosti:*

(**A**) *existuje reálné číslo α, pro něž je*

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, \alpha) = G(u_1, u_2, u_4),$$

kde $G(v_1, v_2, v_3)$ je jistá funkce tří proměnných;

(**B**) *existují reálná čísla a, b, pro něž má soustava rovnic*

$$F(z, u, a, 0, t) = 0,$$

$$G(v, z, t + \alpha) = 0,$$

$$F(v, u, b, \alpha, t + \alpha) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(t)$.

Pak takto definovaná funkce $f(x)$ — a jen ona — může být řešením dané funkcionální rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0.$$

Podívejme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y. \tag{22}$$

To je rovnice uvažovaného typu, neboť zde je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + u_2 - 2u_3 \cos u_5 .$$

Kromě toho pro $u_5 = \frac{1}{2}\pi$ platí

$$F\left(u_1, u_2, u_3, u_4, \frac{1}{2}\pi\right) = u_1 + u_2 ,$$

tj. je splněna podmínka (A), a soustava z podmínky (B) pak má tvar

$$\begin{aligned} &z + u - 2a \cos t = 0 , \\ &v + z = 0 , \\ &v + u - 2b \cos\left(\frac{1}{2}\pi + t\right) = 0 . \end{aligned}$$

Není těžké dokázat, že tato soustava má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = a \cos t + b \sin t .$$

Má-li tedy funkcionální rovnice (22) řešení $f(x)$, má toto řešení tvar

$$f(x) = a \cos x + b \sin x ,$$

kde a a b jsou jistá reálná čísla.

Z vlastností trigonometrických funkcí na druhé straně plyne, že je

$$\begin{aligned} a \cos (x + y) + b \sin (x + y) + a \cos (x - y) + \\ + b \sin (x - y) = 2a \cos x \cos y + 2b \sin x \cos y = \\ = 2(a \cos x + b \sin x) \cos y . \end{aligned}$$

Tímto postupem jsme s konečnou platností dokázali, že všechna řešení funkcionální rovnice (22) jsou dána formulí

$$f(x) = a \cos x + b \sin x,$$

kde a a b jsou libovolná reálná čísla.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) - f(x)(y + 2) + \\ + y(x^2 - 2y) = 0. \tag{23}$$

Také tato rovnice je tvaru (19), neboť zde je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + u_2 - u_3(u_5 + 2) + \\ + u_5(u_4^2 - 2u_5).$$

Položíme-li zde $u_5 = -2$, dostáváme

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, -2) = u_1 + u_2 - 2(u_4^2 + 4).$$

Je tedy splněna podmínka (**A**) a soustava z podmínky (**B**) má tvar

$$z + u - a(t + 2) - 2t^2 = 0,$$

$$v + z - 2((t - 2)^2 + 4) = 0,$$

$$v + u - bt + (t - 2)(4 - 2(t - 2)) = 0.$$

Po úpravách odtud dostáváme soustavu

$$z + u = a(t + 2) + 2t^2,$$

$$v + z = 2(t^2 - 4t + 8),$$

$$v + u = bt + 2(2 - t)(4 - t),$$

která má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = t^2 + \frac{a - b + 4}{2} t + a.$$

Jinými slovy: ukázali jsme, že pokud je $f(x)$ nějaké řešení funkcionální rovnice (23), je

$$f(x) = x^2 + \frac{a - b + 4}{2} x + a,$$

kde a a b jsou reálná čísla.

Na druhé straně je rovnost

$$(x + y)^2 + \frac{a - b + 4}{2} (x + y) + a + (x - y)^2 + \\ + \frac{a - b + 4}{2} (x - y) + a - \\ - \left(x^2 + \frac{a - b + 4}{2} x + a\right) (y + 2) + y(x^2 - 2y) = 0$$

ekvivalentní rovnosti

$$\frac{a - b + 4}{2} xy + ay = 0,$$

a tato poslední rovnost platí pro libovolné reálné hodnoty x a y pouze tehdy, je-li $a = 0$ a $b = 4$.

Funkcionální rovnice (23) má tedy jediné řešení

$$f(x) = x^2.$$

7. JEDNA APLIKACE

Všimneme si množiny R_3 všech vektorů v trojrozměrném prostoru. Budeme předpokládat, že čtenář je seznámen s tím, jak se takové vektory sčítají a jak se násobí číslem*). Současně budeme předpokládat, že mu jsou známy pojmy jako úhel dvou vektorů, délka vektoru a jednotkový vektor.

Položme si úkol zavést v R_3 dvě nové operace. První z těchto operací (budeme jí říkat *skalární součin*) přiřazuje každé dvojici vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jediné reálné číslo $\mathbf{a}.\mathbf{b}$, druhá operace (budeme jí říkat *vektorový součin*) přiřazuje každé dvojici vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jediný vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; přitom požadujeme, aby byly splněny následující axiómy:

A_1. *Pro každé dva vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R_3$ *a pro každé reálné číslo* α *je*

$$\alpha(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}).\mathbf{b} = \mathbf{a}.(\alpha\mathbf{b});$$

$$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}).$$

A_2. *Pro každou trojici vektorů* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R_3$ *je*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{c} = \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{c};$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

A_3. *Skalární součin libovolných dvou vektorů závisí pouze na délkách těchto vektorů a na úhlu, který spolu svírají. Je-li* $\mathbf{e}$ *jednotkový vektor, je* $\mathbf{e}.\mathbf{e} = 1$.

A_4. *Délka vektorového součinu libovolných dvou vektorů* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *závisí pouze na délkách těchto vektorů a na úhlu, který spolu svírají.*

Jsou-li $\mathbf{e}_1$ *a* $\mathbf{e}_2$ *dva kolmé jednotkové vektory, je* $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ *jednotkový vektor, který je kolmý k rovině definované vektory* $\mathbf{e}_1$ *a* $\mathbf{e}_2$, *a vektory* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *a* $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ *tvoří pravou (orientovanou) trojici.*

---

*) Viz např. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii. Škola mladých matematiků, svazek 28, Mladá fronta 1971. (Pozn. překl.)

Poznámka 1. Jsou-li $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tři vektory, které neleží v jedné rovině, řekneme, že tvoří *pravou* (orientovanou) *trojici*, jestliže při pohledu z vrcholu vektoru $\boldsymbol{c}$ má úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (ve směru od vektoru $\boldsymbol{a}$ k vektoru $\boldsymbol{b}$) směr opačný ke směru oběhu hodinových ručiček.

2. Z axiómů A_3 a A_4 je vidět, že když je ϱ libovolné otáčení v prostoru a $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou libovolné vektory, platí

$$(\boldsymbol{a}\varrho).(\boldsymbol{b}\varrho) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b};$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\varrho = (\boldsymbol{a}\varrho) \times (\boldsymbol{b}\varrho).$$

Předpokládejme především, že operace skalárního a vektorového součinu vyhovující výše uvedeným axiómům skutečně existují, a dokážeme, že pak je

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \varphi$$

a

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi)\,\mathbf{e},$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a $\mathbf{e}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu tvořenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a vytvářející s těmito vektory pravou trojici.

Nechť jsou tedy $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ libovolné vektory. Pak je $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\mathbf{e}_1$ (symbolem $|\boldsymbol{a}|$ značíme délku vektoru $\boldsymbol{a}$) a $\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\mathbf{e}_2$, kde $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ jsou jednotkové vektory. Z axiómu A_1 pak plyne, že je

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2)$$

a

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Stačí tedy, když určíme součiny $\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.

Označme φ úhel mezi vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Z axiómu A_3 pak plyne, že skalární součin $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2$ závisí pouze na úhlu φ: $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = f(\varphi)$. Označíme-li nyní symbolem $\mathbf{e}$ jednotkový vektor kolmý k rovině určené vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a vytvářející s těmito dvěma vektory pravou trojici, pak existují taková reálná čísla α, β, γ, pro něž platí

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}.$$

(Zde jsme využili následujícího tvrzení: *Jsou-li* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *tři vektory, které neleží v jedné rovině, pak ke každému vektoru* $\mathbf{d} \in R_3$ *existují reálná čísla* α, β, γ *tak, že je* $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v každé knize, v níž se hovoří o vektorech, ale zainteresovaný čtenář si je může dokázat i samostatně. K tomu stačí umístit čtyři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ do společného počátku, poté proložit koncem vektoru $\mathbf{d}$ roviny rovnoběžné s rovinami určenými postupně dvojicemi vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}$, a nakonec použít definice součtu vektorů v prostoru.)

Na druhé straně je zřejmě

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = (-\mathbf{e}_1) \times (-\mathbf{e}_2) = -\alpha\mathbf{e}_1 - \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e},$$

a tudíž je

$$\alpha = \beta = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \gamma\mathbf{e}.$$

Podle axiómu A_4 závisí γ pouze na úhlu φ, tj. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = g(\varphi) . \mathbf{e}$.

Abychom určili funkce $f(\varphi)$ a $g(\varphi)$, zvolme libovolné reálné číslo ψ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a označme symboly $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ jednotkové vektory, které svírají s vektorem $\mathbf{e}_1$ úhly $\varphi + \psi$ a $\varphi - \psi$ a leží v rovině určené vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. (Nakreslete si obrázek.) Pak svírají vektory $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ s vektorem $\mathbf{e}_2$ úhel ψ. Protože rovnoběžník utvořený vektory $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ je kosočtverec (je totiž $|\mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_4| = 1$) a úhlopříčka kosočtverce půlí odpovídající úhel u vrcholu kosočtverce, leží vektor $\mathbf{e}_2$ na této úhlopříčce. Odtud ihned plyne, že je kolineární s vektorem $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, tj. že platí

$$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = \lambda \mathbf{e}_2,$$

kde $|\lambda|$ je délka úhlopříčky kosočtverce. Je-li přitom $\psi < \frac{1}{2}\pi$, mají vektory $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ stejný směr a je $\lambda > 0$, je-li $\psi > \frac{1}{2}\pi$, mají opačný směr a je $\lambda < 0$. Na druhé straně dostáváme pomocí kosinové věty vztah

$$|\lambda| = 2\,|\cos\psi|,$$

a odtud konečně plyne, že je

$$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = (2\cos\psi)\,\mathbf{e}_2.$$

Je tedy

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_4 = 2(\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2)\cos\psi$$

a

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_4) = (2\cos\psi)(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$$

neboli — což je totéž —

$$f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi) = 2f(\varphi)\cos\psi$$

a

$$g(\varphi + \psi) + g(\varphi - \psi) = 2g(\varphi)\cos\psi.$$

My jsme však už viděli, že funkcionální rovnice

$$h(x + y) + h(x - y) = 2h(x)\cos y$$

má nekonečně mnoho řešení

$$h(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Funkce $f(\varphi)$ a $g(\varphi)$ tedy mají tvar

$$f(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi$$

a

$$g(\varphi) = d_1 \cos \varphi + d_2 \sin \varphi,$$

kde c_1, c_2, d_1, d_2 jsou jistá reálná čísla. Abychom tato čísla určili, musíme si uvědomit, že podle axiómů A_3 a A_4 je $f(0) = 1$ a $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ukážeme, že kromě toho je $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a $g(0) = 0$: Jsou-li $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ dva kolmé jednotkové vektory ($\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$), provedeme rotaci ϱ okolo osy $\mathbf{e}_2$ o úhel π. Pak bude

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\varrho) . (\mathbf{e}_2\varrho) = (-\mathbf{e}_1) . \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2,$$

což znamená, že je $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = 0$, tj. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Budiž nakonec $\mathbf{e}$ libovolný jednotkový vektor. Pak z axiómu A_4 plyne, že je $\mathbf{e} \times \mathbf{e} = k\mathbf{e}$, kde k je reálné číslo. Odtud však dostáváme

$$k\mathbf{e} = \mathbf{e} \times \mathbf{e} = (-\mathbf{e}) \times (-\mathbf{e}) = -k . \mathbf{e},$$

tj. $k = 0$ a $g(0) = 0$.

Tímto postupem jsme určili konstanty c_1, c_2, d_1, d_2:

$$c_1 = d_2 = 1,$$

$$c_2 = d_1 = 0,$$

a to ukazuje, že $f(\varphi) = \cos \varphi$ a $g(\varphi) = \sin \varphi$.

Z toho, co zde dosud bylo řečeno, můžeme tedy odvodit tento závěr: Existuje-li skalární a vektorový součin vyhovující axiómům $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, pak pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí rovnosti

$$\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \varphi ,$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi)\, \boldsymbol{e} ,$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Naopak můžeme bezprostředně ověřit, že takto definované součiny skutečně vyhovují uvedeným axiómům.

Tím jsme tedy vyřešili úkol, který jsme si dali na začátku tohoto odstavce.