Množiny bodů v prostoru

2. kapitola. Některé analogické množiny bodů v rovině a v prostoru

In: Josef Holubář (author): Množiny bodů v prostoru. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1983. pp. 7–15.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404094

2. kapitola

NĚKTERÉ ANALOGICKÉ MNOŽINY BODŮ V ROVINĚ A V PROSTORU

Dokážeme-li o množině bodů G, že každý její bod má vlastnost $\mathscr{V}$, dokázali jsme, že G je m. b., které mají vlastnost $\mathscr{V}$. Chceme-li dokázat, že G je množinou všech bodů (m. v. b.), které mají vlastnost $\mathscr{V}$, musíme ještě dokázat, že každý bod, který má vlastnost $\mathscr{V}$, patří do množiny G.

Všimněme si nyní některých m. b. v prostoru v souvislosti s příslušnými m. b. v rovině a ukažme postup vyšetřování nejdříve na nejjednodušším příkladě.

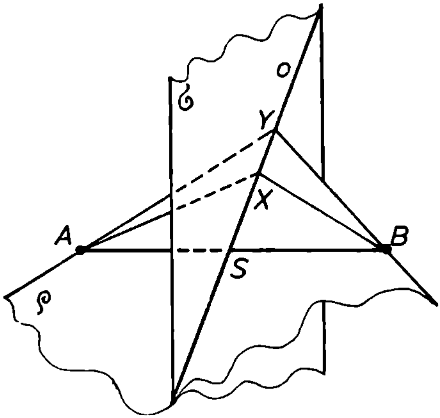
1. Víme, že v rovině platí věta: M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB.

V prostoru m. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti, je rovina σ kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB, tj. rovina souměrnosti bodů A, B.

Důkaz. Nechť o určitém bodu X v prostoru, který neleží na přímce AB, platí vztah $|AX| = |BX|$. Potom body A, B, X určují rovinu ϱ. V této rovině, jak víte, náleží bod X přímce o, která je osou úsečky AB, a obráceně, každý další bod Y zvolený na přímce o má od daných bodů A, B vzdálenosti sobě rovné. Tuto vlastnost můžeme pro body Y dokázat ze shodných pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AYS \cong \triangle BYS$, kde bod $S \equiv AB.o$ je střed úsečky AB. V trojúhelnících $\triangle AYS$,

$\triangle BYS$ totiž platí $\sphericalangle ASY = \sphericalangle BSY$, $|AS| = |BS|$. Bod S má ovšem také dokazovanou vlastnost. Přímka o je tedy v rovině ϱ m. v. b., které mají od bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.

Můžeme však v každé rovině ϱ proložené přímkou AB (tyto roviny tvoří tzv. svazek rovin) určit přímku o, osu



Obr. 1

úsečky AB (obr. 1). Všechny takto obdržené přímky o vyplňují, jak známo, rovinu σ kolmou k AB, procházející středem úsečky AB. O bodech roviny σ (tj. o bodech přímek o) jsme tak dokázali, že mají od bodů A, B vzdálenosti sobě rovné a že také obráceně, má-li některý bod stejně velké vzdálenosti od bodů A, B, tak leží v rovině σ. Tím je dokázáno, že rovina σ je hledanou prostorovou m. v. b.

Všimněme si, že všechny přímky o vyplňující rovinu σ vzniknou z jedné z nich otáčením kolem přímky AB jakožto osy rotace, tedy určitým shodným zobrazením.

2. V rovině platí: m. v. b., které mají od daných dvou bodů A, $B (A \neq B)$ daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.

V prostoru dostáváme: *M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je rotační elipsoid protáhlý ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou velikosti a.* Přímka AB je osou rotace plochy ε.

Důkaz bychom provedli obdobně jako v předchozím příkladě pomocí svazku rovin o ose v přímce AB při použití otáčení jedné z rovin tohoto svazku. Proveďte sami.

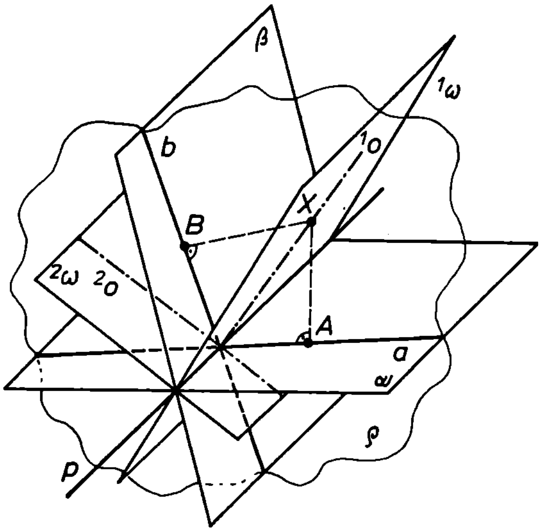
Úloha 1. Určete množinu všech bodů, které mají od daných dvou bodů A, B $(A \neq B)$ danou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou $2a < |AB|$. [Rotační dvoudílný hyperboloid.]

Úloha 2. Určete m. v. b., které mají od dané roviny ϱ a od daného bodu A, který neleží v rovině ϱ, stejně velké vzdálenosti. [Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ.]

3. V rovině platí: M. v. b., které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky ${}^1o \perp {}^2o$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).

Snadno přejdeme do prostoru. Platí: *M. v. b., které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny ${}^1\omega$, ${}^2\omega$, a to roviny souměrnosti* *rovin α, β, tj. roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří.* (Klín se definuje jako průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny mají společnou přímku, hranu klínu.)

Důkaz. Nechť v prostoru pro určitý bod X, který neleží ani v rovině α, ani v rovině β, platí vztah $|XA| = |XB|$, kde body A a B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovinám α, β. Potom je rovina $\varrho \equiv XAB$ kolmá k průsečnici p rovin α, β a protíná roviny α, β v přímkách $a \equiv \alpha.\varrho$, $b \equiv \beta.\varrho$. Přímky a, b jsou rameny úhlů, jimiž měříme velikosti daných čtyř klínů, určených rovinami α, β (obr. 2). V rovině ϱ lze sestrojit osy souměrnosti ${}^1o$, ${}^2o$ přímek a, b, a zvolený bod X je zřejmě jeden



Obr. 2

z bodů, který náleží m. v. b. tvořené dvojicí přímek $^1o \perp {}^2o$. Jejich body mají od přímek a, b stejné vzdálenosti. Obdobně je tomu také v každé rovině $\varrho \perp p$. V ní dostaneme obdobně dvojici přímek $^1o \perp {}^2o$, jejichž body tvoří v ϱ m. v. b. požadované vlastnosti. Všechny dvojice přímek ^1o, ^2o vyplňují dvě roviny $^1\omega \perp {}^2\omega$, jejichž body mají požadovanou vlastnost. Ze vzniku rovin $^1\omega$, $^2\omega$ vyplývá, že o jejich bodech platí: a) každý bod mající požadovanou vlastnost náleží některé z rovin $^1\omega$, $^2\omega$, b) každý bod náležející rovině $^1\omega$ nebo $^2\omega$ má onu vlastnost (také ovšem body přímky p, kde jde o vzdálenosti nulové).

Připomeňme si, že každá dvojice přímek ^1o, ^2o, vyplňující roviny naší prostorové m. v. b., vznikne z jedné takové dvojice opět shodným zobrazením, a to rovnoběžným posunutím ve směru daném přímkou p.

Úloha 3. Určete m. v. b., které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných a různých rovin. [Rovina souměrnosti daných rovin s nimi rovnoběžná.]

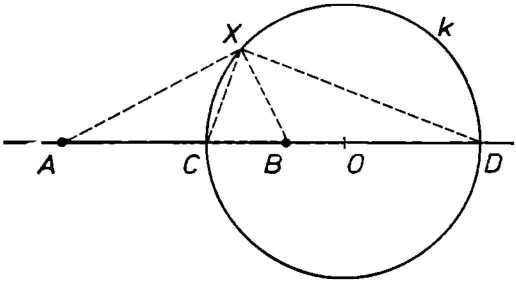
Úloha 4. Určete m. v. b., které mají od dané roviny vzdálenost rovnou dané délce $d > 0$. [Dvě roviny s danou rovinou rovnoběžné.]

Úloha 5. Určete m. v. b., které mají od daných dvou a) různoběžných, b) rovnoběžných rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < p : q \neq 1$. [a) Dvě roviny náležející svazku daných rovin, b) dvě roviny s danými rovinami rovnoběžné.]

4. V rovině platí: M. v. b., které mají od daných dvou bodů A, B $(A \neq B)$ daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kružnice $k(A, B, \lambda)$, tzv. *Apolloniova.*

Její střed O leží na přímce AB a o krajních bodech C, D jejího průměru platí (obr. 3):

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda \neq 1.$$



Obr. 3

Důkaz najde čtenář v knížce: *J. Šedivý*, Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, str. 89—91. (Škola mladých matematiků, sv. 46, Praha 1980.)

V prostoru platí: *M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kulová plocha $\varkappa(A, B, \lambda)$, zv. Apolloniova, jejíž střed O leží na přímce AB a pro jejíž krajní body C, D průměru AB platí:*

$$|(ABC)| = |(ABD)| = \lambda.$$

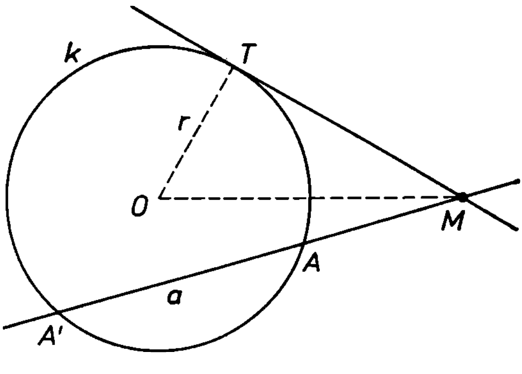
Přitom symbol (ABC) značí tzv. dělicí poměr bodu C na přímce AB vzhledem k základním bodům A, B; je tedy $|(ABC)| = |AC| : |BC|$.

Důkaz této věty se provede pomocí svazku rovin o ose v přímce AB a plochu $\varkappa$ dostaneme otáčením Apolloniovy kružnice $k(A, B, \lambda)$ kolem přímky AB. Proveďte sami.

Úloha 6. Je dána rovina ϱ a mimo ni dva různé body A, B; přitom přímka AB není kolmá k rovině ϱ. Určete v rovině ϱ m. v. b., jejichž spojnice s body A, B mají od roviny ϱ stejné odchylky $\neq 90°$. [Apolloniova kružnice $k(A', B', \lambda)$, kde body A', B' jsou pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny ϱ a poměr $\lambda = |AA'| : |BB'|$. V případě, že dané body A, B jsou od dané roviny ϱ stejně vzdáleny, je hledanou m. v. b. osa úsečky $A'B'$.]

Poznámka. Pro vyšetřování množin bodů v prostoru budeme později potřebovat pojem tzv. ***mocnosti bodu ke kulové ploše***; proto si zde tento pojem vysvětlíme.

Začneme opět s obdobným pojmem v rovině. Je-li dána kružnice k a v její rovině bod M, pak víme, že pro kružnici $k(O, r)$ a bod M platí důležitá planimetrická



Obr. 4

poučka, která se často používá při konstrukčních úlohách o kružnici a vyjadřuje tzv. *mocnost bodu M ke kružnici k* (obr. 4).

Sestrojíme-li bodem M sečnu a kružnice k a označíme-li A, A' společné body kružnice k a sečny a, pak platí o velikostech úseček MA, MA' vztah

$$(1) \qquad |MA| . |MA'| = ||MO|^2 - r^2| \ (= \text{konst.}).$$

Číslo $|MO|^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k. Je-li $|MO| > r$, tj. leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice k, je mocnost bodu M kladné číslo rovné $|MT|^2$, kde je T bod dotyku tečny vedené bodem M ke kružnici k; je-li $|MO| = r$, tj. leží-li bod M na kružnici k, je jeho mocnost k ní rovna nule; je-li $|MO| < r$, tj. leží-li bod M ve vnitřní oblasti kružnice k, je jeho mocnost k ní číslo záporné. Důkaz vztahu (1) najdete také v citované knížce J. Šedivého na str. 98—99.

Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu ke kulové ploše $\varkappa(O, r)$. Plochu $\varkappa$ můžeme vytvořit otáčením kružnice $k(O, r)$ kolem osy MO, takže vztah (1) platí hned také pro všechny kružnice plochy $\varkappa$ vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \not\equiv O$) a číslo $|MO|^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše $\varkappa$. Je-li $M \equiv O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O.

Než přistoupíme k dalším výkladům, bude prospěšné, když si čtenář sám rozřeší následující úlohy, jejichž výsledky v dalším použijeme.

Úloha 7. Určete množinu středů všech kulových ploch, které procházejí danými třemi navzájem různými body A, B, C. [Přímka kolmá k rovině $\varrho \equiv ABC$, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.]

Úloha 8. Jsou dány rovnoběžné roviny ϱ, σ ($\varrho \not\equiv \sigma$). Určete množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod v rovině ϱ a druhý krajní bod v rovině σ. [Rovina souměrnosti rovinové vrstvy (ϱ, σ) určené rovinami ϱ, σ.]

Úloha 9. Jsou dány mimoběžné přímky a, b. Určete množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a, druhý krajní bod na přímce b. [Rovina σ souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek, $\sigma \perp XY$, viz obr. 7.]