5. kapitola. Maticové hry

In: Ján Gatial (author); Tomáš Hecht (author); Milan Hejný (author): Hry takmer matematické. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 72–86.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404084

5. kapitola

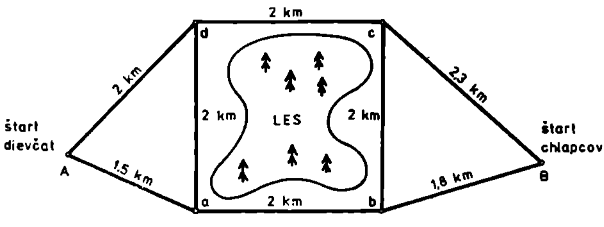
MATICOVÉ HRY

Bola pekná májová sobota. Za mestom uskutočnili školáci veľký branný pretek. Jeho pravidlá boli nasledovné:

5.1. Pravidlá branného preteku. Bojujú proti sebe vždy 2 dvojčlenné hliadky: dievčenská a chlapčenská. Dievčenská hliadka štartuje z miesta A, chlapčenská z miesta B (pozri priloženú mapku). Každá hliadka má prejsť cez všetky štyri kontrolné stanovištia a, b, c, d tak, že cez každé prejde najviac raz a z vyznačenej cesty nevybočí. Na každom kontrolnom stanovišti je rovnaký „sklad" maškŕt: ten sa stane korisťou hliadky, ktorá k nemu dorazí prvá.

Z obrázku vidieť, že dievčatá sú trochu zvýhodnené, lebo sú bližšie k lesu. Snahou každej hliadky je zmocniť sa čo najväčšieho množstva sladkostí.

Z uvedených pravidiel vyplýva, že chlapčenská hliad-



Obr. 1

ka — hliadka B — má štyri možnosti, ako obehnúť všetky stanovištia:

trasa I. $B — b — c — d — a$
trasa II. $B — b — a — d — c$
trasa III. $B — c — d — a — b$
trasa IV. $B — c — b — a — d$

Dievčenská hliadka — hliadka A — má tiež štyri možnosti:

trasa 1. $A — a — b — c — d$
trasa 2. $A — a — d — c — b$
trasa 3. $A — d — a — b — c$
trasa 4. $A — d — c — b — a$

5.2. Ako sa pretekalo? V prvom kole nastúpili proti sebe hliadky Anky a Borisa. Dievčatá si zvolili trasu 1, chlapci trasu III. Teda hliadka A získala maškrty zo stanovísk a, b, hliadka B zo stanovísk c, d.

Po preteku se obe hliadky zišli na štarte A. Dievkam sa už podarilo zlikvidovať všetky ukoristené sladkosti. Chlapci neboli tak rýchli. Boris provokačne mliaskal a pochvaľoval si čokoládu.

A: Boris, nemliaskaj tak a ponúkni dámy!

B: Dámy nemali byť tak pažravé! Po chvíli dodal: Je skutočne znamenitá tá čokoláda.

A: Aj tak som ti tú čokoládu vyhrala vlastne ja. Kebyže poslúchnem Alenu, ktorá navrhovala vybrať sa najprv do d, potom do a, tak by ste boli získali len sklad c.

B: Vidím, že teraz si už veľmi múdra. Mala si byť pred pretekom. Mimochodom, aj ja už teraz viem, že aj pre nás bola lepšia cesta.

A: To si len ty myslíš!
B: O čo sa stavíš?
A: O tie tvoje cukríky.
B: Nedbám, ak vyhráš, cukríky sú tvoje. Ak prehráš, tak mi až do konca školského roku píšeš domáce úlohy z ruštiny.
A: Dobre, povedz svoju trasu!
B: Čo si myslíš, že som spadol z jahody? Prezradím ti svoju stratégiu a ty budeš pápež. Každý z nás pekne napíše svoju trasu a potom sa uvidí, komu by pripadli 3 skladištia maškŕt.

Platí, povedala Anka, a zamyslenému Borisovi odlomila kus čokolády. Na lístoček napísala číslo 3 v nádeji, že Boris bude tvrdohlavý, ostane pri pôvodnej trase III a ona vyhrá stávku. Zmýlila sa. Boris nebol tvrdohlavý, zakľučkoval a zvolil trasu II. Anka se rozčertila a zvolala:

— Prečo zákon schválnosti musí byť namierený vždy proti nám, múdrym?
Vieš Anička, poznamenáva autor, optimizmus ešte nemusí znamenať múdrosť. Treba aj trošku ostražitosti. V nádeji na holuba na streche vystavila si sa nebezpečenstvu, že ti uletí vrabec z hrsti.

Úloha 5.1. Ktoré trasy môže voliť Anka, aby zo 4 skladov určite získala aspoň 2?
Úloha 5.2. Ktoré trasy môže voliť Boris, aby zo 4 skladov určite získal aspoň 2?
Úloha 5.3. Vyšetrite všetky možné prípady pre trasy dievčat a chlapcov!

5.3. Rozbor hry. Prehľadne ho urobíme pomocou tabuliek. Z nich vidieť, ktorých skladov sa zmocní hliadka

A, resp. hliadka B, pri rôznych kombináciách trás, po ktorých budú hliadky bežať. Predpokladáme, že hliadky bežia zhruba rovnako rýchle.

hliadka A sa zmocní skladov

	I	II	III	IV
1	*a*	*ac*	*ab*	*abd*
2	*ad*	*adc*	*adb*	*ad*
3	*ad*	*d*	*abd*	*ad*
4	*d*	*dc*	*db*	*d*

tab. 1a

hliadka B sa zmocní skladov

	I	II	III	IV
1	*bcd*	*bd*	*cd*	*c*
2	*bc*	*b*	*c*	*bc*
3	*bc*	*abc*	*c*	*bc*
4	*abc*	*ab*	*ac*	*abc*

tab. 1b

Čítanie v tabulkách. Ak A volí trasu 3 a B volí trasu II, tak hliadka A získa iba sklad d. Nájdeme to v okienku v 3. riadku a II. stĺpci tab. 1a.

Vzhľadom na to, že skladov, ktorých sa nezmocní chlapčenská hliadka, sa zmocní dievčenská hliadka, dá sa tabuľka 1b ľahko vyrobiť z tabuľky 1a. Dievčenská hliadka má možnost voliť si 1., 2., 3. alebo 4. trasu. Zvolenie niektorej trasy nazveme *výberom stratégie.* Chlapčenská hliadka môže voliť tiež jednu zo štyroch stratégií 1, 2, 3, 4 (nebudeme rozlišovať arabské a rímske číslice). Ani jedna z hliadok nevie, ktorú stratégiu si zvolila druhá hliadka. Ak si A vybral i-tú stratégiu, B j-tú stratégiu, tak označme

a_{ij} počet skladov, ktoré získa hliadka A,
b_{ij} počet skladov, ktoré získa hliadka B.

Zrejme platí $a_{ij} + b_{ij} = 4$. Usporiadame čísla a_{ij} do tabuľky M_A, tvaru 4×4 tak, že číslo a_{ij} zapíšeme do

i-tého riadku a j-tého stĺpca. Podobne usporiadame do tabuľky M_B čísla b_{ij}. Tieto tabuľky budeme volať *výplatné matice hráča A* resp. *hráča B*:

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úvahy, ktoré robil čitateľ pri riešení úloh 5.1—5.3, teraz upresníme. Predvedieme metódu, ktorá má pekné meno: minimax. Doplňme maticu M_A takto:

$$\begin{array}{r c c} & & \text{min.} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \text{max.} & \begin{matrix} 2 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

Do stĺpca „min“ sme zapísali najmenší (minimálny) prvok daného riadku. Aký je význam týchto čísel? Hovoria o tom, koľko skladov získa minimálne hráč A, ak zvolí stratégiu príslušného riadku. Napr. ak hráč A volí 3. stratégiu, tak vyhrá aspoň jeden sklad. O túto výhru ho hráč B nijako nemôže pripraviť. Nájdeme teraz maximum 4 čísel stĺpca „min“. Je to číslo 2, čo sa nadobúda v 2. riadku. To značí, ak si hráč A zvolí 2. stratégiu, tak vyhrá aspoň 2 sklady — väčšiu výhru mu nemožno zaručiť. Ak si A vyberie inú stratégiu, jeho „zaručená“ výhra je menšia.

Do riadku „max“ sme zapísali najväčší (maximálny) prvok daného stĺpca. Ostražitý hráč B si zase všíma práve tieto 4 čísla. Ak si vyberie totiž 1. stratégiu, tak A získa najviac 2 sklady, ak si vyberie 2. stratégiu, získa A najviac 3 sklady, atď. Hráč B sa snaží maximalizovať svoj zaručený zisk, t. j. *minimalizovať maximálny* možný zisk hráča A. Uvedené 4 čísla označujú maximálny možný zisk hráča A pri výbere jednotlivých stratégií hráčom B. Minimum z týchto 4 čísel je 2: nadobúda sa v 1. stĺpci. Teda ak B si vyberie 1. stratégiu, tak hráč A získa najviac 2 sklady, pri výbere inej stratégie hráčom B maximálny možný zisk hráča A je väčší — 3 sklady.

Záver. Ak A si vyberie 2. stratégiu, tak A vyhrá aspoň 2 sklady. Ak B si vyberie 1. stratégiu, tak A vyhrá najviac 2 sklady. Vidíme teda, že „niet sa o čo hádať".

5.4. Hra na samohlásky. V tabuľke 2 je uvedených 6 päťpísmenových slov.

	1.	2.
1.	štvrť	Elena
2.	šatňa	ulica
3.	štart	krava

Tab. 2

Hrajú dvaja hráči. Súčasne, nezávisle na sebe, povedia: hráč A číslo jedného z troch riadkov, hráč B poradové číslo jedného z dvoch stĺpcov. Tým je určené jedno zo šiestich slov tabuľky. Hráč A zaplatí za každú spoluhlásku, ktorá je v určenom slove, hráčovi B 1 Kčs. Hráč B zasa zaplatí hráčovi A 1 Kčs za každú samohlásku určeného slova.

Úloha 5.4. Napíšte výplatnú maticu hráča A aj hráča B.

Úloha 5.5. Podobne ako v odseku 5.3 určite metódou minimax stratégiu hráča A aj hráča B.

Úloha 5.6. Riešte úlohu 5.4 a 5.5 v prípade, že základná tabuľka päťpísmenových slov vyzerá takto:

a) maslo rieka
tromf Áziou
spúšť trend

b) vagón siaha
Viera slama
blesk somár

5.5. Zovšeobecnenie. Všimnime si spoločné rysy predchádzajúcich hier. Všetky tieto hry boli pre dvoch hráčov A, B. Hráč A mal istú množinu stratégií (možností), ktoré boli očíslované prirodzenými číslami 1, 2,..., m. Podobne hráč B mal istú množinu stratégií, očíslujeme ich 1, 2,..., n. Symbolom a_{ij} označíme „zisk" hráča A, ak hráč A volil stratégiu i, hráč B stratégiu j. Čísel a_{ij} je teda $m \times n$ a usporiadame ich do výplatnej matice M_A hráča A s m riadkami a n stĺpcami. Rovnako vytvoríme čísla b_{ij} a výplatnú maticu M_B hráča B. Ďalšia dôležitá vlastnosť tu preberaných maticových hier je *nezávislosť* volieb stratégií: žiaden hráč nepozná, ktorú stratégiu volil súper. Konečne naše hry boli *antagonistické*, t. j. splňovali podmienku $a_{ij} + b_{ij} =$ konšt. (v brannom preteku konštanta bola rovná 4, v hre na samohlásky je to 0).

Hľadanie stratégie sme robili metódou „minimaxu". V prípade, že pre maticu M_A platí rovnosť

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j(\max_i a_{ij})^*) ,$$

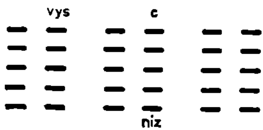
hovoríme, že hra má sedlový bod. V tomto prípade nájdenie optimálnych stratégií nerobí ťažkosti.

---

*) Význam symbolu $\max_i (\min_j a_{ij})$ je nasledovný: Pre každé i nájdeme najmenšie z čísel $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$. Takto dostaneme pre každé i jedno číslo. Teraz z takto získaných čísel vyberieme najväčšie. Podobne chápeme symbol $\min_j (\max_i a_{ij})$.

5.6. Najväčší z najmenších. Príklad. *V triede sú rozsadení žiaci do 6 stlpcov po 5 radoch (laviciach). Nech sú títo 30 žiaci (kvôli jednoduchosti výberu) rôzne vysokí. Teraz v každom rade vyberiem najvyššieho žiaka. Takto dostanem „5 vysokých žiakov“. Z týchto 5 žiakov vyberiem najnižšieho. Nech je to žiak F. Spravme ešte iný výber. Vyberme z každého stĺpca najnižšieho žiaka. Takto dostaneme 6 žiakov. Teraz z týchto 6 „nízkych“ žiakov vyberieme najvyššieho — označme ho G. Ktorý z týchto žiakov je vyšší, F či G?*

Riešenie. F je najnižší z najvyšších, G je najvyšší z najnižších. Ukážeme, že každý z 5 vysokých žiakov je aspoň tak vysoký ako ľubovoľný zo 6 „nízkych“ žiakov. Sledujme úvahy na obr. 2.



Obr. 2

Naozaj, „vysoký“ žiak 1. lavice je iste aspoň tak vysoký ako nízky žiak 4. stĺpca, lebo vysoký žiak je aspoň tak vysoký ako žiak C a ten je aspoň tak vysoký ako „nízky“ žiak 4. stĺpca. Rovnako vysokí sú len v prípade, že sa jedná o toho istého žiaka. Táto argumentácia sa ľahko zovšeobecní. Keďže F je jeden z „vysokých“ a G jeden z „nízkych“, tak F je aspoň tak vysoký jako G. Rovnosť nastane len v prípade, že sa jedná o toho istého žiaka.

Týmto spôsobom by sa aj dokázalo, že v ľubovoľnej matici M_A platí:

$$\max_i(\min_j a_{ij}) \leqq \min_j(\max_i a_{ij})$$

Ďalej, ak uvedené dve čísla sa rovnajú, tak existuje usporiadaná dvojica indexov k, l tak, že

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j a_{kj} = a_{kl} = \max_i a_{il},$$

t. j. existuje taký prvok matice M_A, ktorý bol vybratý súčasne ako najmenší vo svojom riadku a najväčší vo svojom stĺpci. (V prípade, že v nejakom riadku je viac rovnakých najmenších prvkov, tak vyberáme všetky obdobne pre stĺpce.) Túto dvojicu indexov k, l zodpovedajúcu výberu k-tej, resp. l-tej stratégie, nazveme sedlovým bodom matice M_A.

Vráťme sa teraz k nášmu príkladu „Branný pretek". Hra má sedlový bod — je to dvojica stratégií (2,1). Ak jeden z hráčov sa odchýli — vyberie si inú stratégiu, tak môže na tom len stratiť. Naozaj, ak hráč A si miesto 2. stratégie vyberie 1. alebo 4. stratégiu a B vytrvá pri 1. stratégii, tak A získal len jeden sklad. Pri výbere 3. stratégie získa A 2 sklady, teda tiež nezarobí, ale vystavuje sa zbytočnému riziku, že B si vyberie 2. stratégiu. Ak hráč B si miesto 1. stratégie vyberie inú a hráč A zotrvá pri 2. stratégii, tak B tiež môže len stratiť.

Táto istá situácia je pri všetkých antagonistických maticových hrách, kde matica M_A má sedlový bod. Metóda „minimax" je použiteľná len pre tie maticové hry, ktoré sú antagonistické.

5.7. Boris uzmieruje Aničku. Boris sa rozhodol, že uzmieri Aničku. Vymyslel teda maticovú hru „Uzmierenie". Boris vysvetľuje pravidlá:

— Obaja napíšeme na papier nezávisle na sebe prirodzené číslo menšie ako 4. Potom tieto čísla sčítame, a ty, Anička, dostaneš odo mňa toľko tulipánov, koľko je súčet týchto čísel. (Boris si v duchu spočítal, že ho uzmierenie bude stáť 4 tulipány.)

— Je to zaujímavá hra. Mali by sme ju hrávať častejšie.

Boris si napísal číslo 1, Anička 3 — vidieť, že obaja sú priame povahy. Galantný Boris by asi napísal číslo 3.

Úloha 5.7. Napíšte maticu M_A uvedenej hry! Nájdite sedlový bod tejto matice! Zistite, či Anička a Boris hrali optimálne.

Matica M_A má jednu zvláštnosť — všetky prvky jej tretieho riadku

$$M_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

sú väčšie než zodpovedajúce prvky 1. i 2. riadku. Tretí riadok dominuje nad 1. i 2. riadkom. Teda bez ohľadu na to, ktorú stratégiu si vyberie hráč B, pre hráča A je vždy výhodnejšia 3. stratégia ako 1. alebo 2. stratégia. Teda Aničkina voľba je jednoznačná — vyberá 3. stratégiu. Podobne je na tom Boris. Druhý aj tretí stĺpec dominujú nad 1. stĺpcom matice M_A. Každý prvok 2. i 3-ho stĺpca je väčší ako zodpovedajúci prvok 1. stĺpca. Borisovou snahou je minimalizovať výhru Aničky, preto vyberá „najmenší" stĺpec. Teda bez ohľadu na to, čo vymyslí Anka, pre Borisa je vždy výhodnejšie napísať číslo 1.

Budeme hovoriť, že k-tý riadok (stĺpec) *dominuje* nad l-tým riadkom (stĺpcom), ak pre všetky j platí $a_{kj} > a_{lj}$ ($a_{jk} > a_{jl}$).

Budeme hovoriť, že k-tý riadok (stĺpec) *slabo dominuje* nad l-tým riadkom (stĺpcom), ak pre všetky j platí $a_{kj} \geqq a_{lj}$ ($a_{jk} \geqq a_{jl}$).

Stratégiu hráča A, nad ktorou nejaká iná slabo dominuje, si netreba všímať: pre hráča A je nevýhodná. Podobne stratégia hráča B, ktorá slabo dominuje nad nejakou inou jeho stratégiou, môže byť tiež vynechaná — je pre hráča B nevýhodná. Teraz však pusťme k slovu znovu Borisa.

5.8. Hra „Neprestreľ".

B: Riešenie našej poslednej hry bolo naozaj jednoduché. Poviem ti, Anka, zložitejšiu hru s podobným zadaním. Obaja napíšeme nezávisle na sebe prirodzené číslo menšie ako 1000. Vyhráva ten, kto napísal väčšie číslo, pokiaľ toto nie je viac ako dvakrát väčšie ako číslo protivníka. V prípade, že väčšie číslo je viac ako dvakrát väčšie než menšie číslo, tak vyhráva ten, kto napísal menšie číslo. Ak obaja napíšeme rovnaké číslo, je nerozhodne. Každú partiu hrajme o korunu!

A: Počkaj Boris, ak ja napíšem 15 a ty 34, tak kto vyhrá?

B: Ty, lebo ja som prestrelil. Moje číslo je väčšie ako 2×15.

A: A ak ja napíšem 15 a ty 30?

B: Tak vyhrám ja. Lebo 30 je viac ako 15, ale nie viac ako 2×15.

A: A ty chceš v tejto hre vyhrať? Snáď vieš čítať moje myšlienky?

B: Uvidíš! Zahrajme sa!

Deti odohrali 5 partií, ktoré sú zapísané v tejto tabuľke.

Číslo partie	1	2	3	4	5
Číslo Aničky	238	10	1	1	4
Číslo Borisa	4	2	4	2	1
Víťaz	Boris	Boris	Anka	Boris	Boris

B: Vidím, že sa ti nedarí. Vieš čo? Ty môžeš písať všetky čísla a ja len čísla 1, 2, 4.

Anička sa zamyslí, píše, počíta.

A: To mi vlastne žiadnu výhodu nedávaš. Lebo pozri sa! Moja výplatná matica vyzerá takto:

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B: To je tých 1000?
A: Nie, to je iba prvých desať čísel, ale pre 1000 to bude „rovnaké". Každá z týchto tvojich šiestich stratégií (Anička ukázala 6 posledných stĺpcov označených svorkou) slabo dominuje nad tvojou 1. stratégiou. Preto ich všetky možno vynechať. Pri matici 1000 × 1000 by sme vynechali posledných 996 stĺpcov.
B: Správne. Ak totiž miesto ľubovoľného čísla väčšieho ako 4 napíšem číslo 1, tak nemôžem na tom stratiť.

Totiž jednotka prehráva len proti dvojke a remízuje s jednotkou, zatiaľ čo každé číslo väčšie než 4 prehráva s jednotkou aj dvojkou a navyše ešte s nejakými ďalšími.

A: Ak sa teraz obmedzíme na prvé 4 prirodzené čísla — ako sme videli, písať väčšie nemá zmysel — tak vidíme, že tvoja 3. stratégia slabo dominuje nad tvojou štvrtou, teda jej voľba nemá pre teba význam.

B: Máš pravdu. Naviac, pretože hra je symetrická, platí obdobná vec pre teba. Nemá význam, aby si napísala niektoré z čísel 3, 5, 6, 7,..., 1000. Ostali nám teda iba čísla 1, 2, 4.

A: Takže pôvodná matica M_A sa zredukovala takto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1.\,\text{s.} & 2.\,\text{s.} & 4.\,\text{s.} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1.\,\text{s.} \\ 2.\,\text{s.} \\ 4.\,\text{s.} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

označme túto maticu M_1

Úloha 5.8. Aké čísla je výhodné písať v Borisovej hre, ak mierne zmeníme pravidlá — obaja hráči môžu napísať ľubovoľné prirodzené číslo.

Úloha 5.9. Zmeňme pravidlá Borisovej hry nasledovne: obaja hráči nezávisle na sebe napíšu prirodzené číslo. Ak obaja napísali rovnaké číslo, je nerozhodne. Ak napísali rôzne čísla, tak väčšie číslo vyhráva len v prípade, že je o 1 alebo o 2 väčšie ako menšie číslo. Ktoré čísla je výhodné písať teraz?

Úloha 5.10. Ukážte, že matica M_1 nemá sedlový bod!

A: Žiaľ, naša matica nemá sedlový bod. Naše predošlé metódy nezaberú. Ale aj tak, čísla 1, 2, 4 sa mi zdajú úplne rovnocenné — každé z nich raz prehráva, raz vyhráva, raz remizuje. Tak predpokladám, že je úplne jedno, ktoré napíšem. Trebárs budem stále písať jednotku.

B: Niečo pravdy máš. Avšak, ak ty budeš písať stále jednotku, tak ja budem stále písať dvojku a korunky sa budú hromadiť u mňa.

A: Tak ja budem písať štvorky!

B: Keď zistím, že ty píšeš stále štvorky, začnem písať samé jednotky a znovu len budem vyhrávať.

A: Si protivný, stále by si chcel len vyhrávať. A čo urobíš, keď budem čísla striedať, ha?

B: Veru, treba ich striedať. A ak neveríš, že vieš čítať cudzie myšlienky, tak striedať náhodne.

A: Napíšem to číslo, čo ma práve v ten moment napadne!

B: Nie som si istý, či taká „náhodnosť" bude skutočne náhodná.

A: A aká „náhodnosť" je podľa teba skutočne náhodná?

B: Taká, do ktorej nezasahuje tvoja vôľa. Dáš do klobúka 3 guľôčky — červenú, modrú a žltú. Jednu z nich potom z klobúka vytiahneš. Ak bude červená, napíšeš číslo 1, ak modrá 2, ak žltá, napíšeš štvorku.

Na tomto mieste naruší diskusiu autor dvoma otázkami:

1. Aká bude priemerná výhra či prehra Aničky pri tomto spôsobe výberu písaného čísla.

2. Prečo voliť taký náhodový mechanizmus, pri ktorom všetky 3 „rozumné" stratégie — napísanie 1, 2, 4 sú rovnako pravdepodobné.

Tu odpovieme na prvú otázku, odpoveď na druhú odložíme do kapitoly šiestej. Predpokladajme, že Boris napíše niektoré z čísel 1, 2, 4 a Anička nezávisle na tom ťahá gulôčku z klobúka. Hneď vidno, že má rovnakú šancu vyhrať i prehrať korunu, takže *priemerná hodnota* jej výhry je 0. Ak Boris napíše niektoré z čísel 3, 5, 6, 7, 8, tak Ankina šanca vyhrať je dvakrát taká ako Borisova (totiž každé z Borisových čísel prehráva voči dvom číslam z množiny 1, 2, 4 a len voči jednému vyhráva. Ak Boris napíše číslo väčšie ako 8, tak Anička zaručene vyhrá).

Záver. Ak Boris bude hrať rozumne, tak Anička pri tomto spôsobe hry zostane „na svojom", ináč bude jej šanca vyhrať väčšia ako Borisova.

V ďalšej kapitole si ukážeme, v akom pomere miešať „čisté stratégie", aby sme v hre, ktorej matica nemá sedlový bod, obstáli čo najlepšie.