1. kapitola

ANKA S BORISOM HRAJÚ NIM

Hra NIM sa hrá tak, že dvaja hráči striedavo berú z kopy kameňov — začal vysvetlovať Boris pravidlá novej hry, ktorú sa včera naučil.

Aha — povedala Anka — to mi je jasné.

Ty tú hru poznáš? — čudoval sa Boris.

Nepoznám, ale viem, prečo sa volá NIM — povedala Anka a vysvetlila — sloveso „brať“ sa po nemecky povie „nehmen“ (čítaj: némen) a rozkaz „ber!“ sa povie „nimm!“.

Poznáš meno toho, čo ešte nepoznáš — podpichol Boris a začal vysvetlovať Aničke.

1.1. Pravidlá NIM. Na kope je 17 kameňov. Dvaja hráči, Anička (A) a Boris (B), striedavo berú z kopy. Hráč, ktorý je na ťahu, berie 1, 2 alebo 3 kamene. Vyhráva ten hráč, ktorý berie posledný kameň.

Príklad partie. Anička s Borisom sa zahrali. Začínala Anka, lebo dievčatá majú prednosť. Vzala 2 kamene, potom Boris vzal 3, A vzala 3, B vzal 1, A vzala 1, B vzal 2, A vzala 2 a B vzal posledné 3 kamene a tým partiu vyhral (radosť mali obaja).

Ak čitateľa nahnevalo priveľa slov „vzal“ a „vzala“ v uvedenom opise partie, tak ponúkneme stručnejší a snáď aj prehľadnejší zápis.

Zápis partie: $17 \xrightarrow{A} 15 \xrightarrow{B} 12 \xrightarrow{A} 9 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A}$ $\rightarrow 3 \xrightarrow{B} 0$; Boris vyhral.

I keď v tomto zápise nie je priamo uvedené, kto koľko kameňov bral, dá sa toto číslo ľahko vypočítať ako rozdiel susedných pozícií.

Úloha 1.1. V siedmom ťahu partie zahrala Anka $5 \longrightarrow 3$ a prehrala. Mohla hrať lepšie? Mohla zvíťaziť?

Úloha 1.2. V šiestom ťahu partie zahral Boris $7 \longrightarrow 5$ a mohol prehrať, keby Anka ťahala ako v riešení úlohy 1. Teda Borisov ťah nebol správny. Ako mal hrať správne?

Úloha 1.3. Bol štvrtý ťah partie $9 \xrightarrow{B} 8$ dobrý? Mohol Boris zahrať lepšie?

1.2. Ako hrať NIM? Z úloh vidíme, že dve pozície sú nebezpečné: 4 a 8. Ak na kope ostalo 8 či 4 kamene, tak hráč, ktorý je na ťahu, prehrá — ak jeho súper vie, ako na to. Skutočne, po ťahu $4 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 0$ a vyhrá; hviezdičkou $*$ tu označujeme ktorúkoľvek z možných pozícií: na kope ostane 3, 2 alebo 1 kameň. Podobne po ťahu $8 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 4$ a prevedie tak pozíciu na predošlú, o ktorej sme už ukázali, že je pre Borisa vyhratá. V tomto druhom prípade bola $*$ rovná 7, 6 alebo 5.

Dve nebezpečné pozície už poznáme. Sú ešte ďalšie? Pozície 9, 10 a 11 to nie sú, lebo z každej z týchto pozícií je možné potiahnuť do vyhratej pozície 8. Čo ale pozícia 12? Skutočne, keď na kope ostane 12 kameňov, tak po ťahu $12 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 8$ a Boris víťazí. Teda aj 12 je nebezpečná pozícia. Rovnako nebezpečná je aj pozícia 16, lebo po $16 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 12$. Nebezpečné pozície sú dané číslami, ktoré sú násobkami štvorky. Teraz už vieme dať Aničke

návod na výhru. Musíš ťahať tak, aby po tvojom ťahu ostalo na kope 16, 12, 8, 4 alebo 0 kameňov.

Poučená Anka zvíťazí nad bezmocným Borisom v 9 ťahoch takto (hviezdičkami označujeme ľubovoľné prípustné pozície): $17 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

Úloha 1.4. Začnime NIM s kopou 31 kameňov a nie 17 kameňov. Aké budú nebezpečné pozície v tomto prípade?

Úloha 1.5. Napíšte návod na víťaznú hru NIM, pričom na začiatku je na kope 1983 kameňov (ste Anička)!

1.3. NIM s braním do 5 kameňov. Pozmeníme trošku pravidlá hry NIM. Na kope bude 23 kameňov a pri braní je dovolené vziať ľubovoľný počet kameňov od 1 do 5.

Príklad partie. $23 \xrightarrow{A} 22 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{A} 13 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow 0$, Anka vyhrala.

Úloha 1.6. Zistite, či v šiestom ťahu $6 \xrightarrow{B} 3$ mohol zahrať Boris lepšie.

Úloha 1.7. Mohol Boris zahrať v štvrtom ťahu lepšie ako $13 \xrightarrow{B} 8$?

Úloha 1.8. Nájdite všetky nebezpečné pozície novej hry NIM.

Úloha 1.9. Napíšte návod na výhru, ako začnete hrať novú hru NIM s kopou 1984 kameňov.

1.4. NIM s dvoma kopami. Tretí NIM, ktorý sa naučíme, sa hrá na dve, a nie na jednu kopu.

Pravidlá hry. Dané sú dve kopy kameňov. Na prvej je 7 a na druhej 5 kusov. Hráč na ťahu berie z jednej z kôp ľubovoľný nenulový počet kameňov. Vyhráva ten, kto zoberie posledný kameň.

Príklad partie. Použijeme podobný zápis, ako pri predchádzajúcich hrách. Stav obidvoch kôpok zapíšeme dvojicou čísel v zátvorke. Prvé číslo znamená, koľko kameňov je na prvej kope, a druhé znamená počet kameňov na druhej kope. $(7,5) \xrightarrow{A} (6,5) \xrightarrow{B} (1,5) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B}$ $\rightarrow (1,0) \xrightarrow{A} (0,0)$; Anka vyhrala. Teda: A vzala z prvej kopy 1 kameň, potom B vzal z prvej kopy 5 kameňov, ďalej A z druhej kopy 3 kamene, B z druhej kopy posledné 2 kamene a konečne A z prvej kopy posledný kameň.

Úloha 1.10. Borisov ťah $(1,2) \xrightarrow{B} (1,0)$ bol zlý. Ako mohol hrať lepšie?

Úloha 1.11. Zistite, či v pozícii (2,2) vyhrá hráč na ťahu alebo súper.

Úloha 1.12. Začínate zo situácie (3,4). Ako budete hrať?

Návod na výhru. Pri riešení poslednej úlohy sme si všimli, že nebezpečné pozície sú (n,n), teda také, kde na oboch kopách je rovnaký počet kameňov. Ak sa nám podarí do takej pozície dostať súpera, zvíťazíme veľmi jednoducho: budeme sa po súperovi opičiť. Zopakujeme každý súperov ťah, iba na druhej z kôp. Ak napríklad súper zoberie z druhej kopy 2 kamene, my zoberieme z prvej kopy dva kamene. Ak súper zoberie z prvej kopy 9 kameňov, my zoberieme z druhej kopy 9 kameňov, atď. Napríklad (my sme A) $(17,13) \xrightarrow{A} (13,13) \xrightarrow{B} (9,13) \xrightarrow{A}$ $\rightarrow (9,9) \xrightarrow{B} (9,2) \xrightarrow{A} (2,2) \xrightarrow{B} (0,2) \xrightarrow{A} (0,0)$.

1.5. Urobme poriadok v označení NIM. Poznali sme už viac hier, ktoré sa volajú rovnako — NIM. V budúcnosti sa rodina NIM rozrastie ešte mohutnejšie. Preto je načase začať jednotlivých členov rodiny rozlišovať pomocou krstných mien. Budú to rímske číslice, ku ktorým prípadne ešte pridáme ďalší upresňujúci údaj v zátvorke. Tak NIM z odseku 1.1 budeme označovať NIM I, alebo presnejšie NIM I(17;3), aby sme uviedli, že na kope bolo na začiatku 17 kameňov a v jednom ťahu bolo povolené brať do 3 kameňov vrátane. Podobne NIM z odseku 1.3 má meno NIM I(23;5). Teda NIM I $(n;k)$ je nimovská hra s jednou kopou, na ktorej je na začiatku n kameňov a pri jednom ťahu je povolené brať od 1 po k kameňov vrátane.

Dvojkopový NIM z odseku 1.4 bude označovaný NIM II(7,5;∞). To znamená, že v začiatočnej pozícii bolo na prvej kope 7 a na druhej 5 kameňov, pričom v každom ťahu bolo povolené z jednej kopy brať neobmedzený počet kameňov (∞ je znak pre nekonečno). Teda NIM II$(m,n;k)$ je nimovská hra s dvoma kopami; na prvej je m a na druhej n kameňov; pri jednom ťahu sa smie brať iba z jednej kopy a počet braných kameňov nesmie prekročiť počet k.

Všimnite si, že NIM II$(n,0;k)$ je to isté, ako NIM I $(n;k)$. V zátvorke je raz čiarka a raz bodkočiarka. Posledná oddeľuje počty kameňov na kopách od čísla určujúceho maximálny počet braných kameňov. Toto číslo môže byť aj „nekonečno", t. j. branie nie je obmedzené.

V ďalšom texte budeme písmená NIM často vynechávať a písať iba I(9;2) či II(51,36;9) a pod.

Úloha 1.13. Zistite, či v nasledujúcich hrách zvíťazí začínajúci hráč A alebo jeho súper B. Ak zvíťazí A, zapíšte aj vyhrávajúci ťah:
a) I(35;5), b) I(35;6), c) I(35;7), d) II(12,12;∞),
e) II(12,15;∞).

1.6. Zovšeobecnenie. Keď sa Anka s Borisom naučili pár nimovských hier, povedal Boris, že hoci sú tieto hry rôzne, majú niečo spoločné.

— To vidí aj slepý, dodala Anka, že sa hrajú s kopami kameňov.

— Nie to mám na mysli, oponoval Boris. Niečo závažnejšie je tu spoločné. Niečo, čo budeme vidieť aj pri niektorých nie nimovských hrách.

— Túžbu zvíťaziť, skočila Borisovi do reči Anka.

— Áno, to je to spoločné, potvrdil Boris a pokračoval. No nielen túžbu, ale aj akýsi návod na to, ako nájsť návod na výhru. Znamená to nájsť všetky tie pozície, ktoré sme pomenovali „nebezpečné". To sú všetky pozície, v ktorých hráč na ťahu prehrá...

— Ak ovšem jeho súper vie, ako ho zdolať, doplnila Anka.

— Múdro by sa to dalo povedať asi takto...

— Odpusť Boris, že ti skáčem do reči aj ja, prerušil tok vyslovovaných Borisových myšlienok autor, ale treba povedať dva termíny, ktoré ešte asi nepoznáš, lebo si ich nepočul. To, čo voláš *návod na výhru*, budeme volať *stratégia hry*. Stratégiou hry teda rozumieme predpis, ako danú hru hrať čo najlepšie. To, čomu hovoríš *nebezpečná situácia či pozícia*, sa bude volať *kritická pozícia*. Je to každá taká pozícia, v ktorej hráč, ktorý je na ťahu, určite prehrá, ak jeho súper je „dokonalý".

— Takže, berie si znovu slovo Boris, poznať stratégiu hry vlastne znamená poznať množinu všetkých kritických pozícií. Stratégia je potom daná jednoduchým pravidlom:

ŤAHAJ VŽDY TAK, ABY SI VYTVORIL KRITICKÚ POZÍCIU.

Nájsť všetky kritické pozície bude niekedy asi ťažké. No vieme, ako na to pôjdeme. Najprv si vypíšeme vôbec všetky možné pozície a potom jednu za druhou preveríme, či je alebo nie je kritická.

Úloha 1.14. Koľko prvkov má množina všetkých pozícií hry a) II(7,5;∞), b) II(7,5;3)?

Úloha 1.15. Vypíšte množinu všetkých kritických pozícií hry II(7,5;3).