Kapitola V.

POUŽITÍ SYMETRICKÝCH FUNKCÍ TŘÍ PROMĚNNÝCH

Srovnáním kapitoly II s kapitolou I jsme zjistili, že teorie symetrických funkcí tří proměnných je jen zobecněním teorie symetrických funkcí dvou proměnných, zobecněním, které je náročné spíše po stránce technické než po stránce myšlenkové. A tak i příklady, které v dalším uvedeme, budou jen početně komplikovanějšími analogiemi příkladů z kapitoly předcházející.

Uveďme nejprve větu, která je analogií věty IV.2 a kterou při řešení příkladů užijeme. Její důkaz přenecháme čtenáři; vychází ze vztahů mezi kořeny a koeficienty kubické rovnice, jak jsme je odvodili na začátku kapitoly II.

V.1. Věta. *Buďte e_1, e_2, e_3 daná čísla. Má-li kubická rovnice*

(R) $$t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = 0$$

řešení t_1, t_2, t_3, má soustava rovnic

(S) $$\begin{aligned} x + y + z &= e_1, \\ xy + yz + zx &= e_2, \\ xyz &= e_3 \end{aligned}$$

šest řešení:

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_3;\ x = t_1,\ y = t_3,\ z = t_2;$$

$$x = t_2,\ y = t_1,\ z = t_3;\ x = t_2,\ y = t_3,\ z = t_1;$$
$$x = t_3,\ y = t_1,\ z = t_2;\ x = t_3,\ y = t_2,\ z = t_1.$$

Jsou-li naopak čísla x_0, y_0, z_0 řešením soustavy (S), *jsou tato čísla i kořeny rovnice* (R).

V.2. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$x + y + z = a, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Soustavu (1) můžeme zapsat též takto:

$$s_1 = a, \quad s_2 = b, \quad s_3 = c$$

[viz kap. II, vzorec (9)]; vyjádříme-li symetrické polynomy s_1, s_2, s_3 pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3, dostaneme z (1) soustavu

$$e_1 = a,$$
$$e_1^2 - 2e_2 = b,$$
$$e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = c$$

(viz úlohu II.3), kterou dovedeme snadno vyřešit: je

$$e_1 = a, \quad e_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b).$$

Dosadíme-li sem opět za e_1, e_2, e_3 jejich vyjádření pomocí x, y, z, dostaneme soustavu tvaru (S), která je ekvivalentní soustavě (1):

$$x + y + z = a,$$

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}(a^2 - b),$$

$$xyz = \frac{1}{3}(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b),$$

a podle věty V. 1 tedy najdeme řešení soustavy (1) tím, že určíme kořeny kubické rovnice

$$t^3 - at^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b)\,t - \frac{1}{3}(c - a^3) - \tag{2}$$

$$- \frac{1}{2}a(a^2 - b) = 0.$$

(b) Zvolme v předcházejícím příkladu $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$. Pak má rovnice (2) tvar

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$$

a její kořeny jsou čísla $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$, neboť

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t - 2)(t^2 - 1).$$

Soustava

$$x + y + z = 2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 8$$

má tedy těchto šest řešení:

$$\{2, 1, -1\}, \{2, -1, 1\}, \{1, 2, -1\},$$

$$\{1, -1, 2\}, \{-1, 2, 1\}, \{-1, 1, 2\}.$$

(c) Řešme soustavu

$$(3) \qquad xy + yz + zx = 11,$$

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = 48,$$

$$xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) = 118.$$

Vyjádříme symetrické polynomy na levých stranách rovnic soustavy (3) pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3 podle věty II.7. V první rovnici je vlevo přímo e_2, ve druhé je vlevo symetrický polynom $S_{2.1.0}$ a ve třetí symetrický polynom $S_{3.1.0}$ [viz kap. II, vzorec (16)]. Protože podle úlohy II.3 je

$$S_{2.1.0} = s_2 s_1 - s_3 = e_1 e_2 - 3e_3$$

(viz též příklad II.2 (e)),

$$S_{3.1.0} = s_3 s_1 - s_4 = e_1^2 e_2 - 2e_2^2 - e_1 e_3,$$

můžeme soustavu (3) napsat takto:

$$(4) \qquad e_2 = 11,$$

$$e_1 e_2 - 3e_3 = 48,$$

$$e_1^2 e_2 - 2e_2^2 - e_1 e_3 = 118.$$

Z obou prvních rovnic vyjádříme e_2 a e_3:

$$(5) \qquad e_2 = 11, \quad e_3 = \frac{11}{3} e_1 - 16,$$

a dostáváme pro e_1 kvadratickou rovnici

$$11e_1^2 + 24e_1 - 540 = 0,$$

která má kořeny $e_1 = 6$ a $e_1 = -\frac{90}{11}$. Odtud a z (5) máme dvě trojice řešení soustavy (4):

$$e_1 = 6, \qquad e_2 = 11, \qquad e_3 = 6$$

a

$$e_1 = -\frac{90}{11}, \quad e_2 = 11, \quad e_3 = -46.$$

Těmto dvěma trojicím odpovídají dvě kubické rovnice:

(6) $$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

a

(7) $$t^3 + \frac{90}{11}t^2 + 11t + 46 = 0.$$

Kořeny rovnice (6) nalezneme snadno: jsou to čísla $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ a $t_3 = 3$, z nichž dostaneme šest řešení soustavy (3) podle věty V.1. Také kořeny rovnice (7) můžeme spočítat, ovšem už ne tak snadno: užijeme *Cardanových vzorců* a při označení

$$D = (37\,648)^2 - \left(\frac{1369}{3}\right)^3,$$

$$\alpha = \frac{1}{11}\sqrt[3]{-37\,648 + \sqrt{D}},$$

$$\beta = \frac{1}{11}\sqrt[3]{-37\,648 - \sqrt{D}}$$

můžeme kořeny rovnice (7) zapsat takto:

$$t_1 = \alpha + \beta - \frac{30}{11},$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{30}{11} + \frac{i}{2}(\alpha - \beta)\sqrt{3},$$

$$t_3 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{30}{11} - \frac{i}{2}(\alpha - \beta)\sqrt{3}.$$

Podle věty V.1 pak z těchto kořenů dostáváme dalších šest řešení soustavy (3), která tak má celkem dvanáct řešení.

Druhá část posledního příkladu naznačuje, že při použití elementárních symetrických funkcí tří proměnných můžeme narazit na značné potíže při konkrétních výpočtech kořenů kubických rovnic. Zajímají-li nás ovšem třeba jen celočíselná řešení, mohou být metody, o nichž zde hovoříme, efektivní.

Soustavy, které jsme zatím vyšetřovali, obsahovaly symetrické polynomy. Ale podobně jako v případě dvou proměnných lze i zde řešit některé obecnější soustavy (třeba s nesymetrickými výrazy), použijeme-li vhodných obratů.

V.3. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$
\begin{aligned}
&u - 3v - 5w = a, \\
&u^2 + 9v^2 + 25w^2 = b, \\
&u^3 - 27v^3 - 125w^3 = c,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Výrazy na levých stranách v (8) nejsou symetrické; použijeme-li však substituce

$$x = u, \quad y = -3v, \quad z = -5w, \tag{9}$$

přejde soustava (8) v soustavu (1) z příkladu V.2 (a), a řešení soustavy (8) dostaneme z řešení soustavy (1) pomocí vzorců (9).

Zvolíme-li např. $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$, dostaneme pomocí výsledků příkladu V.2(b) tato řešení soustavy (8):

$$\left\{2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right\},$$

$$\left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right\}, \quad \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$(10) \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xy + yz + zx &= 11, \\ (x - y)(x - z)(y - z) &= -2. \end{aligned}$$

Zde *není* symetrická levá strana třetí rovnice; povýšíme-li však třetí rovnici na druhou, dostaneme vlevo symetrický polynom

$$(x - y)^2 (x - z)^2 (y - z)^2 = -4e_1^3 e_3 + e_1^2 e_2^2 + \\ + 18 e_1 e_2 e_3 - 4e_2^3 - 27 e_3^2,$$

který by se měl rovnat 4. Protože z obou prvních rovnic soustavy (10) máme $e_1 = 6$, $e_2 = 11$, dává třetí rovnice (po umocnění!) kvadratickou rovnici pro e_3:

$$e_3^2 - 12 e_3 + 36 = 0,$$

která má jeden (dvojnásobný) kořen $e_3 = 6$. Řešení x, y, z soustavy (10) tedy najdeme pomocí kořenů kubické rovnice

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0,$$

tj. pomocí čísel $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. Těmto kořenům odpovídá šest trojic x, y, z, ty ovšem řeší nikoliv soustavu (10), nýbrž soustavu, v níž je třetí rovnice umocněna. Musíme se proto ještě přesvědčit, která z uvedených šesti trojic vyhovuje třetí rovnici v (10), a najdeme nakonec tři řešení soustavy (10):

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 3, 1\} \quad \text{a} \quad \{3, 1, 2\}.$$

(c) Řešme v oboru reálných čísel soustavu

$$(11)\qquad \begin{aligned} 8(u + v + w) &= 73, \\ uvw &= 1, \\ \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{w} &= \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{vw} + \sqrt[3]{wu}. \end{aligned}$$

Zde máme co činit se symetrickými funkcemi, ale u třetí rovnice to nejsou symetrické polynomy. Položíme-li však

$$(12)\qquad u = x^3, \quad v = y^3, \quad w = z^3,$$

dostaneme z (11) soustavu

$$(13)\qquad \begin{aligned} 8(x^3 + y^3 + z^3) &= 73, \\ x^3y^3z^3 &= 1, \\ x + y + z &= xy + yz + zx, \end{aligned} \qquad *)$$

kterou můžeme zapsat též takto:

$$\begin{aligned} 8s_3 &= 73 \text{ (čili } 8(e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) = 73), \\ e_3^3 &= 1 \text{ (čili } e_3 = 1), \\ e_1 &= e_2. \end{aligned}$$

---

*) Zde jsme použili (a i v dalším použijeme) toho, že pro reálné číslo r definujeme třetí odmocninu z r opět jako **reálné** číslo, speciálně tedy klademe pro $r \in R$

$$\sqrt[3]{r^3} = r.$$

Činíme tak, aby naše úvahy byly pokud možno jednoznačné; čtenář ovšem ví, že třetí odmocninu z jedné lze definovat trojím způsobem:

$$\sqrt[3]{1} = 1 \text{ nebo } -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nebo } -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kdybychom připustili tuto „trojznačnost“, naše úvahy by se značně zkomplikovaly. (Přesvědčte se o tom na příkladu, který právě počítáte!)

To vede na kubickou rovnici pro e_1:

(14) $$8e_1^3 - 24e_1^2 - 49 = 0.$$

Její kořeny jsou $e_1 = \frac{7}{2}$, $e_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}$, $e_1 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}$ a najdeme je buď opět pomocí Cardanových vzorců, nebo tím, že první řešení uhádneme [stačí napsat rovnici (14) ve tvaru $(2e_1)^3 - 6(2e_1)^2 - 49 = 0$ s řešením $2e_1 = 7$] a místo (14) pak řešíme kvadratickou rovnici.

Tím dostáváme tři trojice e_1, e_2, e_3, pomocí nichž můžeme utvořit tři kubické rovnice:

$$t^3 - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{2}t - 1 = 0,$$

$$t^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t - 1 = 0,$$

$$t^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t - 1 = 0.$$

Z těchto rovnic nás zajímá pouze první, protože hledáme reálná řešení soustavy (13). Uvedená kubická rovnice má řešení $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = \frac{1}{2}$, takže šest trojic x, y, z řešení soustavy (13) vznikne různými permutacemi trojice čísel 1, 2, $\frac{1}{2}$. Šest trojic u, v, w reálných řešení soustavy (11) pak dostaneme podle vzorců (12) různými permutacemi trojice čísel 1, 8, $\frac{1}{8}$.

(d) Řešme soustavu

$$x + y + z = 2a,\quad x^2 + y^2 - z^2 = a^2,\quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -a^3, \tag{15}$$

kde a je reálné číslo, $a \neq 0$. Zde není symetrickým polynomem levá strana druhé rovnice, ale přesto náš běžný postup povede k cíli — ovšem především díky vhodné konstelaci polynomů na levé straně a konstant na pravé straně soustavy (15): Zapíšeme-li druhou rovnici ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2z^2,$$

dostaneme z (15) soustavu

$$e_1 = 2a,$$
$$s_2 = a^2 + 2z^2 \text{ (čili } e_1^2 - 2e_2 = a^2 + 2z^2\text{)},$$
$$s_3 - 3e_3 = -a^3 \text{ (čili } e_1^3 - 3e_1e_2 = -a^3\text{)}.$$

Z první rovnice máme

$$e_1 = 2a, \tag{16}$$

z třetí rovnice pak najdeme

$$e_2 = \frac{3}{2}a^2, \tag{17}$$

a z druhé rovnice plyne konečně

$$4a^2 - 3a^2 = a^2 + 2z^2 \quad \text{čili} \quad z = 0.$$

Dostali jsme tak soustavu

$$x + y = 2a,$$
$$xy = \frac{3}{2}a^2,$$

jejíž řešení určíme pomocí kořenů t_1, t_2 kvadratické rovnice

$$t^2 - 2at + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

(viz kap. IV). Soustava (15) má tedy dvě řešení

$$\left\{a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), 0\right\} \quad \text{a}$$

$$\left\{a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), \quad a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), 0\right\}.$$

V.4. Úloha. Uvědomte si, kde jsme při řešení předcházejícího příkladu využili toho, že $a \neq 0$, a nalezněte řešení soustavy (15) pro $a = 0$.

Je zřejmé, že vlastností elementárních symetrických funkcí lze využít při různých úlohách souvisejících s kubickými rovnicemi a jejich kořeny. Dále se tyto funkce hodí při zjednodušování složitých výrazů, při dokazování různých identit apod. Uvedeme nyní několik typických příkladů.

V.5. Příklad. Sestavme kubické rovnice, jejichž kořeny jsou druhými, resp. třetími mocninami kořenů kubické rovnice

$$11t^3 + 90t^2 + 121t + 506 = 0. \tag{18}$$

Mohli bychom kořeny této rovnice vypočítat, umocnit je na druhou, resp. na třetí a sestavit příslušné kubické rovnice; to by však bylo dosti náročné [kořeny rovnice jsme už našli — viz příklad V.2 (c): naše rovnice (18) je totiž rovnice (7)]. Místo toho však využijeme toho, že kubická rovnice, jejíž kořeny jsou druhé, resp. třetí mocniny kořenů x, y, z rovnice (18), má tvar

$$t^3 - pt^2 + qt - r = 0,$$

kde

$$p = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,$$
$$r = x^2y^2z^2,$$

resp.

$$p = x^3 + y^3 + z^3, \quad q = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3,$$
$$r = x^3y^3z^3.$$

Protože

$$x^2 + y^2 + z^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{2} S_{2.2.0} = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = e_2^2 - 2e_1e_3,$$

$$x^2y^2z^2 = e_3^2$$

a

$$x^3 + y^3 + z^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3,$$

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = \frac{1}{2} S_{3.3.0} = \frac{1}{2}(s_3^2 - s_6) =$$
$$= e_2^3 + 3e_3^2 - 3e_1e_2e_3,$$

$$x^3y^3z^3 = e_3^3$$

(ověřte tyto formule!), a protože

$$e_1 = -\frac{90}{11}, \; e_2 = 11, \; e_3 = -46,$$

zjistíme nakonec, že hledané kubické rovnice mají tvar

$$t^3 - \frac{5438}{121} t^2 - \frac{6949}{11} t - 2116 = 0,$$

resp.

$$t^3 + \frac{553\,308}{1331} t^2 - 4741t + 97\,336 = 0.$$

V.6. Příklady. (a) Nechť $x + y + z = 0$. Dokážeme, že pak platí tyto identity:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \tag{19}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2, \tag{20}$$

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}. \tag{21}$$

Důkaz využívá vzorců z úlohy II.3. Protože $e_1 = 0$ (tj. $x + y + z = 0$), vypadají vzorce pro součty s_2, s_3, s_4 a s_5 takto:

$$s_2 = -2e_2,$$

$$s_3 = 3e_3 \quad \text{[to je vzorec (19)]},$$

$$s_4 = 2e_2^2 \quad \text{[to je vzorec (20)]},$$

$$s_5 = -e_2 s_3 + e_3 s_2 = -5e_2 e_3 = 5 \, . \frac{s_2}{2} \cdot \frac{s_3}{3}$$

[a to je vzorec (21)].

(b) Dokážeme, že když $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1$, pak $xyz = 0$.

Je tedy $e_1 = s_2 = s_3 = 1$. Protože $s_2 = e_1^2 - 2e_2 = 1$, plyne odtud, že $e_2 = 0$, a protože $s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 1$, plyne odtud $e_3 = 0$. To je však vztah $xyz = 0$.

(c) Dokážeme, že pro reálná čísla a, b, c platí vztah

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Plyne to z (19), kde položíme $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$. Podmínka $x + y + z = 0$ je zřejmě splněna.

(d) Rozložíme v součinitele výraz

$$P(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - \\ - 2z^2x^2.$$

Je $P = s_4 - S_{2,2,0} = s_4 - (s_2^2 - s_4) = 2s_4 - s_2^2 = = 2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 + 4e_1e_3) - (e_1^2 - 2e_2)^2 = e_1^4 - - 4e_1^2e_2 + 8e_1e_3 = e_1(e_1^3 - 4e_1e_2 + 8e_3)$. To znamená, že jedním ze součinitelů v P je výraz $e_1 = (x + y + z)$. Píšeme-li nyní $-x$ místo x (resp. $-y$ místo y, resp. $-z$ místo z), nezmění se výraz $P(x, y, z)$, neboť obsahuje jen *sudé* mocniny proměnných x, y, z. Proto je součinitelem v P i $(-x + y + z)$, $(x - y + z)$ a $(x + y - z)$. To znamená, že

$$(22) \quad P(x, y, z) = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + \\ + z)(x + y - z).Z,$$

kde zbývající činitel Z musí být konstantou, protože P je polynom čtvrtého stupně a součin čtyř trojčlenů na pravé straně je také polynom čtvrtého stupně. Vztah (22) musí platit pro všechna x, y, z; dosadíme-li tam např. $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, zjistíme, že $Z = -1$, a tedy

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = \\ = -(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + \\ + y - z).$$

(e) Zjednodušíme výraz

$$V = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}.$$

Zde je v čitateli symetrický polynom

$$s_3 - 3e_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 = e_1(e_1^2 - 3e_2),$$

ve jmenovateli symetrický polynom

$$2s_2 - 2e_2 = 2e_1^2 - 4e_2 - 2e_2 = 2e_1^2 - 6e_2 =$$
$$= 2(e_1^2 - 3e_2);$$

je-li tedy $e_1^2 - 3e_2 \neq 0$, můžeme tímto činitelem krátit a máme

$$V = \frac{e_1}{2} = \frac{x + y + z}{2}.$$

V.7. Úloha. Dokažte toto tvrzení: *Platí-li pro čísla x, y, z, u, v, w vztahy*

$$x + y + z = u + v + w,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3,$$

pak pro každé přirozené číslo n platí

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n.$$

Návod. Jedná se o analogii příkladu IV.16; využijeme přitom poznámky II.9.

V.8. Příklad. Pro která reálná čísla a je v oboru reálných čísel řešitelná soustava

$$\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{y - 5} = \sqrt[3]{x - y}, \tag{23}$$
$$(x + 1)(y - 5)(x - y) = a?$$

Označme

$$(24) \qquad x + 1 = u^3, \quad 5 - y = v^3, \quad y - x = w^3.$$

Pak je především

$$(25) \qquad u^3 + v^3 + w^3 = 6,$$

první rovnice soustavy (23) má tvar $u + v = -w$ čili

$$(26) \qquad u + v + w = 0$$

a druhá rovnice soustavy (23) má tvar $u^3v^3w^3 = a$ čili

$$(27) \qquad uvw = \sqrt[3]{a}$$

(viz poznámku pod čarou na str. 68). Využijeme-li formule (19) z příkladu V.6 (a), musí vzhledem k podmínce (26) platit $u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw$ čili $6 = 3\sqrt[3]{a}$. Nutnou podmínkou řešitelnosti soustavy (23) je tedy podmínka

$$a = 8.$$

Hledejme nyní řešení soustavy (23) (s $a = 8$). Vyjdeme ze soustavy (25), (26), (27) a zjistíme, že z ní plyne $e_1 = 0$, $e_3 = 2$, zatímco na e_2 žádnou podmínku neklademe. Řešení u, v, w soustavy (25)—(27) tedy určíme podle věty V.1 pomocí kořenů kubické rovnice

$$(28) \qquad t^3 + e_2t - 2 = 0.$$

Označme

$$D = 1 + \left(\frac{e_2}{3}\right)^3.$$

Pak platí:

pro $D > 0$ (tj. pro $e_2 > -3$) má rovnice (28) jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny, pro $D \leqq 0$ (tj. pro $e_2 \leqq -3$) má rovnice (28) tři reálné kořeny.

Protože hledáme reálná řešení, omezíme se na druhý případ. Zvolme třeba $e_2 = -3$. Pak má rovnice (28) kořeny $t_1 = 2$, $t_2 = t_3 = -1$. Soustava (25) — (27) má *tři* řešení $\{u, v, w\}$:

$$\{2, -1, -1\}, \ \{-1, 2, -1\}, \ \{-1, -1, 2\}$$

(podle věty V.1 je těchto řešení šest, ale opakují se po dvou), a těmto trojicím odpovídají podle vzorců (24) *tři* řešení soustavy (23):

$$x = 7, \quad y = 6; \quad x = -2, \quad y = -3 \quad \text{a}$$

$$x = -2, \quad y = 6.$$

Podobně bychom postupovali i pro $e_2 < -3$.

V.9. Poznámka. Uvědomte si důležitost poznámky pod čarou na str. 68! Můžeme si to ilustrovat na příkladu soustavy

$$\text{(23*)} \qquad \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y-5} = 3 + \sqrt[3]{x-y},$$

$$(x+1)(y-5)(x-y) = 8,$$

která se od soustavy (23) liší (pro $a = 8$) „jen" sčítancem 3 na pravé straně první rovnice. Budeme-li postupovat stejně jako v příkladu V.8, dojdeme nakonec ke kubické rovnici

$$\text{(28*)} \qquad t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0,$$

která je analogií kubické rovnice (28). Pomocí jejích kořenů určíme trojice u, v, w, takže např. máme

$$u = 2, \quad v = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad w = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Této trojici odpovídá podle vzorců (24) dvojice řešení soustavy (23*)

$$x = 7, \qquad y = 6.$$

Tato dvojice však řeší i soustavu (23) (pro $a = 8$), takže docházíme ke sporu. Kde je tedy chyba? Napišme si první rovnici soustavy (23*) pro naše hodnoty x, y:

$$\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} = 3 + \sqrt[3]{1}.$$

Tato rovnost není splněna, definujeme-li $\sqrt[3]{1}$ jako 1 (a tedy $\sqrt[3]{8}$ jako 2), je však splněna, definujeme-li třeba $\sqrt[3]{8}$ jako 2, $\sqrt[3]{1}$ vlevo jako $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, vpravo jako $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, tj. „využijeme-li" nejednoznačnosti třetí odmocniny.

Oblíbenou úlohou školské matematiky je odstraňování iracionálních výrazů ze jmenovatele zlomku. Máme-li např. upravit zlomek

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

tak, aby v jmenovateli bylo číslo racionální, vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ a užijeme vzorce pro rozdíl čtverců. Pak bude

$$r = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Horší je to u zlomků, v nichž je ve jmenovateli součet tří sčítanců. I zde lze využít vzorce pro rozdíl čtverců, který použijeme (při vhodném uzávorkování) dvakrát, můžeme si však vypomoci také elementárními symetrickými funkcemi.

V.10. Příklad. Upravme zlomek

$$r = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}}.$$

Označme $\sqrt{u} = x$, $\sqrt{v} = y$, $\sqrt{w} = z$. Pak je jmenovatel roven e_1, a abychom se zbavili odmocnin, musíme e_1 vynásobit vhodným výrazem tak, aby vzniklý součin obsahoval jen sudé mocniny proměnných x, y, z, tedy např. výrazy s_2 nebo s_4. Protože

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$

$$s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_1e_3 + 2e_2^2,$$

vidíme, že v obou výrazech vystupuje e_1 jako činitel všude kromě posledního sčítance. Je tedy třeba oba výrazy vhodně zkombinovat — tak, aby jejich poslední sčítance zmizely. Utvořme tedy výraz

$$(29)\quad s_2^2 - 2s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_2^2 - 2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_1e_3 + 2e_2^2) = e_1(-e_1^3 + 4e_1e_2 - 8e_3);$$

ihned vidíme, že stačí vynásobit čitatele i jmenovatele zlomku r číslem

$$4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3 = 4(x + y + z)(xy + yz + zx) - (x + y + z)^3 - 8xyz = 4(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})(\sqrt{uv} + \sqrt{vw} + \sqrt{wu}) - (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})^3 - 8\sqrt{uvw},$$

a dostaneme zlomek, v jehož jmenovateli bude výraz

$$s_2^2 - 2s_4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4) =$$
$$= (u + v + w)^2 - 2(u^2 + v^2 + w^2).$$

Tento výraz už neobsahuje žádné odmocniny.

V.11. Poznámky. (a) Upravený tvar zlomku r z předchozího příkladu sice nemá ve jmenovateli odmocniny, ale příliš přehledně nevypadá — zvláště čitatel. Můžeme se sice pokusit o další úpravy, např. čitatel lze psát i jinak, neboť

$$4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3 = e_1e_2 - s_3 - 5e_3,$$

ale obecně tyto úpravy už velké zjednodušení nepřinesou.

(b) Čtenář si jistě sám odvodí postup, jímž lze postupovat při usměrňování zlomků, u nichž je v čitateli výraz $\sqrt[n]{u} + \sqrt[n]{v} + \sqrt[n]{w}$ pro $n = 3, 4, \ldots$. Pro procvičení doporučujeme podrobněji vyšetřit alespoň případy $n = 3$ a $n = 4$.

(c) Úpravy, o nichž jsme hovořili, se nehodí jen u zlomků. Chceme-li například upravit rovnici

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0 \tag{30}$$

tak, aby neobsahovala odmocniny, můžeme užít výsledků z příkladu V.10. Rovnice (30) má totiž tvar

$$e_1 = 0$$

(při označení $x = \sqrt{u}$, $y = \sqrt{v}$, $z = \sqrt{w}$); vynásobíme-li tuto rovnost výrazem $4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3$, přejde naše rovnice v důsledku vzorce (29) v rovnici

$$s_2^2 - 2s_4 = 0,$$

tj. v rovnici

$$(u + v + w)^2 - 2(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

která neobsahuje odmocniny.

Přejdeme nyní k *nerovnostem* pro symetrické funkce tří proměnných a k jejich využití při řešení různých úloh. Především platí pro každou trojici x, y, z kladných čísel nerovnost

$$e_1 e_2 \geqq 9e_3; \tag{31}$$

je to speciální případ nerovnosti (28) kap. III pro $n = 3$ (viz poznámku III.11). Zato nerovnost

$$e_1^2 \geqq 4e_2,$$

kterou jsme pro dvě proměnné odvodili ve větě IV.8, pro tři proměnné neplatí. Platí však nerovnost jiná:

V.12. Příklad. Jsou-li x, y, z reálná čísla, pak platí

$$e_1^2 \geqq 3e_2, \tag{32}$$

přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, je-li $x = y = z$. Dále platí

$$e_2^2 \geqq 3e_1 e_3, \tag{33}$$

a pro kladná čísla x, y, z pak navíc

$$e_1^3 \geqq 27e_3, \tag{34}$$

$$e_2^3 \geqq 27e_3^2. \tag{35}$$

Nerovnost (32) je důsledkem zřejmého vztahu

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqq 0.$$

Tuto nerovnost, v níž rovnost nastává právě pro $x = y = z$, můžeme totiž pro roznásobení zapsat ve tvaru

$$2s_2 - 2e_2 \geqq 0$$

čili

$$2(e_1^2 - 2e_2) - 2e_2 \geqq 0$$

a odtud už máme (32).

Položíme-li nyní $x = uv$, $y = vw$ a $z = wu$, má nerovnost (32) tvar

$$(uv + vw + wu)^2 \geqq 3(uv^2w + uvw^2 + u^2vw)$$

čili

$$(uv + vw + wu)^2 \geqq 3uvw(u + v + w),$$

a to není nic jiného než nerovnost (33).

Z nerovností (32) a (31) plyne

$$e_1^4 = e_1^2e_1^2 \geqq e_1^2 3e_2 = 3e_1(e_1e_2) \geqq 3e_1 9e_3 = 27e_1e_3$$

a po vykrácení e_1 máme odtud (34) (všechna e_i jsou kladná, neboť x, y, z jsou kladná).

Podobně odvodíme i nerovnost (35) z (33) a (31): Je

$$e_2^3 = e_2e_2^2 \geqq e_2 3e_1e_3 = 3e_3(e_1e_2) \geqq 3e_3 9e_3 = \\ = 27e_3^2.$$

V.13. Úloha. Nerovnosti (32) a (33) jsme dokázali přímo, bez použití nerovnosti (31). Dokažte, že naopak nerovnost (31) je důsledkem nerovností (32) a (33).

Návod. Znásobte obě uvedené nerovnosti.

V.14. Příklady. (a) Pro libovolná reálná čísla x, y, z platí

(36) $$x^2 + y^2 + z^2 \geqq \frac{1}{3}(x + y + z)^2,$$

$$(37) \qquad (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geqq xyz(x + y + z).$$

Nerovnost (36) lze totiž zapsat ve tvaru $s_2 \geqq \frac{1}{3} e_1^2$, a protože $s_2 = e_1^2 - 2e_2$, plyne (36) ihned z (32).

Nerovnost (37) lze pak psát ve tvaru $\frac{1}{2} S_{2,2,0} \geqq e_1e_3$, a protože $\frac{1}{2} S_{2,2,0} = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = e_2^2 - 2e_1e_3$ (viz např. příklad V.5 nebo V.6 (d)), plyne (37) ihned z (33).

(b) Pro kladná čísla x, y, z platí

$$(38) \qquad (x + y)(y + z)(z + x) \geqq 8xyz,$$

$$(39) \qquad \sqrt[3]{xyz} \leqq \frac{x + y + z}{3}.$$

Nerovnost (38) má na levé straně výraz $S_{2,1,0} + 2e_3 = s_2s_1 - s_3 + 2e_3 = (e_1^2 - 2e_2)e_1 - (e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) + 2e_3 = e_1e_2 - e_3$ a na pravé straně výraz $8e_3$; je tedy důsledkem nerovnosti (31).

Umocníme-li nerovnost (39) na třetí, má tvar $e_3 \leqq \frac{1}{27} e_1^3$, a to je nerovnost (34).

(c) Je-li $x + y + z = 0$, je $xy + yz + zx \leqq 0$. Plyne to ihned z nerovnosti (32), uvědomíme-li si, že zadání říká: je-li $e_1 = 0$, je $e_2 \leqq 0$.

V.15. Příklad. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, platí

$$(40) \qquad (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Položíme-li totiž $x = a + b - c$, $y = a - b + c$, $z = -a + b + c$, je $a = \frac{1}{2}(x + y)$, $b = \frac{1}{2}(x + z)$,

$c = \frac{1}{2}(y + z)$ a po dosazení těchto výrazů do (40) dostaneme po úpravách nerovnost

$$\frac{1}{2}(s_2 + e_2)\, e_1 > \frac{1}{2} s_3 + \frac{3}{4} S_{2.1.0} \quad \text{čili} \quad e_1 e_2 + 3e_3 > 0 .$$

Poslední nerovnost však zřejmě platí, neboť $x > 0$, $y > > 0$, $z > 0$ (proč?).

V.16. Úloha. Dokažte, že pro strany a, b, c trojúhelníka platí

$$(41) \quad (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqq abc .$$

Návod. Postupujte jako v příkladu V.15 a využijte nerovnosti (38).

V.17. Příklad. Jaké maximální hodnoty nabývá funkce

$$F(x, y, z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z),$$

jestliže nezáporné proměnné x, y, z splňují podmínku $x + y + z = 1$?

Protože $F(x, y, z) = 1 + e_1 + e_2 + e_3 = 2 + e_2 + e_3$ (je totiž $e_1 = 1$), dostaneme pomocí nerovností (31) a (32)

$$F(x, y, z) \leqq 2 + e_2 + \frac{1}{9} e_1 e_2 = 2 + e_2 + \frac{1}{9} e_2 =$$

$$= 2 + \frac{10}{9} e_2 \leqq 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} e_1^2 = 2 + \frac{10}{27} = \frac{64}{27};$$

rovnost zde nastane právě tehdy, bude-li $x = y = z$, tj. pro $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{3}$.

V.18. Úloha. Nechť x, y, z jsou kladná čísla a nechť kladná čísla u, v, w leží mezi nejmenším a největším z čísel x, y, z. Nechť platí

$$x + y + z \leqq u + v + w. \tag{42}$$

Dokažte, že pak je

$$xyz \leqq uvw \tag{43}$$

a

$$xy + yz + zx \leqq uv + vw + wu. \tag{44}$$

(*Poznámka*. Úloha V.18 byla použita v I. kole kategorie A XIII. ročníku MO.)

V.19. Příklad. Jsou-li α, β, γ úhly ostroúhlého trojúhelníka, pak platí

$$\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma \leqq \frac{1}{8}. \tag{45}$$

Zvolíme-li totiž $x = 2bc\cos\alpha$, $y = 2ac\cos\beta$, $z = 2ab\cos\gamma$, $u = a^2$, $v = b^2$ a $w = c^2$, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka, pak jsou splněny předpoklady úlohy V.18 (je dokonce $x + y + z = u + v + w$ — dokažte!). Nerovnost (45) je pak důsledkem nerovnosti (43).

Jiný důkaz spočívá ve využití nerovnosti (38): vyjádříme $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$ pomocí kosinové věty a užijeme (38) s $x = b^2 + c^2 - a^2$, $y = c^2 + a^2 - b^2$ a $z = a^2 + b^2 - c^2$ (proveďte!).

V.20. Poznámka. Vraťme se na závěr této kapitoly k nerovnosti $e_1^2 \geqq 4e_2$, která nám tak posloužila v kapitole IV a která pro elementární symetrické funkce tří proměnných neplatí. Tuto nerovnost jsme odvodili ve větě IV.8 na základě vlastností diskriminantu D kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1t + e_2 = 0,$$

která má kořeny x, y: je

$$D = e_1^2 - 4e_2 = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2. \tag{46}$$

Diskriminant kvadratické rovnice je důležitým pomocným prostředkem pro její řešení; všimněme si proto vzorce (46) a hledejme jeho analogie pro kubické rovnice.

Mějme tedy kubickou rovnici

$$t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = 0, \tag{47}$$

která má kořeny x, y, z, a definujme *diskriminant D rovnice* (47) jako výraz

$$D = (x - y)^2 (y - z)^2 (z - x)^2. \tag{48}$$

Lze snadno ukázat, že (viz též příklad V.3 (b))

$$D = -4e_1^3e_3 + e_1^2e_2^2 + 18e_1e_2e_3 - 4e_2^3 - 27e_3^2. \tag{49}$$

Máme-li kubickou rovnici (47) s reálnými koeficienty e_1, e_2, e_3, můžeme pomocí znaménka diskriminantu klasifikovat kořeny. Čtenář si jistě pomocí formule (48) snadno dokáže, že

(a) *je-li $D > 0$, jsou všechny kořeny rovnice* (47) *reálné a různé;*

(b) *je-li $D = 0$, jsou alespoň dva kořeny rovnice* (47) *sobě rovné;*

(c) *je-li $D < 0$, má rovnice* (47) *jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny.*

Tato klasifikace není úplná: v případě, že $D = 0$, nevíme, zda kořen náhodou není trojnásobný. Zde existuje další pomůcka — symetrický polynom

$$D^* = e_1^2 - 3e_2. \tag{50}$$

Je totiž

$$2D^* = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

(dokažte!) a bod (b) naší výše uvedené klasifikace můžeme upřesnit takto:

(b_1) *je-li* $D = 0$ *a* $D^* \neq 0$, *má rovnice* (47) *jeden dvojnásobný kořen;*

(b_2) *je-li* $D = 0$ *i* $D^* = 0$, *má rovnice* (47) *trojnásobný kořen.*

Odtud už plyne toto tvrzení, které je analogií věty IV.8:

Buďte e_1, e_2, e_3 *daná reálná čísla. K tomu, aby řešení* x, y, z *soustavy*

$$\begin{aligned} x + y + z &= e_1, \\ xy + yz + zx &= e_2, \\ xyz &= e_3 \end{aligned} \tag{51}$$

byla reálná, je nutné a stačí, aby platilo

$$D \geqq 0. \tag{52}$$

K tomu, aby čísla x, y, z *byla nezáporná, je nutné a stačí, aby vedle* (52) *platilo ještě*

$$e_1 \geqq 0, \quad e_2 \geqq 0, \quad e_3 \geqq 0.$$

V.21. Příklad. Jsou-li x, y, z taková reálná čísla, že

$$xyz > 0 \qquad \text{a} \qquad x + y + z > 0,$$

pak

$$x^n + y^n + z^n > 0$$

pro každé přirozené číslo n.

Protože čísla x, y, z jsou reálná, je $D \geqq 0$. Podle předpokladu je $e_3 > 0$ a $e_1 > 0$; pokud jde o e_2, jsou dvě možnosti:

(a) $e_2 \geqq 0$: Pak jsou podle výše uvedeného tvrzení všechna čísla x, y, z nezáporná, a protože $e_3 > 0$, jsou dokonce kladná. Je tedy i $x^n + y^n + z^n > 0$.

(b) $e_2 < 0$: Využijeme rekurentní formule

$$s_n = e_1 s_{n-1} - e_2 s_{n-2} + e_3 s_{n-3} \tag{53}$$

(viz úlohu II.3), kde všechny koeficienty e_1, $-e_2$ a e_3 jsou kladné. Protože

$$s_1 = x + y + z > 0,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 > 0,$$

$$s_3 = 3e_1^2 - 3e_1 e_2 + 3e_3 > 0,$$

plyne z (53) matematickou indukcí, že $s_n > 0$ pro všechna přirozená čísla n, a naše tvrzení je dokázáno.