Kapitola III.

SYMETRICKÉ FUNKCE n PROMĚNNÝCH

Zobecníme nyní úvahy z obou předcházejících kapitol. Uvažujme algebraickou rovnici n-tého stupně (v proměnné t)

$$(1)\qquad t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

a označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *kořeny* této rovnice. Pak můžeme rovnici (1) zapsat též takto:

$$(2)\qquad (t - x_1)(t - x_2) \ldots (t - x_n) = 0.$$

Provedeme-li násobení naznačené na levé straně v (2) a porovnáme-li výsledek s levou stranou v (1), zjistíme, že *koeficienty* rovnice (1) — tj. čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — souvisejí s kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takto:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),\\
a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 +\\
&\quad + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n +\\
&\quad + \ldots + x_2x_3x_4 \ldots x_n),\\
a_n &= (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Zavedeme-li funkce $e_k = e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ formulí

$$(3)\qquad e_k = (-1)^k a_k,$$

bude tedy

$$
\begin{aligned}
(4)\quad e_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
e_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
e_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{n-1} &= x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3x_4 \ldots x_n,\\
e_n &= x_1x_2x_3 \ldots x_n.
\end{aligned}
$$

Zdůrazněme, že k-tá funkce e_k je *polynom* tvořený součtem všech možných součinů tvaru

$$x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \text{ kde } 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n.$$

Odtud plynou dvě důležité skutečnosti:

(a) *Počet sčítanců v k-té funkci e_k je roven číslu*

$$\binom{n}{k}.$$

(b) *Funkce e_k mají vlastnost symetrie: nezmění se, změníme-li jakkoliv pořadí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Proto je budeme nazývat *elementárními symetrickými funkcemi.*

III.1. Definice. Funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných nazveme *symetrickou funkcí,* nezmění-li se při jakékoliv změně pořadí proměnných, tj. platí-li

$$(5)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

pro jakoukoliv permutaci $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ čísel 1, 2, ..., n.

Je-li funkce f polynomem (tj. součtem funkcí tvaru

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

kde a je reálné číslo, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou celá nezáporná čísla), a má-li vlastnost (5), nazveme ji *symetrickým polynomem*.

III.2. Příklady. (a) Funkce e_k z (4) jsou symetrické funkce, a to symetrické polynomy.

(b) Funkce $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ je symetrický polynom; dovedeme ji vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_k, neboť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = e_1^2 - 2e_2 \tag{6}$$

(dokažte!).

(c) Pro nezáporné celé číslo N označme

$$s_N = x_1^N + x_2^N + \dots + x_n^N; \tag{7}$$

je to symetrický polynom a platí

$$\begin{aligned} s_0 &= n && \text{(podle definice)},\\ s_1 &= e_1 && \text{(podle definice)},\\ s_2 &= e_1^2 - 2e_2 && \text{(podle formule (6))}. \end{aligned}$$

Obecně platí *Waringova formule*

$$\frac{1}{N} s_N = \sum (-1)^{N-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_n} \cdot \tag{8}$$

$$\cdot \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_n!} \cdot e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n},$$

přičemž se sčítá přes všechny n-tice celých nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takových, že

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = N. \tag{9}$$

III.3. Úloha. Pokuste se dokázat platnost formule (8). Využijte k tomu následujícího *rekurentního vztahu* mezi symetrickými součty s_N:

$$(10) \qquad s_N = e_1 s_{N-1} - e_2 s_{N-2} + e_3 s_{N-3} - \ldots + \\ + (-1)^{N-1} e_N s_0$$

(přitom považujeme za rovné nule ty sčítance tvaru $(-1)^{k-1} e_k s_{N-k}$, u nichž je $k > n$).

Čtenáře nyní jistě nepřekvapí, vyslovíme-li (bez důkazu) větu analogickou větám I.5. a II.7.

III.4. Věta. *Ke každému symetrickému polynomu P v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existuje polynom Q v proměnných $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tak, že platí*

$$(11) \qquad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Polynom Q je polynomem P určen jednoznačně.

III.5. Příklad. Najdeme polynom Q z věty III.4 k symetrickému polynomu

$$(12) \qquad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \\ + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2$$

(jedná se o součet všech výrazů tvaru $(x_i - x_j)^2$, kde $1 \leqq i < j \leqq n$).

Provedeme-li naznačené umocnění, zjistíme, že

$$(13) \quad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n-1)\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \\ - 2e_2 = (n-1)s_2 - 2e_2 = (n-1)\,e_1^2 - 2ne_2$$

(použili jsme vzorce (6)). Je tedy

$$Q(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (n-1)\,e_1^2 - 2ne_2.$$

III.6. Příklad. Vztah (13) má řadu zajímavých důsledků: Ze vzorce (12) je zřejmé, že $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq 0$, a tedy je také $(n - 1)\, e_1^2 - 2ne_2 \geqq 0$ čili

$$(n - 1)\, e_1^2 \geqq 2ne_2 . \tag{14}$$

Protože ze vzorce (6) plyne, že $2e_2 = e_1^2 - s_2$, dostáváme z (14) nerovnost

$$e_1^2 \leqq ns_2$$

čili (protože $e_1 = s_1$)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqq n(x_1^2 + x_2^2 + \\ + \ldots + x_n^2) . \tag{15}$$

[Poslední nerovnost byla jako speciální případ Cauchyho nerovnosti odvozena např. v [1], str. 51, formule (II.8).]

Vzorec (14) můžeme upravit nejrůznějším způsobem. Dosadíme-li např. $e_1^2 = 2e_2 + s_2$ — viz (6), bude

$$(n - 1)\,(2e_2 + s_2) \geqq 2ne_2 \quad \text{čili} \quad e_2 \leqq \frac{n-1}{2}\, s_2,$$

čili

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leqq \\ \leqq \frac{n-1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) . \tag{16}$$

Všimneme si nyní několika dalších vlastností elementárních symetrických funkcí.

III.7. Úloha. Nechť jsou všechna čísla x_k různá od nuly $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ze vzorce (4) plyne, že

$$e_{n-1} = \frac{x_1x_2x_3 \ldots x_n}{x_n} + \frac{x_1x_2x_3 \ldots x_n}{x_{n-1}} + \ldots +$$

$$+\frac{x_1x_2x_3\ldots x_n}{x_1}=$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

čili

$$e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.\,e_1\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ platí

$$e_{n-i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tag{17}$$
$$= e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.\,e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Návod. Vztah (17) lze snadno dokázat *přímo* — stačí si uvědomit, že $e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n$ a že $e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ je součet všech výrazů tvaru

$$\frac{1}{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_i}},\ \text{kde } 1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leqq n.$$

Lze však využít též souvislosti mezi funkcemi e_i a kořeny jistého polynomu: Ze vztahů (1) a (3) plyne, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny polynomu P_n v proměnné t, daného vzorcem

$$P_n(t) = t^n - e_1t^{n-1} + e_2t^{n-2} - \ldots + \tag{18}$$
$$+ (-1)^{n-1}e_{n-1}t + (-1)^n e_n;$$

zde je $e_i = e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Polynom Q_n v proměnné s, daný vzorcem

$$Q_n(s) = s^n P_n\left(\frac{1}{s}\right),$$

má tudíž kořeny $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ a jeho koeficienty jsou (se střídajícím se znaménkem) symetrické funkce

$$e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{(s jistým násobkem!).}$$

Současně však jsou koeficienty polynomu Q_n určeny koeficienty polynomu P_n, a porovnáním dostaneme vztahy (17). [Pozor: u polynomu P_n je podstatné, že koeficient u t^n je roven jedné; proto je třeba příslušně upravit i polynom Q_n!]

III.8. Příklad. Dokážeme toto tvrzení: *Funkční hodnoty funkce $e_i = e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou kladné, právě když všechna čísla x_i jsou kladná ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

(a) Je-li $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, plyne ihned ze vzorců (4), že také $e_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Nechť je $e_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Čísla x_i jsou kořeny rovnice

$$\text{(19)} \qquad t^n - e_1 t^{n-1} + e_2 t^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} e_{n-1} t + (-1)^n e_n = 0;$$

vynásobíme-li tuto rovnici číslem $(-1)^n$, můžeme psát

$$(-t)^n + e_1(-t)^{n-1} + e_2(-t)^{n-2} + \ldots + e_{n-1}(-t) + e_n = 0$$

neboli po substituci $s = -t$

$$\text{(20)} \qquad s^n + e_1 s^{n-1} + e_2 s^{n-2} + \ldots + e_{n-1} s + e_n = 0.$$

Tato poslední rovnice má kořeny $y_i = -x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Žádný z těchto kořenů nemůže být nezáporný, neboť po dosazení nezáporného čísla s do levé strany v (20) dostaneme kladné číslo a nikoliv nulu (všechna e_i jsou kladná). Musí tedy být $y_i < 0$ čili $-x_i < 0$, čili $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

III.9. Příklad. Nechť jsou čísla x_i kladná. Pak platí

(21) $$e_{k-1} . e_{k+1} - e_k^2 < 0 \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

zde klademe

(22) $$e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$$

Později (viz úlohu VI.4) ukážeme, že vztah (21) je důsledkem obecnější nerovnosti; proto zde pouze naznačíme myšlenku přímého důkazu nerovnosti (21): Stačí si uvědomit, že typickým členem ve výrazu $e_{k-1}e_{k+1} - e_k^2$ bude výraz

(23) $$x_1^2x_2^2 \ldots x_{k-i}^2 x_{k-i+1} x_{k-i+2} \ldots x_{k+i} \quad (i < k).$$

Tento výraz vznikne jednak ze součinu $e_{k-1}e_{k+1}$, jednak ze součinu $e_k . e_k = e_k^2$. V prvním případě se bude na levé straně vzorce (21) vyskytovat $\binom{2i}{i-1}$ krát, neboť z $2i$ „volných" činitelů $x_{k-i+1}, x_{k-i+2}, \ldots, x_{k+i}$ lze $i - 1$ činitelů volit z e_{k-1} a zbývající pak patří do e_{k+1}; takových možností máme $\binom{2i}{i-1}$. Ve druhém případě se bude výraz (23) vyskytovat na levé straně vzorce (21) $\binom{2i}{i}$ krát (a bude mít znaménko minus), neboť i činitelů z $2i$ posledních lze volit z prvého e_k a zbývající pak patří do druhého e_k. Kladné číslo (23) tedy bude na levé straně vzorce (21) opatřeno koeficientem

$$(24)\qquad \binom{2i}{i-1} - \binom{2i}{i} = -\frac{2i(2i-1)\dots(i+2)}{i!},$$

který je *záporný*. Na levé straně v (21) je součet záporných čísel, a tím je nerovnost (21) dokázána.

III.10. Úloha. Dokažte: Je-li $x_k > 0$ pro $k = 1, 2, \dots, n$, pak pro $1 \leqq i < j \leqq n$ platí

$$(25)\qquad e_{i-1}e_j < e_i e_{j-1}.$$

Návod. Užijte nerovnosti (21), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{e_{k-1}}{e_k} < \frac{e_k}{e_{k+1}},$$

postupně pro $k = 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, n-1$.

III.11. Poznámka. Zvolíme-li v (25) $i = 1$ a $j = n$, dostaneme vzhledem k (22) vztah

$$(26)\qquad e_n < e_1 e_{n-1}.$$

Vztah (26) jsme odvodili z (21), a už při důkazu této nerovnosti jsme viděli, že je velice „nepřesná", že rozdíl mezi $e_{k-1}e_{k+1}$ a e_k^2 je nejen záporný, ale dokonce v absolutní hodnotě „velký" — viz (24). A tak se asi dopouštíme velké chyby i při odhadu (26). Skutečně: už jen prostým pohledem na součin e_1e_{n-1} je vidět, že bude platit lepší odhad než (26), totiž odhad

$$(27)\qquad e_1 e_{n-1} > n e_n,$$

odkud (26) už plyne. A ani tento odhad není nejlepší: platí dokonce

(28) $$e_1 e_{n-1} \geqq n^2 e_n .$$

Důkaz nerovnosti (28). Vyjdeme z nerovnosti

(29) $$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2$$

(viz např. [1], str. 29 nebo str. 52). Převedeme-li zlomky v druhém činiteli na levé straně nerovnosti (29) na společného jmenovatele, bude mít tato nerovnost tvar

$$e_1 . \frac{e_{n-1}}{e_n} \geqq n^2 ,$$

a to už je (28).

III.12. Úloha. Dokažte, že pro kladná čísla x_i platí

(30) $$e_k e_{n-k} \geqq \binom{n}{k}^2 e_n , \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$