Symetrické funkce

Kapitola II. Symetrické funkce tří proměnných

In: Alois Kufner (author): Symetrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 14–23.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404068

Terms of use:

© Alois Kufner, 1982

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kapitola II.

SYMETRICKÉ FUNKCE TŘÍ PROMĚNNÝCH

Uvažujme kubickou rovnici

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0 \tag{1}$$

a označme x, y, z *kořeny* této rovnice. Pak můžeme rovnici (1) zapsat též takto:

$$(t - x)(t - y)(t - z) = 0. \tag{2}$$

Roznásobíme-li dvojčleny na levé straně v (2) a porovnáme-li výsledek s levou stranou v (1), zjistíme, že *koeficienty* rovnice (1) — tj. čísla a, b, c — souvisejí s kořeny x, y, z takto:

$$\begin{aligned} a &= -(x + y + z), \\ b &= xy + yz + zx, \\ c &= -xyz. \end{aligned}$$

Zapišme tyto Viètovy formule ještě trochu jinak: místo a pišme $-e_1$, místo b pišme e_2 a místo c pišme $-e_3$. Pak je

$$\begin{aligned} e_1 &= x + y + z, \\ e_2 &= xy + yz + zx, \\ e_3 &= xyz. \end{aligned} \tag{3}$$

Funkce e_1, e_2, e_3 tří proměnných x, y, z mají opět vlastnost *symetrie:* nezmění se, změníme-li jakkoli *pořadí* proměnných x, y, z. Budeme je — analogicky jako v případě dvou proměnných—nazývat *elementárními symetrickými funkcemi.*

II.1. Definice. Funkci f tří proměnných x, y, z nazveme *symetrickou funkcí*, nezmění-li se při jakékoliv změně pořadí proměnných, tj. platí-li

$$(4)\quad f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = \\ = f(z, x, y) = f(z, y, x) \text{ pro všechna } x, y, z \in R.$$

Je-li funkce f polynomem (tj. součtem funkcí tvaru $ax^ky^lz^m$, kde a je reálné číslo, k, l a m jsou celá nezáporná čísla) a má-li vlastnost (4), nazveme ji *symetrickým polynomem.*

II.2. Příklady. (a) Funkce e_1, e_2, e_3 z (3) jsou symetrické funkce, a dokonce symetrické polynomy.

(b) Funkce $x^2 + y^2 + z^2$, $((e^x)^y)^z$, $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x)$, $(x + y)(y + z)(z + x)$ jsou symetrické funkce.

(c) Funkce $xy + yz + zx^2$, xy^2z, $xy + yz$ jsou polynomy, ale nejsou symetrické (dokažte!).

(d) Výraz $x^2 + y^2 + z^2$ je dokonce symetrický polynom; dovedeme ho vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3:

$$(5)\quad x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - \\ - 2zx = e_1^2 - 2e_2.$$

(e) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$: Je totiž

$$(6)\quad x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = (xy + xz + \\ + yz)\,x + (xy + yz + xz)\,y + (xz + yz +$$

$$+ xy)z - 3xyz = (xy + yz + zx)(x + y + z) - 3xyz = e_1e_2 - 3e_3.$$

(f) Totéž platí pro symetrický polynom $x^3 + y^3 + z^3$:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) - 6xyz;$$

užijeme-li nyní formule (6), je

$$x^3 + y^3 + z^3 = e_1^3 - 3(e_1e_2 - 3e_3) - 6e_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3. \tag{7}$$

(g) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2yz + xy^2z + xyz^2$:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x + y + z) = e_1e_3. \tag{8}$$

(h) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = e_2^2 - 2e_1e_3;$$

přitom jsme využili vzorce (8).

II.3. Úloha. Označme pro přirozené číslo n

$$s_n = x^n + y^n + z^n. \tag{9}$$

Ukažte, že tyto symetrické polynomy lze vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3.

Návod. V příkladech II.2(d) a (f) jsme přímým výpočtem našli vyjádření pro s_2 a s_3:

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$
$$s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3.$$

Metodou přímého výpočtu lze postupovat i dále a postupně vypočítat s_4, s_5, s_6 atd. Tak je např.

$$s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 + 4e_1e_3;$$

tento postup však není nejlepší, výhodnější je použití *rekurentní formule*

(10) $$s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2} + e_3s_{n-3}.$$

(Dokažte platnost této formule!)

II.4. Poznámka. Je-li $P(x, y, z)$ symetrický polynom tří proměnných, je výraz

$$H(x, y) = P(x, y, 0)$$

symetrický polynom *dvou* proměnných x, y. (Dokažte!) Položíme-li ve vzorcích (3) $z = 0$, bude

(11) $$e_1 = x + y + 0 = x + y,$$
$$e_2 = xy + y0 + 0x = xy,$$
$$e_3 = xy0 = 0,$$

a speciálně jsou tedy prvé dvě elementární symetrické funkce e_1, e_2 stejné jako v případě dvou proměnných. Dosadíme-li z (11) do (10), bude

$$s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2},$$

a to není nic jiného než rekurentní formule (9) z kapitoly I (pro $z = 0$ je totiž $s_n = x^n + y^n + 0^n = x^n + y^n$).

Odtud je vidět, že řadu výsledků platných pro symetrické funkce dvou proměnných lze odvodit z výsledků pro symetrické funkce tří proměnných speciální volbou $z = 0$.

II.5. Waringova formule. V kap. I jsme uvedli formuli pro *přímé* vyjádření symetrických součtů $s_n = x^n + y^n$ pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2 — viz odst. I.4, formuli (10). Také pro součty $s_n = x^n + y^n + z^n$ platí taková formule:

$$\frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) = \frac{1}{n}e_1^n - \tag{12}$$

$$- \frac{(n-2)!}{(n-2)!\,1!\,0!}e_1^{n-2}e_2 + \frac{(n-3)!}{(n-3)!\,0!\,1!}e_1^{n-3}e_3 +$$

$$+ \frac{(n-3)!}{(n-4)!\,2!\,0!}e_1^{n-4}e_2^2 -$$

$$- \frac{(n-4)!}{(n-5)!\,1!\,1!}e_1^{n-5}e_2e_3 + \ldots;$$

sčítají se výrazy tvaru

$$(-1)^{n-\alpha-\beta-\gamma}\frac{(\alpha+\beta+\gamma-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma, \tag{13}$$

přičemž se sčítá přes všechny trojice celých nezáporných čísel α, β, γ takových, že

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n. \tag{14}$$

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil formuli (12) dokázat a aby ji porovnal ve smyslu předcházející poznámky s formulí (10) z kap. I.

II.6. Příklady. (a) Vyjádříme s_4 pomocí Waringovy formule (12). Pro $n = 4$ má rovnice

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 4$$

(s neznámými α, β, γ z množiny všech celých nezáporných čísel) celkem čtyři řešení, takže na pravé straně (12) budou čtyři sčítance. Tato řešení a jim odpovídající koeficienty podle (13) vypadají takto:

1) $\alpha = 4, \beta = 0, \gamma = 0; (-1)^{4-4}.\dfrac{3!}{4!\,0!\,0!} = \dfrac{1}{4},$

2) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0; (-1)^{4-3}\,\dfrac{2!}{2!\,1!\,0!} = -1,$

3) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1; (-1)^{4-2}.\dfrac{1!}{1!\,0!\,1!} = 1,$

4) $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 0; (-1)^{4-2}\,\dfrac{1!}{0!\,2!\,0!} = \dfrac{1}{2}.$

Podle (12) je tedy

$$\frac{1}{4}s_4 = \frac{1}{4}e_1^4 - e_1^2e_2 + e_1e_3 + \frac{1}{2}e_2^2$$

(porovnejte s formulí pro s_4 v úloze II.3).

(b) Vyjádříme s_5. Rovnice

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 5$$

α	β	γ	koeficient
5	0	0	$\frac{1}{5}$
3	1	0	—1
2	0	1	1
1	2	0	1
0	1	1	—1

Tab. II.1

má pět řešení, která jsme uspořádali spolu s koeficienty podle (13) do tabulky II. 1. Z (12) tedy plyne, že

$$x^5 + y^5 + z^5 = e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1^2e_3 + 5e_1e_2^2 - 5e_2e_3\,.$$

Všechny příklady, které jsme v předcházejících odstavcích uvedli, ukazují, že některé symetrické polynomy $P(x, y, z)$ lze vyjádřit pomocí polynomů $Q(e_1, e_2, e_3)$ v proměnných e_1, e_2, e_3, tj. jako součet funkcí tvaru $ae_1^ke_2^le_3^m$, kde a je reálné číslo, k, l a m jsou celá nezáporná čísla; máme pak

$$P(x, y, z) = Q(x + y + z, xy + yz + zx, xyz)\,. \tag{15}$$

A podobně jako u symetrických polynomů dvou proměnných mají tuto vlastnost všechny symetrické polynomy v proměnných x, y, z. Platí totiž následující analogie věty I.5:

II.7. Věta. *Každý symetrický polynom v proměnných x, y, z lze vyjádřit jako polynom v proměnných $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + yz + zx$, $e_3 = xyz$.*

Důkaz je opět myšlenkově jednoduchý, je ovšem poněkud pracnější než v případě dvou proměnných. Naznačíme zde postup, z něhož je patrno, jak se polynom Q z (15) k symetrickému polynomu P sestrojí, a podrobné ověření přenecháme čtenáři.

Protože polynom $P(x, y, z)$ je symetrický, obsahuje s členem $x^ky^lz^m$ též všechny členy vzniklé záměnou proměnných; obsahuje proto násobek výrazu

$$S_{k,l,m} = x^ky^lz^m + x^ky^mz^l + x^ly^kz^m + x^ly^mz^k + x^my^kz^l + x^my^lz^k\,. \tag{16}$$

Nechť je třeba m nejmenší z čísel k, l, m, tj. nechť je

$$k \geqq m, \; l \geqq m.$$

Pak je

$$(17) \qquad S_{k,l,m} = (xyz)^m (x^{k-m}y^{l-m} + x^{k-m}z^{l-m} + \\ + x^{l-m}y^{k-m} + x^{l-m}z^{k-m} + y^{k-m}z^{l-m} + y^{l-m}z^{k-m}) = \\ = (xyz)^m S_{k-m,\, l-m,\, 0}.$$

Dále je pro libovolná celá nezáporná čísla α, β

$$(18) \qquad S_{\alpha,\beta,0} = s_\alpha s_\beta - s_{\alpha+\beta},$$

kde s_γ jsou součty z úlohy II.3, tj. $s_\gamma = x^\gamma + y^\gamma + z^\gamma$ (pro $\gamma = 0$ klademe $s_0 = 3$). (Dokažte platnost formule (18) jako cvičení!)

Nakonec je tedy

$$(19) \qquad S_{k,l,m} = (xyz)^m (s_{k-m}\, s_{l-m} - s_{k+l-2m}) = \\ = e_3^m (s_{k-m}\, s_{l-m} - s_{k+l-2m}),$$

a protože podle úlohy II.3. lze součty s_γ vyjádřit jako polynomy v proměnných e_1, e_2, e_3, platí totéž i o výrazech $S_{k,l,m}$.

Tím však je věta dokázána, neboť symetrický polynom $P(x, y, z)$ je součtem výrazů tvaru $aS_{k,l,m}$, kde a je reálné číslo.

II.8. Příklady. (a) Vyjádříme pomocí elementárních symetrických funkcí polynom

$$P(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z),$$

který je *symetrický*. Použijeme-li označení z důkazu věty II.7, zjistíme po roznásobení, že

$$P(x, y, z) = S_{2,1,0} + 2xyz = s_2 s_1 - s_3 + 2e_3 =$$

$$= (e_1^2 - 2e_2)\,e_1 - (e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) + 2e_3 =$$
$$= e_1e_2 - e_3\,.$$

[Použili jsme vzorců (18), (5) a (7).]

(b) Pro symetrický polynom

$$P(x, y, z) = (x + y - z)\,(x - y + z)\,(-x + y + z)$$

je po roznásobení

$$P(x, y, z) = -(x^3 + y^3 + z^3) + S_{2,1,0} - 2xyz =$$
$$(20) \qquad = -s_3 + s_2s_1 - s_3 - 2e_3 =$$
$$= -2(e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) +$$
$$+ (e_1^2 - 2e_2)\,e_1 - 2e_3 = -e_1^3 + 4e_1e_2 - 8e_3\,.$$

(c) Určíme obsah p trojúhelníka, známe-li jeho obvod, součet čtverců stran a součet třetích mocnin stran: Označíme-li délky stran trojúhelníka písmeny x, y, z, známe tedy s_1, s_2 a s_3. Podle Heronova vzorce je

$$p = \sqrt{\frac{s_1}{2}\left(\frac{s_1}{2} - x\right)\left(\frac{s_1}{2} - y\right)\left(\frac{s_1}{2} - z\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{s_1}{2}\cdot\frac{(-x + y + z)}{2}\cdot\frac{(x - y + z)}{2}\cdot\frac{(x + y - z)}{2}}\,;$$

využijeme-li předcházejícího příkladu, je podle formule (20) (2. řádek)

$$(21) \qquad p = \sqrt{\frac{s_1}{16}\,(s_2s_1 - 2s_3 - 2e_3)}\,.$$

Zbývá ještě vyjádřit e_3 pomocí s_1, s_2 a s_3. Ze vzorců

$$s_1 = e_1,$$

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$
$$s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$$

zjistíme, že

$$e_3 = \frac{1}{6} s_1^3 - \frac{1}{2} s_1 s_2 + \frac{1}{3} s_3,$$

a z (21) pak plyne

$$p = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6s_1^2 s_2 - 8s_1 s_3 - s_1^4}{3}}.$$

II.9. Poznámka. Na závěr této kapitoly dodejme, že polynom $Q(e_1, e_2, e_3)$, který odpovídá symetrickému polynomu $P(x, y, z)$ tak, aby platil vztah (15), a jehož existence je zaručena větou II.7, je určen *jednoznačně*. Viz též poznámku I.7.