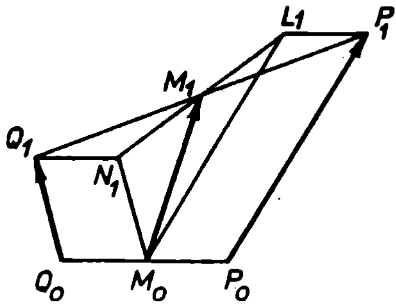
ODPOVĚDI, NÁVODY, ŘEŠENÍ

1.13 Vrcholy M pravoúhlých trojúhelníků AMB s přeponou AB leží na kružnici s průměrem AB.

1.14 Bodem dotyku M kružnic veďme jejich společnou tečnu. Její průsečík s přímkou AB označme O. Pak je $|AO| = |BO| = |MO|$ (délky tečen vedených bodem O k téže kružnici jsou stejně velké).

1.15 Sjednocení tří kružnic. Nechť jsou A, B, C, D dané body. Bodem A vedeme přímku l, bodem C přímku s ní rovnoběžnou a body B, D vedeme přímky kolmé k přímce l. Tím dostaneme pravoúhelník. Je-li L střed úsečky AC, K střed BD, je $\sphericalangle LMK = 90°$, kde je M střed pravoúhelníku. Otáčíme-li přímku l kolem bodu A a odpovídajícím způsobem ostatní přímky, vidíme, že množinou bodů M je kružnice nad průměrem KL. Protože čtyři body A, B, C, D můžeme rozdělit na dvojice třemi způsoby, skládá se hledaná množina ze tří kružnic.

1.25 Buď je střed pevný, nebo probíhá přímku. Pohybují-li se chodci po rovnoběžných přímkách, je střed buď pevný (chodci jdou každý na jinou stranu), nebo se i střed pohybuje po přímce rovnoběžné s danými. Nechť se přímky protínají, označme O jejich průsečík a $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ rychlosti chodců, tedy vektory ze zaměření první a druhé přímky, jejichž velikost je rovna dráze, kterou ujde ten který chodec za jednotku času. Nechť se první chodec nachází v okamžiku t v bodě P, druhý v bodě Q, pak je $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{v}_1$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} + t\vec{v}_2$, vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ udávají polohu chodců v čase $t = 0$. Střed M úsečky PQ je dán vztahem $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})/2 = (\vec{a} + \vec{b})/2 + t(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$. Vidíme, že se bod M pohybuje po přímce rychlostí



Obr. 111

$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$. Pro její určení stačí určit střed počátečních poloh obou chodců a střed jejich poloh třeba za jednotku času.

Výpočty s vektory můžeme nahradit též geometrickými úvahami. Nechť jsou P_0P_1 a Q_0Q_1 libovolné, ale ne rovnoběžné úsečky, M_0 střed úsečky P_0Q_0 a M_1 střed úsečky P_1Q_1. Úsečka M_0M_1 je těžnicí v trojúhelníku $L_1M_0N_1$, kde L_1 a N_1 jsou čtvrtými vrcholy rovnoběžníků $P_1P_0M_0L_1$, $Q_1Q_0M_0N_1$. Úsečky P_1Q_1 a N_1L_1 jsou totiž úhlopříčkami v rovnoběžníku $P_1L_1Q_1N_1$ (obr. 111). Zvolíme-li místo bodů P_1 a Q_1 na přímkách P_0P_1, Q_0Q_1 body P, Q tak, aby $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{Q_0Q} = t\overrightarrow{Q_0Q_1}$, a sestrojíme-li obdobně jako předtím trojúhelník LM_0N

s těžnicí M_0M, je tento trojúhelník zřejmě stejnolehlý s trojúhelníkem $L_1M_0N_1$ s těžnicí M_0M_1, a bod M leží proto na přímce M_0M_1.

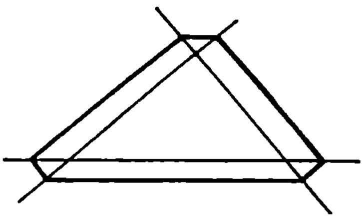
1.28 Použijeme obrázku z řešení 1.25. Otáčí-li se úsečky P_0P_1 a Q_0Q_1 rovnoměrně kolem bodů P_0, Q_0 stejnou úhlovou rychlostí, otáčí se stejnou úhlovou rychlostí trojúhelník $L_1M_0N_1$ s těžnicí M_0M_1.

1.29 Kružnice. Úlohu řešíme pomocí pohybu, sestrojíme poloměry O_1K, O_2L. Otáčí-li se přímka KL rovnoměrně úhlovou rychlostí ω, otáčí se podle věty o prstenci poloměry O_1K a O_2L stejnou úhlovou rychlostí 2ω, je tedy velikost úhlu přímek O_1K a O_2L konstantní. Tím se úloha převede na předcházející.

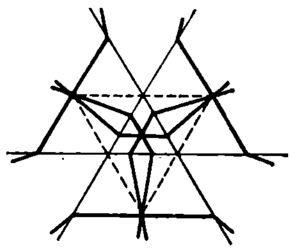
2.11 b) Použijte F.

2.19 Označme výšku trojúhelníku h. Je-li $\mu < h$, je hledaná množina prázdná, pro $\mu = h$ je to celý trojúhelník, pro $\mu > h$ obvod šestiúhelníku (obr. 112).

2.20 Obrázek 113.



Obr. 112

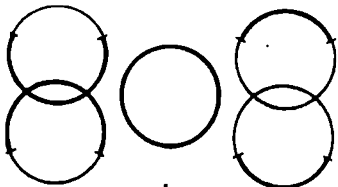


Obr. 113

3.5 b) Převede se na úlohu 3.5a, nebo se dá řešit „prostorově“. Sestrojíme tři sféry, které mají dané kružnice za hlavní kružnice (každá sféra prochází jednou kružnicí a střed sféry a střed kružnice splývají). Každé dvě sféry se protínají v kružnici, která se promítá do příslušné tětivy.

3.7 b) Je $|\sphericalangle AMB| = 90° + \varphi/2$, kde M je střed kružnice vepsané trojúhelníku. Podle E je hledanou množinou dvojice kruhových oblouků s koncovými body A, B.

3.7 c) Hledanou množinou je dvojice kruhových oblouků. Na obrázku 114 jsou po řadě zachyceny pří-



Obr. 114

pady $\varphi < 90°$, $\varphi = 90°$, $\varphi > 90°$. Nechť l_A, l_B jsou různoběžky procházející body A, B a nechť k_A, k_B jsou přímky rovněž procházející body A, B, přičemž $k_A \perp l_B$, $k_B \perp$ $\perp l_A$. Otáčejí-li se přímky l_A, l_B kolem bodů A, B rovnoměrně, otáčejí se stejně přímky k_A, k_B. Podle E_0 probíhá jejich průsečík kružnici. Probíhá-li průsečík přímek l_A, l_B kruhový oblouk kružnice γ, probíhá průsečík přímek k_A, k_B kruhový oblouk kružnice souměrně sdružené ke kružnici γ podle přímky AB.

3.8 a) Označme K, L, M postupně průsečíky dvojic přímek a a b, b a c, c a a. Podle E_0 opisují body K, L

kružnice s tětivami AB, BC. Označme H průsečík těchto kružnic, různý od B. V okamžiku, kdy přímka b prochází bodem H, splývají body K, L s bodem M, procházejí tudíž přímky a a c také bodem H. (Případy, ve kterých se uvažované dvě kružnice v bodě B dotýkají, nebo dokonce splývají, nutno vyšetřit zvlášť. V prvním případě splývají body B a M, ve druhém splývají v každém okamžiku body K, L, M, na přímky a, b, c je možné navléknout jeden prstenec.) Poznamenejme ještě, že při celém otáčení je trojúhelník KLM stále podobný jedné své poloze. Procházejí-li přímky a, b, c bodem H, redukuje se na bod a největších rozměrů nabývá v okamžiku, kdy jsou přímky a, b, c po řadě kolmé na přímky AH, BH, CH. Pak splývají jeho vrcholy s body diametrálně protilehlými k bodu H na jednotlivých trajektoriích (kružnicích).

3.8 b) Nechť se přímky AH, BH, CH začínají otáčet stejnou úhlovou rychlostí kolem bodů A, B, C (H je průsečík výšek). Pak opisuje průsečík každé dvojice kružnici, a to jsou ty kružnice, o kterých se mluví v úloze.

3.9 Zkoumáme tři množiny bodů M ležících uvnitř trojúhelníku, $\{M : S_{AMB} = k_1 . S_{BMC}\}$, $\{M : S_{BMC} = k_2 . S_{AMC}\}$, $\{M : S_{AMC} = k_3 . S_{AMB}\}$. To jsou tři úsečky (viz J), které se protínají v jednom bodě, právě když platí $k_1 k_2 k_3 = 1$.

3.10 Uvažujte množiny $\{M : |MA|^2 - |MB|^2 = h_1\}$, $\{M : |MB|^2 - |MC|^2 = h_2\}$, $\{M : |MC|^2 - |MA|^2 = h_3\}$. Tyto tři přímky (viz F) se protínají právě tehdy v jednom bodě, když $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

3.19 Uvažujte pro každý z daných n bodů C_i množinu bodů, jejichž vzdálenost od bodu C_i není větší než $1/\sqrt{\pi n}$ ($i = 1, \ldots, n$).

3.21 Uvažujte množinu koncových bodů vektorů $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \ldots + \overrightarrow{OE_n}$ (kde $\overrightarrow{OE_i}$ jsou jednotkové vektory podle podmínek úlohy) nejdříve pro $n = 1$, pak $n = 2$ atd.

4.4 Nejmenší vzdálenost mezi chodci je $ud/\sqrt{u^2 + v^2}$. Rychlost prvního chodce nechť je $\vec{u}$, druhého $\vec{v}$ (velikosti těchto vektorů jsou dány). Uvažujme relativní pohyb chodce P vzhledem ke Q, to je rovnoměrný pohyb rychlostí $\vec{u} - \vec{v}$ (viz 1.3). V počáteční poloze, kdy se chodec P nachází v průsečíku P_0 obou cest, je chodec Q v poloze Q_0, vzdálené od P_0 ve směru vektoru $-\vec{v}$ o délku $|Q_0P_0| = d$. K určení odpovědi úlohy stačí bodem P_0 vést přímku l ve směru vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ (to je trajektorie bodu P při relativním pohybu vzhledem k vztažné soustavě, svázané s bodem Q) a určit vzdálenost Q_0H bodu Q_0 od přímky l (H je kolmý průmět bodu Q_0 na l). Protože trojúhelník Q_0P_0H je podobný trojúhelníku složenému z vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ ($Q_0P_0 \perp \vec{u}$, $Q_0H \perp \vec{u} - \vec{v}$), je $|Q_0H|/|Q_0P_0| = |\vec{u}|/|\vec{u} - \vec{v}| = u/\sqrt{u^2 + v^2}$.

4.6 Veďme středem O_1 jedné kružnice kolmici O_1N na přímku l procházející bodem A, středem druhé kružnice kolmici na O_1N; její patu označme M. Pak je $|O_1M|$ polovina vzdálenosti průsečíků přímky l s oběma kružnicemi (různých od A).

4.9 Rovnoramenný trojúhelník. Použijte 2.8a.

5.4 b) Dokažte, že průsečík M kolmic vedených body

K, L k přímkám KA, LA opisuje kružnici, pohybují-li se body K, L po ramenech úhlu s vrcholem A tak, aby se neměnila velikost úsečky KL (vzpomeňte na souvislost s Koperníkovou větou vyloženou v úvodu).

5.7 Použijte tvrzení, že hladiny funkce $f(M) = |AM|/|BM|$ jsou kružnice kolmé ke kružnicím procházejícím body A, B.

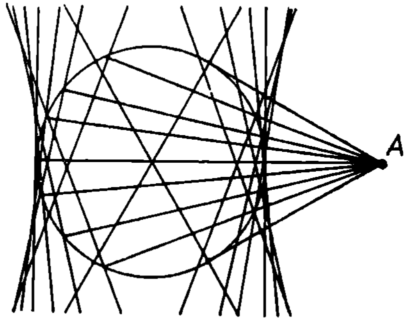
6.3 e) Odpověď je hyperbola, jestliže každá z daných kružnic leží vně druhé (nebo mají vnější dotyk), sjednocení hyperboly a elipsy, jestliže se kružnice protínají, a elipsa v případě, že jedna z kružnic leží ve vnitřní oblasti druhé (nebo mají vnitřní dotyk). Ohniska splývají se středy kružnic.

6.12 a) Spolu s danou tečnou uvažujte i tečnu souměrně sdruženou podle středu elipsy. Využijte 6.9b a větu o součinu úseků na tětivě procházející daným bodem vnitřní oblasti kružnice (součin nezávisí na směru tětivy).

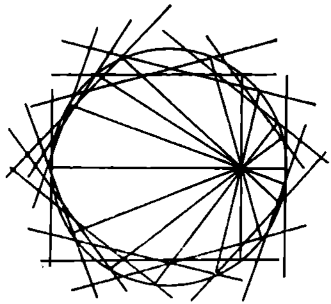
6.15 Sestrojte v případě a) elipsu a v případě b) hyperbolu s ohnisky A, B dotýkající se první úsečky P_0P_1 a dokažte, že se jí dotýká i druhá úsečka P_1P_2. Užijte k tomu shodnosti trojúhelníků $A'P_1B$, AP_1B', kde A' je bod souměrně sdružený k bodu A podle P_0P_1, B' je bod souměrně sdružený k B podle P_1P_2. Tečny jsou osami úseček AA', BB' (viz 6.9a, 6.10a).

6.16 c) Sestrojíme množinu všech bodů N, pro které leží střed úsečky AN na dané kružnici. Je to kružnice, její střed označíme B, její poloměr R. Množina bodů, které jsou blíž k bodu A než k libovolnému z bodů N

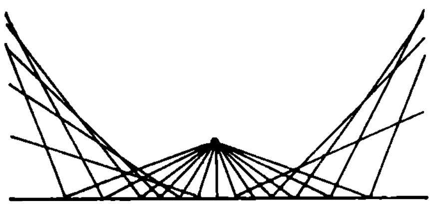
K úlohám 6.16 a 6.17. Na obrázcích 115—117 je zakresleno pouze několik přímek příslušného systému, ale zdá se, jako by byly prorýsovány i výsledné obálky — hyperbola, elipsa, parabola.



Obr. 115



Obr. 116



Obr. 117

sestrojené kružnice, je průnikem polorovin ohraničených osami úseček AN a obsahujících bod A. Tutéž množinu můžeme psát ve tvaru $\{M : |MA| - |MB| \leqq R\}$, hraniční křivkou je jedna větev hyperboly.

6.17 Porovnejte návod k 6.16 s důkazem ohniskové vlastnosti paraboly.

6.23 Počátek soustavy souřadnic zvolte ve středu úsečky AB a směr osy x tak, aby v některém okamžiku byly otáčející se přímky s ní rovnoběžné. Vyjádřete rovnice přímek a souřadnice jejich průsečíku v závislosti na čase t. Vyloučením parametru t ze souřadnic průsečíku (jako v řešení 6.22) dostanete rovnici hyperboly ve tvaru (4) na str. 104.

6.24 Představme si dvě přímky otáčející se kolem bodů A, B v opačných smyslech tak, že se druhá otáčí s dvojnásobnou úhlovou rychlostí než přímka první. Lehce uhodneme, že se jejich průsečík pohybuje po křivce podobné hyperbole, přičemž její asymptoty svírají s přímkou AB úhel 60° a její průsečík C s úsečkou AB ji dělí v poměru $|AC|/|BC| = 2$. A odpověď v této úloze skutečně zní — větev hyperboly. Geometrický důkaz podáme nejlépe převedením úlohy na množinu Q naší abecedy. K tomu sestrojíme bod M' souměrně sdružený k bodu M podle osy l úsečky AB a všimneme si, že BM' je osou úhlu ABM a že $|MM'| = |MB|$, proto je $|MB|/\varrho(M, l) = 2$.

6.25 a) Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, aby ramena úhlu byla dána rovnicemi $y = kx$, $y = -kx (x \geqq 0)$, je obsah trojúhelníku OPQ s vrcholy P, Q na ramenech úhlu a středu $P[x; y]$ roven $kx^2 - y^2/k$.

b) Použijte výsledků úlohy 1.7b.

c) Vyplývá z a) a b).

7.2 Sjednocení je množinou všech bodů M, ke kterým existuje takový bod P kružnice, že $|MP| \leqq |PA|$, nebo též množinou bodů M, pro které má osa úsečky MA společný bod s danou kružnicí. Srovnejte s úlohami 6.16, 6.17.

7.9 Odpověď: a) 3, b) 4, c) 2,5. Najděte poměr úhlových rychlostí tak, jak to bylo ukázáno v odstavci o rychlostech a tečnách.

7.13 a) Kruhový oblouk kružnice o poloměru R mezi dvěma body vratu Steinerovy křivky má stejnou délku jako polokružnice o poloměru $2R/3$.

7.14 b) Jednu i druhou křivku můžeme dostat jako trajektorii vrcholu M kloubového rovnoběžníku o stranách $R - r$, r s poměrem úhlových rychlostí $\omega_1/\omega_2 = -r/(R - r)$ (úhlové rychlosti mají opačná znaménka).

7.18 Použijte 7.7 a větu Mozziho.

7.19 k-cykloida.

7.21 Použijte 7.13a, Mozziho větu a větu o dvou kruzích.

7.23 Nechť se bod M pohybuje po opsané kružnici úhlovou rychlostí ω. Pak
(1) se body M_1, M_2, M_3, souměrně sdružené k bodu M podle přímek BC, CA a AB, pohybují po kružnicích úhlovou rychlostí $-\omega$,
(2) tyto tři kružnice se protínají v průsečíku výšek H trojúhelníku ABC (3.8b),
(3) každá z přímek M_iM ($i = 1, 2, 3$) se otáčí kolem bodu H úhlovou rychlostí $-\omega/2$,
(4) body M_1, M_2, M_3 leží na jedné přímce l_M procházející bodem H (tj. přímky M_iM splývají v jednu přímku l_M),

(5) středy úseček M_iM ($i = 1, 2, 3$) a střed K úsečky MH leží na jedné přímce, Simsonově přímce trojúhelníku,
(6) bod K se pohybuje po kružnici γ, stejnolehlé s kružnicí opsanou, s koeficientem $1/2$ a středem stejnolehlosti H,
(7) kružnice γ pochází těmi 9 body, které jsou vyjmenovány v 7.23b,
(8) obalovou křivkou přímek l_M je Steinerova křivka, dotýkající se kružnice γ.