Přímky a křivky

Kapitola 4. Minimum a maximum

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 62–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404055

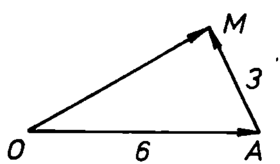
Kapitola 4

MINIMUM A MAXIMUM

Tato kapitola začíná zcela jednoduchými úlohami, ve kterých se hledají největší nebo nejmenší hodnoty, jichž nabývá ta či ona veličina, a končí zajímavými, složitějšími příklady. Úlohy na maximum a minimum je možné obyčejně převést na zkoumání analyticky zadané funkce. Zde si však ukážeme hlavně takové úlohy, ve kterých geometrické úvahy vedou mnohem rychleji k cíli. Uvidíte, jak se při řešení takových úloh používá množin bodů dané vlastnosti.

4.1 Pod jakým úhlem vzhledem k břehům přímého úseku řeky musí plout loďka, aby vzdálenost, o kterou je loďka unesena proudem řeky za dobu její plavby od jednoho břehu ke druhému, byla co možná nejkratší. Přitom je rychlost proudu řeky 6 km/hod a rychlost loďky ve stojaté vodě 3 km/hod.

☐ Odpověď je 60°. Musíme totiž nařídit loďku tak,



Obr. 37

aby její absolutní rychlost (vzhledem k břehům) svírala s břehem největší možný úhel (?). Nechť vektor $\overrightarrow{OA}$ značí rychlost toku řeky a $\overrightarrow{AM}$ značí vektor rychlosti loďky vzhledem k vodě (obr. 37). Součet $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$ dává absolutní rychlost loďky vůči břehům. Velikost vektoru $\overrightarrow{AM}$ je 3, jeho směr můžeme zvolit libovolně. Množina všech možných koncových bodů M vektorů $\overrightarrow{AM}$ je kružnice o poloměru 3 se středem v bodě A. Je zřejmé, že největší možný úhel s břehem svírá ze všech vektorů $\overrightarrow{OM}$ vektor $\overrightarrow{OM_0}$, který leží na tečně k uvažované kružnici. Dostaneme tak pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je odvěsna rovna polorovině přepony, a tudíž je hledaný úhel 60°. □

4.2 Ze všech trojúhelníků s danou stranou BC a danou velikostí φ úhlu při vrcholu A máme najít ten, pro který je poloměr vepsané kružnice největší.

□ Uvažujme body A, které leží v jedné polorovině ohraničené přímkou BC a pro které je $|\sphericalangle BAC| = \varphi$. Množina středů všech kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC je oblouk kružnice s krajními body B a C (viz 3.7 b). Je vidět, že největší poloměr vepsané kružnice odpovídá rovnoramennému trojúhelníku. □

4.3 Ze všech trojúhelníků s danou stranou a danou velikostí protějšího úhlu vyberte ten, který má největší obsah.

4.4 Po dvou na sebe kolmých přímých cestách jdou dva chodci, jeden rychlostí u, druhý rychlostí v. Když byl první chodec v průsečíku obou cest, zbývalo druhému ještě d kilometrů do tohoto místa. Určete nejmenší vzdálenost obou chodců. ↓

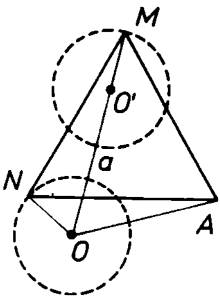
4.5 Vesnicí A, obklopenou ze všech stran loukami, prochází jediná přímá cesta. Člověk může jít po cestě rychlostí 5 km/hod, po louce rychlostí 2 km/hod v libovolném směru. Jak daleko má jít chodec po cestě, chce-li se co nejrychleji dostat z vesnice A k chaloupce B, která stojí ve vzdálenosti 13 km od vesnice a ve vzdálenosti 5 km od cesty?

4.6 Jsou dány dvě protínající se kružnice, nechť A je jeden jejich společný bod. Bodem A máme vést přímku tak, aby její druhé průsečíky s kružnicemi tvořily úsečku maximální délky. ↓

4.7 V rovině je dán bod O. Vzdálenost jednoho vrcholu rovnostranného trojúhelníku od bodu O je a, vzdálenost druhého vrcholu je b. Jaká je maximální vzdálenost třetího vrcholu od bodu O?

□ Odpověď je $a + b$. Nechť je AMN rovnostranný trojúhelník, pro který je $|OA| = a$, $|ON| = b$. Při řešení úlohy můžeme předpokládat, že všechny uvažované trojúhelníky mají jeden vrchol v bodě A. V opačném případě bychom totiž mohli celý trojúhelník otočit kolem bodu O tak, aby vrchol, jehož vzdálenost od bodu O je a, splynul s bodem A. Při tomto otočení se nezmění vzdálenosti bodů od bodu O. Budeme tedy předpokládat, že A je pevný bod ve vzdálenosti a od bodu O a bod N probíhá kružnici o poloměru b a středu O (obr. 38). Jakou množinu pak probíhá bod M? Odpověď je dána v úloze 1.6: Bod M probíhá dvě kružnice, které dostaneme z kružnice $(O; b)$ otočením o úhel 60° kolem bodu A. Z nich stačí vzít jen jednu, druhá je s ní souměrně sdružená podle přímky OA. Vzdálenost jejího středu O' od bodu O je a (neboť trojúhelník OAO' je rovnostranný) a její poloměr je b. Tudíž je maximální vzdálenost bodu O od třetího vrcholu M rovna $a + b$. □

Z této úlohy plyne zajímavé tvrzení: vzdálenost libovolného bodu roviny od vrcholu rovnostranného trojúhelníku není nikdy větší než součet vzdáleností tohoto bodu od zbývajících dvou vrcholů.



Obr. 38

4.8 Jaká je největší možná vzdálenost bodu O od vrcholu M čtverce $AKMN$, jestliže

a) $|OA| = |ON| = 1$;

b) $|OA| = a$, $|ON| = b$?

4.9 Ze všech trojúhelníků s danou jednou stranou a velikostí protějšího úhlu vyberte trojúhelník s maximálním obvodem. ↓

Kde umístit bod?

4.10 Myš může vylézt třemi dírami, a to v bodech A, B, C, které jsou kočce známy. Kam si má kočka sednout, aby byla co nejblíže i k díře, která je od ní nejvzdálenější? Jinými slovy, hledáme místo, pro které je maximum vzdáleností od daných děr nejmenší.

□ Uvažujme kruhy téhož poloměru r se středy v bodech A, B, C. Je třeba najít nejmenší poloměr r_0, při kterém mají tyto tři kruhy společný bod. Bude to pak jejich jediný společný bod, a to bude hledaný bod K. Je-li totiž M jiný bod, je vnějším bodem alespoň jednoho z uvažovaných kruhů o poloměru r_0, a je tudíž jeho vzdálenost od jednoho z bodů A, B, C větší než r_0.

V případě ostroúhlého trojúhelníku ABC splývá bod K se středem opsané kružnice, v případě pravoúhlého trojúhelníku nebo tupoúhlého trojúhelníku je bod K středem nejdelší strany. □

□ Bod K můžeme najít také jako střed nejmenšího kruhu, který obsahuje body A, B, C ⟨?⟩. □

□ Ukážeme ještě jeden způsob řešení úlohy 4.10.

Rozdělíme rovinu na tři množiny:

$$a = \{M : |MA| \geqq |MB| \text{ a } |MA| \geqq |MC|\},$$
$$b = \{M : |MB| \geqq |MA| \text{ a } |MB| \geqq |MC|\},$$
$$c = \{M : |MC| \geqq |MB| \text{ a } |MC| \geqq |MA|\}.$$

To jsou tři úhly, jejichž ramena leží na osách stran trojúhelníku ABC. Sedí-li kočka v úhlu a, pak z bodů A, B, C je od ní nejvzdálenější bod A, sedí-li v úhlu b, je nejvzdálenější bod B a v úhlu c bod C.

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, je pro kočku nejvýhodnější sedět ve společném vrcholu úhlů a, b, c, tj. ve středu opsané kružnice. Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý, je zřejmě pro kočku nejvýhodnější sedět ve středu nejdelší strany trojúhelníku ABC. (Podobně v případě, kdy body A, B, C leží na přímce.) □

4.11 V části lesa ohraničené třemi rovnými železničními tratěmi žije medvěd. Kde si má vybudovat doupě, chce-li být od tratě co nejdál?

4.12 a) V kruhovém jezeře žijí tři krokodýli. Kde mají sedět, má-li být největší ze vzdáleností libovolného bodu jezera k nejbližšímu krokodýlovi co nejmenší?
b) Řešte tutéž úlohu pro čtyři krokodýly.

4.13 Úloha o člunu. Na malém ostrově O stojí maják, jehož světelný paprsek osvětluje na mořské hladině úsečku délky $a = 1$ km. Světelný paprsek se rovnoměrně otáčí kolem osy majáku, jednu otáčku vykoná za čas $T = 1$ min. Člun, který může plout nejvýše rychlostí v, se má dostat nepozorovaně k ostrovu (tak, aby nebyl osvětlen paprskem majáku). Při jaké nejmenší rychlosti v se mu to podaří?

□ Nazvěme kruh o poloměru a, který je světlometem osvětlován, „nebezpečným kruhem". Je zřejmé, že pro člun je nejvýhodnější vplout do tohoto kruhu v bodě A, který byl právě osvětlen.

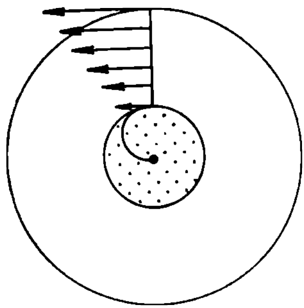
Pluje-li člun k ostrovu po úsečce, dostane se k ostrovu za čas a/v; aby paprsek člun nedostihl, je třeba, aby se světelný paprsek nestačil za tuto dobu jednou otočit, tj. aby byla splněna nerovnost $a/v < T$, odkud

$$v > a/T = 60 \text{ km/hod}.$$

Tím jsme dokázali, že při $v > 60$ km/hod se může člun dostat nepozorovaně na ostrov. Z toho ovšem neplyne, že 60 km/hod je dolní hranicí rychlosti, při které nebude člun objeven. Kapitán člunu může totiž vybrat i jinou cestu než po úsečce AO.

Skutečně se ukáže, že existuje výhodnější dráha člunu. Než budete číst dál, promyslete si některou výhodnější cestu sami.

Všimněme si, že rychlosti různých bodů světelného paprsku jsou různé: čím blíže leží bod k bodu O, tím je jeho rychlost menší (obr. 39). Úhlová rychlost paprsku je rovna $2\pi/T$. Po kružnici o poloměru $r = vT/2\pi$ může člun klidně plout před světelným paprskem, protože jeho rychlost je rovna rychlosti odpovídajícího bodu paprsku. Vně kruhu o poloměru r a středu O je rychlost



Obr. 39

bodu na paprsku větší a uvnitř tohoto kruhu je rychlost bodu paprsku menší než v (nazveme tento kruh „bezpečným kruhem").

Dostal-li se člun bez potíží k bezpečnému okruhu, dostane se nepozorovaně na ostrov. Jedna z možných cest uvnitř bezpečného kruhu je kružnice o poloměru $r/2$ procházející bodem O: pohybuje-li se člun K po této kružnici rychlostí v, otáčí se úsečka KO kolem bodu O se stejnou úhlovou rychlostí, se kterou by se člun pohyboval po kružnici o poloměru r, tj. takovou, jakou se pohybuje paprsek majáku (viz úloha 0.3). Proto nebude člun osvětlen.

Hlavním úkolem člunu je tedy dosáhnout bezpečného kruhu.

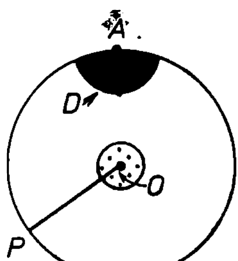
Pluje-li člun do bezpečného kruhu po poloměru AO a pak výše popsaným způsobem, splní svůj úkol už při rychlosti

$$v > \frac{1}{1 + (1/2\pi)} \frac{a}{T} \doteq 0{,}862 \frac{a}{T} = 51{,}7 \text{ km/hod.}$$

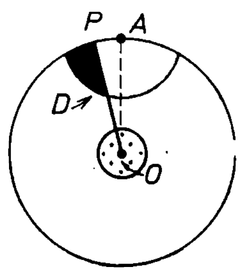
Podařilo se nám zlepšit předcházející odhad pro nejnižší rychlost člunu, při které se může člun dostat nepozorovaně k ostrovu. Ukáže se, že to není nejlepší odhad. Ten najdeme nyní.

Množina bodů nebezpečného kruhu, kterých může člun dosáhnout za čas t, je oblast ohraničená kruhovým obloukem o poloměru vt se středem v bodě A. Předpokládejme, že za tuto dobu se paprsek otočí z polohy OA do polohy OP (obr. 40—42). Množinu všech bodů, do kterých se za dobu t dostane člun nepozorován, označíme D. Na obrázcích je ukázáno, jak se mění množina D v závislosti na t. Jsou možné dva případy:

1) není-li rychlost v dostatečně veliká, pak množina D v jistém čase t úplně vymizí, aniž by se člun dostal před-

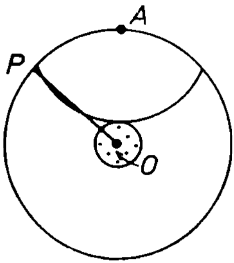


Obr. 40

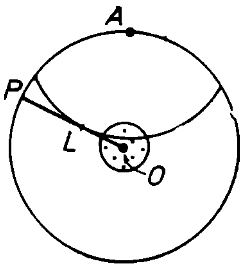


Obr. 41

tím do bezpečného kruhu. Bude tedy zpozorován nejpozději v čase $t = t_0$, kdy se paprsek dotýká v bodě L kruhového oblouku o poloměru vt_0 se středem v bodě A (obr. 43). Bod L leží vně bezpečného kruhu (jinak by člun dosáhl nepozorovaně ostrova), přičemž čím je v větší, tím větší je čas t_0 a tím blíže je bod L k ostrovu.



Obr. 42



Obr. 43

2) je-li rychlost v větší než jistá hodnota v_0, má množina D v jistém čase t neprázdný průnik s bezpečným kruhem a člun dostihne ostrova.

Minimální hodnota v_0 rychlosti člunu odpovídá tomu případu, kdy se paprsek dotýká oblouku o poloměru $v_0 t_0$ v bodě N, ležícím na hraniční kružnici bezpečného kruhu (obr. 44). Abychom našli hodnotu v_0, označme β velikost úhlu NOA a využijme těchto rovností:

$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \ |AN| = v_0 t_0 ,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta, \ \frac{2\pi + \beta}{t_0} = \frac{2\pi}{T},$$

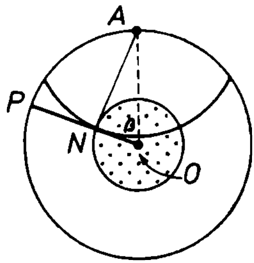
$$|NO| = a \cos \beta .$$

Z první a poslední rovnosti plyne

$$v_0 = (2\pi\, a \cos \beta)/T$$

a z prvních čtyř dostaneme

$$2\pi + \beta = \operatorname{tg} \beta.$$



Obr. 44

Tuto rovnici můžeme řešit pouze přibližně, například pomocí tabulek. Dostaneme, že se β rovná přibližně $0{,}92\pi/2$, odkud

$$v_0 \doteq 0{,}8a/T = 48 \text{ km/hod.}$$

Při rychlostech člunu větších než v_0 se může člun dostat bezpečně k ostrovu. □

4.14 a) Syn plave uprostřed kruhového bazénu. Otec stojící na okraji bazénu neumí plavat, ale běží čtyřikrát rychleji, než plave syn. Syn dokáže běžet rychleji než otec, a chce mu uniknout. Podaří se mu to?

b) Při jakém poměru rychlostí v a u (v rychlost, jakou syn plave; u rychlost běhu otce) nemůže syn utéci?