Přímky a křivky

Úvod. Úvodní úlohy

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 5–11.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404051

ÚVODNÍ ÚLOHY

0.1 Žebřík stojící u stěny na hladké podlaze klouže dolů. Po jaké křivce se přitom pohybuje kotě sedící uprostřed žebříku?

Předpokládejme, že je kotě netečné a sedí klidně. Za této podmínky můžeme uvedenou otázku formulovat matematicky:

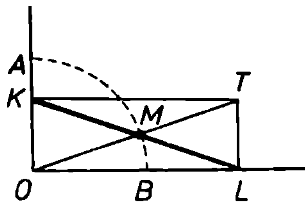
Je dán pravý úhel. Určete množinu středů všech úseček délky d, jejichž krajní body leží na ramenech daného úhlu (přesněji — jeden krajní bod leží na jednom rameni a druhý na druhém rameni).

Zkusme nejdříve uhodnout, jaká to bude množina. Pohybují-li se krajní body úsečky po ramenech úhlu, je asi zřejmé, že střed úsečky opisuje jistou křivku (což napovídá i první názorná formulace úlohy). Nejdříve uvážíme, kde leží koncové body této křivky. Odpovídají krajním polohám úsečky, tedy vertikální a horizontální poloze. To znamená, že koncové body hledané křivky leží na ramenech daného úhlu ve vzdálenosti $d/2$ od jeho vrcholu.

Sestrojte několik dalších bodů této křivky. Budete-li rýsovat dostatečně přesně, zjistíte, že jsou všechny stejně vzdáleny od vrcholu O daného úhlu.

Dospíváme tím k domněnce, že hledanou křivkou je oblouk kružnice o poloměru $d/2$ a středu O, což je však třeba dokázat.

□ Dokážeme nejdříve, že střed M každé úsečky KL požadovaných vlastností má od bodu O vzdálenost $d/2$. To ovšem platí, protože délka těžnice OM pravoúhlého trojúhelníku KOL se rovná polovině délky jeho přepony KL. (O správnosti tohoto tvrzení se lehce přesvědčíme, doplníme-li trojúhelník KOL na obdélník $KOLT$ a uvážíme, že úhlopříčky KL a OT jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí — obr. 1.)

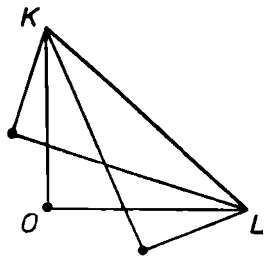


Obr. 1

Tím jsme dokázali, že střed úsečky KL leží na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice se středem v bodě O. Abychom mohli tvrdit, že tento oblouk je hledanou množinou bodů, musíme dokázat také obráceně, že libovolný bod M oblouku AB patří do hledané množiny. Ale to je jednoduché. Libovolným bodem M oblouku $\widehat{AB}$ můžeme totiž vést polopřímku OM, na ní určit bod $T \neq O$ tak, aby $|MT| = |OM|$, a potom sestrojit kolmice bodem T na ramena úhlu, čímž dostaneme krajní body K, L úsečky o středu M, jejíž délka je d. □

Druhá polovina důkazu by se mohla zdát zbytečná, neboť je zřejmé, že střed úsečky KL vyplňuje „souvislou křivku" s koncovými body A, B, což znamená, že bod M probíhá celý oblouk $\widehat{AB}$ a ne jen jeho část. Tato úvaha se zdá přesvědčivá, není však jednoduché formulovat ji matematicky přesně.

Podíváme se teď na pohyb žebříku z úlohy 0.1 z jiné strany. Předpokládejme, že úsečka KL („žebřík") je upevněna a přímky KO a LO („stěna" a „podlaha") se pohybují kolem bodů K a L tak, že stále svírají pravý úhel (obr. 2).



Obr. 2

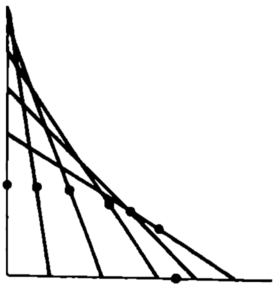
Skutečnost, že vzdálenost středu úsečky KL a bodu O se nemění, dává známou Thaletovu větu: jsou-li v rovině dány dva různé body K a L, pak množina bodů O, pro které je $|\sphericalangle KOL| = 90°$, je kružnice nad průměrem KL. Tato věta i její zobecnění, které uvedeme v bodě E 2. kap., se často hodí při řešení úloh.

Vraťme se k úloze 0.1 a položme obecnější otázku.

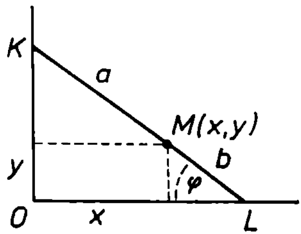
0.2 Po jaké křivce se pohybuje kotě sedící na žebříku v bodě různém od středu?

Na obrázku 3 je sestrojeno několik bodů této křivky. Hned vidíme, že zakreslené body neleží ani na přímce, ani na kružnici, ale vyplňují jinou křivku. O jakou křivku se jedná, zjistíme metodou souřadnic.

□ Zavedeme soustavu souřadnic tak, že ramena úhlu budou osy Ox a Oy (obr. 4). Nechť kotě sedí v bodě $M[x, y]$ ve vzdálenosti $a \neq 0$ od krajního bodu K a ve vzdálenosti $b \neq 0$ od krajního bodu L $(a + b = d)$.



Obr. 3



Obr. 4

Určíme rovnici, kterou musí splňovat souřadnice x, y bodu M.

Jestliže úsečka KL svírá s osou Ox úhel φ, pak $y = b \sin \varphi$, $x = a \cos \varphi$, takže pro libovolné $\varphi(0 \leqq \varphi \leqq \pi/2)$ platí

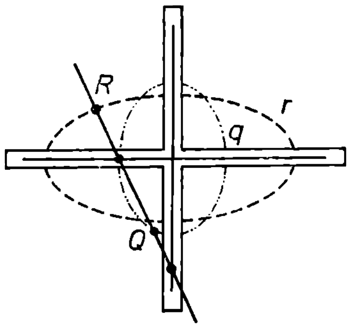
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{1}$$

V kap. 6 ukážeme, že množinou bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (1), je elipsa. Kotě se bude pohybovat po oblouku elipsy. □

Všimněme si, že pro $a = b = d/2$, tj. sedí-li kotě uprostřed žebříku, rovnice (1) přejde v rovnici kružnice

$x^2 + y^2 = (d/2)^2$. Tím docházíme k dalšímu, analytickému řešení úlohy 0.1.

Výsledek úlohy 0.2 vysvětluje princip zařízení kreslícího elipsy. Tento přístroj, který je znázorněn na obrázku 5, se nazývá elipsograf Leonarda da Vinciho.



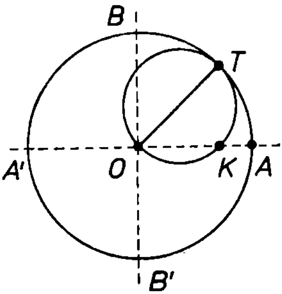
Obr. 5

0.3 Mějme pevnou kružnici, po níž se (s vnitřním dotykem) kotálí bez klouzání kružnice o polovičním poloměru. Jakou křivku opisuje přitom bod K ležící na menší kružnici?

Odpověď na tuto otázku je kupodivu jednoduchá: bod K se pohybuje po přímce, přesněji po průměru pevné kružnice. Toto tvrzení se nazývá *Koperníkovou větou.*

Přesvědčte se pokusem o pravdivosti této věty. (Přitom je důležité, aby vnitřní kružnice neklouzala, tj. aby odpovídající oblouky na obou kružnicích byly stejně veliké.) Není těžké Koperníkovu větu dokázat — stačí si vzpomenout na větu o obvodovém a středovém úhlu.

□ Nechť bod pohybující se kružnice, který splynul v počáteční poloze s bodem A pevné kružnice, se přemístil do bodu K (obr. 6). Označme T bod, ve kterém se nyní obě kružnice dotýkají. Protože délky oblouků $\widehat{KT}$ a $\widehat{AT}$ se sobě rovnají a poloměr pohybující se kružnice



Obr. 6

je poloviční, vidíme, že středový úhel příslušný oblouku $\widehat{KT}$ je roven dvojnásobku středového úhlu příslušného oblouku $\widehat{AT}$. Označíme-li O střed pevné kružnice, máme $|\sphericalangle AOT| = |\sphericalangle KOT|$ podle věty o obvodovém a středovém úhlu (viz str. 18). To znamená, že bod K leží na poloměru AO.

Tyto úvahy platí pouze do okamžiku, ve kterém se pohybující se kružnice odkotálí po čtvrtině pevné kružnice (tj. kdy bod dotyku splyne s bodem B, pro nějž je $|\sphericalangle BOA| = 90°$, a bod K splyne s bodem O). Další pohyb se děje analogicky — dráha bodu K bude při něm souměrně sdružená podle přímky BO k dráze již proběhnuté. Až bod K dostihne bod A', kde AA' je průměr pevné kružnice, bude se pohyblivá kružnice kotálet po dolní polovině pevné kružnice a bod K se vrátí po průměru AA' do bodu A. □

Porovnejme výsledky úloh 0.1 a 0.3. Jejich zajímavost spočívá zřejmě v tom, že v obou případech se jedná o poměrně složitý pohyb objektu (v první úloze o pohyb úsečky, ve druhé kružnice), avšak trajektorie některých bodů jsou neočekávaně jednoduché. Ukazuje se, že tyto dvě úlohy nesouvisí jen vnějšími znaky, nýbrž tím, že pohyby v nich zkoumané jsou totožné.

Skutečně, nechť se po vnitřku kružnice poloměru d kotálí kružnice poloměru $d/2$ a nechť je KL průměr této kružnice, pevně s ní spojený. Podle Koperníkovy věty se body K, L pohybují po průměrech AA' a BB' pevné kružnice. Takže průměr KL klouže svými koncovými body po dvou na sebe kolmých přímkách, pohybuje se tedy tak jako úsečka v úloze 0.1.

Ještě jedna zajímavá otázka souvisí s pohybem úsečky KL: jakou množinu bodů vyplňuje tato úsečka, tj. co je sjednocením všech možných poloh úsečky KL při jejím pohybu? Křivka, která ohraničuje tuto množinu, se nazývá asteroida. Dá se ukázat, že ji můžeme dostat takto: necháme kružnici o průměru $d/2$ kotálet po vnitřku kružnice o průměru $2d$ a narýsujeme trajektorii libovolného bodu pohybující se kružnice — tato trajektorie je asteroida. O ní a jí podobných křivkách pojednáme v 7. kap. této knížky, kde se podrobněji seznámíte se souvislostmi, kterých jsme se zde dotkli.

Avšak dříve než se budeme zabývat složitějšími otázkami a křivkami, zůstaneme u úloh o přímkách a kružnicích — jiné křivky se v prvních pěti kapitolách nebudou vyskytovat.