O náhodě a pravděpodobnosti

8. kapitola. Náhodné procházky a pravděpodobnostní počítadlo

In: Adam Płocki (author); Eva Macháčková (translator); Vlastimil Macháček (illustrator): O náhodě a pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 102–117.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404037

8. kapitola

NÁHODNÉ PROCHÁZKY A PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

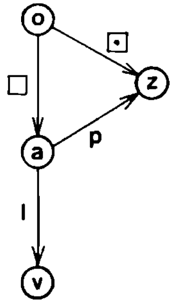
8.1. NÁHODNÉ PROCHÁZKY

Při hře na vlka a dvě louky figurka (vlk) putovala po dané síti. O směru její cesty rozhodovala náhoda. Takovým cestám budeme říkat *náhodné procházky*. Pohyb míče po hřišti při náhodné kopané byla také náhodná procházka. Náhodná procházka je i cesta figurky při závodech na šachovnici. Námořní bitvu jsme také znázornili jako náhodnou procházku figurky po určité síti.

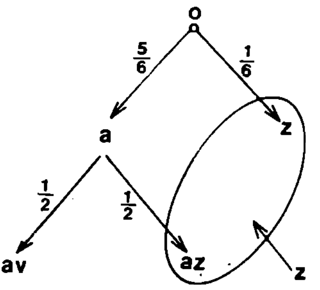
S podobnými náhodnými procházkami se setkáváme nejen u her. Let vosy po pokoji také připomíná náhodnou procházku. Částice hmoty se pohybují chaoticky. Pohyby částic kapalin nebo plynů jsou také náhodné procházky. Náhodné procházky částic hmoty jsou známy pod názvem Brownův pohyb.

Náhodné procházky jsou zvláštním případem náhodného pokusu. Věnujme jim trochu pozornosti. Vyjdeme od velmi jednoduché náhodné hry.

Příklad 8.1. (Koza, vlk a zelí.) Na obr. 8.1 je jednoduchá síť, po které se pohybuje koza. Zastupuje ji figurka. Koza vychází z bodu o. Cíle jsou body v a z. V bodě v čeká vlk, v bodě z je zelné pole. Aby figurka-koza mohla udělat první krok, musíme hodit s-kostkou. Padne-li prázdná stěna, jde figurka (koza) do bodu a, padne-li stěna s tečkou, jde do bodu z. Dostane-li se do bodu z, putování končí výhrou. Dostane-li se do bodu *a*, házíme ještě jednou, tentokrát však mincí. Ukazatele na obrázku znázorňují, jak se má v závislosti na výsledcích hodu táhnout. Dostane-li se figurka do bodu *v*, znamená to prohru.



Obr. 8.1.



Obr. 8.2.

Příčiny neúspěchu jsou zřejmé — koza se setkala s vlkem. Tuto jednoduchou hru si může zahrát hráč sám. Zajímá nás, kudy koza putuje a ke kterému cíli se dostane. Hledíme-li takto na procházku, napadne nás, abychom výsledky a průběh naší hry (našeho náhodného pokusu) kódovali pomocí cest, které figurka projde od startu do cíle. V síti jsou jen tři cesty. Dvě z nich mají po dvou úsecích. Ke každému úseku v síti připišme pravděpodobnost, že jím figurka projde. Jsou to pravděpodobnosti jednotlivých výsledků při hodu s-kostkou nebo mincí a můžeme je snadno určit.

Znázorněme naši hru (jde o náhodný pokus) stromem (obr. 8.2). Každé cestě v síti odpovídá právě jedna větev stromu. Větev kóduje cestu. Úsekům cesty odpovídají hrany stromu. Ke každé hraně stromu připišme pravděpodobnost jevu, že po ní projde koza. Podobně připišme pravděpodobnosti k úsekům cest v síti. Prostor výsledků bude $\Omega = \{av, az, z\}$. Uvažujme několik jevů souvisejících s naší hrou:

Z: Koza se dostane k zelí.
V: Koza se dostane k vlkovi.

Zakódujme je: $Z = \{az, z\}$, $V = \{av\}$. Ptejme se dále na pravděpodobnosti $\mathsf{P}(Z)$ a $\mathsf{P}(V)$. Ptáme-li se na $\mathsf{P}(V)$, ptáme se na pravděpodobnost, že pokus proběhne tak, jak na stromě znázorňuje větev, na které visí výsledek *av*. $\mathsf{P}(V)$ je pravděpodobnost výsledku *av*.

Abychom obě pravděpodobnosti odhadli, mohli bychom hru n-krát opakovat (n by muselo být dost velké přirozené číslo). To znamená, že bychom museli kozu n-krát vypustit ze startu s příkazem, aby se pohybovala podle uvedených pravidel. Kdybychom nechtěli kozu tak týrat, mohli bychom na start postavit ne jednu, ale celé stádo n koz. Pro každou z nich bychom pak museli zvlášť házet s-kostkou a pak mincí, posunovat je po síti a pak spočítat, kolik se jich dostalo do v a kolik do z.

Jak se figurky-kozy rozmístí? Máme-li předpovědět, jaký počet koz se prvním krokem dostane do a a jaký do z, odhadneme, že $\frac{5}{6}$ koz půjde do a a $\frac{1}{6}$ do z. O rozmístění koz sice rozhoduje náhoda, ale rozdíl mezi naší pravděpodobností a skutečností bude s největší pravděpodobností malý. Když situaci idealizujeme (zjednodušíme — ve fyzice i v matematice se často zjednodušuje), řekneme, že $\frac{1}{6}n$ figurek půjde do z a $\frac{5}{6}n$ do a. Zjednodušení vyžaduje, aby n bylo dělitelné šesti (aby došly celé kozy). U cíle z je tedy po prvním kroku $\frac{1}{6}\,n$ koz a v bodě a jich je $\frac{5}{6}\,n$.

Předpověď dalšího rozmístění koz, které se dostaly do a, říká, že polovina, tj. $\frac{1}{2}$ z $\frac{5}{6}\,n$, půjde do v a druhá polovina, tj. také $\frac{1}{2}$ z $\frac{5}{6}\,n$, půjde do z. Po idealizaci, zjednodušení situace, jsme předpověděli, že k cíli z se dostalo celkem $\frac{1}{6}\,n + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\,n$ koz a k cíli v se dostalo $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\,n$ koz.

Poměr

$$\frac{\text{počet koz, které se dostaly k cíli } z}{\text{počet všech koz, které putovaly}}$$

je ideální poměrná četnost jevu Z — koza se dostane k zelí, a tedy

$$\mathsf{P}\,(\text{koza se dostane k zelí}) = \frac{\frac{1}{6}\,n + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\,n}{n} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}.$$

Podobně

$$\mathsf{P}(\text{koza se dostane k vlkovi}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\,n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}.$$

Zřejmě, aby k cílům došly „celé" kozy, musí být počet koz postavený na start dělitelný $2 . 6 = 12$.

8.2. PRAVIDLO NÁSOBENÍ A PRAVIDLO SČÍTÁNÍ

Pro jev *V* je příznivý jen jeden výsledek. Pravděpodobnost jevu *V* je pravděpodobnost, že figurka půjde určitou cestou, cestou *av*. Tato cesta se skládá ze dvou úseků. Pravděpodobnost, že tudy figurka půjde, je součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$, což je součin pravděpodobností pro oba úseky.

Síť bychom mohli prodloužit, takže cesty by se mohly skládat z více než dvou úseků. Snadno usoudíme (podobně jako v našem jednoduchém případě), že pravděpodobnost, že figurka půjde danou cestou sítě, pak bude součin pravděpodobností, že půjde jednotlivými úseky dané cesty. To je podstata tzv. pravidla násobení.

PRAVIDLO NÁSOBENÍ (pro náhodné procházky): Pravděpodobnost, že procházka povede danou cestou sítě od startu k cíli, je rovna součinu pravděpodobností, že povede jednotlivými jejími úseky.

Každému úseku cesty odpovídá hrana stromu. Každé cestě odpovídá větev, a tedy i výsledek, který na ní visí. Pravidlo násobení můžeme tedy přenést i na stromy. Stromy jsou také sítě. Průběh pokusu si můžeme představit jako náhodnou procházku figurky po větvi stromu od kořene do jednoho z koncových bodů. Dostáváme tak důležité pravidlo pro pravděpodobnost víceetapových náhodných pokusů znázorněných pomocí stromu.

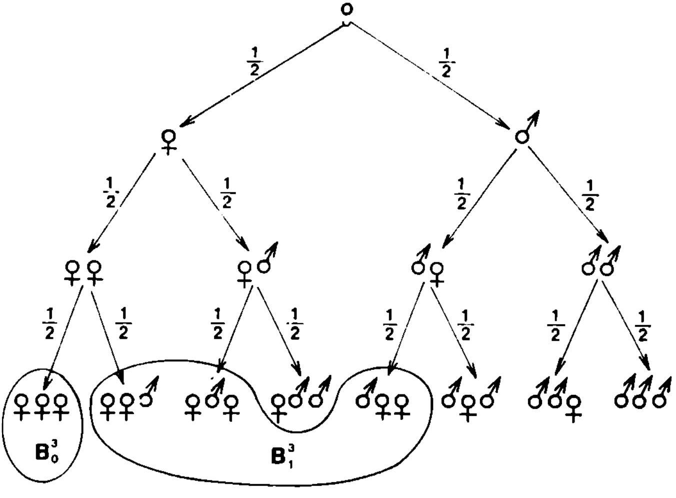
PRAVIDLO NÁSOBENÍ (pro stromy): Pravděpodobnost výsledku, který visí na dané větvi stromu, je rovna součinu pravděpodobností, které odpovídají všem hranám dané větve.

Máme-li tedy víceetapový pokus znázorněn stromem a známe-li pravděpodobnosti všech výsledků jednotlivých etap (což jsou pravděpodobnosti odpovídající jednotlivým etapám), můžeme určit pravděpodobnost daného výsledku.

Příklad 8.2. Usoudili jsme, že $\mathsf{P}(l) = \mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$. V příkladu 5.4 jsme pomocí simulace určili pravděpodobnost určitých jevů souvisejících s rodinou, která plánuje tři děti. Připomeňme si, že z našich úvah plynulo, že

$$\mathsf{P}(\text{narodí se samá děvčata}) \doteq \frac{7}{60}.$$

Na obr. 8.3 je strom, k jehož hranám jsou připsány



Obr. 8.3.

pravděpodobnosti. Pro jev B_0^3 — narodí se samá děvčata — je příznivý jen výsledek ♀♀♀. Pomocí pravidla součinu pro stromy dostaneme

$$\mathsf{P}(\text{narodí se samá děvčata}) = \mathsf{P}(♀♀♀) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Tuto hodnotu jsme dostali na základě určitého vzorce, pravidla. V příkladu 5.4 jsme pravděpodobnost odhadli pomocí pokusu. Hodnoty $\frac{1}{8}$ a $\frac{7}{60}$ se liší jen nepatrně. Kdybychom byli pokus simulovali ještě víckrát, hodnoty by se s největší pravděpodobností shodovaly ještě lépe.

Úloha 8.1. Vraťme se opět k paním X a Y, které nastupují do tramvajové soupravy se třemi vozy. Každý vůz má tutéž šanci, že si ho daná paní vybere (vyloučíme možnost, že v prvním voze je hezký řidič, předpokládáme, že všechny vozy jsou stejně obsazeny, atd.). Vozy jsou tři a tak každému dáme pravděpodobnost $\frac{1}{3}$. Pomocí pravidla násobení pro stromy určete pravděpodobnosti všech výsledků nastupování. Označme P(obě paní nastoupí do druhého vozu) jako $\mathsf{P}(22)$. Porovnejte hodnotu $\mathsf{P}(22)$, kterou jste zjistili, s hodnotou, ke které jsme došli v příkladu 5.6.

Úloha 8.2. V krabičce jsou čtyři hmatem nerozlišitelné kostky, dvě červené a dvě zelené. Třikrát náhodně vybereme po jedné kostce bez vracení a z vytažených kostek budeme stavět věže. Určete pravděpodobnost vzniku pro každou z možných věží.

Úloha 8.3. Na farmě je 90 % slepic vhodných pro chov. Z každých 100 slepic vhodných pro chov jich 50 vyniká vysokou nosností. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná slepice z farmy bude vynikat vysokou nosností?

Úloha 8.4. Snadno určíme pravděpodobnost libovolného výsledku náhodných her, kterými jsme se zabývali. Určete pravděpodobnost několika výsledků námořní bitvy a hry na vlka a dvě louky. Užijte pravidlo násobení pro sítě (procházky).

Vraťme se k příkladu 8.1. Pro jev Z — koza se dostane k zelí — jsou příznivé dva výsledky (z, az) a platí $\mathsf{P}(Z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$. Tento součet má dva sčítance. První je pravděpodobnost, že figurka půjde cestou z. Druhý sčítanec, součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$, je podle pravidla násobení pravděpodobnost, že půjde cestou az.

PRAVIDLO SČÍTÁNÍ (pro procházky): Vede-li k danému cíli více cest, je pravděpodobnost dosažení daného cíle rovna součtu pravděpodobností průchodu každou z těchto cest.

Vraťme se ke stromu. Pro dosažení cíle z (pro jev Z) jsou příznivé dva výsledky na stromě.

PRAVIDLO SČÍTÁNÍ (pro stromy): Je-li pro daný jev příznivých více výsledků na stromě, je pravděpodobnost daného jevu rovna součtu pravděpodobností těchto výsledků.

Příklad 8.3. Pomocí pravidla sčítání (a násobení) určete pravděpodobnost jevu B_1^3 — ze tří narozených dětí bude právě jeden chlapec. Jev B_1^3 je znázorněn na obr. 8.3. Jsou pro něj příznivé tři výsledky. Podle pravidla násobení pro stromy je

$$\mathsf{P}(B_1^3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Porovnejte tuto hodnotu s hodnotou z příkladu 5.4.

Úloha 8.5. Pomocí uvedených pravidel určete

a) P(nejstarší dítě bude chlapec),
b) P(nejmladší dítě bude děvče),
c) $\mathsf{P}(B_2^3)$ a $\mathsf{P}(B_3^3)$.

Úloha 8.6. Pomocí pravidla násobení a pravidla sčítání určete

a) P(každá paní nastoupí do jiného vozu),
b) P(obě paní nastoupí do téhož vozu),
c) P(ani jedna paní nenastoupí do vozu č. 3).

Opět se jedná o jevy související s paními X a Y čekajícími na tramvaj. Srovnejte výsledky s hodnotami z příkladu 5.6.

Úloha 8.7. Při chemickém postřiku ovocných stromů hyne 70 % housenek. To znamená, že

$$\mathsf{P}(\text{housenka zahyne po prvním postřiku}) = 0{,}7.$$

Housenky, které přežijí, se stanou odolnější proti prostředku a při druhém postřiku jich hyne jen 20 %. Jaká je pravděpodobnost, že housenka nepřežije dva postřiky?

O jaký náhodný pokus se zde jedná? Provedeme postřik a pozorujeme, zahyne-li daná housenka nebo ne.

Nezahynula-li, postřik opakujeme. Nakreslete strom (ne ten, který stříkáme). Pomocí pravidla násobení a sčítání pro stromy (ty, které nestříkáme) určete

P(housenka zahyne po prvním nebo po druhém postřiku).

8.3. PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

V případě s kozou, vlkem a zelím jsme na start postavili n figurek s tím, že číslo n bylo hodně velké. Při přemísťování figurek jsme situaci určitým způsobem zjednodušili. Je přece jasné, že n figurek se v síti na obr. 8.1 nemusí po prvním kroku rozmístit v poměru 5 : 1, jak jsme to udělali. Při přemísťování figurek jsme situaci idealizovali, jak se v matematice často dělá. Figurky jsme rozdělili podle ideálních poměrných četností.

Zjednodušme situaci ještě dál. Proč prohánět n koz? Při zjednodušení, které jsme provedli v našem případě, stačí vzít jen 12 figurek. 10 jich půjde do a, 2 do z. Každá figurka zastupuje dvanáctinu celého stáda n koz. Jak jsme došli k číslu 12?

Aby stádo mohlo udělat první krok, musí na startu být alespoň 6 figurek. Pět jich přejde do a a jedna do z. Figurka, která se dostala do z, procházku skončila. Figurky v a se musejí rozdělit na polovinu — polovina jich půjde do v a polovina do z. Je jich však 5 a rozdělení se nedá provést. „Automat" se nám nějak zasekl.

Postavme do výchozí pozice dalších 6 figurek a zopakujme jejich rozmístění. Do a se tak dostane posila složená z pěti nových figurek (koz). V a bude pak 10 figurek a v z 2 figurky. Figurky v a se rozdělí na polovinu (po pěti) do v a do z. Všech 12 figurek se dostalo od startu do cíle (ukončily procházku). K cíli z se dostalo $2 + 5$, tj. 7 z dvanácti figurek:

$$\mathsf{P}(\text{figurka — koza se dostane k cíli } z) = \frac{7}{12}.$$

K cíli v se dostalo 5 z dvanácti figurek:

$$\mathsf{P}(\text{koza se dostane k cíli } v) = \frac{5}{12}.$$

Došli jsme ke stejným hodnotám jako v příkladu 8.1.

Dostáváme tak další jednoduchý postup pro určení pravděpodobnosti, že se figurka při náhodné procházce dostane k danému cíli. Když se všechny figurky dostaly k cílům, určíme tuto pravděpodobnost podle následujícího pravidla:

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } x) =$$
$$= \frac{\text{počet figurek, které došly do } x}{\text{počet figurek, které došly do cílů}}.$$

Figurky se z každé pozice rozmisťují v poměru příslušných pravděpodobností.

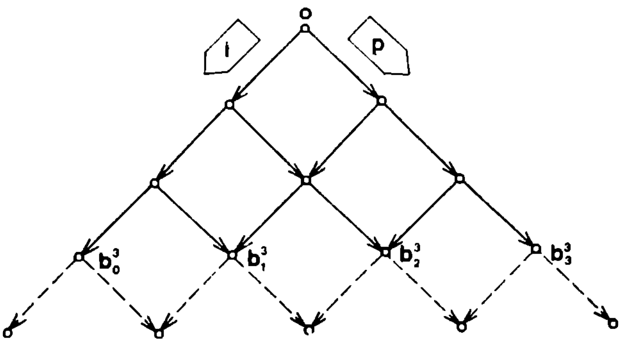
Pravděpodobnostní počítadlo*) se skládá ze sítě a několika figurek nebo knoflíků, které se po něm pohybují uvedeným způsobem. Nechť z dané pozice vycházejí úsečky $d_1, d_2, \ldots, d_k$ a nechť $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou příslušné pravděpodobnosti, že figurka půjde těmito úseky. Uveďme pravděpodobnosti na společného jmenovatele. Předpokládáme přitom, že všechny uvažované pravděpodobnosti jsou zlomky (racionální čísla). Společný jmenovatel označme m. Předpokládejme, že $p_j = \frac{n_j}{m}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$. Aby se z této pozice mohly figurky rozmístit dál, musí být počet figurek v této pozici násobkem čísla m. Je-li jich tam tm (kde t je přirozené

*) Ve starší literatuře se můžete setkat s názvem *Englův abakus*.

číslo), půjde tn_1 figurek po úseku d_1, tn_2 figurek po úseku d_2 atd. Po úseku d_k půjde tn_k figurek.

Počítadlo umožňuje určit velmi jednoduše pravděpodobnosti jevů souvisejících s náhodnými procházkami po konečném i nekonečném počtu cest. Ukážeme si to na jednoduchých příkladech.

Příklad 8.4. Při honičce na šachovnici umíme určit pravděpodobnost různých jevů. Teď je určíme pomocí pravděpodobnostního počítadla. Nakresleme si síť (obr.



Obr. 8.4.

8.4) a dejme tomu, že o směru, kterým se bude figurka pohybovat, bude rozhodovat výsledek hodu mincí. Určeme pravděpodobnost dosažení každého cíle, tj.

$$\mathrm{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^3)$$

pro $k = 0, 1, 2, 3$.

Ke každému úseku sítě připíšeme číslo $\frac{1}{2}$. Je to pravděpodobnost, že tudy figurka půjde, házíme-li mincí. Jde-li o třídenní závod (k cíli se dojde třemi kroky), snadno usoudíme, že bude stačit, postavíme-li na start 8 knoflíků nebo figurek. Z nich se jeden dostane do b_0^3, tři do b_1^3, tři do b_2^3 a jeden do b_3^3. Dostáváme

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_0^3) = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_1^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_2^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_3^3) = \frac{1}{8}.$$

Úloha 8.8. Házejme teď s-kostkou. Stěnu s tečkou chápejme jako l, stěnu bez tečky jako p. Na kostce je tedy pět stěn p. Ukazatele u sítě na obr. 8.4 zůstanou beze změny, jen pravděpodobnosti se změní. Určete

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^3)$$

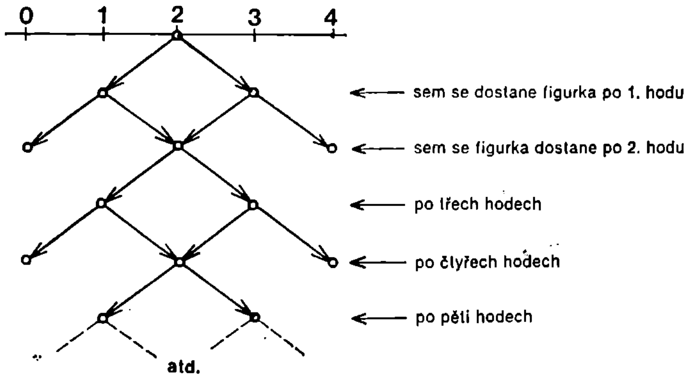
pro $k = 0, 1, 2, 3$ pomocí počitadla.

Úloha 8.9. Uvažujme čtyřdenní závod s použitím mince. Určete pomocí pravděpodobnostního počítadla

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^4)$$

pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ke každému bodu sítě připište počet cest, kterými se do něho lze dostat. Srovnejte tato čísla s pravděpodobnostmi, které jste našli. Co zjistíte?

Příklad 8.5. Dva hráči X a Y mají po dvou korunách. Házejí mincí (nezáleží na tom, kdo hází). Padne-li lev, prohraje korunu hráč X, padne-li panna, vyhraje hráč X korunu na hráči Y. Hrají, dokud jeden z nich neprohraje všechny peníze. Zabývejme se hráčem X. Změny jeho finanční situace si znázorníme pomocí figurky a sítě na obr. 8.5.



Obr. 8.5.

Ze sítě snadno vyčteme, kolik korun bude mít po kolika hodech a kolika způsoby hráč X. Podle pravidla násobení a sčítání můžeme vypočítat

P(hráč X vyhraje po n-tém hodu všechny peníze),

P(hráč X prohraje po n-tém hodu všechny peníze).

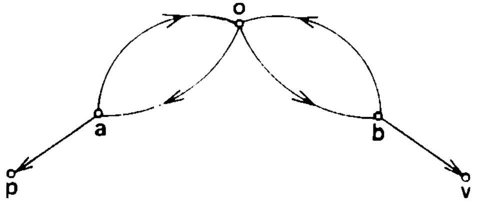
Nebudeme mít obtíže ani s určením pravděpodobností

P(hráč X vyhraje všechny peníze),

P(hráč X prohraje všechny peníze).

Všimněte si, že síť na obr. 8.5 nápadně připomíná síť, kterou jsme znázornili náhodnou kopanou. Kdybychom odstranili nerozhodné výsledky a připustili, aby se hrálo nekonečně dlouho, byly by obě sítě úplně stejné.

Po druhém hodu mincí se figurka dostane buď k cíli p_2 (hráč X všechno prohraje), nebo k cíli v_2 (hráč X všechno vyhraje), nebo do pozice o_2. Poslední možnost je vlastně totéž jako návrat do výchozí pozice, na start. Oba hráči mají totiž opět po dvou korunách. Naši hru tedy můžeme znázornit jako náhodnou procházku po trochu jednodušší síti (obr. 8.6).



Obr. 8.6.

Pozice p odpovídá tomu, že hráč X všechno prohraje, pozice v tomu, že všechno prohraje hráč Y a vyhraje hráč X.

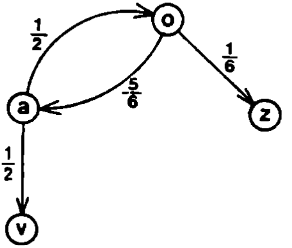
Stačí, když ze startu vypustíme čtyři figurky. Po dvou krocích se jedna dostane do p, jedna do v a dvě se vrátí na start.

P(hráč X všechno vyhraje) = P(figurka se dostane do v) $= \frac{1}{2}$,

P(hráč X všechno prohraje) = P(figurka se dostane do p) $= \frac{1}{2}$.

Úloha 8.10. Určete pravděpodobnost, že hráč X všechno vyhraje a že všechno prohraje, házíme-li s-kostkou (prázdná stěna znamená, že X prohraje korunu, stěna s tečkou znamená, že korunu vyhraje).

Úloha 8.11. Vraťme se ke koze, vlku a zelí, jen síť trochu pozměňme. Úsek mezi pozicemi a, z nasměrujme zpět



Obr. 8.7.

ke startu. Novou síť vidíte na obr. 8.7. Hra se tak podstatně změní. Teď existuje nekonečně mnoho různých cest. Pravidla putování zůstala nezměněna. Nejdříve házíme s-kostkou, potom mincí. Určete pomocí pravděpodobnostního počítadla

P(koza se dostane k vlkovi),

P(koza se dostane k zelí).