7. kapitola

PRAVDĚPODOBNOST

Od jisté doby věnujeme svou pozornost hodnocení šancí, že nastanou různé jevy. Mírou šance je číslo, kolem kterého se zajímavým způsobem „točí" poměrná četnost jevu, roste-li počet opakování příslušného náhodného pokusu. Číslo, kolem něhož poměrná četnost osciluje, jsme nazvali pravděpodobnost jevu. Víme už, jak ji přibližně určit. U jednoduchých jevů ji dokonce dokážeme určit přesně.

7.1. VLASTNOSTI POMĚRNÉ ČETNOSTI

Uvažujme určitý náhodný pokus. Označme Ω prostor jeho výsledků a $\mathbf{S}$ množinu všech náhodných jevů, které s pokusem souvisejí. Budeme zkoumat vlastnosti poměrné četnosti jevu. Abychom našli poměrnou četnost jevu A z množiny $\mathbf{S}$, musíme pokus opakovat n-krát při týchž podmínkách. Jako $c_n(A)$ jsme označili, kolik jsme takto získali výsledků příznivých pro jev A. Poměrná četnost pak bude

$$f_n(A) = \frac{c_n(A)}{n} .$$

Všimněme si, že pro každý jev A z množiny $\mathbf{S}$ platí

$$0 \leqq c_n(A) \leqq n .$$

Vydělíme-li tuto nerovnost číslem n, dostaneme zajímavou vlastnost poměrné četnosti:

(f1) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$ platí $0 \leqq f_n(A) \leqq 1$.

Jistý jev je množina Ω. Každý výsledek je pro něj příznivý. Pro každé n je $c_n(\Omega) = n$, a platí tedy:

(f2) Pro každé n je $f_n(\Omega) = 1$.

Vezměme libovolné dva disjuntní jevy A a B z množiny $\boldsymbol{S}$. Neexistuje výsledek, který by byl příznivý zároveň pro oba jevy A i B. Je-li výsledek příznivý pro jev $A \cup B$, znamená to, že je buď příznivý pro jev A, nebo pro jev B. Pro oba jevy příznivý být nemůže. Z toho plyne, že

$$c_n(A \cup B) = c_n(A) + c_n(B) .$$

Vydělíme-li obě strany číslem n, dostaneme další důležitou vlastnost poměrné četnosti:

(f3) Je-li $A \in \boldsymbol{S}$, $B \in \boldsymbol{S}$ a $A \cap B = \emptyset$, platí

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) .$$

Nemožný jev je prázdná množina $\emptyset$. Poněvadž pro každé n je $c_n(\emptyset) = 0$, platí

(f4) $f_n(\emptyset) = 0$ pro každé n .

Uvedeme ještě dvě vlastnosti poměrné četnosti:

(f5) Pro každé n a každé $A \in \boldsymbol{S}$ je $f_n(A') = 1 - f_n(A)$.

(f6) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$, $B \in \boldsymbol{S}$ je $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) - f_n(A \cap B)$.

Každému jevu A z množiny $\boldsymbol{S}$ chceme teď přiřadit právě jedno číslo $\mathsf{P}(A)$ — pravděpodobnost jevu A. Chceme tedy definovat funkci P na množině $\boldsymbol{S}$ všech jevů souvisejících s daným náhodným pokusem. Číslo $\mathsf{P}(A)$ má být mírou šance, že nastane jev A, a tedy musí být spřízněno s poměrnou četností $f_n(A)$. Funkce P musí proto mít vlastnosti analogické vlastnostem poměrné četnosti. Z tohoto důvodu zavádíme následující definici pravděpodobnosti P.

Definice 7.1. Náhodný pokus nechť má konečný prostor výsledků Ω. Množina $\boldsymbol{S}$ všech podmnožin prostoru Ω je množina všech jevů souvisejících s daným náhodným pokusem. *Pravděpodobnost* P budeme říkat reálné funkci definované na množině $\boldsymbol{S}$, která vyhovuje následujícím třem podmínkám:

(P1) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$ je $\mathsf{P}(A) \geqq 0$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3) Pro každé dva jevy $A \in \boldsymbol{S}$ a $B \in \boldsymbol{S}$ takové, že $A \cap B = \emptyset$, platí $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.

Podmínkám (P1), (P2) a (P3) se říká *axiomy pravděpodobnosti*.

Ještě malé vysvětlení k suché definici. Hodnoty pravděpodobnosti P jsou teď definovány jen pro jevy, ne pro výsledky. Při házení mincí je p výsledek, jev je $\{p\}$. Definovali jsme $\mathsf{P}(\{p\})$ a ne $\mathsf{P}(p)$. Abychom zjednodušili dorozumívání, budeme někdy psát krátce $\mathsf{P}(p)$ místo $\mathsf{P}(\{p\})$ a ani v řeči to nebudeme rozlišovat.

Všimněte si, že při definici pravděpodobnosti se uplatnily jen některé vlastnosti poměrné četnosti uvedené v odst. 7.1. Dá se totiž ukázat, že z těchto vlastností už vyplývají ostatní. Dá se např. ukázat, že $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(A) \leqq 1$ a že $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$. Pravděpodobnost P je funkce a často ji budeme zadávat pomocí tabulky.

Příklad 7.1. Při hodu mincí je $\Omega = \{l, p\}$. Množina jevů je $\boldsymbol{S} = \{\emptyset, \{l\}, \{p\}, \Omega\}$. Funkce P definovaná tabulkou

	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω	jevy z množiny $\boldsymbol{S}$
P:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	pravděpodobnosti jevů

je pravděpodobnost, protože splňuje všechny axiomy pravděpodobnosti. Avšak také funkce P_1 a P_2 definované tabulkami

	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω
P_1:	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω
P_2:	0	0	1	1

splňují axiomy pravděpodobnosti. Funkce P_1 a P_2 jsou ve smyslu definice 7.1 také pravděpodobnosti definované na $\boldsymbol{S}$. Teď jste asi zmateni. Ostatně můžeme snadno uvést nekonečně mnoho dalších funkcí definovaných na $\boldsymbol{S}$, které budou mít také právo na název pravděpodobnost. Také budou splňovat axiomy pravděpodobnosti.

Ze všech nekonečně mnoha funkcí, které jsou podle definice 7.1 pravděpodobnosti definované na $\boldsymbol{S}$, jen jedna zasluhuje zvláštní pozornost. Je-li mince pravidelná, bude to funkce P definovaná první tabulkou. Hodnoty funkce P se shodují s ideálními poměrnými četnostmi jevů. Pro každý jev A z množiny $\boldsymbol{S}$ jevů souvisejících s házením mincí je $\mathsf{P}(A)$ míra šance, že jev A nastane.

Pro funkci P_1 tomu tak není. Je $\mathsf{P}_1(\{l\}) = \frac{5}{6}$ a v případě, že mince je pravidelná, se číslo $\frac{5}{6}$ neshoduje s ideální poměrnou četností jevu $\{l\}$. V tomto případě pro nás nebude mít pravděpodobnost P_1 (ani P_2 nebo jakákoliv různá od P) prakticky žádný význam. Pro hod pravidelnou mincí má pravděpodobnost P zvláštní význam — její hodnoty souvisejí s četností. Funkce P_1 a P_2 takovou vlastnost nemají.

Dále budeme uvažovat jen pravděpodobnost související s daným náhodným pokusem, jejíž hodnoty souvisejí s četností. Dostanete-li tedy za úkol určit pravděpodobnost jevu, budeme mít vždy na mysli tuto pravděpodobnost.

Příklad 7.2. Funkce P_1 je výborný kandidát na pravděpodobnost hodu s-kostkou. Výsledky hodu stačí kódovat takto: l - prázdná stěna, p - stěna s tečkou.

Úloha 7.1. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Na množině $\boldsymbol{S}$ všech podmnožin prostoru Ω definujme pravděpodobnost P tabulkou

	$\emptyset$	ω_1	ω_2	Ω
P:	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Na kostce jsou dva druhy stěn. Nakreslete ji, víte-li, že P je pravděpodobnost pro hod touto kostkou.

Úloha 7.2. Definujte pravděpodobnost P pro tažení kuličky:

a) pomocí přístroje pro tah koulí č. 2,

b) pomocí přístroje č. 3.

7.3. VLASTNOSTI PRAVDĚPODOBNOSTI

V množině jevů $\boldsymbol{S}$ je vždy nemožný jev, jev $\emptyset$. V našich úvodních úvahách o pravděpodobnosti se objevil několikrát. Hodnota jeho pravděpodobnosti byla vždy nula. V axiomech pravděpodobnosti o tom není řeč. Vyplývá snad z axiomů, že $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$? Ukážeme, že skutečně ano. Dokážeme první větu naší teorie.

Věta 7.1. *Pravděpodobnost nemožného jevu je nula.*

Jak to dokážeme? Zatím toho přece moc nevíme, známe jen axiomy pravděpodobnosti.

Zvolme jakýkoliv jev $A \in \boldsymbol{S}$. Nechť P je pravděpodobnost definovaná na $\boldsymbol{S}$. Do $\boldsymbol{S}$ patří také $\emptyset$. Platí

(i) $$A \cup \emptyset = A$$

(ii) $$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Využijme axionu P3, podmínka (ii) nám to dovolí. Vezmeme-li $B = \emptyset$, dostaneme

$$\mathsf{P}(A \cup \emptyset) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\emptyset)\,.$$

Podle (i) je však vlevo $\mathsf{P}(A)$, a tedy

(iii) $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\emptyset)\,.$$

Na (iii) se dívejme jako na rovnici o neznámé $\mathsf{P}(\emptyset)$.

Dostaneme z ní $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A) = 0$, což jsme měli dokázat.

Nabízí se otázka, platí-li také obrácená věta. Je-li $\mathsf{P}(A) = 0$, plyne odtud, že A je nemožný jev? Obrácená věta neplatí. Abychom to ukázali, stačí uvést příklad jevu A, pro který je $\mathsf{P}(A) = 0$ a který není nemožný. (Takovému příkladu se říkává protipříklad.) V našem případě už protipříklad známe — stačí si jen dobře prohlédnout tabulku, která definuje pravděpodobnost P_2. Který jev to je? Z našeho výkladu plyne: nemožný jev a jev s nulovou pravděpodobností není totéž!

Úloha 7.3. Dokažte následující větu.

Věta 7.2. $\mathsf{P}(A') = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Podle věty 7.1 musí v tabulce, kterou definujeme pravděpodobnost P, pod $\emptyset$ být vždy 0. Podle věty 7.2 stačí, uvedeme-li v tabulce hodnoty funkce P jen pro některé vhodné jevy. Pro ostatní jevy můžeme už pak hodnoty funkce P vypočítat pomocí teorie, tj. podle vzorce z věty 7.2.

Hodnoty pravděpodobnosti budeme tedy určovat na základě pokusů, simulace nebo úvah jen pro určité jevy. Pro ostatní jevy je vypočteme pomocí teorie, tj. vět.

Úloha 7.4. Doplňte tabulku, aby definovala pravděpodobnost

	$\emptyset$	ω_1	ω_2	Ω
P:		$\frac{79}{93}$		

kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Úloha 7.5. Jistý náhodný pokus má prostor výsledků $\Omega = \{a, b, c\}$. Doplňte tabulku pravděpodobností.

	A	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
a)	$\mathsf{P}_1(A)$	$\frac{1}{7}$			$\frac{3}{7}$			
b)	$\mathsf{P}_2(A)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$					
c)	$\mathsf{P}_3(A)$	p_1	p_2	p_3				

Ve třetím řádku je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ a čísla p_1, p_2, p_3 jsou kladná.

Poslední úloha nás vede k zajímavému nápadu. Kdybychom hodnoty pravděpodobnosti P určili pro jednoprvkové jevy (stručně řečeno výsledky), byla by tím pravděpodobnost P už určena pro všechny jevy. Zkrátka, i když trochu nepřesně: Známe-li hodnoty pravděpodobnosti všech výsledků, známe už také hodnoty pravděpodobnosti všech ostatních jevů.

Příklad 7.3. Při hodu kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Abychom definovali pravděpodobnost P, měli bychom udat 2^6 jejích hodnot. Tolik je totiž všech jevů souvisejících s hodem. Stačí však udat hodnoty pravděpodobnosti jen pro „výsledky“. Je-li kostka pravidelná, je

$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

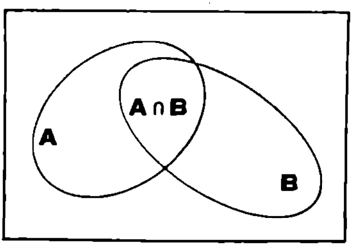
V příkladu 3.1 na str. 29 je uvedeno několik jevů. Dostáváme pro ně

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\{5, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

S funkcemi, které měly podobné vlastnosti jako pravděpodobnost, jste se už nejednou v matematice a fyzice setkali.

Představme si čtverec jednotkového obsahu. Bude to prostor výsledků Ω a $\boldsymbol{S}$ bude množina všech podmnožin čtverce, které mají obsah. Obsah je funkce definovaná na $\boldsymbol{S}$. Označme ji také písmenem P. Všimněte si, že



Obr. 7.1.

obsah vyhovuje axiomům pravděpodobnosti. Pravděpodobnost tedy můžeme pokládat za míru. To nám umožní najít myšlenku důkazů mnoha dalších vlastností pravděpodobnosti. Na obr. 7.1 vidíte dvě množiny A a B, pro které je definován obsah P. Všimněte si, že

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

To nám umožňuje — s využitím určitých geometrických poznatků o útvarech, které mají obsah — dokázat následující větu.

Věta 7.3. *Je-li* P *pravděpodobnost definovaná na* $\boldsymbol{S}$, $A \in \boldsymbol{S}$ *a* $B \in \boldsymbol{S}$, *pak*

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)\,.$$

Úloha 7.6. Na kostce jsou stěny bez teček, s jednou tečkou, se dvěma a se třemi. Nakreslete kostku, víte-li, že pro sledování počtu teček na horní stěně po hodu platí

$$\mathsf{P}(0) = \frac{1}{6}\,, \quad \mathsf{P}(1) = \frac{2}{6}\,, \quad \mathsf{P}(3) = \frac{2}{6}\,.$$