O náhodě a pravděpodobnosti

6. kapitola. Náhodné hry

In: Adam Płocki (author); Eva Macháčková (translator); Vlastimil Macháček (illustrator): O náhodě a pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 68–91.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404035

6. kapitola

NÁHODNÉ HRY

Z mnoha her, které znáte, si zvláštní pozornost zaslouží hry, při kterých o výhře a prohře rozhoduje jen náhoda. V takové hře může i nejhorší žák ze třídy porazit svého učitele. Nepatří mezi ně šachy ani mariáš. Člověče nezlob se je náhodná hra — o postupu figurek rozhoduje náhoda, výsledek hodu kostkou. Právě náhodné hry jsou zajímavé téma. S jednou velmi jednoduchou náhodnou hrou jsme se seznámili už v příkladu 4.1. Ukážeme si další náhodné hry.

6.1. NÁHODNÁ KOPANÁ

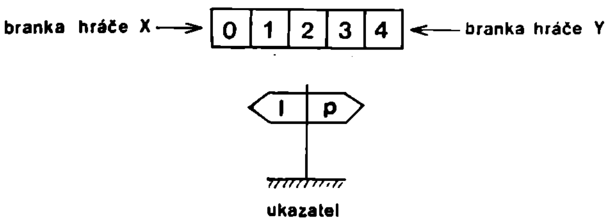
Na obr. 6.1 vidíme hřiště. V poli dvě stojí figurka — míč. Pole 0 je branka hráče X a pole 4 je branka hráče Y. Pohyb je dán výsledkem hodu mincí. Padne-li lev, míč se posune o jedno pole doleva, padne-li panna, o jedno pole doprava. Házíme mincí a posunujeme figurku, dokud se nedostane do některé branky. Pak řekneme, že padla branka. Není důležité, kdo hází mincí. Šance, že padne lev nebo panna, je stejná, ať hází nejhorší hráč ze třídy nebo učitel matematiky.

Dostane-li se míč do branky hráče Y, vyhraje hráč X, který vstřelil branku. Dostane-li se míč do pole 0, vyhraje Y, který vstřelil branku.

Může se stát, že mincí házíme mnohokrát, ale míč se do branky nedostane. Aby hra nebyla nudná, změníme trochu pravidla. Nepadne-li během šesti hodů branka, skončí utkání nerozhodně.

Naše hra je náhodný pokus. Jak jeho průběh zakódujeme? Jak ho znázorníme stromem?

Průběh utkání můžeme kódovat čísly polí, v nichž byl míč od začátku až do konce hry. Stejně dobře můžeme průběh i výsledek hry kódovat posloupností lvů a panen. V každém utkání se míč několikrát posunul. Dostal-li se míč do branky po k hodech, řekneme, že utkání trvalo k hodů. Nedostal-li se během šesti hodů míč do branky, utkání skončilo nerozhodně. Řekneme, že trvalo 6 hodů. Utkání zakódované *lppp* trvalo 4 hody. Každému výsledku hry, tj. utkání, jsme tak přiřadili číslo. Toto číslo je doba trvání utkání měřená neobvyklým způsobem. Setkáváme se se zajímavou funkcí, která prostor výsledků zobrazuje do množiny čísel. Tuto funkci označme T. Bude např. $T(lppp) = 4$. Slovy popíšeme funkci jako dobu trvání jednoho utkání.



Obr. 6.1.

Úloha 6.1. Znázorněte průběh a výsledky náhodné kopané stromem. Určete prostor výsledků. Na obrázku stromu připište ke každému výsledku příslušnou hodnotu funkce T.

Následující různé jevy souvisejí s naší hrou:

A: Vyhraje hráč X.
B: Hráč X prohraje (vyhraje hráč Y).
C: Utkání skončí nerozhodně.
D: Utkání bude trvat dva hody.
E: Utkání skončí po čtyřech hodech brankou v síti hráče X.
F: Utkání skončí po pěti hodech brankou v síti hráče Y.
G_k: Utkání bude trvat k hodů.

Ještě je třeba tyto jevy zakódovat — udělejte to sami. Stojí za úvahu, že např. jev F je nemožný jev.

Ohodnoťme dále, jaké šance uvedené jevy mají. Kromě hodnot jejich pravděpodobností budou zajímavé i jiné hodnoty. Nabízí se přece otázka, jaká bude průměrná doba trvání utkání. Kolik hodů připadne průměrně na jedno utkání?

Místo házení mincí budeme číst z tabulek náhodných čísel. Čteme např. od konce tabulky po sloupcích zdola nahoru. Číslice překládejme do jazyka lvů a panen — sudé číslici odpovídá l, liché číslici p. Skupiny číslic odpovídající jednotlivým utkáním budeme oddělovat čárkami. Po překladu dostaneme následující soubor výsledků simulovaného házení mincí. Pod každým utkáním je připsána doba jeho trvání T.

pp/plll/pp/pp/pp/pp/pp/ll/pp/lppp/ll/plplll/ll/plplpl/
2 4 2 2 2 2 2 2 2 4 2 6 2 6

/lppp/ll/plll/ll/ll/plll/ll/plll/pp/ll/pllppl/ll/pllpll/
4 2 4 2 2 4 2 4 2 2 6 2 6

/pp/pp/pp/plplpl/pp/pp/pp/ll/plpp/ll/plplpp/ll/plll/ll/
2 2 2 6 2 2 2 2 4 2 6 2 4 2

/lppp/pp/lplpll/pllppl/plll/ll/pp/lppp/ll/ll/plpllp/lpll/
4 2 6 6 4 2 2 4 2 2 6 4

/pllppl/pp/plplpp/pp/lpll/lpplpp/lplpll/pp/lppp/plplll/
6 2 6 2 4 6 6 2 4 6

/lpll/ll/pp/pllppl/plplpp/pp/ll/
4 2 2 6 6 2 2

Celkem 234krát jsme „hodili mincí“ a dostali jsme tak 70 zápasů. Spočítejme, kolikrát nastaly naše jevy A až F. Bude to

$$A\text{-}32,\ B\text{-}31,\ C\text{-}7,\ D\text{-}39,\ E\text{-}6,\ F\text{-}0.$$

Přibližné hodnoty pravděpodobností budou

$$\mathsf{P}(\text{vyhraje hráč } X) \doteq \frac{32}{70},$$

$$\mathsf{P}(\text{utkání skončí nerozhodně}) \doteq \frac{7}{70}.$$

Ukazuje se, že šance obou hráčů jsou stejné.

Věnujme teď trochu pozornosti funkci T, tj. době trvání jednoho utkání měřené počtem hodů.

Všimneme si jevu G_k. Můžeme ho vyjádřit a zapsat v jazyce funkce T. Jev G_k označme symbolem $\{T = k\}$. Uvědomte si, že $D = G_2 = \{T = 2\}$. Neplatí však, že $E = \{T = 4\}$. Proč ne?

Funkce T může nabývat hodnot 2, 4 a 6. Určeme poměrné četnosti jevů $\{T = k\}$ pro $k = 2, 4, 6$. Připomeňme si, že

$$f_n(\{T = k\}) = \frac{\text{počet utkání, která trvala } k \text{ hodů}}{\text{počet všech utkání}}$$

Dostaneme tabulku

$\{T = k\}$	$\{T = 2\}$	$\{T = 4\}$	$\{T = 6\}$
$f_{70}(\{T = k\})$	$\frac{39}{70}$	$\frac{15}{70}$	$\frac{16}{70}$

které budeme říkat *přibližné rozložení funkce T*. Funkce T je příklad tzv. náhodné veličiny. Je to funkce, která zobrazuje prostor výsledků nějakého náhodného pokusu do množiny čísel. Naše tabulka určitým způsobem charakterizuje naši funkci T, jejíž hodnoty závisejí na náhodě. Tabulka nás informuje, kterých hodnot funkce T nabývá a jak velké jsou šance, že nabude jednotlivých hodnot. Řekneme, že

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 2) \doteq \frac{39}{70},$$

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 4) \doteq \frac{15}{70},$$

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 6) \doteq \frac{16}{70}.$$

Teď je na řadě otázka, jaká je průměrná doba trvání jednoho utkání. Označme ji $\mathsf{E}T$. Je to *střední hodnota náhodné veličiny T*. Abychom průměrnou dobu, průměrný počet hodů připadající na jedno utkání určili, budeme postupovat následujícím způsobem: Spočítáme, kolik hodů trvala všechna utkání celkem. Vydělíme-li tento počet sedmdesáti, zjistíme, kolik hodů průměrně připadlo na jedno utkání. Celkový počet hodů dostaneme sečtením dob všech utkání. Vezmeme to po pořádku. Nejprve zjistíme, kolik utkání trvalo 2 hody, pak kolik jich trvalo 4 hody a kolik 6 hodů. Dostaneme 39 utkání po dvou hodech, 15 utkání po 4 hodech a 16 po šesti. Celkový počet hodů (celková doba trvání 70 utkání) bude

$$2.39 + 4.15 + 6.16 = 234 \text{ hodů} .$$

Na jedno utkání připadne průměrně $\frac{234}{70}$, čili přibližně 3,34 hodu, E$T \doteq 3{,}34$. Uvědomte si, že

$$\mathsf{E}T \doteq \frac{2.39 + 4.15 + 6.16}{70} =$$

$$= 2 \,.\, \frac{39}{70} + 4 \,.\, \frac{15}{70} + 6 \,.\, \frac{16}{70} =$$

$$= 2.f_{70}(\{T = 2\ ) + 4.f_{70}(\{T = 4\}) + 6.f_{70}(\{T = 6\}).$$

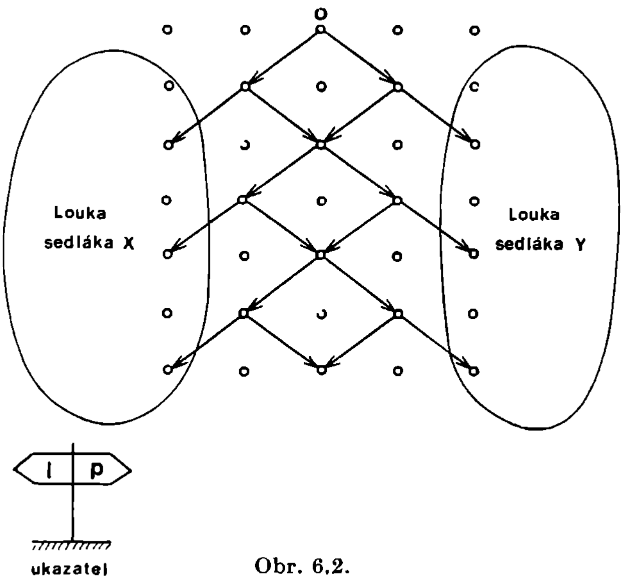
Přibližná střední hodnota ET je tedy zajímavý součet. Jeho sčítanci jsou součiny hodnot, kterých funkce T nabývá s přibližnými pravděpodobnostmi jejich nabývání. K tomu se ještě vrátíme.

Úloha 6.2. Na začátku utkání teď míč bude v poli 3. Jak se změní šance jevů A, B, a C? Jakých hodnot bude nabývat náhodná veličina T? Určete přibližné rozložení funkce T a ET. Můžete k tomu klidně použít soubor lvů a panen na str. 70—71. Jen čárky mezi utkáními budou jinde.

Úloha 6.3. K hřišti připojme ještě jedno pole 5. Na začátku utkání je míč v poli 3. Řešte podobné problémy jako v úloze 6.1,

6.2. DVĚ LOUKY A VLK

Mezi loukami dvou sedláků X a Y je hustý les. Lesem vedou stezky (obr. 6.2). V bodě o je vlk. Při hře ho zastoupí figurka. Vlk bude běhat po stezkách. Hod mincí rozhodne o tom, kterým směrem poběží. Padne-li panna, poběží na jihovýchod, padne-li lev, na jihozápad. Znázorňuje to ukazatel. Na každé křižovatce znovu hodíme mincí, abychom mohli figurku posunout dál. Když bude vlk takto procházet lesem, může se náhodně dostat na některou louku, tj. na konce stezky. Dostane-li se na louku sedláka Y, vyhraje X. Dostane-li se na louku sedláka X, pak X prohraje. Po šesti hodech však vlk



Obr. 6.2.

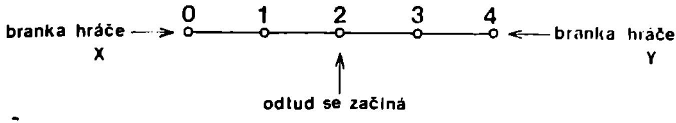
může obě louky minout. Poběží dál, ale jeho další cesta nás už nezajímá. Dopadne-li to tak, řekneme, že utkání skončilo nerozhodně.

Teď si můžeme zahrát a několikrát hodit mincí. Výsledky hry můžeme kódovat pomocí lvů a panen. Čtveřice *lppp* kóduje průběh vlkovy cesty lesem. Kudy vlk běžel? Zaveďme znovu dobu trvání jednoho utkání měřenou počtem hodů. Tato doba je zároveň rovna počtu úseků, které vlk proběhl od startu až do konce cesty. Uvažujme opět několik jevů:

A: Vlk se dostane na louku Y (vyhraje X).
B: Vlk se dostane na louku X (vyhraje Y).
C: Vlk obě louky mine.
D: Po dvou hodech se vlk dostane na některou louku.
E: Po čtyřech hodech se vlk dostane na louku sedláka X.
F: Po pěti hodech bude vlk na louce Y.
G_k: Vlkova cesta bude trvat k hodů.

Všimli jsme si, že *lppp* je kód jisté cesty lesem. Nakresleme si ji. Tudy poběží vlk, tudy půjde figurka, padne-li za sebou lev, panna, panna a panna. Cesta — a tedy i utkání — bude trvat 4 hody.

Máme už k dispozici soubor výsledků 234 hodů mincí. Využijeme ho, abychom si hru na vlka mohli zahrát mnohokrát. Budeme postupně číst písmena souboru a příslušně tahat figurkou. Skončí-li hra, uděláme čárku u toho jevu našeho seznamu, pro který byl výsledek příznivý. Skupiny písmen, odpovídající v souboru jednotlivým zápasům, oddělme čárkami. S překvapením zjistíme, že čárky od minulé hry se bezvadně hodí i pro novou hru. To je podivuhodné! Není to snad způsobeno náhodnou shodou okolností? Není! Mohli jsme to vědět předem. Snadno vysvětlíme, proč je tomu tak. Kdybychom si totiž list s lesem a loukami dali do výše očí a sledovali hru ze strany, viděli bychom, že se vlk pohybuje stejně jako míč na hřišti. Z louky X se stane branka X, z louky Y branka Y. Cesta vlka lesem se bude jevit jako pohyb figurky po přímce, přesněji řečeno, po průmětech křižovatek lesních stezek na přímku. Průměty můžeme pokládat za pole hřiště. Na obr. 6.3. vidíte, jak teď bude hřiště vypadat.

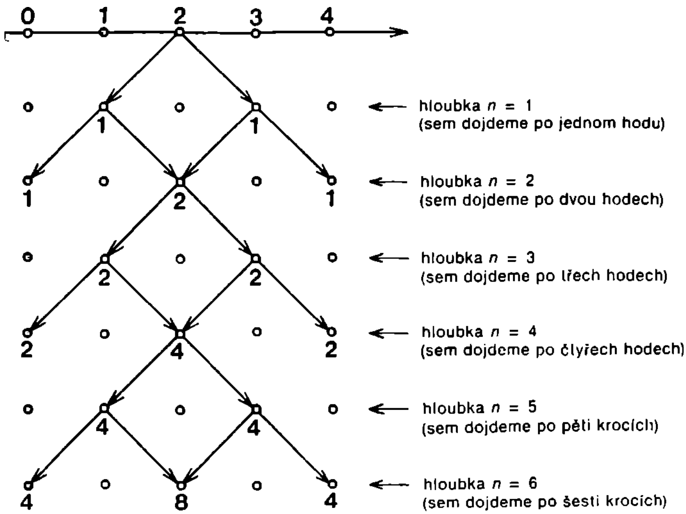


Obr. 6.3.

Náš objev nám umožní řešit mnoho zajímavých problémů souvisejících s náhodnou kopanou. Ptejme se, kolika způsoby se může míč dostat do různých polí na hřišti po dvou, třech, čtyřech, pěti a šesti hodech. Předtím bychom byli těžko hledali odpověď. Teď je to snadná záležitost. Ke každé křižovatce v obr. 6.2 připišme počet způsobů, jak se tam vlk může dostat. Každá křižovatka bude mít dvě souřadnice. První souřadnice křižovatky bude číslo jejího průmětu na přímku procházející startem. Druhá souřadnice křižovatky bude počet úseků, po kterých se do ní vlk dostane, tzv. hloubka křižovatky (obr. 6.4).

Z obr. 6.4 můžeme vyčíst, kolika způsoby a kdy se vlk může dostat na danou křižovatku. To je zároveň odpověď i na otázku, kolika způsoby a kdy se může míč dostat na dané pole hřiště.

Úloha 6.4. Hřiště má 6 polí očíslovaných 0, 1, 2, 3, 4, 5 a hra začíná v poli 3. Kam se míč může dostat po 2, 3,



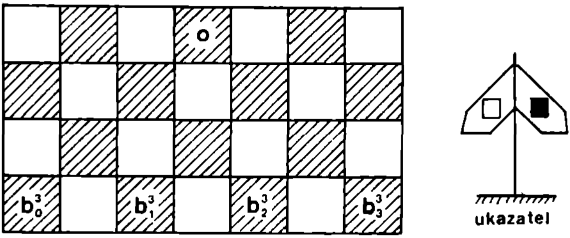
Obr. 6.4.

4, 5 a 6 hodech? Kolika způsoby se tam může dostat? Pomůže vám síť cest. Nakreslete si ji.

6.3. ZÁVODY NA ŠACHOVNICI

Na obr. 6.5 je šachovnice. Každý z hráčů (může jich být mnoho, budeme se zabývat jen jedním z nich) postaví svou figurku na startovní pole označené o. Ukazatel udává, jak se táhne figurkou v závislosti na výsledku hodu kostkou. Kostka je krychle, některé stěny má bílé a ostatní černé. Po třech hodech figurka dojde k jednomu z cílů. Bude-li to cíl označený b_k^3, hráč získá k bodů, $k = 0, 1, 2, 3$.

Připravme si tři černé a tři bílé čtverečky. Házejme kostkou, tahejme figurkou podle ukazatele a zároveň stavme věž ze čtverečků. Padne-li při prvním hodu např. černá, po tahu figurkou si stranou postavme z černého čtverečku přízemí věže. (Bude to plochá věž). Padne-li



Obr. 6.5.

bílá, figurka potáhne jiným směrem a „plochá" věž bude mít bílé přízemí. Podobně postupujme při druhém a třetím hodu. Po třech hodech figurka dojde k jednomu z cílů a stranou vnikne s přispěním náhody plochá věž.

Budeme-li házet mnohokrát, vznikne mnoho věží a figurka mnohokrát přejde přes šachovnici. Zatím nám nezáleží na tom, kolik je na kostce bílých a kolik černých stěn. Každá cesta figurky je vzájemně jednoznačně kódována věží. Věž je uspořádaná trojice. K cíli b_k^3 vedou cesty kódované věžemi, které mají právě k černých podlaží ($k = 0, 1, 2, 3$).

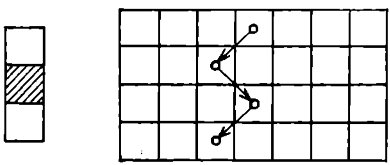
Do svých úvah opět zavedeme čas. Jde o závody na šachovnici. Postupné etapy závodu, postupné tahy figurky, probíhají v po sobě následujících časových jednotkách, např. dnech. Závod, o kterém je řeč, trvá 3 dny. Je to třídenní závod. Snadno ho prodloužíme na 4, 5, 6, ... až n dní. Stačí jen rozšířit a prodloužit šachovnici.

Třídenní závod budeme mnohokrát opakovat. Sestavíme tabulku, kam budeme vedle cílů kreslit věže, které je kódují. Až budeme mít už hodně věží, obrátíme svou pozornost na to, co mají společného všechny věže u daného cíle. Např. věž  umístíme k cíli b_1^3.

cíl b_0^3	věže, které...
cíl b_1^3 	věže, které...
cíl b_2^3	věže, které...
cíl b_3^3	věže, které mají všechna podlaží černá

Vyplněná tabulka nás vede k závěru, že k cíli b_k^3 vedou cesty zakódované věžemi, které mají právě k černých podlaží. K cíli b_k^3 figurka dojde, když udělá právě k kroků jihovýchodním směrem.

Na obr. 6.6 je věž a schéma šachovnice s vyznačenou cestou, která odpovídá věži. Pro různé věže můžeme do schématu šachovnice zakreslit příslušné cesty.

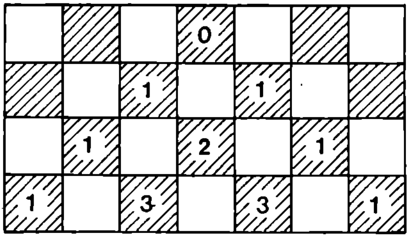


Obr. 6.6.

A obráceně, k daným cestám můžeme kreslit příslušné věže.

Kolik cest vede ke každému z cílů? Kolik je všech možných cest?

Počty cest, které vedou k jednotlivým cílům, můžeme najít velmi snadno tak, že je postupně vpisujeme do jednotlivých polí šachovnice. Čísla tvoří známý Pascalův trojúhelník (viz obr. 6.7).



Obr. 6.7.

Úloha 6.5. Najděte počty cest vedoucích ke každému z cílů, trvá-li závod týden. Kolik je všech možných cest týdenního závodu?

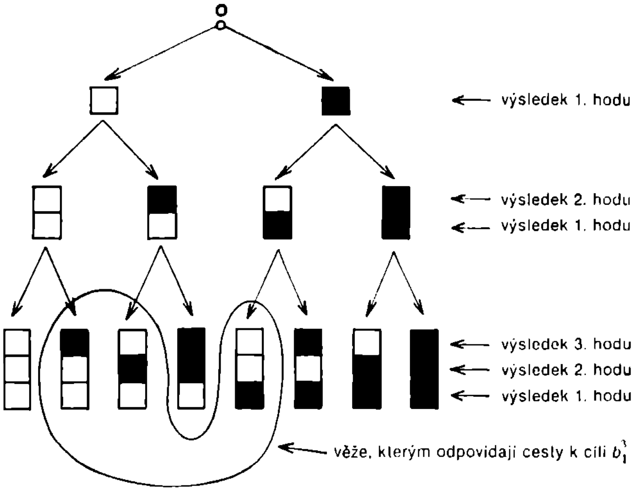
Strom na obr. 6.8 znázorňuje průběh a výsledky stavby věží při závodě na šachovnici.

Budeme dále uvažovat několik jevů souvisejících s naším závodem. Pro zvláštní jevy zavedeme zvláštní označení. Jako B_k^3 označíme následující jev: figurka dojde k cíli b_k^3 — hráč získá k bodů. To jsou čtyři jevy, pro $k = 0, 1, 2, 3$. Další jevy, které nás budou zajímat:

A: Hráč získá aspoň 2 body.

B: Hráč získá nejvýše 1 bod.

C: Hráč nezíská více než 2 body ani méně než 1 bod.



Obr. 6.8.

Úloha 6.6. Kostka má stejný počet černých i bílých stěn. Kolikrát byste museli hodit kostkou, abyste závod provedli padesátkrát? Určete $\mathsf{P}(B_k^3)$ pro $k = 0, 1, 2, 3$. Můžete simulovat házení kostkou pomocí souboru ze str. 70—71. Bude-li výsledek simulovaného závodu příznivý pro jev, udělejte do příslušného řádku tabulky čárku. Všimněte si, jak se počty čárek rozložily v řádcích tabulky. Porovnejte je s počty cest, které vedou k příslušným cílům.

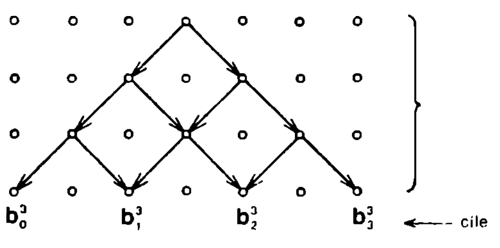
jev B_0^3	$f_{50}(B_0^3) = \ldots$
jev B_1^3	$f_{50}(B_1^3) = \ldots$
jev B_2^3	$f_{50}(B_2^3) = \ldots$
jev B_3^3	$f_{50}(B_3^3) = \ldots$

Každý výsledek hry je pro hráče spojen s počtem bodů, které získal. I zde tedy dostáváme funkci, která zobrazuje prostor výsledků do množiny čísel. Slovy ji popíšeme jako počet bodů získaných v závodě. Je to další příklad tzv. náhodné veličiny.

O tom, kolik bodů hráč získá, rozhoduje, kolikrát padne při trojím hodu kostkou černá. Padne-li černá, budeme mluvit o úspěchu, padne-li bílá, o neúspěchu.

Úloha 6.7. Prodlužte šachovnici, aby se hodila pro sedmidenní závod. Aby se figurka dostala k jednomu z cílů, bude nutno hodit kostkou sedmkrát. Označme cíle b_0^7, $b_1^7, \ldots, b_6^7, b_7^7$. Pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ označíme jako B_k^7 následující jev: figurka dojde k cíli b_k^7. Kostka má opět 3 černé a 3 bílé stěny. Využijte souboru výsledků hodu mincí na str. 70—71 a simulujte závody, dokud nevyčerpáte soubor. Podobně jako dříve dělejte k příslušným jevům čárky do tabulky. Porovnejte počty čárek u každého jevu s počty cest, které vedou k příslušným cílům. Jevu B_k^7 odpovídá cíl b_k^7.

Představme si, že jde o lyžařský závod. Účastníci projíždějí příslušné cesty na lyžích. Na sněhu zůstanou stopy. Kdybychom projeli všechny možné cesty na

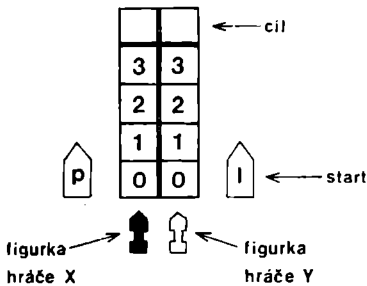


Obr. 6.9. Síť odpovídající třídennímu závodu na šachovnici

sněhové šachovnici, vytvořily by síť z obr. 6.9. Takové sítě mají v teorii pravděpodobnosti ohromný význam.

6.4. ZÁVODY V BĚHU

Na obr. 6.10 vidíte běžeckou dráhu se dvěma pruhy. Na startu stojí dvě figurky-běžci. Jeden patří hráči *X* a druhý hráči *Y*. Výsledek hodu mincí rozhoduje o tom, která figurka postoupí o jedno políčko k cíli. Udává to ukazatel. Házíme tak dlouho, až jedna figurka dojde k cíli a vyhraje závod. Její majitel získá bod.



Obr. 6.10.

Při opravdových závodech v běhu se měří čas. Uděláme to i zde. Dejme tomu, že hody budeme provádět v pravidelných intervalech, např. po minutě. Běh bude trvat tolik minut, kolikrát se při závodě házelo. Už dříve jsme měřili čas počtem hodů, což je vlastně totéž. Je důležité, kdo hází? Ne, už několikrát jsme to zdůrazňovali. Také není důležité, kdy se mincí házelo. Nemusíme házet, už jsme to dělali v příkladě o náhodné kopané. Soubor výsledků ze str. 70—71 se bude hodit i teď.

Vezměme si jeden z možných průběhů hry. Provedeme ho tak, že několikrát hodíme mincí a příslušným způsobem budeme pohybovat figurkami. Na počátku souboru jsou písmena *pppllllp*|*pppp*|*pppp*|*p*.... (Čárkami opět oddělujeme bloky, které kódují jeden výsledek.) Sedmice *pppllllp* je zakódovaný průběh jednoho závodu. Po sedmi minutách doběhl běžec X do cíle. Co se dělo v jednotlivých minutách, snadno vyčteme ze sedmice. Průběh a výsledky závodů budeme kódovat posloupnostmi prvků množiny $\{l,p\}$. Budou to posloupnosti různé délky.

Úloha 6.8. Utvořte strom závodů v běhu. Jaké podmínky musí splňovat posloupnost, aby kódovala nějaký výsledek hry? Kolika způsoby se mohou dva běžci na dráze předhánět?

S naší náhodnou hrou souvisí mnoho zajímavých jevů. Nejvíce hráče zajímají tyto jevy:

A: V závodě zvítězí X.
B: V závodě zvítězí Y.
A_j: V j-té minutě doběhne X do cíle jako první.
B_j: V j-té minutě zvítězí Y.
C_j: Závod bude trvat j minut.

Snadno zjistíme, že $A_3 = B_3 = \emptyset$, $A_4 = llll$, $B_4 = pppp$.

Úloha 6.9. Zakódujete jevy A_j a B_j pro $j = 5$, 6 a 7.

Každý výsledek hry je spojen s určitou cestou. Můžeme mu přiřadit číslo, které je dobou trvání této cesty, což je počet hodů při závodě. Toto přiřazení je funkce definovaná na prostoru výsledků, náhodná veličina. Označme ji T. Bude např. $T(llll) = 4$, $T(pppllllp) = 7$. Obor hodnot funkce T je množina $\{4,5,6,7\}$.

Všimněme si, že $C_j = A_j \cup B_j$. Jevu C_j jsou příznivé právě ty výsledky ω, pro které je $T(\omega) = j$. Pro $j = 4, 5, 6, 7$ tedy zavedeme označení $C_j = \{T = j\}$.

Když jsme do hry zavedli čas, měli bychom se zeptat, jak dlouho bude průměrně trvat jeden závod, kolik hodů připadne průměrně na jeden závod.

Úloha 6.10. Pomocí souboru výsledků házení mincí simulujte mnohonásobné opakování závodu v běhu a určete $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(A_j)$, $\mathsf{P}(B_j)$ a $\mathsf{P}(C_j)$ pro $j = 4, 5, 6, 7$.

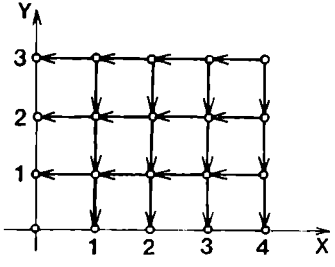
Úloha 6.11. Pomocí výsledku úlohy 6.10 určete rozložení náhodné veličiny T. Vyplňte tabulku

$\{T = j\}$	$\{T = 4\}$	$\{T = 5\}$	$\{T = 6\}$	$\{T = 7\}$
$f_n(\{T = j\})$				

Mějte na paměti, že $\{T = j\} = C_j$. Až vyplníte tabulku, určete průměrnou dobu trvání závodu, tj. $\mathsf{E}T$.

6.5. NÁMOŘNÍ BITVA

Na moři probíhá bitva. Bojují lodě dvou armád X a Y. Armáda X má x lodí, armáda Y jich má y. Armády jsou vlastně hráči. Místo děl budeme v bitvě potřebovat černobílou kostku nebo ruletu. Padne-li černá, ztratí jednu loď armáda Y. Padne-li bílá, přijde o loď armáda X. Barvu vybíráme náhodně pomocí kostky nebo rulety, dokud není jedna armáda poražena, tj. počet jejích lodí se zmenší na nulu. Průběh hry budeme modelovat cestou figurky po síti. Figurku postavme na start v bodě (x, y). Souřadnice x, y jsou celá čísla a znamenají počty lodí armád X, Y. Dejme tomu, že $x = 4$, $y = 3$. Po prvním výstřelu ztratí armáda X nebo armáda Y jeden křižník. Ztrátu znázorníme posunutím figurky do jiného bodu sítě. Ztratila-li loď armáda X, je stav bitvy (x-1, y) a do tohoto posuneme figurku. Patřila-li první potopená loď armádě Y, provede figurka první krok do bodu (x, y-1). Po určitém počtu výstřelů dojde figurka na osu OX nebo OY. Bod sítě,



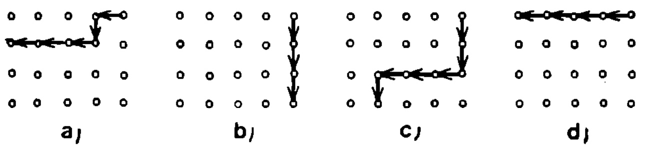
Obr. 6.11.

v němž figurka v daném okamžiku je, znázorňuje stav bitvy. Jeho souřadnice jsou počty lodí obou armád. Na obr. 6.11 vidíte síť, po které se bude figurka pohybovat.

Jak může bitva probíhat? Kolika způsoby může každá armáda zvítězit?

Průběh bitvy můžeme kódovat pomocí cesty, kterou prošla figurka.

Úloha 6.12. Na obr. 6.12 jsou kódy několika bitev mezi armádou X se čtyřmi loděmi a armádou Y se třemi. Popište průběh bitev. Kdo zvítězil?



Obr. 6.12.

Úloha 6.13. Polovina terče v ruletě je bílá a polovina černá. Taková ruleta se chová stejně jako pravidelná mince. Simulujte mnohokrát výběr barvy, vybojujte mnoho bitev a určete pravděpodobnost následujících jevů:

A: V bitvě zvítězí armáda X.
B: V bitvě zvítězí armáda Y.
C: Armáda X odejde z bitevního pole vítězně se třemi loděmi.
D: Armáda Y neztratí v bitvě ani jednu loď.

Každému výsledku hry (bitvy) lze přiřadit počet vypálených střel. Je to počet kroků figurky od zahájení do konce bitvy. Opět dostáváme funkci, která zobrazuje prostor výsledků do množiny čísel. Označme ji jako L. Určete její rozložení a průměrný počet výstřelů v jedné bitvě.

S výsledky hry souvisejí i jiná čísla, např. počet lodí, které zůstaly po bitvě armádě X, počet lodí, které ztratila armáda Y, atd.

Úloha 6.14. Označme U počet lodí, s nimiž opouští armáda X bitevní pole. Určete hodnoty funkce U pro výsledky zakódované cestami na obr. 6.12. Určete obor hodnot funkce U. Popište jev $\{U = 0\}$.

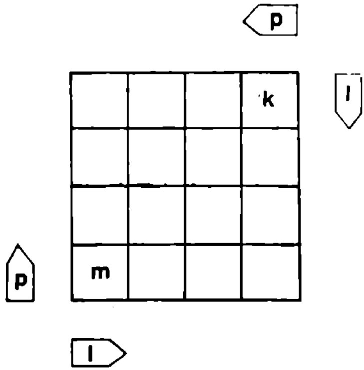
Úloha 6.15. Znázorněte průběh s výsledky hry stromem.

Úloha 6.16. Určete rozložení funkce U. Určete $\mathsf{E}U$, tj. průměrný počet lodí, které zbyly armádě X po bitvě.

Podobné problémy můžeme řešit v případě, kdy má armáda X čtyři lodě a armáda Y pět lodí, obě armády mají po pěti lodích atd.

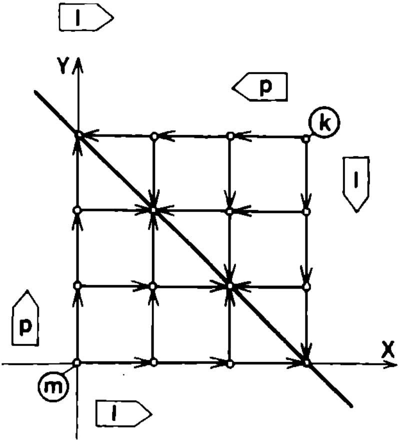
6.6. HRA NA KOČKU A MYŠ

Na obr. 6.13 je šachovnice, po níž bude kočka honit myš. Kočka je figurka hráče *K* a je v poli *k*, myš je figurka hráče *M* a je v poli *m*. Kočka s myší jsou připraveny k honičce po šachovnici, obě s mincí v „ruce". Směry budeme opět číst stejně jako na mapě. Oba hráči hodí mincí a táhnou do sousedního pole podle toho, co jim padlo. Řídí se ukazatelem. Padne-li např. myši panna, táhne na sever, na sousední pole. Po třech hodech dojde myš na úhlopříčku šachovnice. Také kočka dojde po třech hodech na úhlopříčku. Svedla-li ji náhoda do téhož pole, hra tím ze známých důvodů skončila a vyhrál hráč *K*. Dostaly-li se do různých polí úhlopříčky, už se nikdy nesetkají. Myš kočce utekla a zvítězil hráč *M*.



Obr. 6.13.

Abychom hru mohli snáze rozebrat, nahradíme šachovnici sítí. Podobně jsme postupovali už v případě závodu na šachovnici. Síť je na obr. 6.14 umístěna v souřadné soustavě. Bod *m* je v počátku a bod *k* má souřadnice (3,3). Úseky, které figurka projde po jednom hodu,

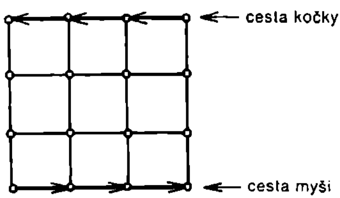


Obr. 6.14.

jsou jednotlivé úsečky. Tento úsek přejde figurka jedním krokem. Po třech hodech mincí udělala myš tři kroky a dostala se do určitého bodu přímky, která má rovnici

$$y = 3 - x .$$

Každý výsledek honičky a zároveň její průběh zakódujeme dvěma trojicemi. Tyto dvě trojice označíme (f, g). Trojice f se skládá z výsledků tří hodů mincí myši. V síti



Obr. 6.15.

jí odpovídá určitá cesta, kterou proběhne myš. Trojice g je výsledek trojího hodu mincí kočky. V síti jí odpovídá cesta, kterou se na úhlopříčku dostane kočka.

Průběh honičky na obr. 6.15 kódují dvě trojice (*lll*, *ppp*).

Úloha 6.17. Určete průběh honičky zakódované (*lpl*, *plp*). Zakreslete ho do sítě. Chytila kočka myš?

Prostor výsledků má $2^3 . 2^3 = 2^6$ prvků. Tolika způsoby může hra probíhat. Všimněme si několika jevů, které s hrou souvisejí.

A: Kočka chytí myš (vyhraje hráč K).

B: Myš kočce uteče (vyhraje hráč M).

A_{ik}: Kočka chytí myš v bodě (i, k).

Má-li bod (i, k) ležet na přímce $y = 3 - x$, neboli $x + y = 3$, musí být $i + k = 3$ (a ovšem $i, k = 0, 1, 2, 3$). Jevu A_{ik} jsou příznivé páry trojic, z nichž každá má právě na k místech člen p. Takových trojic je $\binom{3}{k}$. Myš se tedy do bodu (i, k) přímky $x + y = 3$ může dostat $\binom{3}{k}$ způsoby. Stejným počtem způsobů se tam může dostat kočka. Kočka a myš se mohou setkat v bodě (i, k), tedy $\binom{3}{k}.\binom{3}{k}$ způsoby. Pro jev A_{ik}, kde $k = 0, 1, 2, 3$ a $i = 3 - k$, je příznivých $\binom{3}{k}.\binom{3}{k}$ výsledků.

Úloha 6.18. Ke každému bodu sítě připište, kolika způsoby se do něho může dostat myš (pro body pod úhlopříčkou) nebo kočka (pro body nad úhlopříčkou). V bodech úhlopříčky budou dvojice stejných čísel. Čísla najdeme velmi snadno, tvoří přece Pascalův trojúhelník. Úhlopříčka je společná základna dvou stejných Pascalových trojúhelníků. Srovnejte počty výsledků příznivých pro setkání kočky s myší získané uvedeným způsobem, s čísly získanými předtím.

Mohou nastat celkem čtyři jevy A_{ik}: A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}. Každé dva z těchto jevů jsou disjunktní. Jak byste to odůvodnili? Pro jev A, o kterém jsme už mluvili, platí $A = A_{30} \cup A_{21} \cup A_{12} \cup A_{03}$. Jevy A, B jsou opačné.

Abychom získali jeden výsledek hry, musíme šestkrát hodit mincí.

Úloha 6.19. Pomocí tabulek náhodných čísel simulujte házení mincí a opakujte hru šedesátkrát. Pomocí získaných výsledků určete $\mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(B)$.

Úloha 6.20. Uveďte vlastní příklad náhodné veličiny, která přirozeným způsobem souvisí s naší hrou.