5. kapitola

SIMULACE, ANEBO JAK POMOCÍ JISTÉ KNÍŽKY STŘÍLET KACHNY A PÉCI BOCHÁNKY S ROZINKAMI

5.1. KOSTKY, RULETY A URNY, KTERÉ SE CHOVAJÍ STEJNĚ

Cílem našeho zkoumání bylo zatím vymezení pojmu pravděpodobnost jevu. Je to číslo, které hodnotí šanci, že jev nastane. Abychom je získali, musíme mnohokrát opakovat příslušný náhodný pokus. Často však nelze pokus mnohokrát zopakovat v krátké době. U některých pokusů je mnohonásobné opakování zcela nemožné, u jiných příliš nákladné. Týká se to hlavně pokusů, které mají v praxi větší význam než hody kostkami nebo tahy kuliček. Jsou to např. výzkum šíření epidemie, sledování počtu nehod, pozorování srážek fotonů a elektronů atd.

Ukazuje se však, že určité pokusy lze zastoupit, napodobit, simulovat jinými. Některé pokusy probíhají obdobně.

Příklad 5.1. Hoďme kostkou č. 1. Všechny výsledky hodu jsou stejně možné. Kódovali jsme je počtem teček, které se objevily na horní stěně. Platí

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Roztočme teď ruletu č. 1 a sledujme, na jaké číslo ukáže šipka. Výsledky pokusu zakódujeme číslem, které ruleta vybrala. Z tvaru rulety soudíme, že každý výsledek má stejnou šanci. I zde dostáváme

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Přístrojem č. 1 je možno vybírat kuličky. Sledujme číslo kuličky. Opět je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Každá kulička má stejnou šanci. I v tomto případě je každý výsledek stejně možný, tj. $\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}$.

Kostka č. 1, ruleta č. 1 i přístroj pro tah koulí č. 1 umožňují náhodně vybírat jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kostka, ruleta i přístroj se při vybírání chovají stejně.

Co z toho plyne? Při hře Člověče, nezlob se se hází kostkou, kostkou č. 1. Nemáme-li ji po ruce, můžeme házení kostkou zastoupit, napodobit čili simulovat vybíráním čísla pomocí přístroje č. 1 nebo rulety č. 1.

Všimněte si analogie mezi hodem mincí a zjištěním pohlaví narozeného dítěte.

Úloha 5.1. Pomocí kostky č. 2, rulety č. 2 a přístroje pro tah koulí č. 2 (urny) můžeme náhodně vybírat jednu ze dvou barev. Určete prostor výsledků každého z těchto pokusů. Pro každý pokus určete pravděpodobnost každého výsledku. Jaký závěr odtud plyne?

Úloha 5.2. Mezi ruletami, kostkami a přístroji pro tah koulí najděte ty, které se chovají stejně.

Na základě našich poznatků dostáváme geniální nápad. Některé náhodné pokusy lze nahradit jinými. Určité pokusy lze simulovat jinými pokusy.

5.2. TABULKA NÁHODNÝCH ČÍSEL ANEB KNÍŽKA NAPSANÁ KOSTKOU

Kostka č. 4 se chová stejně jako ruleta č. 4 a přístroj pro tah koulí č. 4. Je to pravidelný dvacetistěn. Hoďme kostkou a sledujme, které číslo se objeví na horní stěně. Kostka č. 4 nám umožňuje vybrat jednu z deseti číslic. Každá má při tomto náhodném výběru stejnou šanci. Je tedy

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$\mathsf{P}(0) = \mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \ldots = \mathsf{P}(9) = \frac{1}{10}.$$

Opakujme hod kostkou mnohokrát a poznamenejme si číslice, které postupně padnou. Dostaneme tak soubor náhodných číslic. Je-li posloupnost číslic, kterou takto dostaneme, dostatečně dlouhá, měla by se v ní každá číslice vyskytovat přibližně stejně často. To nám zaručí dokonalá kostka. Její úlohu může úspěšně plnit dokonalá ruleta č. 4 nebo dokonalý přístroj pro tah koulí č. 4. V praxi však těžko získáme dokonalé pomůcky. Při sestavování „dokonalého“ souboru náhodných číslic nahrazují člověka elektronické počítače. Dlouhé soubory náhodných číslic, uspořádané do řádek a sloupců, zaplňují stovky stran tlustých knih s názvem TABULKY NÁHODNÝCH ČÍSEL. Úryvek z takové knihy je na str. 169.

Opišme odtud část čtvrtého řádku a třetího sloupce:

```
    2
    2
    0
68582 97054 282
    6

    4
    0
```

Tabulky náhodných čísel, jejichž vznik jsme stručně popsali, mají ještě další vlastnosti. Každá z deseti číslic se v nich vyskytuje stejně často. Pravděpodobnost jejího výskytu na libovolném, náhodně vybraném místě, je $\frac{1}{10}$. Každá ze sta dvojic číslic 00, 01, 02, ..., 99 se také vyskytuje stejně často. Pravděpodobnost jejího výskytu na náhodně vybrané dvojici sousedních míst je $\frac{1}{100}$. Pro každou z tisíce trojic číslic 000, 001, 002, ..., 999 je pravděpodobnost $\frac{1}{1000}$ atd.

Budeme-li mluvit o tabulkách náhodných čísel, budeme vždy mít na mysli soubor náhodných číslic se zmíněnými vlastnostmi. Jsou totiž také tabulky náhodných čísel, které mají jiné vlastnosti.

Zbývá už jen otázka, která čtenáře asi znepokojuje: K čemu jsou tabulky a knihy náhodných čísel? Kdo je čte? Nebylo by lépe vydávat detektivky, ty jsou přece zajímavější? O velkém významu tabulek náhodných čísel se hned zmíníme.

Úloha 5.3. Pan X se rozhodl sestavit si sám tabulky náhodných čísel. Stál s tužkou a sešitem u východu z nádraží a ptal se lidí na den a měsíc narození. Nehodí se přece ptát se na rok. Když se někdo narodil např. 11. dubna, napsal si pan X čtyři číslice: 1104. V sešitě pana X vzniká řada náhodných číslic, a to tak dlouhá, na jakou bude mít pan X čas a trpělivost. Bude to tabulka náhodných čísel s vlastnostmi, o kterých jsme mluvili? Proč?

5.8. SIMULACE POMOCÍ TABULEK NÁHODNÝCH ČÍSEL

Mnoho náhodných pokusů, které jsou důležité pro praxi, ale obtížně se provádějí, budeme simulovat čtením číslic z tabulek náhodných čísel. Tabulky náhodných čísel nám umožní rychle získat výsledky různých náhodných pokusů mnohokrát opakovaných.

Uvědomte si, že sedlákova tabulka byl prototyp tabulky náhodných čísel. Sedlákovu tabulku jsme také využili k simulování jiných pokusů tak, že jsme četli písmena z tabulky.

Příklad 5.2. Má-li být hra v příkladu 4.1 (hra lev-panna) spravedlivá, tj. mají-li být šance obou hráčů stejné, musí být mince dokonale pravidelná. Ale taková mince neexistuje! Zahrajme si tedy bez házení mincí. V tabulkách náhodných čísel se každá číslice vyskytuje stejně často. Sudých čísel je právě tolik jako lichých. Pravděpodobnost, že na náhodně určeném místě v tabulkách je sudá číslice, je tatáž jako pro lichou číslici. Vybereme „poslepu" řádek a sloupec v tabulce náhodných čísel. O tom, která číslice bude v jejich průsečíku, rozhodne náhoda. Ta dává každé číslici stejnou šanci. Bude-li tam sudá číslice, řekneme, že padl lev. Bude-li tam číslice lichá, pokládejme ji za pannu.

Takovéto čtení a překlad číslic z tabulky dává výsledky mnohokrát opakovaného hodu mincí. Číst můžeme po sobě následující číslice téhož řádku nebo sloupce. Můžeme číst doprava nebo obráceně, zdola nahoru nebo shora dolů. To je jedno. Slovníček pro překlad je jednoduchý. Spočívá na tom, že

$$\mathsf{P}(\text{na libovolném místě bude sudá číslice}) = \frac{1}{2}, \mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}.$$

$P(\text{na libovolném místě bude lichá číslice}) = \frac{1}{2}, P(p) = \frac{1}{2}.$

SLOVNÍK PRO SIMULOVÁNÍ HODU MINCÍ:

číslice	0, 2, 4, 6, 8	— padl lev
číslice	1, 3, 5, 7, 9	— padla panna

Při simulaci stonásobného hodu mincí přečteme z tabulky náhodných čísel (od libovolného místa počínajíc) sto po sobě následujících číslic a přeložíme je do jazyka lvů a panen pomocí našeho slovníku. Všimli jste si, kolik času jsme ušetřili?

Úloha 5.4. Proveďte simulaci stonásobného hodu mincí. Určete $f_{100}(l)$ a $f_{100}(p)$.

Příklad 5.3. a) Pomocí tabulek náhodných čísel lze simulovat i hod hrací kostkou. Můžeme tedy hrát Člověče, nezlob se bez kostky, ale s tabulkami náhodných čísel. Vyškrtejme z tabulek číslice 0, 7, 8 a 9. Ostatní číslice budeme chápat jako příslušné výsledky hodu kostkou. Opravňuje nás k tomu skutečnost, že po vyškrtání zůstalo v tabulkách jen šest různých číslic. Každá se bude se stejnou pravděpodobností $\left(\frac{1}{6}\right)$ vyskytovat na náhodně vybraném místě.

b) Kdybychom z takto upravených tabulek (vynechali jsme číslice 0, 7, 8, 9) četli číslice a překládali je podle následujícího slovníku

SLOVNÍK PRO SIMULACI HODU S-KOSTKOU:

číslice 1, 2, 3, 4, 5	— padla □
číslice 6	— padla ⊡

simulovali bychom hod s-kostkou.

Úloha 5.5. Proveďte simulaci šedesátinásobného hodu kostkou č. 1. Najděte poměrnou četnost pro všechny výsledky.

Zmínili jsme se o podivuhodné pravidelnosti, která provází mnohonásobné opakování náhodného pokusu za stejných podmínek. Právě simulace nám umožňuje pozorovat tuto vlastnost náhody. Provedení pokusu je leckdy z různých důvodů nemožné, příliš nákladné nebo časově náročné. Pravděpodobnost určitých jevů určíme buď na základě výsledků pokusů, nebo na základě výsledků simulace, která je napodobí. Později se pravděpodobnost jistých jevů naučíme určovat pomocí teorie, tj. vět, vzorců, různých pravidel. Podivuhodné bude srovnání praktických a teoretických výsledků. Výsledky získané oběma cestami budou stejné.

Příklad 5.4. Rodiče, kteří si naplánovali tři děti, se zajímají o pravděpodobnost různých náhodných jevů souvisejících s pohlavím narozených dětí. Pomůžeme jim při předpovídání. Došli jsme k závěru (trochu jsme zjednodušili skutečnost), že $\mathsf{P}(♀) = \mathsf{P}(♂) = \frac{1}{2}$. Sudou číslici v tabulkách náhodných čísel překládáme jako ♀, lichou číslici jako ♂. Abychom zjednodušili zápisy, budeme ♀ označovat jako 0 a ♂ jako 1. Otevřeme tabulky náhodných čísel na libovolné stránce. Dejme tomu, že to je stránka otištěná na konci naší knížky. Od libovolného místa (můžeme je náhodně vybrat) budeme číst po sobě následující trojice číslic. Po překladu to budou trojice dětí uvažovaných rodičů. Budeme např. číst trojice čísel ve čtvrtém a následujících řádcích. Jsou to (nahoře jsou číslice, pod nimi překlad)

685	829	705	428	251	637	875	728	518	854	350	061	634
001	001	101	000	011	011	011	100	110	010	110	001	010
351	867	679	796	064	611	298	196	801	008	766	391	708
111	001	011	110	000	011	010	110	001	000	100	111	100
532	442	373	007	749	582	902	097	437	529	228	073	959
110	000	111	001	101	100	100	011	011	101	000	011	111
178	506	286	101	751	652	409	159	469	667	843	580	092
110	100	000	101	111	010	001	111	001	001	001	100	010
068	198	823	509	790	123	770	152					
000	110	001	101	110	101	110	110					

Simulací jsme tak rychle získali 60 opakování, a tedy 60 výsledků pokusu.

Uvažujme různé jevy související s naším náhodným pokusem:

A: Nejstarší dítě bude chlapec,
B: Nejmladší dítě bude děvče,
C_0^3: V trojici budou samá děvčata,
C_1^3: V trojici bude jediný chlapec,
C_2^3: V trojici budou právě dva chlapci,
C_3^3: V trojici budou tři chlapci.

Podivné označení posledních čtyř jevů se hned vyjasní. Určeme poměrné četnosti uvedených jevů. Pro jev A jsou příznivé trojice, v nichž první číslice je 1. Takovýchto trojic máme celkem 29. Je tedy $f_{60}(A) = \frac{29}{60}$, a můžeme říci, že $\mathsf{P}(A) \doteq \frac{29}{60}$, čili přibližně $\frac{1}{2}$. Souhlasí to s naší domněnkou?

Pro jev C_0^3 jsou příznivé trojice, v nichž není číslice 1.

Takových výsledků máme 7. Je tedy $f_{60}(C_0^3) = \frac{7}{60}$, takže $\mathsf{P}(C_0^3) \doteq \frac{7}{60}$.

Poměrnou četnost a přibližnou hodnotu pravděpodobnosti ostatních jevů snadno najdete sami. Brzy už budeme tyto přibližné hodnoty moci srovnat s přesnými hodnotami stanovenými na základě teorie.

Úloha 5.6. Pro jistý náhodný pokus je prostor výsledků množina $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Popište, jak byste pokus simulovali, je-li

a) $\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(\omega_2) = \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{8}$,

b) $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$,

c) $\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{7}$, $\mathsf{P}(\omega_2) = \frac{2}{7}$, $\mathsf{P}(\omega_3) = \frac{4}{7}$.

Úloha 5.7. Simulujte pomocí tabulek náhodných čísel šedesát hodů hrací kostkou a přibližně určete

P(padne sudý počet teček) $\doteq$

P(počet teček nebude větší než 4) $\doteq$

P(počet teček bude dělitelný třemi) $\doteq$

P(počet teček bude nejvýše 6) $\doteq$

P(padne 6 teček) $\doteq$

5.4. JAK SE VYBÍRAJÍ NÁHODNÉ VZORKY

Když se má z nějaké skupiny lidí vybrat jeden nebo několik členů, většinou se losuje. Na stejné lístky se napíší jména členů skupiny, lístky se sbalí podobně jako v loterii a nasypou se do čepice. Po důkladném promíchání se se zavřenýma očima vytáhne jeden nebo několik lístků. Tento obřad je přece simulace náhodného výběru prvku (nebo prvků) z množiny, která hraje úlohu urny.

Je-li však prvků (osob) několik tisíc, způsob losování, který jsme popsali, není už vhodný pro praktické použití.

Sériově vyráběné zboží vždy podléhá kontrole. Dejme tomu, že bylo vyrobeno n výrobků. Číslo n jsou často tisíce nebo desetitisíce. Výrobky dělíme na dobré (0) a špatné (1). Ohodnotit jakost výrobků znamená odpovědět na otázku, jaký je poměr počtu m vadných výrobků k počtu n všech výrobků.

Tento poměr je poměrná četnost vadných výrobků, podrobněji, je to

$$f_n \text{ (náhodně vybraný výrobek je vadný).}$$

Poměrná četnost je přibližnou hodnotou pravděpodobnosti, že náhodně vybraný výrobek (např. později zakoupený v obchodě) bude vadný, špatný, prostě zmetek.

Jak se bude kontrola provádět? Kdyby se zkoumal každý výrobek, zabralo by to příliš mnoho času a zaměstnalo příliš mnoho lidí. Taková kontrola jakosti by byla nehospodárná. Kdybychom takto chtěli zkontrolovat 10 000 masových konzerv, museli bychom každou otevřít. Tak bychom je všechny zničili, k prodeji by se už nehodily.

Vyberme si ze všech výrobků (tzv. *populace*) zcela náhodným způsobem určitých r kusů. Těchto r náhodně vybraných výrobků je *náhodný vzorek z populace.* Výrobky ze vzorku zkontrolujme. Z počtu vadných kusů ve vzorku budeme usuzovat na počet m vadných kusů v celé populaci. Jak budeme usuzovat, si povíme později. Teď stojíme před jiným, neméně zajímavým problémem:

jak náhodně vybírat r kusů do vzorku? Jak to udělat, aby o tom, dostane-li se daný výrobek do vzorku nebo ne, rozhodovala náhoda a aby každý výrobek měl stejnou šanci? Tento problém není tak jednoduchý, jak se zdá. Ukážeme si jednu z mnoha metod výběru prvku do vzorku z populace o konečném počtu prvků.

Příklad 5.5. Populace bude 10 000 konzerv. Jejich jakost máme ohodnotit tak, že vyzkoušíme 100 náhodně vybraných konzerv. Náhodný vzorek vybereme pomocí tabulek náhodných čísel. Očíslujeme konzervy 0000 až 9999. Každá tak dostala čtyřmístné číslo. Je jedno, v jakém pořadí jsme konzervy číslovali. Otevřme tabulky náhodných čísel na libovolné stránce. Dejme tomu, že to je stránka otištěná na konci naší knížky. Vyberme si libovolný řádek, třeba šestý. Vypišme si od tohoto řádku počínaje všechny čtveřice číslic, které po sobě následují ve čtyřech libovolných, ale pevně určených sloupcích, např. ve sloupcích 7, 8, 9 a 10. Dostaneme soubor čtveřic 2922, 0681, 0110, 4591, ... Jsou to čísla konzerv, které vezmeme do vzorku. Chceme-li vybrat vzorek náhodným výběrem bez vracení, vyloučíme čtveřice, které se při čtení vyskytly podruhé. Pokračujeme tak dlouho, dokud nezískáme 100 čtveřic (jestli různých nebo ne, záleží na typu výběru).

Číslo sloupce a číslo řádku, odkud začneme číst, můžeme vybrat náhodně, třeba také pomocí tabulek.

Úloha 5.8. Je třeba zkontrolovat, zda studentům prvních ročníků bylo sociální zabezpečení (stipendia, poukázky do menzy, dekrety na lůžka v koleji) přiznáno podle příslušných předpisů. Podle pokynu nadřízených orgánů stačí zevrubně prozkoumat materiály 30 % studentů. Aby výsledky kontroly ukazovaly skutečný stav, je nutno třicetiprocentní vzorek vybrat nezaujatě. V prvním ročníku studuje 100 studentů. Bylo rozhodnuto, že budou zkontrolovány materiály prvních třiceti studentů podle abecedy. Tento vzorek nebyl vybrán náhodně. Proč?

Úloha 5.9. V továrně vyrobili 2000 televizorů. Mají se zkontrolovat tak, že se podrobně přezkoumá 50 televizorů. Vzorek se má vybrat náhodně s vracením. Popište, jak byste to provedli pomocí tabulek náhodných čísel.

5.5. JAK ODHADNOUT PRAVDĚPODOBNOST JEVU POMOCÍ SIMULACE

Příklad 5.6. V příkladu 2.5 stály na zastávce dvě paní X a Y. Přijela tramvajová souprava se třemi vozy. Paní nastoupily do náhodně zvolených vozů. Sledovali jsme, do kterého vozu každá paní nastoupila. Výsledky našeho pozorování jsme kódovali dvojicemi číslic. První číslice ve dvojici znamená číslo vozu, který si vybrala paní X, a druhá číslo vozu, kam nastoupila paní Y. O tom, který vůz si každá paní vybrala, rozhodla náhoda. Každému vozu dejme stejnou šanci. Každý výsledek našeho pozorování tak pokládáme za stejně možný, za stejně pravděpodobný. Uvažujme několik jevů souvisejících s naším náhodným pokusem:

A: Obě paní nastoupily do téhož vozu.
B: Každá paní nastoupila do jiného vozu.
C: Obě paní nastoupily do druhého vozu.

Výběr vozu můžeme simulovat jistým přístrojem pro tah koulí nebo jistou zvláštní kostkou. Kterým přístrojem, kterou kostkou a jak, na to si jistě odpovíte sami.

My budeme simulaci provádět pomocí tabulek náhodných čísel. Vynechme z nich číslice 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Zbylé číslice čteme po dvojicích. Každá dvojice bude jeden výsledek. Budeme-li číst od začátku naší tabulky na str. 169, dostaneme následující dvojice:

22 23 31 31 33 31 32 13 32 11 33 13 32 13 31 32 21 12
23 22 33 21 13 22 21 32 13 13 31 11 21 13 13 22 33 22
32 22 31 21 11 21 32 12 31 23 12 13 11 31 22 11 11 33
13 22 11 32 33 12 21 21 32 22 22 33 21 13 33 33 13 23
22 12 21 22 33 12 33 21 22 12 22 23 33 32 13 21 33 12
32 23 22 11 33 13 13 33 32 12.

Spočítejme výsledky příznivé pro jevy A, B a C. Pro jev A jsou příznivé dvojice, v nichž jsou obě číslice stejné. V našem souboru je jich 38. Je tedy

$$f_{100}(A) = \frac{38}{100} = 0{,}38 \text{ a } \mathsf{P}(A) \doteq 0{,}38.$$

Pro jev B jsou příznivé dvojice různých čísel. Máme jich 62, takže

$$f_{100}(B) = \frac{62}{100} = 0{,}62 \text{ a } \mathsf{P}(B) \doteq 0{,}62.$$

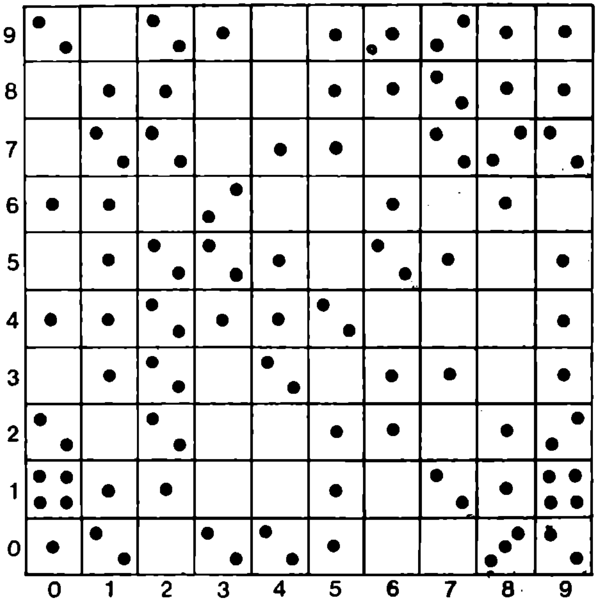
Pro jev C je příznivá jen dvojice 22. V našem souboru je jich 15. Je tedy

$$f_{100}(C) = \frac{15}{100} = 0{,}15 \text{ a } \mathsf{P}(C) \doteq 0{,}15.$$

Přibližné hodnoty pravděpodobností, které jsme dostali, později srovnáme s teoretickými hodnotami, které získáme pomocí teorie pravděpodobnosti. Uvidíme, že se budou lišit velmi málo.

Příklad 5.7. (Simulace pečení bochánků s rozinkami.) Do kynutého těsta jsme nasypali 100 rozinek. Po důkladném promíchání jsme z něho napekli 100 bochánků. Rozinky se do bochánků dostaly náhodně. Náhoda rozhodla o tom, kolik rozinek se dostalo do bochánku. Bude jistě zajímavé odhadnout hodnoty

P(bochánek bude bez rozinek),
P(v bochánku bude právě jedna rozinka),
P(v bochánku budou právě dvě rozinky),
P(v bochánku budou aspoň tři rozinky).



Obr. 5.1.

Pečení bochánků můžeme simulovat. Náhodné rozmístění rozinek v bocháncích nám nejlépe dají tabulky náhodných čísel. Zakódujeme každý ze sta bochánků dvojicí číslic. Bochánek se tak stane bodem čtvercové sítě z obr. 5.1. Přečteme též z tabulek náhodných čísel 100 po sobě následujících dvojic číslic. Číst začneme např. od šestého řádku. První dvojice, na kterou narazíme, bude 97. Je to bochánek, do kterého se náhodně dostala první ze sta rozinek. Udělejme do čtverečku 97 tečku. Další bochánky, do nichž se náhodně dostanou další rozinky, budou 43, 75, 29, 22, 80, 73, 95, 91, 78, 50 atd. Do příslušných čtverečků si také namalujeme tečky — rozinky.

Ve 33 bocháncích — čtverečcích — rozinky nebudou. V 39 bocháncích bude právě 1 rozinka. Do 25 bochánků se dostanou právě 2 rozinky, ve třech bocháncích budou aspoň 3 rozinky.

Kdyby se nám chtělo ještě několikrát pečení zopakovat (číst náhodná čísla byste samozřejmě začali odjinud), divili byste se, jak by se rozinky pokaždé rozmístily obdobně, pokud jde o počet bochánků s jednou, dvěma, alespoň třemi nebo žádnou rozinkou. Na tom se projevují podivuhodné vlastnosti náhody. Naše simulace a pokus dávají přibližné hodnoty

$$\mathsf{P}(\text{bochánek bude bez rozinek}) \doteq \frac{33}{100} = 0{,}33\,,$$

$$\mathsf{P}(\text{v bochánku bude jediná rozinka}) \doteq \frac{39}{100} = 0{,}39\,,$$

atd.

Úloha 5.10. Do přístavu připluje během 100 dní 100 lodí. Příjezdy lodí jsou zcela náhodné. Sledujeme počet dní, kdy nepřijede žádná loď, připluje právě 1, právě 2, alespoň 3. Toto pozorování připomíná náš výzkum, kolik rozinek se dostane do jednotlivých bochánků. Bochánky odpovídají dnům, rozinky lodím — analogie je zřejmá.

Pro přístavní zaměstnance je důležité znát šanci, pravděpodobnost, že daný den nepřipluje žádná loď, připluje právě jedna, právě dvě atd. Souvisí totiž s požadavky na pracovní síly při vykládce a nakládce lodí. Simulováním zmíněného náhodného připlouvání lodí odhadněte hodnotu pravděpodobností

P(daný den nepřipluje do přístavu žádná loď),
P(daný den připluje právě jedna loď),
P(daný den připlují právě dvě lodě),
P(daný den připlují aspoň tři lodě).

Příklad 5.8. (Lov kachen.) Pět lovců se vydalo na lov. Jsou to výborní lovci, nikdy nechybí cíl. Najednou se objevilo hejno šesti kachen. Každý lovec si rychle jednu vybere, zamíří a střelí. O tom, kdo si kterou kachnu vybral, rozhoduje náhoda. Okamžik, během něhož si lovci vybírají, je natolik krátký, že se nemohou rozmyslet (a vybrat si tu největší), ani se mezi sebou dohodnout, kdo si kterou vybere. Každá kachna má tedy tutéž šanci, že bude ulovena kterýmkoliv lovcem. Tento lov je další případ náhodného pokusu. Sledujeme, který lovec si vybral kterou kachnu. Jaký bude výsledek? Mohlo se stát, že si všichni vybrali tutéž. Nebo mohl každý ulovit jinou. Očíslujeme lovce i kachny. Každému lovci přiřaďme kachnu, kterou ulovil. Dostaneme tak funkci — pětici. O jejích členech rozhoduje náhoda, členy pětice jsou kachny (jejich pořadová čísla), které si příslušní lovci vybrali. Každá kachna má tutéž šanci. Celkem jich je 6, na každou tedy připadá šance $\frac{1}{6}$.

Prostor výsledků bude množina všech pětic se členy z množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6} (z množiny čísel kachen). Pětice 23522 se rozšifruje takto:

lovec č. 1 střelil kachnu č. 2,
lovec č. 2 si vybral kachnu č. 3
atd.

Náhodný výběr kachen připomíná hod kostkou. Kdybychom hodili kostkou pětkrát a zaznamenali si čísla, která padla, dostali bychom jeden výsledek lovu. Přišli jsme na to, jak lovit bez střílení, jak lovit kostkou a ne puškou. Teď můžeme jít na lov s tabulkami náhodných čísel v ruce. Vysvětlete, jak byste to provedli. Uvedeme ještě několik jevů souvisejících s lovem kachen:

A: Každý zasáhne jinou kachnu.
B: Všichni střelí kachnu č. 3.
C: Lov přežijí právě dvě kachny.
D: Zahyne právě jedna kachna (všichni střelili tutéž).
E: Lov přežije kachna č. 1.

Úloha 5.11. Hodnoty pravděpodobností těchto jevů jsou zajímavé pro lovce i pro kachny. Odhadněte je tak, že budete lov padesátkrát simulovat pomocí tabulky náhodných čísel ze str. 169.

Úloha 5.12. Ředitel napsal 6 různých dopisů různým adresátům. Sekretářka je vložila do obálek a z roztržitosti je zalepila. Na zalepené obálky náhodně napsala adresy. Kam dopisy šly, o tom rozhodla náhoda. Simulujte náhodný pokus, o kterém jsme se právě zmínili. Pomocí 50 výsledků simulace určete pravděpodobnosti

P(žádný dopis nedojde na správnou adresu),
P(na všech obálkách bude správná adresa),
P(právě jeden dopis dojde na správnou adresu).

Úloha 5.13. Kvočna sedí na čtyřech vejcích. Dejme tomu, že je stejně pravděpodobné, že se z každého vejce může vylíhnout jak slepička, tak kohoutek. Simulujte sezení na vejcích pomocí tabulky náhodných čísel a odhadněte

P(vylíhnou se samé slepičky),
P(vylíhnou se samí kohoutci),
P(vylíhne se stejně slepiček jako kohoutků).

Označme B_k^4 náhodný jev, že se ze čtyř vajec vylíhne právě k kohoutků. Pro které k bude $\mathsf{P}(B_k^4)$ největší?