# O náhodě a pravděpodobnosti

## 2. kapitola. Stromy neboli grafické znázornění průběhů a výsledků náhodného pokusu

2. kapitola

# STROMY NEBOLI GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ PRŮBĚHŮ A VÝSLEDKŮ NÁHODNÉHO POKUSU

## 2.1. JAK KÓDOVAT VÝSLEDKY NĚKOLIKAETAPOVÉHO POKUSU

Teorii pravděpodobnosti si spojujeme s vytahováním koulí a házením kostek. Ale tentokrát budeme vytahovat kostky!

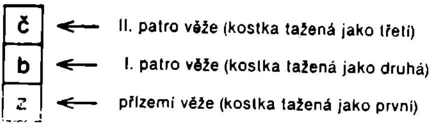
**Příklad 2.1.** V krabičce $U$ jsou tři stejně velké hrací kostky: červená $\boxed{č}$, zelená $\boxed{z}$ a bílá $\boxed{b}$. Vytahujme po jedné kostce tak dlouho, až bude krabička prázdná. Z postupně vytažených kostek stavme přízemí, I. a II. patro věže jako ze stavebnice. Bude nás zajímat jen barva vytažených kostek, teček na jejich stěnách si všímat nebudeme.

Kostky můžeme vytahovat jednu po druhé, jak se nám budou líbit. Takový výběr však nebude náhodný, o tom, která kostka bude dalším patrem věže, nebude rozhodovat náhoda, ale náš zrak a vkus. Přenechme proto výběr kostek náhodě. Zamíchejme pečlivě obsah krabičky a se zavřenýma očima vytahujme po jedné kostce. To je trojí tah jedné kostky bez vracení. Náhodný pokus probíhá ve třech etapách.

Věž, která během náhodného pokusu vzniká, umožňuje přesnou rekonstrukci jeho průběhu. Věž je zakódovaná historie vyprázdnění krabičky $U$ náhodným výběrem. Věží jsme zakódovali průběh i konečný výsledek náhodného pokusu. Víme-li, jak věž vznikala, a vidíme-li ji, můžeme snadno říci, jak náhodný pokus probíhal.

Kolik různých věží může vzniknout? Kolik je všech možných výsledků našeho náhodného pokusu? Co je prostor výsledků?

Krabička $U$ je pro matematika množina $\{\boxed{\text{č}}, \boxed{\text{b}}, \boxed{\text{z}}\}$. V množině nehraje pořadí prvků žádnou roli. Konečnou množinu lze uspořádat, tj. stanovit, který z jejích prvků budeme považovat za první, který za druhý atd., a který



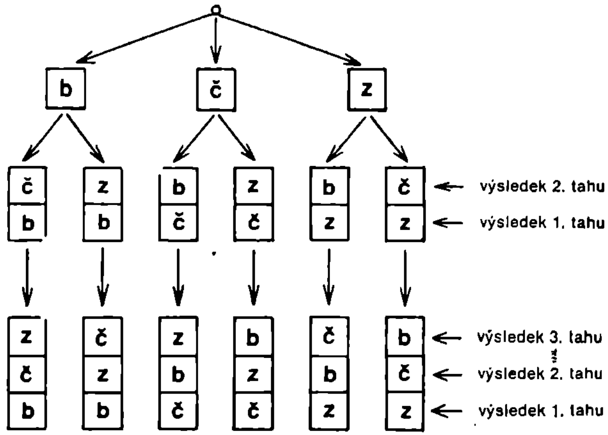

Obr. 2.1.

nakonec za poslední. Když jsme stavěli věž, stanovili jsme určité pořadí kostek. Kostka z přízemí je první, kostka z I. patra je druhá, kostka z II. patra je třetí. Věž je tříčlenná posloupnost, jejímiž členy jsou barevné kostky. Členy této posloupnosti jsou navzájem různé. Věž je posloupnost tří různých kostek (obr. 2.1).

Posloupnost, kterou věž představuje, je permutace množiny $U$. Výsledek i průběh náhodného výběru tedy kódujeme permutacemi množiny $U$. Všech výsledků (věží) je tolik, kolik je permutací tříprvkové množiny $U$.

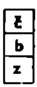
Průběh náhodného výběru, tj. postupné etapy stavby věže, se dají přehledně znázornit pomocí jednoduchého grafu (obr. 2.2).

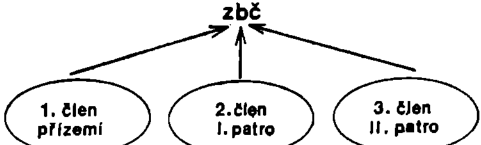
Kostky můžeme jednoduše označit počátečními písmeny názvů jejich barev. Věž je posloupnost, zapíšeme



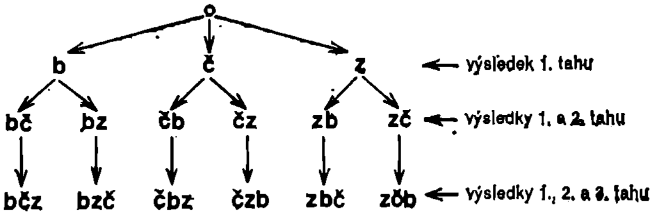

Obr. 2.2. Jak může postupně vyrůstat věž neboli jak může probíhat náhodné vyprazdňování krabičky *U*

ji tedy tak, jak se v matematice posloupnosti obvykle zapisují, tj. jeden člen za druhým, a ne, jak tomu bylo u věže, jeden nad druhým.

Věž  zapíšeme teď stručně, jako posloupnost



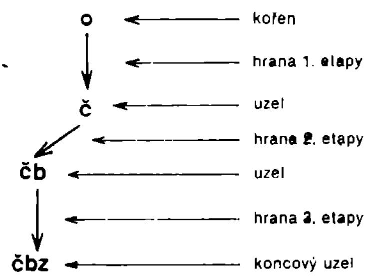

Graf z obr. 2.2 se tak zjednoduší. Je na obr. 2.3.




Obr. 2.3.

## 2.2. STROMY

Grafy z obr. 2.2 a 2.3 se nazývají *stromy*.*) Stromem jsme znázornili průběh a výsledky určitého náhodného pokusu. Právě tyto stromy pro nás budou v dalším výkladu obzvlášť důležité. Domluvme se na terminologii. Bod *o*, od něhož začínáme strom kreslit, nazveme *kořen*. Výsledky dalších etap jsou *uzly*. Orientované úsečky spojující dva za sebou následující uzly jsou *hrany*. Posledním uzlům budeme říkat *koncové uzly*. Posloupnost




Obr. 2.4.

*) *Pozn. recenzenta:* Termín strom se v teorii grafů užívá v širším smyslu než v této knize. Zde by bylo přesnější užívat názvu kořenový strom nebo strom logických možností.

hran spojující kořen s koncovým uzlem je *větev*. Budeme také říkat, že koncový uzel, který zakončuje danou větev, na ní *visí* (jako ovoce na stromě). Na obr. 2.4 je část stromu z obr. 2.3, a to jedna větev, na níž visí koncový uzel *čbz*.

Co je koncový uzel? To je přece konečný výsledek (jistým způsobem zakódovaný) trojího náhodného výběru kostky z krabičky $U$ bez vracení. Tento výsledek visí (jako plod) na větvi našeho stromu. Na větvích stromu z obr. 2.2 visí všechny možné výsledky vyprazdňování krabičky $U$ náhodným výběrem zakódované pomocí věží. Na tomto stromě visí všechny možné věže, všechny možné permutace množiny $U$. Kolik jich je? Spočtěme to pomocí stromu.

Přízemí věže mohlo vzniknout třemi způsoby. Z kořene vycházejí tři hrany. To je 1. etapa. Kostka se do krabičky nevrátila, vždyť se stala přízemím věže. 2. etapa, 2. tah se provádí ze dvou kostek, které zbyly v $U$. Na každé už postavené přízemí je možno I. patro přistavět pouze dvěma způsoby. Z konce každé hrany 1. etapy vycházejí dvě hrany 2. etapy. V krabičce $U$ už zbyla jen jedna kostka. Na každé už postavené přízemí s I. patrem je možno dostavět II. patro jen jedním způsobem. Všech možností je tedy 3.2.1, tedy 3!. Všimněme si, že je to počet všech větví stromu.

Pomocí stromu jsme dostali vzorec pro počet všech permutací tříprvkové množiny, který známe z kombinatoriky. Kdyby krabička obsahovala $n$ kostek různých barev, byl by počet různých $n$-podlažních věží (počet permutací množiny, též počet všech možných výsledků vyprazdňování krabičky náhodným výběrem) roven $n$!.

Na stromě jsme snadno zjistili počet všech výsledků určitého náhodného pokusu. Je jich tolik, kolik je na stromě koncových uzlů, tedy i kolik má strom větví.

Ze stromu také snadno získáme prostor výsledků. Stačí jen „otrhat“ jeho koncové uzly—výsledky. Množina vytvořená těmito „otrhanými“ výsledky je prostor výsledků $\Omega$. Když otrháme výsledky ze stromu na obr. 2.3, dostaneme

$$\Omega = \{bčz, bzč, čbz, čzb, zbč, zčb\}.$$

**Příklad 2.2.** V krabičce $U$ je $n$ různých předmětů. Dále máme $n$ očíslovaných zásuvek $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Vybereme náhodně jeden předmět (jeden prvek množiny $U$) a dáme ho do zásuvky $z_1$. Ze zbylých $n$-1 prvků opět jeden náhodně vybereme. Ten dáme do $z_2$. Tak pokračujeme dál, až bude krabička $U$ prázdná. Do každé zásuvky dáme právě jeden předmět. V každých dvou různých zásuvkách budou různé předměty. Tak se $n$ předmětů z krabičky $U$ ($n$ prvků množiny $U$) rozmístí do $n$ zásuvek. Každé takové rozmístění je také permutace množiny $U$. Výsledky (a průběh) náhodného rozmisťování budeme kódovat permutacemi množiny $U$. Každá taková permutace zachycuje průběh a výsledek rozmisťování. Prostor výsledků tohoto rozmisťování má tedy $n!$ prvků.

**Úloha 2.1.** Nakreslete strom náhodného rozmisťování pro $n = 4$.

**Úloha 2.2.** V krabičce jsou čtyři korálky: červený — *č*, zelený — *z*, bílý — *b* a modrý — *m*. Vybírejme náhodně po jednom korálku bez vracení, až bude krabička prázdná. Korálky navlékejme na nit tak, jak je postupně vybíráme. Dílem náhody (náhoda totiž rozhoduje o pořadí korálků) vznikne šňůrka korálků. Šňůrka je podobně jako věž zakódovaný výsledek náhodného výběru. Podíváme-li se na šňůrku, snadno zrekapituluje-

me průběh výběru. Kolik je možných výsledků vyprazdňování krabičky?
Pozor: Šňůrky *bčzm* a *mzčb* jsou různé!

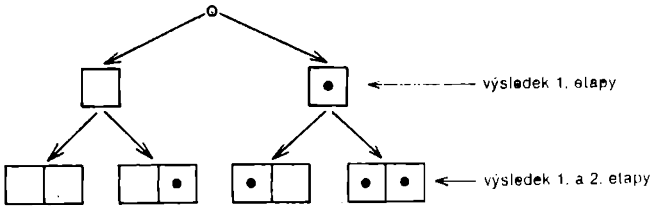
**Úloha 2.3.** V krabičce $U$ jsou čtyři kostky: bílá $b$, zelená $z$, červená $č$ a modrá $m$. Třikrát náhodně vybíráme po jedné bez vracení a z vybraných kostek postupně stavíme věž. Kolik je teď možných výsledků tohoto náhodného výběru? Nakreslete strom. Jak se v kombinatorice nazývají posloupnosti, které kódují výsledky?

**Úloha 2.4.** V krabičce je 5 předmětů, ale zásuvky jsou jen 3. Z krabičky postupně vybereme bez vracení 3 předměty a dáme je do zásuvek stejně jako v příkladě 2.2. Kolik je možností pro výsledek takového náhodného rozmístění? Jak jste zakódovali výsledky?

Teď budeme náhodně vybírat kostky z krabičky, ale s vracením. Po vytažení kostky si poznamenáme, která to byla (nakreslíme si ji), a pak ji před dalším tahem vrátíme do krabičky. Teď se nám těžko budou stavět věže z vytažených kostek. Tak si ty věže nakreslíme.

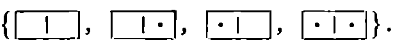
**Příklad 2.3.** V krabičce $U$ jsou opět čtyři kostky: $b$, $č$, $z$, $m$. Táhněme třikrát s vracením. Věž, kterou dostaneme, si nakreslíme. Teď může vzniknout např. věž *ččč*. Posloupnosti (věže), jimiž kódujeme průběh a výsledky náhodného vybírání, nemusí mít různé členy. Jak se v kombinatorice nazývají posloupnosti tohoto typu? Kolik jich je? A jak vypadá strom? V každé etapě je stejný počet možností. Z každého uzlu (jakož i z kořene) vycházejí v každé etapě 4 hrany. Máme tři etapy, tedy celkem 4.4.4 neboli $4^3$ hrany. Tolik výsledků obsahuje $\Omega$. Určete prostor výsledků (předem si nakreslete strom).

**Příklad 2.4.** Dvakrát hodíme s-kostkou*) a všímáme si, která stěna bude nahoře. To je dvouetapový náhodný pokus. Strom na obr. 2.5 znázorňuje jeho průběh.




Obr. 2.5. Strom dvojího hodu s-kostkou

Výsledky pokusu kódujeme pomocí domina. Prostor výsledků je množina



Domluvíme se, že výsledky hodu s-kostkou i obyčejnou kostkou budeme nadále označovat počtem teček, které budou po hodu na horní stěně. Podle této úmluvy budeme výsledky dvojího hodu kódovat dvojicemi čísel. Při tomto způsobu kódování bude naposledy uvedený prostor výsledků množina {00, 01, 10, 11}.

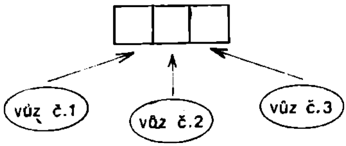
**Úloha 2.5.** Třikrát hodíme mincí. Znázorněte pokus stromem a sestavte prostor výsledků.

**Příklad 2.5.** Na zastávce tramvaje čekají dvě paní, které se neznají. Neznáme je ani my, a tak si je pojmenujeme paní $X$ a paní $Y$. Přijela souprava sestavená ze tří vozů. Očíslujeme je 1, 2, 3. Paní nastoupily a vybraly si vůz

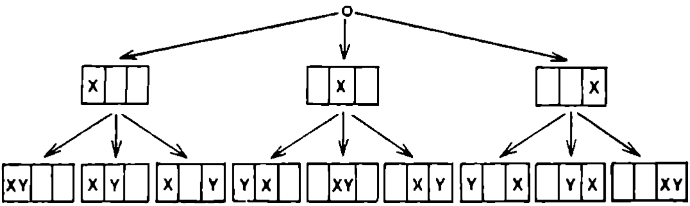
*) s-kostka byla popsána na str. 11

náhodně. Kdyby se znaly, nesjpíše by nastoupily do stejného vozu. Pozorujeme, do kterého vozu která paní nastoupí; je to náhodný pokus. Jaké jsou možnosti? Kolik jich je? Jak je zakódujeme?

Na tyto otázky nám pomůže najít odpověď strom. Rozdělme si pozorování na dvě etapy. V první etapě zjistíme, který z vozů si vybere paní $X$. Ve druhé etapě zjistíme, do kterého vozu nastoupí paní $Y$. Na obr. 2.6 je strom, který průběh nastupování velmi názorně popisuje. Nakreslíme si soupravu:



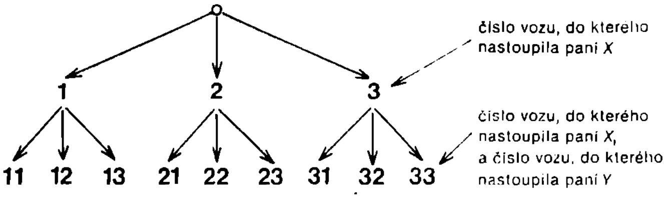

Dvě etapy jsou postupné „obsazování" soupravy paní $X$ a paní $Y$.




Obr. 2.6. Jak paní $X$ a $Y$ mohly obsadit tramvaj

Kódování výsledků nástupu můžeme značně zjednodušit. Každé paní přiřaďme číslo vozu, do kterého nastoupila. Napřed paní $X$, pak paní $Y$. Dvojice 32 tedy znamená, že paní $X$ nastoupila do třetího vozu a paní $Y$

si vybrala druhý vůz. Tato dvojice je výsledek $\boxed{\ \mid Y \mid X}$. Výsledek $\boxed{\mid XY \mid\ }$ bude odpovídat dvojici 22. Při tomto způsobu kódování se strom velice zjednoduší; je na obr. 2.7.

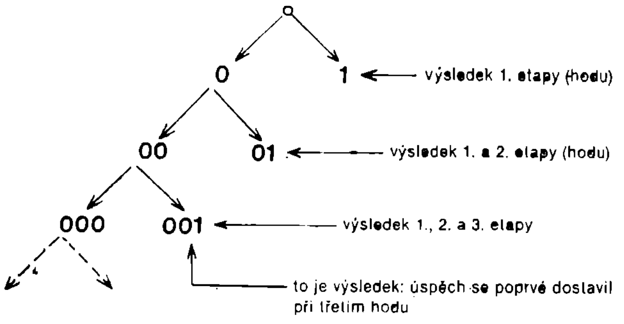



Obr. 2.7.

Při tomto jednoduchém způsobu kódování je prostor výsledků $\Omega$ množina dvojic. Je to kartézský součin $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

Setkali jsme se zde (a nebylo to poprvé) s jistým náhodným rozmístěním prvků (paní) do zásuvek (vozů). V praxi se často vyskytují jevy, které se určují a interpretují jako rozmanitá rozmísťování jistých prvků do jistých přihrádek, které si představujeme jako zásuvky.

**Příklad 2.6.** (Čekání na první úspěch.) V některých hrách, kterých se účastní náhoda (jsou to tzv. náhodné hry), nesmí hráč postavit svou figurku na start, dokud mu nepadne šestka. Opakuje hod kostkou tak dlouho, až mu poprvé padne šestka. Pro hráče, který hází a čeká na právo postavit svou figurku na start, je házení kostkou vlastně totéž jako házení s-kostkou. Hledisko, podle kterého rozlišuje stěny, je, zda jde o tu výjimečnou mezi šesti nebo ne. Výjimečná stěna je stěna s tečkou na s-kostce. Ostatních pět jsou ty prázdné. Padne-li hráči výjimečná stěna, je to pro něj úspěch. Nabízí se, abychom tohle házení nazvali čekáním na první úspěch. Na obr. 2.8 je tento náhodný pokus znázorněn stromem. Úspěch je označen číslem 1, neúspěch číslem 0.



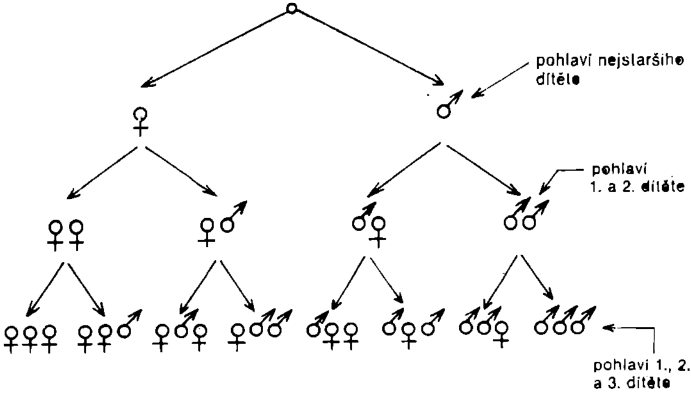

Obr. 2.8. Čekání na první úspěch

Zakódované výsledky čekání na první úspěch visí na větvích stromu. Větví je nekonečně mnoho. Prostor výsledků je zde nekonečná množina.

**Příklad 2.7.** Manželé si naplánovali tři děti. Zjišťování pohlaví postupně se rodících dětí je náhodný pokus. Předpokládejme, že naše rodina plán provede (podobně jako jsme předpokládali, že střelec zasáhne terč). Jak může provedení plánu proběhnout? Nakresleme si strom (obr. 2.9).

Prostor výsledků {♀♀♀, ♀♀♂, ♀♂♀, ♀♂♂, ♂♀♀, ♂♀♂, ♂♂♀, ♂♂♂} je množina.

Průběh plánu má osm možností.




Obr. 2.9. Chlapci a děvčata mezi třemi potomky

**Úloha 2.6.** V urně (krabici) jsou tři nerozlišitelné bílé koule *b*, 2 červené *č* a 1 zelená *z*. Sestavte strom i prostor výsledků pro trojí tah jedné koule z krabice

a) bez vracení,

b) s vracením.

**Úloha 2.7.** Dopravní hlídka kontroluje projíždějící vozy. Přitom postupně kontroluje brzdy (mohou být dobré nebo špatné), pneumatiky (zjišťují počet špatných) a stav světel (světla mohou fungovat dobře, špatně nebo vůbec ne). Testování vozu je náhodný pokus. Znázorněte ho pomocí stromu a sestavte prostor výsledků testování.

Mezi náhodnými pokusy, se kterými jsme se setkali, byly pokusy s konečným prostorem výsledků. Především jimi se budeme dále zabývat. Musíme však mít na paměti, že kolem nás je mnoho (a to zajímavých) jevů, které jsou náhodné pokusy s nekonečně mnoha možnými výsledky.