

O náhodě a pravděpodobnosti

1. kapitola. Náhodný pokus a prostor jeho výsledků

In: Adam Płocki (author); Eva Macháčková (translator); Vlastimil Macháček (illustrator): O náhodě a pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 5–13.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404030>

Terms of use:

© Adam Flocki, 1982

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NÁHODNÝ POKUS A PROSTOR JEHO VÝSLEDKŮ

1.1. NÁHODA

Často slyšíme, že „to byla osudná náhoda“, že „někdo někoho náhodou potkal“. Říkáme, že „ve sportce byla tažena čísla“.

Před začátkem zápasu soupeři losují o hřiště. Co to znamená, že losují? A jak to dělají?

Často, když chceme nestranným způsobem vybrat jednu ze dvou možností, hodíme si mincí. Mince se hodí do výšky tak, aby se ve vzduchu několikrát obrátila, než dopadne na zem. Po dopadu je nahoře buď strana se státním znakem, tradičně nazývaná „lev“ (tento výsledek označme písmenem *l*), nebo druhá strana, „panna“ (výsledek označme *p*). Můžeme před hodem předpovědět jeho výsledek? Děti někdy hrají hru „panna nebo lev“. Nejdříve si vsadí na pannu nebo na lva; pak se hází. Vyhraje ten, komu se předpověď podařila (sázka je předpověď, jak to dopadne).

Hodíme-li mincí a zjistíme, která strana je nahoře, provedli jsme určitý pokus. Věnujme mu trochu pozornosti. Můžeme zkoumat zákony, které určují chování mince od okamžiku jejího vyhození až po dopad. Na chování mince má jistě vliv rychlost dodaná minci, teplota prostředí, výška, proudění vzduchu atd. Fyzikálních zákonů, které chování mince ovlivňují, je mnoho. A jsou velice složité. Malé změny rychlosti nebo

výšky způsobí velké změny konečného výsledku. V důsledku velkého množství složitých zákonů, jimiž se pohyb mince řídí, je zcela nemožné předpovědět výsledek hodů. Je-li mnoho viníků, bývá vina svalována na jednoho. My řekneme, že chování mince se řídí náhodou, která také rozhoduje o výsledku hodů. Budeme říkat, že výsledek hodů je *náhodný*.

Vzpomeňte si, jak se hraje na fanty. Osoba, která vytahuje fanty z krabice, má zavázané oči. Obsah krabice je dobře promíchán. Nedají-li se fanty rozeznat hmatem, je výběr fantu poslepu náhodný. Takovéto vytažování je *náhodný výběr*.

Podobně vylovení ryby z rybníka je náhodný výběr. O tom, která ryba zabere, rozhoduje tolik okolností, že můžeme krátce říci, že o tom rozhoduje náhoda.

Při různých hrách se užívá hrací kostka. Takovou kostkou se hází a hráči pozorují, která stěna se po hodu objeví nahoře. Podobně jako při házení mincí rozhoduje i zde o výsledku náhoda.

1.2. NÁHODNÝ POKUS

Hod mincí, vytažení fantu, vylovení ryby, hod kostkou jsou jednoduché příklady navzájem podobných pokusů. O výsledku každého z nich rozhoduje náhoda. Takové pokusy nazveme *náhodné pokusy*.

Rozhlédneme-li se kolem sebe pozorně, nebude nám dělat potíže všimnout si jevů nebo pokusů, které jsou náhodné.

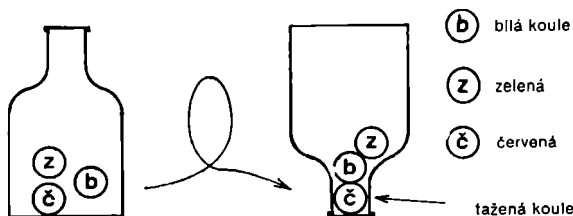
Příklad 1.1. (Pohlaví potomka.) Rodiče čekají dítě. Bude-li to chlapeček nebo holčička, závisí na mnoha okolnostech (jsou to genetické zákony). Říkáme, že

o tom rozhoduje náhoda. Zjištění pohlaví dítěte je zajímavý příklad náhodného pokusu.

Příklad 1.2. (Tah koulí.) V televizi můžeme každý týden sledovat přenos tahu šesti čísel sportky. Složitý přístroj vybírá složitým způsobem po jedné kouli z urny. Složitý mechanismus má divákovi dát představu o tom, jak mnoho zákonitostí určuje výběr té a ne jiné koule. Výběr koule (a tím i jejího čísla) pokládáme za náhodný. Říkáme, že je to *náhodný výběr*.

Ke zmíněnému losování však vůbec není tak důmyslný mechanismus zapotřebí. Stačí k tomu v podstatě stejný, ale konstrukčně mnohem jednodušší přístroj. Vezměme si láhev a několik stejně velkých kuliček s průměrem o něco menším, než je průměr hrdla. Kuličky, ze kterých má být jedna vytažena, nasypeme do láhve. Láhev zazátkujeme, několikrát s ní zatřepeme a rychle ji obrátíme dnem vzhůru. O tom, která z kuliček spadne do hrdla jako první, rozhodne náhoda. Láhev s kuličkami budeme dále nazývat *přístroj pro tah koulí*.

Ve sportce se táhne koulí několik. Tažená koule se už dalšího tahu neúčastní. Mluvíme o *náhodném výběru bez vracení*. Kdyby se několikrát táhlo po jedné kouli, ale

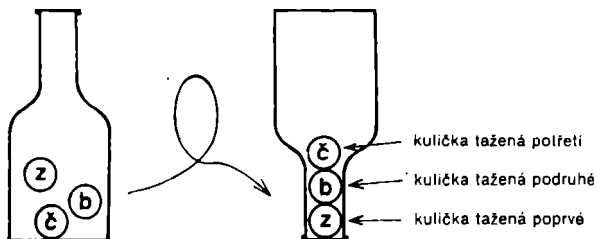


Obr. 1.1. Přístroj pro tah koulí

tažená koule se vždy vracela zpět do urny, šlo by o *náhodný výběr s vracením*.

Přístroj pro tah koulí, který známe z obr. 1.1, můžeme použít k trojímu výběru s vracením. Zopakujeme-li třikrát protřepání a zjištění kuličky, která spadla do hrdla jako první, dostaneme výsledek trojího výběru jedné koule s vracením.

Prodlužme hrdlo láhve skleněnou trubičkou tak dlouhou, aby se do ní vešly tři kuličky. Zatřepeme lahvi a pak ji rychle obraťme dnem vzhůru. Kuličky spadnou v určitém pořadí do trubičky. Tu, která spadne jako první, budeme považovat za kuličku, která byla tažena jako první. Kuličku, která za ní bude v trubičce bezprostředně následovat, budeme považovat za kuličku taženou při druhém výběru ze zbylých kuliček atd. (obr. 1.2).



Obr. 1.2. Přístroj pro trojí tah bez vracení koulí do urny

Příklad 1.3. (Pečení bochánků s rozinkami.) Do těsta nasykali 100 rozinek. Těsto dobře promísili a napekli z něho 100 bochánků. Rozinky se do jednotlivých bochánků dostaly náhodně. O tom, kolik rozinek se dostalo do určitého bochánku, rozhodla náhoda. Zkoumání

rozmístění rozinek v bocháncích je pěkný příklad náhodného pokusu. K tomuto příkladu se ještě vrátíme.

Příklad 1.4. (Střelba do terče.) Střelec střílí do terče. O tom, který bod zasáhne, rozhoduje (ať je střelec sebelepší) náhoda. Střelba je také příklad náhodného pokusu.

Některé náhodné pokusy jsou jednoduché (tah jedné koule, hod mincí), jiné probíhají na etapy (trojí výběr koule, dvojitý hod mincí).

1.8. URNY, KOSTKY, RULETY

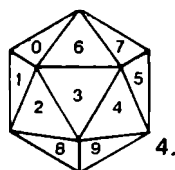
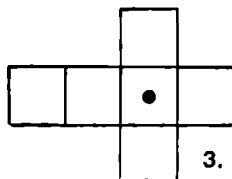
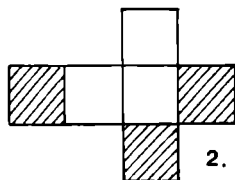
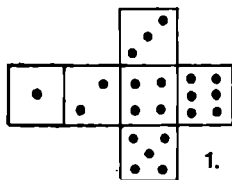
Při našich schůzkách s pravděpodobností budou hrát důležitou úlohu různé kostky a různé urny. Teorii pravděpodobnosti každý spojuje s házením kostkou, s tažením jedné nebo několika koulí z urny, a také s ruletou. Ruleta je kruhový terč, kolem jehož středu se volně otáčí ručička (šipka). Terč rulety je většinou rozdělen na části. Ručičku roztočíme, aby vykonala několik otáček. Pozorujeme, ve které části terče se ručička zastaví. Řekneme, že ruleta vybrala tuto část. To je další příklad náhodného pokusu.

Ruletu si sami snadno zhotovíte pomocí špendlíku, roztažené sponky a kroužku z tuhého papíru (terč).

Kromě různých kostek se šesti stěnami budeme při našich schůzkách s pravděpodobností užívat také pravidelného dvacetistěnu. Jeho stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Očíslujeme si je. Do dvou vepíšeme číslíci 0. Do jiných dvou číslíci 1 atd., až do posledních dvou číslíci 9.

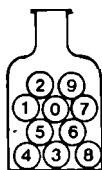
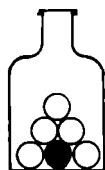
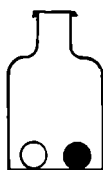
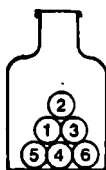
Při našich dobrodružstvích s pravděpodobností bude-

Kostky



pravidelný
dvacetistěn

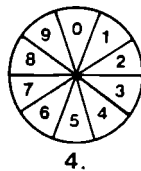
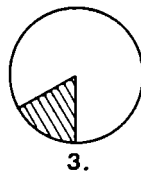
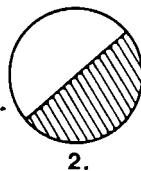
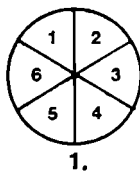
Urny



○
bílá koule b

●
černá koule č

Rulety



Obr. 1.3,

me užívat různé kostky, urny a rulety. Pro naši potřebu si je očíslováme (obr. 1.3).

1.4. PROSTOR VÝSLEDKŮ

Hod mincí mohl skončit jedním ze dvou možných výsledků. Zakódovali jsme je písmeny l a p . I nadále zde vylučujeme možnost, že by mince dopadla na hranu. Kdyby k tomu došlo, řekneme, že se hod nepodařil a že k náhodnému pokusu nedošlo.

Při hodu mincí se dá těžko předpovědět, jaký bude výsledek, ale určitě to bude právě jedna z možností l nebo p . Množina $\{l, p\}$ je množinou všech a priori*) možných výsledků hodu mincí.

Házejme kostkou č. 1 a pozorujme, kterou stranou padne nahoru. Výsledek se dá zakódovat např. obrázkem té horní stěny. Při tomto způsobu kódování dostaneme následující množinu všech možných výsledků:

$$\{\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}\}.$$

Kostku č. 3 budeme dále nazývat s -kostka. Má pět stejných prázdných stěn bez teček a jednu s tečkou. Hod s -kostkou může vést k jednomu ze dvou možných výsledků: \square nebo $\square \cdot$. Množina všech možných výsledků hodu s -kostkou a zjištění horní stěny je

$$\{\square, \square \cdot\}.$$

Jednotlivé výsledky náhodných pokusů budeme určitým způsobem kódovat. Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu nazveme *prostorem výsledků* a označíme písmenem Ω (případně s indexy).

*) a priori — předem, jen na základě úvahy

Zjištění pohlaví narozeného dítěte vede ke dvěma výsledkům. Buď se narodí chlapec (tento výsledek zakódujeme symbolem ♂), nebo se narodí děvče (tento výsledek zakódujeme symbolem ♀). Kódovací symboly jsme přejali od genetiků. Prostor výsledků tohoto zjišťování je množina

$$\Omega = \{\text{♀}, \text{♂}\}.$$

Příklad 1.5. Před tahem sportky se vyplňuje sázka přeškrtnutím šesti ze 49 čísel. Obr. 1.4 znázorňuje část sázky s dvěma sázkami. Vyplněná sázka představuje výsledek výběru bez vracení šesti ze 49 čísel, na která hráč vsadil. Tah šesti ze všech 49 čísel je náhodný pokus. Jeho výsledky je možno kódovat řádně vyplně-

ŠPORTKA A I. a II. tah		I.-6.-Kčs						II.-6.-Kčs						III.-6.-Kčs																																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
				X				X					X																																					
		X											X																																					
				X																																														
					X																																													
						X																																												
							X																																											
								X																																										
									X																																									
										X																																								
											X																																							
												X																																						
													X																																					
														X																																				
															X																																			
																X																																		
																	X																																	
																		X																																

863179 ZS

SAZKA podnik na organizovanie športových stávk, Praha

Obr. 1.4. Vyplněná sázka sportky jako kód jednoho výsledku náhodného výběru šesti ze 49 čísel

nými sázenkami. Vyplněná sázenka je kódem (šifrou) šestiprvkové podmnožiny (neboli kombinace) množiny 49 čísel. Vzpomeneme-li si na své znalosti z kombinatoriky, okamžitě řekneme, kolik je možných výsledků tohoto pokusu. Počet všech prvků prostoru výsledků je zároveň počtem všech jednotlivých sázenek, jimiž lze vyčerpát všechny možné výsledky našeho náhodného pokusu.

Příklad 1.6. Výsledek střelby do terče je možno ztotožnit se zasaženým bodem terče. Jestliže střelec chybil, řekneme, že se nestřílelo. Výsledek střelby je tedy množina všech zásahů do terče. Prostor výsledků je množina všech bodů terče (stručně řečeno terč). Prostor výsledků má v tomto případě nekonečně mnoho prvků.

V další kapitole se naučíme kódovat výsledky a určovat prostory výsledků v různých případech náhodných pokusů.

Úloha 1.1. Uveďte příklady náhodných pokusů, s nimiž jste se setkali.

Úloha 1.2. Vyplněná sázenka sazký je také kódem výsledku určitého náhodného pokusu. O jaký pokus jde? Kolik prvků má prostor výsledků? Jak se v kombinatorice nazývají takto zakódované výsledky?